Cálculo

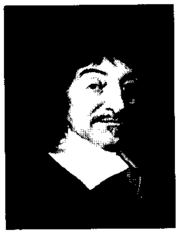
NOVENA EDICIÓN

PEARSON
Prentice Hall

Purcell Varberg Rigdon

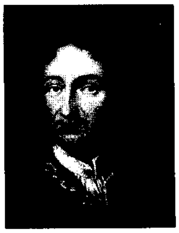
1600 **1700**

Descartes



Newton

Leibniz



Euler

J. Kepler (1571-1630)

R. Descartes (1596-1650)

B. Pascal (1623-1662)

I. Newton (1642-1727)

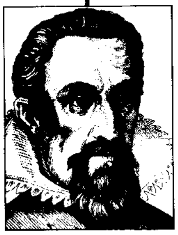
G. Leibniz (1646-1716)

L'Hôpital (1661-1704)

J. Bernoulli (1667-1748)

L. Euler (1707-1783)

M. Agnesi (1718-1799)



Kepler

Pascal

L'Hôpital

Bernoulli

Contribuidores del Cálculo

> [El cálculo es] el resultado de una dramática lucha intelectual que ha durado los últimos veinticinco siglos.
>
> —*Richard Courant*

1609 Leyes de Kepler del movimiento planetario

1637 Geometría analítica de Descartes

1665 Newton descubre el cálculo

1696 Primer texto de cálculo (L'Hôpital)

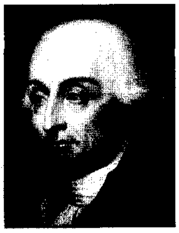
1728 Euler introduce e

1800 **1900**

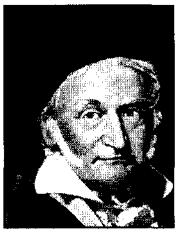
Otros contribuidores

Pierre de Fermat (1601-1665)
Michel Rolle (1652-1719)
Brook Taylor (1685-1731)
Colin Maclaurin (1698-1746)
Thomas Simpson (1710-1761)
Pierre-Simon de Laplace (1749-1827)
George Green (1793-1841)
George Gabriel Stokes (1819-1903)

Lagrange

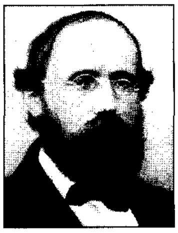


Gauss



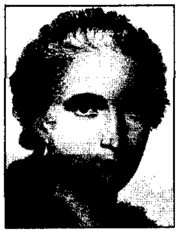
Cauchy

Riemann



Lebesgue

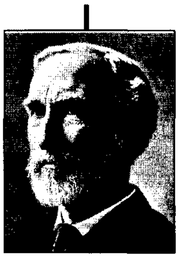
J. Lagrange (1736-1813)
C. Gauss (1777-1855)
A. Cauchy (1789-1857)
K. Weierstrass (1815-1897)
G. Riemann (1826-1866)
J. Gibbs (1839-1903)
S. Kovalevsky (1850-1891)
H. Lebesgue (1875-1941)



Agnesi

Weierstrass

Kovalevsky



Gibbs

1756 Lagrange inicia su *Mécanique analytique*

1799 Gauss demuestra el teorema fundamental del álgebra

1821 Noción precisa de límite (Cauchy)

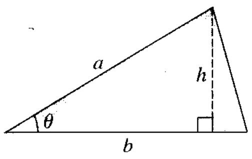
1854 Integral de Riemann

1873 e es trascendental (Hermite)

1902 Integral de Lebesgue

FÓRMULAS DE GEOMETRÍA

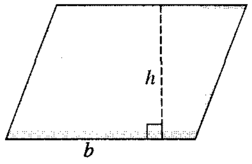
Triángulo



$$\text{Área} = \frac{1}{2}bh$$

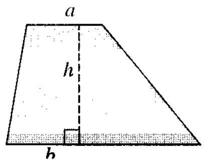
$$\text{Área} = \frac{1}{2}ab\,\text{sen}\,\theta$$

Paralelogramo



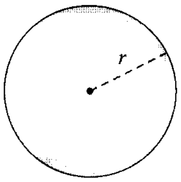
$$\text{Área} = bh$$

Trapecio



$$\text{Área} = \frac{a+b}{2}h$$

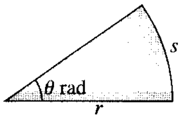
Círculo



$$\text{Circunferencia} = 2\pi r$$

$$\text{Área} = 2\pi r$$

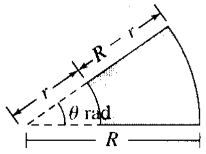
Sector circular



$$\text{Longitud de arco} = r\theta$$

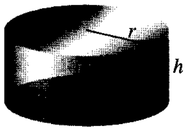
$$\text{Área} = \frac{1}{2}r^2\theta$$

Rectángulo polar



$$\text{Área} = \frac{R+r}{2}(R-r)\theta$$

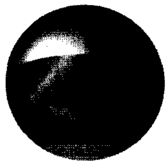
Cilindro circular recto



$$\text{Área lateral} = 2\pi rh$$

$$\text{Volumen} = \pi r^2h$$

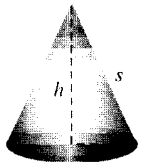
Esfera



$$\text{Área} = 4\pi r^2$$

$$\text{Volumen} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

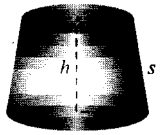
Cono circular recto



$$\text{Área lateral} = \pi rs$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}\pi r^2h$$

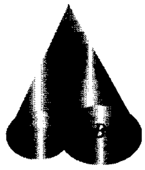
Tronco de un cono circular recto



$$\text{Área lateral} = \pi s(r+R)$$

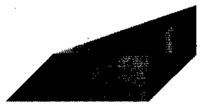
$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}\pi(r^2 + rR + R^2)h$$

Cono general



$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}(\text{área } B)h$$

Cuña



$$\text{Área } A = (\text{área } B)\sec\theta$$

Cálculo

NOVENA EDICIÓN

Esteban Vásquez Fra

Edwin J. Purcell
University of Arizona

Dale Varberg
Hamline University

Steven E. Rigdon
Southern Illinois University Edwardsville

Traducción:

Víctor Hugo Ibarra Mercado
Escuela de Actuaría, Universidad Anáhuac
Escuela Superior de Físico-Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional, México

Revisión técnica:

Linda Margarita Medina Herrera
Natella Antonyan
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
de Monterrey, Campus Ciudad de México

Santos Prado Medina
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Unidad Profesional Zacatenco
Instituto Politécnico Nacional, México

Antonio Merchan Abril
Pontificia Universidad Javeriana de Bogotá, Colombia

PEARSON
Educación®

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

PURCELL, EDWIN J.; VARBERG, DALE;
RIGDON, STEVEN E.

Cálculo

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2007

ISBN: 978-970-26-0919-3
Área: Universitarios

Formato: 21 × 27 cm Páginas: 872

Authorized adaptation from the English language edition, entitled *Calculus, 9e* by *Dale Varberg, Edwin J. Purcell and Steven E. Rigdon* published by Pearson Education, Inc., publishing as PRENTICE HALL, INC., Copyright ©2007. All rights reserved.
ISBN 0131429248

Traducción autorizada de la edición en idioma inglés, *Calculus, 9e* por *Dale Varberg, Edwin J. Purcell y Steven E. Rigdon* publicada por Pearson Education, Inc., publicada como PRENTICE-HALL INC., Copyright ©2007. Todos los derechos reservados.

Esta edición en español es la única autorizada.

Edición en español
Editor: Luis Miguel Cruz Castillo
e-mail: luis.cruz@pearsoned.com
Editora de desarrollo: Claudia Celia Martínez Amigón
Supervisor de producción: Rodrigo Romero Villalobos

Edición en inglés
Acquisitions Editor: *Adam Jaworski*
Editor-in-Chief: *Sally Yagan*
Project Manager: *Dawn Murrin*
Production Editor: *Debbie Ryan*
Assistant Managing Editor: *Bayani Mendoza de Leon*
Senior Managing Editor: *Linda Mihato Behrens*
Executive Managing Editor: *Kathleen Schiaparelli*
Manufacturing Buyer: *Lisa McDowell*
Manufacturing Manager: *Alexis Heydt-Long*
Director of Marketing: *Patrice Jones*
Executive Marketing Manager: *Halee Dinsey*
Marketing Assistant: *Joon Won Moon*
Development Editor: *Frank Purcell*
Editor-in-Chief, Development: *Carol Trueheart*
Art Director: *Heather Scott*
Interior Designer: *Judith Matz-Coniglio*
Cover Designer: *Tamara Newnam*
Art Editor: *Thomas Benfatti*
Creative Director: *Juan R. López*
Director of Creative Services: *Paul Belfanti*
Manager, Cover Visual Research & Permissions: *Karen Sanatar*
Director, Image Resource Center: *Melinda Reo*
Manager, Rights and Permissions: *Zina Arabia*
Manager, Visual Research: *Beth Brenzel*
Image Permission: *Vickie Menanteaux*
Cover Photo: *Massimo Listri/Corbis; Interior view of Burj Al Arab Hotel, Dubai, United Arab Emirates*

NOVENA EDICIÓN, 2007

D.R. © 2007 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Atlacomulco 500-5to. piso
Industrial Atoto
53519 Naucalpan de Juárez, Edo. de México
E-mail: editorial.universidades@pearsoned.com

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031

Prentice Hall es una marca registrada de Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

El préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar requerirá también la autorización del editor o de sus representantes.

PEARSON
Educación®

ISBN 10: 970-26-0919-4
ISBN 13: 978-970-26-0919-3

Impreso en México. *Printed in Mexico.*
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 10 09 08 07

A
Pat, Chris, Mary y Emily

Agradecimientos

Agradecemos a todos los profesores que han sido usuarios leales y han impartido la materia de Cálculo en los países de habla hispana con el apoyo del reconocido libro de Purcell. Sus valiosos comentarios han servido para enriquecer el desarrollo de la actual edición. Esperamos que con el uso de este texto cumplan satisfactoriamente los objetivos del programa del curso y preparen a sus alumnos para enfrentar los retos actuales dentro del ámbito de las matemáticas. En especial deseamos agradecer el apoyo y retroalimentación que nos han dado los siguientes profesores:

MÉXICO
Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional Autónoma de México
Gustavo Rocha Belhan
Carlos Crail Corzas
Instituto Tecnológico de Estudios Superiores Monterrey, campus Chihuahua
Carlos Manzanera Quintana
Instituto Tecnológico de Ciudad Juárez
José Jiménez Jiménez
Instituto Tecnológico de Chihuahua
Rubén Prócoro Hernádez Rivera
Velia Pérez González

COLOMBIA
Universidad de los Andes, Bogotá
Raquel Rodríguez
Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga
Luis Carlos Oñate
Universidad Autónoma de Bucaramanga
Nohora Nájera
Universidad Sergio Arboleda, Bogotá
Francisco Soler
Universidad Javeriana, Bogotá
Eddy Herrera
Héctor Linares
Universidad Piloto de Colombia, Bogotá
Carlos Garzón
Universidad Distrital, Bogotá
Zulima Ortiz
Universidad de Antioquia, Medellín
José Luis Pérez
Jesús Del Valle
Walter Díaz

PERÚ
Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas
Manuel Álvarez Blanco
Agustín Curo Cubas
José Cuevas González
Eduardo Fernandini Capurro
Alberto Mejía Manrique
Pontificia Universidad Católica del Perú
Miguel Ángel Gonzaga Ramírez
Universidad de Lima
César Vialardi Sacín

VENEZUELA
Universidad Simón Bolívar (USB)
María Rosa Brito
Sabrina Harbin
Universidad de los Andes (ULA)
María Ferrer
Cecilia de Villegas
Universidad del Tachira (UNET)
Ángela Torres
Omar Suárez
Universidad Rafael Belloso Chapín (URBE)
Yadira Matos
Jasmín Matos

Contenido

Prefacio xi

0 Preliminares 1

0.1 Números reales, estimación y lógica 1
0.2 Desigualdades y valor absoluto 8
0.3 El sistema de coordenadas rectangulares 16
0.4 Gráficas de ecuaciones 24
0.5 Funciones y sus gráficas 29
0.6 Operaciones con funciones 35
0.7 Funciones trigonométricas 41
0.8 Repaso del capítulo 51
Problemas de repaso e introducción 54

1 Límites 55

1.1 Introducción a límites 55
1.2 Estudio riguroso (formal) de límites 61
1.3 Teoremas de límites 68
1.4 Límites que involucran funciones trigonométricas 73
1.5 Límites al infinito; límites infinitos 77
1.6 Continuidad de funciones 82
1.7 Repaso del capítulo 90
Problemas de repaso e introducción 92

2 La derivada 93

2.1 Dos problemas con el mismo tema 93
2.2 La derivada 100
2.3 Reglas para encontrar derivadas 107
2.4 Derivadas de funciones trigonométricas 114
2.5 La regla de la cadena 118
2.6 Derivadas de orden superior 125
2.7 Derivación implícita 130
2.8 Razones de cambio relacionadas 135
2.9 Diferenciales y aproximaciones 142
2.10 Repaso del capítulo 147
Problemas de repaso e introducción 150

3 Aplicaciones de la derivada 151

3.1 Máximos y mínimos 151
3.2 Monotonía y concavidad 155
3.3 Extremos locales y extremos en intervalos abiertos 162
3.4 Problemas prácticos 167
3.5 Graficación de funciones mediante cálculo 178
3.6 El teorema del valor medio para derivadas 185
3.7 Solución numérica de ecuaciones 190
3.8 Antiderivadas 197
3.9 Introducción a ecuaciones diferenciales 203
3.10 Repaso del capítulo 209
Problemas de repaso e introducción 214

4 La integral definida 215
4.1 Introducción al área 215
4.2 La integral definida 224
4.3 El Primer Teorema Fundamental del Cálculo 232
4.4 El Segundo Teorema Fundamental del Cálculo y el método de sustitución 243
4.5 El teorema del valor medio para integrales y el uso de la simetría 253
4.6 Integración numérica 260
4.7 Repaso del capítulo 270
Problemas de repaso e introducción 274

5 Aplicaciones de la integral 275
5.1 El área de una región plana 275
5.2 Volúmenes de sólidos: capas, discos, arandelas 281
5.3 Volúmenes de sólidos de revolución: cascarones 288
5.4 Longitud de una curva plana 294
5.5 Trabajo y fuerza de un fluido 301
5.6 Momentos y centro de masa 308
5.7 Probabilidad y variables aleatorias 316
5.8 Repaso del capítulo 322
Problemas de repaso e introducción 324

6 Funciones trascendentales 325
6.1 La función logaritmo natural 325
6.2 Funciones inversas y sus derivadas 331
6.3 La función exponencial natural 337
6.4 Funciones exponencial y logarítmica generales 342
6.5 Crecimiento y decaimiento exponenciales 347
6.6 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden 355
6.7 Aproximaciones para ecuaciones diferenciales 359
6.8 Funciones trigonométricas inversas y sus derivadas 365
6.9 Funciones hiperbólicas y sus inversas 374
6.10 Repaso del capítulo 380
Problemas de repaso e introducción 382

7 Técnicas de integración 383
7.1 Reglas básicas de integración 383
7.2 Integración por partes 387
7.3 Algunas integrales trigonométricas 393
7.4 Sustituciones para racionalizar 399
7.5 Integración de funciones racionales por medio de fracciones parciales 404
7.6 Estrategias de integración 411
7.7 Repaso del capítulo 419
Problemas de repaso e introducción 422

8 Formas indeterminadas e integrales impropias 423

8.1 Formas indeterminadas del tipo 0/0 423
8.2 Otras formas indeterminadas 428
8.3 Integrales impropias: límites de integración infinitos 433
8.4 Integrales impropias: integrandos infinitos 442
8.5 Repaso del capítulo 446
Problemas de repaso e introducción 448

9 Series infinitas 449

9.1 Sucesiones infinitas 449
9.2 Series infinitas 455
9.3 Series positivas: el criterio de la integral 463
9.4 Series positivas: otros criterios 468
9.5 Series alternantes, convergencia absoluta y convergencia condicional 474
9.6 Series de potencias 479
9.7 Operaciones sobre series de potencias 484
9.8 Series de Taylor y Maclaurin 489
9.9 La aproximación de Taylor para una función 497
9.10 Repaso del capítulo 504
Problemas de repaso e introducción 508

10 Cónicas y coordenadas polares 509

10.1 La parábola 509
10.2 Elipses e hipérbolas 513
10.3 Traslación y rotación de ejes 523
10.4 Representación paramétrica de curvas en el plano 530
10.5 El sistema de coordenadas polares 537
10.6 Gráficas de ecuaciones polares 542
10.7 Cálculo en coordenadas polares 547
10.8 Repaso del capítulo 552
Problemas de repaso e introducción 554

11 Geometría en el espacio y vectores 555

11.1 Coordenadas cartesianas en el espacio tridimensional 555
11.2 Vectores 560
11.3 El producto punto 566
11.4 El producto cruz 574
11.5 Funciones con valores vectoriales y movimiento curvilíneo 579
11.6 Rectas y curvas en el espacio tridimensional 589
11.7 Curvatura y componentes de la aceleración 593
11.8 Superficies en el espacio tridimensional 603
11.9 Coordenadas cilíndricas y esféricas 609
11.10 Repaso del capítulo 613
Problemas de repaso e introducción 616

12 Derivadas para funciones de dos o más variables 617

12.1 Funciones de dos o más variables 617
12.2 Derivadas parciales 624
12.3 Límites y continuidad 629
12.4 Diferenciabilidad 635
12.5 Derivadas direccionales y gradientes 641
12.6 La regla de la cadena 647
12.7 Planos tangentes y aproximaciones 652
12.8 Máximos y mínimos 657
12.9 Método de multiplicadores de Lagrange 666
12.10 Repaso del capítulo 672
Problemas de repaso e introducción 674

13 Integrales múltiples 675

13.1 Integrales dobles sobre rectángulos 675
13.2 Integrales iteradas 680
13.3 Integrales dobles sobre regiones no rectangulares 684
13.4 Integrales dobles en coordenadas polares 691
13.5 Aplicaciones de las integrales dobles 696
13.6 Área de una superficie 700
13.7 Integrales triples en coordenadas cartesianas 706
13.8 Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas 713
13.9 Cambio de variable en integrales múltiples 718
13.10 Repaso del capítulo 728
Problemas de repaso e introducción 730

14 Cálculo vectorial 731

14.1 Campos vectoriales 731
14.2 Integrales de línea 735
14.3 Independencia de la trayectoria 742
14.4 Teorema de Green en el plano 749
14.5 Integrales de superficie 755
14.6 Teorema de divergencia de Gauss 764
14.7 Teorema de Stokes 770
14.8 Repaso del capítulo 773

Apéndice A-1

A.1 Inducción matemática A-1
A.2 Demostración de varios teoremas A-3

Respuestas a problemas con número impar A-7

Índice I-1

Créditos de fotografías C-1

Prefacio

De nuevo, la novena edición de *Cálculo* es una revisión modesta. Se han agregado algunos temas y otros se han reacomodado, pero el espíritu del libro ha permanecido sin alteraciones. Los usuarios de las ediciones precedentes nos han informado del éxito que tuvieron y no tenemos la intención de restarle ventajas a un texto bastante viable.

Para muchos, este libro aún será considerado como un texto tradicional. En su mayoría, se demuestran los teoremas, se dejan como ejercicio o se dejan sin demostrar cuando la comprobación es demasiado difícil. Cuando esto último sucede, tratamos de dar una explicación intuitiva para que el resultado sea plausible, antes de pasar al tema siguiente. En algunos casos, damos un bosquejo de una demostración, en cuyo caso explicamos por qué es un bosquejo y no una demostración rigurosa. El objetivo sigue siendo la comprensión de los conceptos de cálculo. Aunque algunos ven al énfasis en la presentación clara y rigurosa como una distracción para la comprensión del cálculo, nosotros vemos que ambas son complementarias. Es más probable que los estudiantes comprendan los conceptos si los términos se definen con nitidez y los teoremas se enuncian y demuestran claramente.

Un texto breve La novena edición continúa siendo la obra más breve de los principales textos de cálculo exitosos. Hemos tratado de no saturar el texto con temas nuevos y enfoques alternativos. En menos de 800 páginas tratamos la mayor parte de los temas de cálculo; entre ellos, un capítulo preliminar y el material de límites a cálculo vectorial. En décadas recientes, los estudiantes han desarrollado malos hábitos. Desean encontrar el ejemplo resuelto de modo que coincida con el problema de su tarea. Nuestro objetivo con este texto continúa manteniendo al cálculo como un curso centrado en determinadas ideas básicas en torno a palabras, fórmulas y gráficas. La resolución de los conjuntos de problemas, crucial para el desarrollo de habilidades matemáticas, no debe eclipsar el objetivo de la comprensión del cálculo.

Problemas de revisión de conceptos Para alentar a los estudiantes a leer y entender el texto, a cada conjunto de problemas le preceden cuatro cuestiones para completar. Éstas prueban el dominio del vocabulario básico, comprensión de los teoremas y la habilidad para aplicar los conceptos en contextos más sencillos. Los estudiantes deben responder estos cuestionamientos antes de pasar a los problemas siguientes. Fomentamos esto para dar una retroalimentación inmediata; las respuestas correctas se proporcionan al final del conjunto de problemas. Estos puntos también hacen algunas preguntas de examen para ver si los estudiantes han hecho la lectura necesaria y están preparados para la clase.

Problemas de repaso e introducción También hemos incluido un conjunto de problemas de repaso e introducción entre el final de un capítulo y el inicio del siguiente. Muchos de estos problemas ayudan a los estudiantes a repasar temas anteriores antes de iniciar el nuevo capítulo. Por ejemplo.

- Capítulo 3, Aplicaciones de la derivada: se les pide a los estudiantes resolver desigualdades como las que surgen cuando preguntamos en dónde una función es creciente/decreciente o cóncava hacia arriba/hacia abajo.
- Capítulo 7, Técnicas de integración: se les pide a los estudiantes evaluar varias integrales que incluyen el método de sustitución, la única técnica significativa que han aprendido hasta ese momento. La falta de práctica en la aplicación de esta técnica podría significar un desastre en el capítulo 7.
- Capítulo 13, Integrales múltiples: se les pide a los alumnos hacer bosquejos de gráficas de ecuaciones en coordenadas cartesianas, cilíndricas o esféricas. La visualización de regiones en los espacios bidimensional y tridimensional es clave en la comprensión de integración múltiple.

Otros problemas de repaso e introducción piden a los estudiantes utilizar lo que ya conocen para obtener una ventaja en el capítulo siguiente. Por ejemplo,

- Capítulo 5, Aplicaciones de la integral: se les pide a los estudiantes determinar la longitud de un segmento de línea entre dos funciones, exactamente la habilidad que se requiere en el capítulo para realizar lo que llamaremos *rebanar, aproximar* e *integrar*. Además, se les pide a los estudiantes determinar el volumen de un disco pequeño, una arandela y un cascarón. Al haber resuelto esto antes de iniciar el capítulo los estudiantes estarán mejor preparados para comprender la idea de *rebanar, aproximar* e *integrar,* y su aplicación para calcular volúmenes de sólidos de revolución.

- Capítulo 8, Formas indeterminadas e integrales impropias: se les pide a los estudiantes calcular el valor de una integral como $\int_0^a e^{-x}\,dx$, para $a = 1, 2, 4, 8, 16$. Esperamos que los estudiantes resuelvan un problema como éste y se den cuenta de que conforme a crece, el valor de la integral se aproxima a 1; de este modo se establece la idea de integrales impropias. Antes del capítulo, hay problemas similares que incluyen sumas sobre series infinitas.

Sentido numérico El sentido numérico continúa desempeñando un papel importante en el texto. Todos los estudiantes de cálculo cometen errores numéricos al resolver problemas, pero aquellos con sentido numérico reconocen una respuesta absurda y tratan de resolver nuevamente el problema. Para impulsar y desarrollar esta importante habilidad, hemos enfatizado el proceso de estimación. Sugerimos cómo hacer estimaciones mentalmente y cómo llegar a las respuestas numéricas aproximadas. En el texto hemos aumentado el uso de esta característica mediante el símbolo $\boxed{\approx}$, en donde se hace una aproximación numérica. Esperamos que los estudiantes hagan lo mismo, en especial en los problemas con el icono $\boxed{\approx}$.

Uso de tecnología Muchos problemas en la novena edición están marcados con uno de los siguientes símbolos:

$\boxed{\text{C}}$ indica que sería útil una calculadora científica ordinaria.

$\boxed{\text{GC}}$ indica que se requiere una calculadora gráfica.

$\boxed{\text{CAS}}$ indica que se necesita un sistema de álgebra computacional.

Los proyectos de tecnología que estaban al final de los capítulos en la octava edición, ahora están disponibles en la Web en archivos PDF.

Cambios en la novena edición La estructura básica y el espíritu primordial del texto han permanecido sin cambio. A continuación están los cambios más importantes en la novena edición.

- Hay un conjunto de problemas de repaso e introducción entre el final de un capítulo y el inicio del siguiente.
- El capítulo preliminar, ahora denominado capítulo 0, se ha condensado. Los temas de "precálculo" (que en la octava edición estaban al inicio del capítulo 2) se colocaron ahora en el capítulo 0. En la novena edición, el capítulo 1 inicia con límites. Todo lo que se requiera estudiar del capítulo 0 depende de los antecedentes de los estudiantes y variará de una institución educativa a otra.
- Las secciones sobre antiderivadas y una introducción a ecuaciones diferenciales se han cambiado al capítulo 3. Esto permite claridad entre los conceptos de "tasa de cambio" y "acumulación", ya que ahora el capítulo 4 inicia con área, seguida de inmediato con la integral definida y los teoremas fundamentales del cálculo. "La experiencia del autor ha sido que muchos estudiantes de primer año se equivocan al hacer una distinción clara entre los diferentes conceptos de la integral indefinida (o antiderivada) y la integral definida como el límite de una suma". Esto fue en la primera edición, publicada en 1965, y sigue siendo cierto ahora. Esperamos que al separar estos temas se atraerá la mirada a la distinción.

- Probabilidad y presión de fluidos se agregó al capítulo 5, Aplicaciones de la integral. Enfatizamos que los problemas de probabilidad son tratados como problemas de masa a lo largo de una recta. El centro de masa es la integral de x por la densidad, y la esperanza en probabilidad es la integral de x por la densidad (probabilidad).
- El material sobre secciones cónicas se ha resumido de cinco secciones a tres. Los estudiantes han visto mucho (si no es que todo) de este material en sus cursos de precálculo.
- Los vectores se han consolidado en un solo capítulo. En el capítulo 13 de la octava edición se estudiaron vectores en el plano y en el 14, vectores en el espacio. Con este enfoque, repetíamos varios temas en el capítulo 14; por ejemplo, el producto punto y la curvatura. El enfoque en la novena edición trata de estudiar una sola vez los vectores. La mayor parte de la presentación se hace en términos de vectores en el espacio, aunque señalamos cómo funcionan los vectores en el plano. El contexto de un problema debe indicar si son necesarios los vectores en el plano o en el espacio.
- Hay ejemplos y un ejercicio sobre las leyes de Kepler del movimiento planetario. El material sobre vectores termina en la deducción de las leyes de Kepler a partir de la ley de Newton de la gravitación. Deducimos la segunda y tercera leyes de Kepler en los ejemplos, y dejamos como ejercicio la primera ley. En esta práctica, se guía a los estudiantes a través de los pasos, (a) a (l), de la deducción.
- El capítulo 13, Integrales múltiples, ahora finaliza con una sección sobre cambio de variables en integrales múltiples mediante el jacobiano.
- Las secciones sobre métodos numéricos se han colocado en lugares apropiados a lo largo del texto. Por ejemplo, la sección sobre la resolución de ecuaciones de forma numérica se ha convertido en la sección 3.7, la integración numérica es la sección 4.6; las aproximaciones para ecuaciones diferenciales se convirtieron en la sección 6.7, y la aproximación de Taylor para una función ahora es la sección 9.9.
- El capítulo sobre ecuaciones diferenciales se ha eliminado, pero está disponible para los usuarios en la Web. El texto ya tiene muchas secciones sobre ecuaciones diferenciales, incluyendo campos de pendientes y el método de Euler.
- El número de preguntas de conceptos se ha incrementado de manera significativa. Muchos problemas más preguntan al estudiante acerca de gráficas. También hemos aumentado el uso de métodos numéricos, tal como el método de Newton y la integración numérica, en problemas que no pueden tratarse de manera analítica.

Agradecimientos Quisiera agradecer al equipo de Prentice Hall, incluyendo a Adam Jaworski, Eric Franck, Dawn Murrin, Debbie Ryan, Bayani deLeon, Sally Yagan, Halee Dinsey, Patrice Jones, Heather Scott y Thomas Benfatti por su apoyo y paciencia. También deseo agradecer a quienes leyeron el manuscrito cuidadosamente, entre ellos, Frank Purcell, Brad Davis, Pat Daly (compañía Paley) y Edith Baker (Writewith, Inc.). Tengo una gran deuda de gratitud con Kevin Bodden y Christopher Rigdon, quienes trabajaron sin descanso en la preparación de los manuales de soluciones, y con Bárbara Kniepkamp y Brian Rife por la preparación de las respuestas del final del libro. Además, quiero agradecer a los profesores de la Southern Illinois University Edwardsville (y de otros lugares), en especial a George Pelekanos, Rahim Karimpour, Krzysztof Jarosz, Alan Wheeler y Paul Phillips, por sus valiosos comentarios.

También agradezco a los siguientes profesores por su cuidadosa revisión y útiles comentarios durante la preparación de la novena edición.

Fritz Keinert, Iowa State University
Michael Martin, Johnson County Community College
Christopher Johnston, University of Missouri-Columbia
Nakhle Asmar, University of Missouri-Columbia
Zhonghai Ding, University de Nevada Las Vegas
Joel Foisy, SUNY Potsdam
Wolfe Snow, Brooklyn College
Ioana Mihaila, California State Polytechnic University, Pomona
Hasan Celik, California State Polytechnic University

Jeffrey Stopple, University of California, Santa Barbara
Jason Howell, Clemson University
John Goulet, Worcester Polytechnic Institute
Ryan Berndt, The Ohio State University
Douglas Meade, University of South Carolina
Elgin Johnston, Iowa State University
Brian Snyder, Lake Superior State University
Bruce Wenner, University of Missouri-Kansas City
Linda Kilgariff, University of North Carolina en Greensboro
Joel Robbin, University of Wisconsin-Madison
John Johnson, George Fox University
Julie Connolly, Wake Forest University
Chris Peterson, Colorado State University
Blake Thornton, Washington University en Saint Louis
Sue Goodman, University of North Carolina-Chapel Hill
John Santomos, Villanova University

Por último, agradezco a mi esposa Pat y a mis hijos Chris, Mary y Emily por tolerar todas las noches y fines de semana que estuve en la oficina.

S. E. R.
srigdon@siue.edu
Southern Illinois University Edwardsville

RECURSOS PARA LOS PROFESORES (EN INGLÉS)

Distribución de recursos para el profesor

Todos los recursos para el profesor pueden descargarse del sitio Web **www.pearsoneducacion.net/purcell.** Seleccione "Browse our catalog", luego dé clic en "Mathematics", seleccione su curso y elija su texto. En "Resources", en el lado izquierdo, elija "instructor" y el complemento que necesita descargar. Se le pide que realice un registro antes de que pueda completar este proceso.

- ***TestGen***
  Crea con facilidad exámenes a partir de secciones del texto. Las preguntas se generan con un algoritmo que permite versiones ilimitadas. Edite problemas o genere los propios.
- ***Archivo con preguntas de examen***
  Un banco de exámenes obtenidos de TestGen.
- ***Diapositivas en PowerPoint***
  Son diapositivas que se pueden editar por completo y están apegadas al texto. Pueden usarse para proyectos en clase o como un website para un curso en línea.
- ***Manual de soluciones para el profesor***
  Soluciones totalmente desarrolladas de todos los ejercicios del libro y los proyectos del capítulo.
- ***Proyectos de tecnología***
- ***Capítulo 15, Ecuaciones diferenciales***
  El capítulo completo está disponible en PDF para descargarlo.

MathXL®

MathXL® es un poderoso sistema en línea para tareas, tutoriales y asignaciones que acompaña a su libro de texto. Los instructores pueden crear, editar y asignar tareas y exámenes en línea mediante ejercicios generados por medio de un algoritmo y que estén correlacionados al nivel de objetivo para el texto. El trabajo del estudiante es seguido en un registro de avance. Los estudiantes pueden hacer exámenes de capítulo y recibir planes de estudio personalizados con base en sus resultados. El plan de estudio diagnostica las debilidades y vincula a los estudiantes con ejercicios por objetivos que necesitan. Además, los estudiantes pueden tener acceso a videoclips de los ejercicios seleccionados. MathXL® está disponible para quienes adopten el libro y estén cualificados. Para mayor información, visite nuestro sitio Web en **www.pearsoneducacion.net/purcell**

MyMathLab

MyMathLab es un curso en línea personalizable, de texto específico, para sus libros. MyMathLab está sustentado por el ambiente en línea de enseñanza y aprendizaje CourseCompass™ de Pearson Educación, y por MathXL® nuestro sistema de tareas, tutoriales y evaluación en línea. MyMathLab le proporciona las herramientas necesarias para poner todo o parte de su curso en línea, si sus estudiantes están en un laboratorio o trabajando en casa.

MyMathLab proporciona un conjunto rico y flexible de materiales para el curso, con la característica que los ejercicios de respuesta abierta son generados de manera algorítmica para práctica ilimitada. Los estudiantes pueden utilizar las herramientas en línea, tales como clases en video y un libro de texto en multimedia para mejorar su desempeño. Los instructores pueden utilizar los administradores de tareas y exámenes de MyMathLab para seleccionar y asignar ejercicios en línea relacionados con el libro, y pueden importar exámenes de TestGen para agregar flexibilidad. El único archivo de calificaciones —diseñado específicamente para matemáticas— lleva un registro automático de tareas y resultados de exámenes de los estudiantes y le permite al instructor el cálculo de las evaluaciones finales. MyMathLab está disponible para quienes adopten el libro y estén cualificados. Para mayor información, visite nuestro sitio Web en **www.pearsoneducacion.net/purcell**

CAPÍTULO 0 Preliminares

0.1 Números reales, estimación y lógica
0.2 Desigualdades y valor absoluto
0.3 El sistema de coordenadas rectangulares
0.4 Gráficas de ecuaciones
0.5 Funciones y sus gráficas
0.6 Operaciones con funciones
0.7 Funciones trigonométricas
0.8 Repaso del capítulo

0.1

Números reales, estimación y lógica

El cálculo está basado en el sistema de los números reales y sus propiedades. Pero, ¿cuáles son los números reales y cuáles son sus propiedades? Para responder, comenzamos con algunos sistemas numéricos más sencillos.

Los enteros y los números racionales Los números más sencillos de todos son los **números naturales,**

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

Con ellos podemos *contar* nuestros libros, nuestros amigos y nuestro dinero. Si incluimos a sus negativos y al cero, obtenemos los **enteros**

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Cuando *medimos* longitud, peso o voltaje, los enteros son inadecuados. Están separados muy lejos uno del otro para dar suficiente precisión. Esto nos lleva a considerar cocientes (razones) de enteros (véase la figura 1), números tales como

$$\frac{3}{4}, \frac{-7}{8}, \frac{21}{5}, \frac{19}{-2}, \frac{16}{2}, \text{ y } \frac{-17}{1}$$

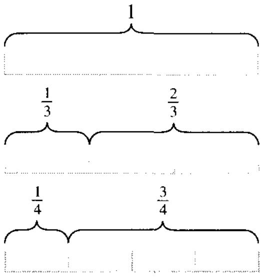


Figura 1

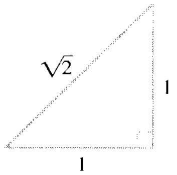


Figura 2

Observe que incluimos $\frac{16}{2}$ y $\frac{-17}{1}$, aunque normalmente los escribiríamos como 8 y -17, ya que son iguales a aquéllos por el significado ordinario de la división. No incluimos $\frac{5}{0}$ o $\frac{-9}{0}$ porque es imposible dar significado a estos símbolos (véase el problema 30). Recuerde siempre que la división entre 0 nunca está permitida. Los números que pueden escribirse en la forma m/n, donde m y n son enteros con $n \neq 0$ son llamados **números racionales**.

¿Los números racionales sirven para medir todas las longitudes? No. Este hecho sorprendente fue descubierto por los antiguos griegos alrededor del siglo V a. C. Ellos demostraron que aunque la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos de longitud 1 mide $\sqrt{2}$ (véase la figura 2), $\sqrt{2}$ no puede escribirse como un cociente de dos enteros (véase el problema 77). Por lo tanto, $\sqrt{2}$ es un número **irracional** (no racional). Así, también lo son $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$, π, y una gran cantidad de números más.

Los números reales Considere todos los números (racionales e irracionales) que pueden medir longitudes, junto con sus negativos y el cero. A éstos les llamamos **números reales**.

Los números reales pueden verse como etiquetas para puntos a lo largo de una recta horizontal. Allí miden la distancia, a la derecha o izquierda (la **distancia dirigida**), de un punto fijo llamado **origen** y marcado con 0 (véase la figura 3). Aunque quizá no

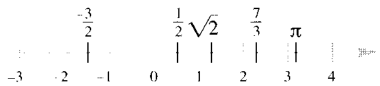


Figura 3

podamos mostrar todas las etiquetas, cada punto tiene un número real único que lo etiqueta. Este número se denomina **coordenada** del punto, y la recta coordenada resultante es llamada **recta real**. La figura 4 sugiere las relaciones entre las series de números analizadas hasta ahora.

Recuerde usted que el sistema de números reales puede ampliarse aún más a los **números complejos**. Éstos son números de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales e $i = \sqrt{-1}$. En este libro rara vez se utilizarán los números complejos. De hecho, si decimos o sugerimos *número* sin adjetivo calificativo alguno, se puede suponer que queremos decir número real. Los números reales son los personajes principales en cálculo.

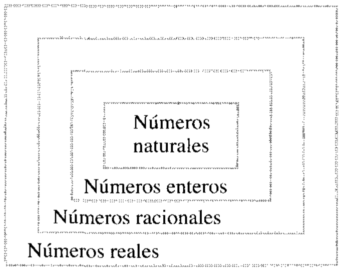


Figura 4

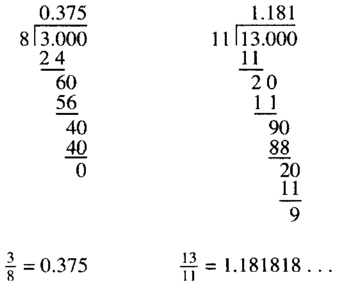


Figura 5

Decimales periódicos y no periódicos

Cualquier número racional puede escribirse como decimal, ya que por definición siempre puede expresarse como el cociente de dos enteros; si dividimos el denominador entre el numerador, obtenemos un decimal (véase la figura 5). Por ejemplo,

$$\frac{1}{2} = 0.5 \qquad \frac{3}{8} = 0.375 \qquad \frac{3}{7} = 0.428571428571428571\ldots$$

Los números irracionales también pueden expresarse en forma decimal. Por ejemplo,

$$\sqrt{2} = 1.4142135623\ldots, \qquad \pi = 3.1415926535\ldots$$

La representación decimal de un número racional o termina (como en $\frac{3}{8} = 0.375$) o se repite hasta el infinito en ciclos regulares (como en $\frac{13}{11} = 1.181818\ldots$). Un poco de experimentación con el algoritmo de la división le mostrará el porqué. (Observe que sólo puede haber un número finito de residuos diferentes). Un decimal que termina puede considerarse como un decimal periódico con ceros que se repiten. Por ejemplo,

$$\frac{3}{8} = 0.375 = 0.3750000\ldots$$

De esta manera, todo número racional puede escribirse como un decimal periódico. En otras palabras, si x es un número racional, entonces x puede escribirse como un decimal periódico. Es notable el hecho de que el recíproco también es verdadero, si x puede escribirse como un decimal periódico, entonces x es un número racional. Esto es obvio en el caso de decimales que terminan (por ejemplo, 3.137 = 3137/1000), y es fácil demostrar para el caso de decimales no periódicos.

EJEMPLO 1 **(Los decimales periódicos son racionales).** Demuestre que $x = 0.136136136\ldots$ representa un número racional.

SOLUCIÓN Restamos x de $1000x$ y luego despejamos x.

$$\begin{aligned} 1000x &= 136.136136\ldots \\ x &= 0.136136\ldots \\ \hline 999x &= 136 \\ x &= \frac{136}{999} \end{aligned}$$

■

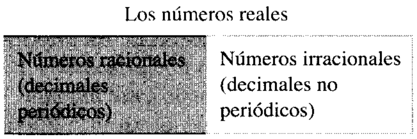

Los números reales
Números racionales (decimales periódicos)
Números irracionales (decimales no periódicos)

Figura 6

Las representaciones decimales de los números irracionales no se repiten en ciclos. Recíprocamente, un decimal no periódico debe representar un número irracional. Así, por ejemplo,

$$0.101001000100001\ldots$$

debe representar un número irracional (observe el patrón de más y más ceros entre los unos). El diagrama en la figura 6 resume lo que hemos dicho.

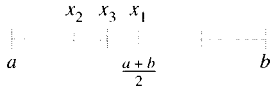


Figura 7

Densidad Entre cualesquiera dos números reales diferentes a y b, no importa qué tan cercanos se encuentren, existe otro número real. En particular, el número $x_1 = (a + b)/2$ es un número real que está a la mitad entre a y b (véase la figura 7). Ya que existe otro número real, x_2, entre a y x_1, y otro número real, x_3, entre x_1 y x_2, y puesto que este argumento puede repetirse *ad infinitum*, concluimos que existe un número infinito de números reales entre a y b. Por lo tanto, no existe cosa como "el menor número real, mayor que 3".

En realidad, podemos decir más. Entre cualesquiera dos números reales distintos existe tanto un número racional como uno irracional. (En el ejercicio 57 le pedimos demostrar que existe un número racional entre cualesquiera dos números reales). De aquí que, por medio del argumento precedente, existe una infinidad de cada uno de ellos (racionales e irracionales).

Una forma en que los matemáticos describen la situación que hemos expuesto es declarar que los números racionales y los números irracionales son **densos** en la recta real. Todo número tiene vecinos racionales e irracionales arbitrariamente cercanos a él.

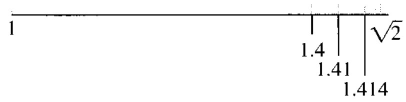


Figura 8

Una consecuencia de la propiedad de densidad es que cualquier número irracional puede aproximarse tanto como se quiera por medio de un número racional; de hecho, por medio de un número racional con una representación decimal finita. Tome como ejemplo $\sqrt{2}$. La sucesión de números racionales 1, 1.4, 1.41, 1414, 1.4142, 1.41421, 1.414213,... avanza constante e inexorablemente hacia $\sqrt{2}$ (véase la figura 8). Avanzando lo suficiente en esta sucesión, podemos estar tan cerca como queramos de $\sqrt{2}$.

Calculadoras y computadoras Actualmente, muchas calculadoras son capaces de realizar operaciones numéricas, gráficas y simbólicas. Durante décadas, las calculadoras han podido realizar operaciones numéricas, como dar aproximaciones decimales a $\sqrt{12.2}$ y 1.25 sen 22°. A principios de los años noventa del siglo pasado las calculadoras podían mostrar la gráfica de casi cualquier función algebraica, trigonométrica, exponencial o logarítmica. Los adelantos recientes permiten a las calculadoras realizar muchas operaciones, como desarrollar $(x - 3y)^{12}$ o resolver $x^3 - 2x^2 + x = 0$. Programas de cómputo como *Mathematica* o *Maple* pueden realizar operaciones simbólicas como éstas, así como una gran cantidad de otras.

Nuestras recomendaciones acerca del uso de una calculadora son:

1. Sepa reconocer cuando su calculadora —o computadora— le proporciona una respuesta exacta y cuando le da una aproximación. Por ejemplo, si pide sen 60°, su calculadora puede darle la respuesta exacta, $\sqrt{3}/2$, o bien puede darle una aproximación decimal, 0.8660254.
2. Por lo regular, y si es posible, se prefiere una respuesta exacta. Esto es especialmente cierto cuando usted debe utilizar el resultado para cálculos posteriores. Por ejemplo, si necesita elevar al cuadrado sen 60°, es más fácil y también más exacto, calcular $\left(\sqrt{3}/2\right)^2 = 3/4$ que calcular 0.8660254^2.
3. Si es posible, en problemas de aplicación proporcione una respuesta exacta, así como una aproximación. Puede verificar frecuentemente si su respuesta es razonable al relacionarla con la descripción del problema, observando su aproximación numérica a la solución.

Muchos problemas en este libro están marcados con un símbolo especial.

C significa utilice una calculadora.

GC significa utilice una calculadora graficadora.

CAS significa utilice un sistema de álgebra computacional.

EXPL significa que el problema le pide explorar e ir más allá de las explicaciones dadas en el texto.

Estimación Dado un problema aritmético complicado, un estudiante descuidado podría presionar algunas teclas en una calculadora y reportar la respuesta sin darse cuenta de que la falta de paréntesis o un "error de dedo" han dado un resultado erróneo. Un estudiante cuidadoso, con un sentido de los números, al presionar las mismas teclas se dará cuenta inmediatamente de que la respuesta es equivocada si es demasiado grande o demasiado pequeña, y volverá a calcularla de manera correcta. Es importante saber cómo se realiza una estimación mental.

EJEMPLO 2 Calcular $\left(\sqrt{430} + 72 + \sqrt[3]{7.5}\right)/2.75$.

SOLUCIÓN Una estudiante juiciosa aproximó lo anterior como $(20 + 72 + 2)/3$ y dijo que la respuesta debería ser cercana a 30. Así, cuando su calculadora dio 93.448 como respuesta, ella desconfió (lo que en realidad había calculado fue $\sqrt{430} + 72 + \sqrt[3]{7.5}/2.75$).

Al calcular otra vez obtuvo la respuesta correcta: 34.434. ■

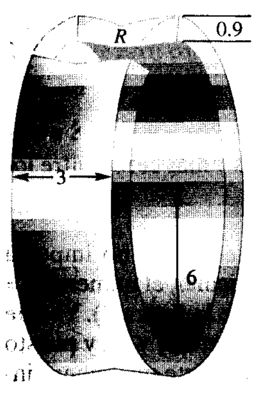


Figura 9

EJEMPLO 3 Suponga que la región sombreada R, que se muestra en la figura 9, se hace girar alrededor del eje x. Estime el volumen del anillo sólido, S, que resulta.

SOLUCIÓN La región R es de casi 3 unidades de largo y 0.9 unidades de altura. Estimamos su área como $3(0.9) \approx 3$ unidades cuadradas. Imagine que el anillo sólido, S, se abre y se aplana para formar una caja de alrededor de $2\pi r \approx 2(3)(6) = 36$ unidades de longitud. El volumen de una caja es el área de su sección transversal por su longitud. Así, estimamos el volumen de la caja como $3(36) = 108$ unidades cúbicas. Si lo calcula y obtiene 1000 unidades cúbicas, necesita verificar su trabajo. ■

≈

En el ejemplo 3 hemos utilizado ≈ para decir "aproximadamente igual a". Utilice este símbolo cuando realice una aproximación. En un trabajo más formal no use este símbolo sin saber de qué tamaño podría ser el error.

Muchos problemas están marcados con este símbolo.

≈ significa una estimación de la respuesta antes de resolver el problema; luego compruebe su respuesta contra esta estimación.

El proceso de *estimación* es simplemente el sentido común combinado con aproximaciones razonables de los números. Lo exhortamos a utilizarlo con frecuencia, particularmente en problemas. Antes de obtener una respuesta precisa, haga una estimación. Si su respuesta está cerca de su estimación, no hay garantía de que su respuesta sea correcta. Por otra parte, si su respuesta y su estimación son demasiado diferentes, debe verificar su trabajo. Probablemente hay un error en su respuesta o en su aproximación. Recuerde que $\pi \approx 3$, $\sqrt{2} \approx 1.4$, $2^{10} \approx 1000$, 1 pie ≈ 10 pulgadas, 1 milla ≈ 5000 pies, etcétera.

Un tema central en este texto es el sentido numérico. Por esto queremos decir la habilidad de trabajar un problema y decir si su solución es razonable para el problema planteado. Un estudiante con buen sentido numérico reconocerá y corregirá de forma inmediata una respuesta que, obviamente, es poco razonable. Para muchos de los ejemplos desarrollados en el texto, proporcionamos una estimación inicial de la solución, antes de proceder a determinar la solución exacta.

Un poco de lógica. En matemáticas, a los resultados importantes se les llama **teoremas**; en este texto usted encontrará muchos teoremas. Los más importantes aparecen con la etiqueta *Teorema* y por lo regular se les dan nombres (por ejemplo, el Teorema de Pitágoras). Otros aparecen en los conjuntos de problemas y se introducen con las palabras *demuestre* o *pruebe que*. En contraste con los axiomas o definiciones, que se admiten, los teoremas requieren ser demostrados.

Muchos teoremas son establecidos en la forma "si P entonces Q", o bien pueden enunciarse otra vez en esta forma. Con frecuencia, abreviamos el enunciado "si P entonces Q" por medio de $P \Rightarrow Q$, que también se lee "P implica Q". Llamamos a P la *hipótesis* y a Q la *conclusión* del teorema. Una prueba (demostración) consiste en demostrar que Q debe ser verdadera siempre que P sea verdadera.

Los estudiantes que inician (incluso, algunos maduros) pueden confundir $P \Rightarrow Q$ con su **recíproco,** $Q \Rightarrow P$. Estas dos proposiciones no son equivalentes. "Si Juan es de Missouri, entonces Juan es americano" es una proposición verdadera, pero su recíproca "si Juan es americano, entonces es de Missouri" podría no ser cierta.

La **negación** de la proposición P se escribe $\sim P$. Por ejemplo, si P es la proposición "está lloviendo", entonces $\sim P$ es la proposición "no está lloviendo". La proposición $\sim Q \Rightarrow \sim P$ se denomina **contrapositiva** (o contrarrecíproca) de la proposición $P \Rightarrow Q$ y es equivalente a $P \Rightarrow Q$. Por "equivalente" queremos decir que $P \Rightarrow Q$ y $\sim Q \Rightarrow \sim P$ son, ambas, verdaderas o ambas falsas. Para nuestro ejemplo acerca de Juan, la contrapositiva de "si Juan es de Missouri, entonces Juan es americano" es "si Juan no es americano, entonces Juan no es de Missouri".

Como consecuencia de que una proposición y su contrapositiva sean equivalentes, podemos demostrar un teorema de la forma "si P entonces Q" demostrando su contrapositiva "si $\sim Q$ entonces $\sim P$". Así, para demostrar $P \Rightarrow Q$, podemos suponer $\sim Q$ e intentar deducir $\sim P$. A continuación está un ejemplo sencillo.

EJEMPLO 4 Demuestre que si n^2 es par, entonces n es par.

Prueba La contrapositiva de este enunciado es "si n no es par, entonces n^2 no es par", que es equivalente a "si n es impar, entonces n^2 es impar". Demostraremos la contrapositiva. Si n es impar, entonces existe un entero k tal que $n = 2k + 1$. Entonces,

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Por lo tanto, n^2 es igual a uno más que el doble de un entero. De aquí que n^2 es impar.

La *ley del tercero excluido* dice: sucede R o $\sim R$, pero no ambos. Cualquier demostración que inicia suponiendo que la conclusión de un teorema es falsa y procede para demostrar que esta suposición conduce a una contradicción se denomina **demostración por contradicción**.

Demostración por contradicción

La demostración por contradicción también lleva el nombre *de reducción al absurdo*. He aquí lo que el gran matemático G. H. Hardy dijo acerca de ella:

> "La reducción al absurdo, que Euclides amaba tanto, es una de las armas más finas del matemático. Es muchísimo más fina que cualquier gambito en el ajedrez; un jugador de ajedrez puede ofrecer el sacrificio de un peón o hasta de una pieza, pero un matemático ofrece el juego".

En ocasiones, necesitaremos otro tipo de demostración denominado **inducción matemática**. Nos alejaríamos demasiado en estos momentos para describir esto, pero hemos dado un estudio completo en el apéndice A.1.

Algunas veces, ambas proposiciones $P \Rightarrow Q$ (si P entonces Q) y $Q \Rightarrow P$ (si Q entonces P) son verdaderas. En este caso escribimos $P \Leftrightarrow Q$, que se lee "P si y sólo si Q". En el ejemplo 4 demostramos que "si n^2 es par, entonces n es par", pero el recíproco "si n es par, entonces n^2 es par" también es verdadero. Por lo tanto, diríamos "n es par si y sólo si n^2 es par".

Orden Los números reales diferentes de cero se separan, en forma adecuada, en dos conjuntos disjuntos, los números reales positivos y los números reales negativos. Este hecho nos permite introducir la relación de orden $<$ (se lee "es menor que") por medio de

$$\boxed{x < y \Leftrightarrow y - x \text{ es positivo}}$$

Acordamos que $x < y$ y $y > x$ significarán lo mismo. Así, $3 < 4$, $4 > 3$, $-3 < -2$ y $-2 > -3$.

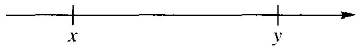
La relación de orden $\leq$ (se lee "es menor o igual a") es prima hermana de $<$. Se define por medio de

$$\boxed{x \leq y \Leftrightarrow y - x \text{ es positivo o cero}}$$

Las propiedades de orden 2, 3 y 4, en el cuadro al margen, se cumplen al reemplazar los símbolos $<$ y $>$ por $\leq$ y $\geq$, respectivamente.

Orden en la recta real

Decir que $x < y$ significa que x está a la izquierda de y en la recta real.



Las propiedades de orden

1. **Tricotomía.** Si x y y son números, exactamente una de las siguientes afirmaciones se cumple:

   $x < y \quad \text{o} \quad x = y \quad \text{o} \quad x > y$
2. **Transitividad.** $x < y$ e $y < z \Rightarrow x < z$.
3. **Suma.** $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$.
4. **Multiplicación.** Cuando z es positiva $x < y \Leftrightarrow xz < yz$. Cuando z es negativa, $x < y \Leftrightarrow xz > yz$.

Cuantificadores Muchas proposiciones matemáticas incluyen una variable x, y la validez de un enunciado depende del valor de x. Por ejemplo, la proposición "$\sqrt{x}$ es un número racional" depende del valor de x; es verdadero para algunos valores de x, tal como $x = 1, 4, 9$, $x = 1, 4, 9, \frac{4}{9}$, y $\frac{10{,}000}{49}$, y falso para otros valores de x, tales como $x = 2, 3, 77$ y π. Algunas proposiciones, tales como "$x^2 \geq 0$", son verdaderas para todo número real x, y otras proposiciones, tales como "x es un entero par mayor que 2 y x es un número primo", siempre son falsas. Denotaremos con $P(x)$ un enunciado cuyo valor de verdad depende del valor de x.

Decimos "para toda x, $P(x)$" o "para cada x, $P(x)$", cuando la proposición $P(x)$ es verdadera para todo valor de x. Cuando al menos existe un valor de x para el cual es verdadera, decimos "existe una x tal que $P(x)$". Los dos importantes *cuantificadores* son "para todo" y "existe".

EJEMPLO 5 ¿Cuál de las siguientes proposiciones son verdaderas?

(a) Para toda x, $x^2 > 0$.
(b) Para toda x, $x < 0 \Rightarrow x^2 > 0$.
(c) Para cada x, existe una y tal que $y > x$.
(d) Existe una y tal que, para toda x, $y > x$.

SOLUCIÓN

(a) Falsa. Si elegimos $x = 0$, entonces no es verdadero que $x^2 > 0$.

(b) Verdadera. Si x es negativa, entonces x^2 será positiva.

(c) Verdadera. Esta proposición contiene dos cuantificadores, "para cada" y "existe". Para leer el enunciado de manera correcta, debemos aplicarlo en el orden correcto. La proposición inicia "para cada", de modo que si la proposición es verdadera, entonces lo que sigue debe ser verdadero para todo valor de x que seleccionemos. Si no está seguro de que el enunciado completo sea verdadero, intente con algunos valores de x y vea si la segunda parte del enunciado es verdadero o falso. Por ejemplo, podríamos elegir $x = 100$, dada esta elección; ¿existe una y que sea mayor a x? En otras palabras, ¿existe un número mayor que 100? Por supuesto que sí. El número 101 lo es. Ahora, seleccionemos otro valor para x, digamos $x = 1{,}000{,}000$. ¿Existe una y que sea mayor que este valor de x? Nuevamente, sí; en este caso el número 1,000,001 lo sería. Ahora, pregúntese: "Si tengo que x es cualquier número real, ¿podré encontrar una y que sea mayor a x?" La respuesta es sí. Basta con elegir a y como $x + 1$.

(d) Falsa. El enunciado dice que existe un número real que es mayor que todos los demás números reales. En otras palabras, existe un número real que es el mayor de todos. Esto es falso; aquí está una demostración por contradicción. Suponga que existe un número real mayor que todos, y. Sea $x = y + 1$. Entonces $x > y$, lo cual es contrario a la suposición de que y es el mayor número real. ■

La **negación** de la proposición P es la proposición "no P". (La proposición "no P" es verdadera siempre que P sea falsa). Considere la negación de la proposición "para toda x, $P(x)$". Si la negación de esta proposición es verdadera, entonces debe existir al menos un valor de x para el cual $P(x)$ es falsa; en otras palabras, existe una x tal que "no $P(x)$". Ahora considere la negación de la proposición "existe un x tal que $P(x)$". Si la negación de esta proposición es verdadera, entonces no existe una x para la cual $P(x)$ sea verdadera. Esto significa que $P(x)$ es falsa sin importar el valor de x. En otras palabras, "para toda x, no $P(x)$". En resumen,

La negación de "para toda x, $P(x)$" es "existe una x tal que no $P(x)$".

La negación de "existe una x tal que $P(x)$" es "para toda x, no $P(x)$".

Revisión de conceptos

1. Los números que pueden escribirse como la razón (cociente) de dos enteros se denominan ________.

2. Entre cualesquiera dos números reales, existe otro número real. Esto significa que los números reales son ________.

3. La contrapositiva (contrarrecíproca) de "si P entonces Q" es ________.

4. Los axiomas y las definiciones son tomados como ciertos, pero________ requieren de una demostración.

Conjunto de problemas 0.1

En los problemas del 1 al 16 simplifique tanto como sea posible. Asegúrese de eliminar todos los paréntesis y reducir todas las fracciones.

1. $4 - 2(8 - 11) + 6$

2. $3[2 - 4(7 - 12)]$

3. $-4[5(-3 + 12 - 4) + 2(13 - 7)]$

4. $5[-1(7 + 12 - 16) + 4] + 2$

5. $\frac{5}{7} - \frac{1}{13}$

6. $\frac{3}{4 - 7} + \frac{3}{21} - \frac{1}{6}$

7. $\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6}\right]$

8. $-\frac{1}{3}\left[\frac{2}{5} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)\right]$

9. $\dfrac{14}{21}\left(\dfrac{2}{5 - \frac{1}{3}}\right)^2$

10. $\left(\frac{2}{7} - 5\right)/\left(1 - \frac{1}{7}\right)$

11. $\dfrac{\frac{11}{7} - \frac{12}{21}}{\frac{11}{7} + \frac{12}{21}}$

12. $\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{7}{8}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{7}{8}}$

13. $1 - \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}$

14. $2 + \dfrac{3}{1 + \frac{5}{2}}$

15. $\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)$

16. $\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)^2$

En los problemas del 17 al 28 realice las operaciones indicadas y simplifique.

17. $(3x - 4)(x + 1)$

18. $(2x - 3)^2$

19. $(3x - 9)(2x + 1)$

20. $(4x - 11)(3x - 7)$

21. $(3t^2 - t + 1)^2$

22. $(2t + 3)^3$

23. $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

24. $\dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

25. $\dfrac{t^2 - 4t - 21}{t + 3}$

26. $\dfrac{2x - 2x^2}{x^3 - 2x^2 + x}$

27. $\dfrac{12}{x^2 + 2x} + \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{x + 2}$

28. $\dfrac{2}{6y - 2} + \dfrac{y}{9y^2 - 1}$

29. Determine el valor de cada una de las expresiones siguientes; si no está definida, indíquelo

(a) $0 \cdot 0$
(b) $\frac{0}{0}$
(c) $\frac{0}{17}$
(d) $\frac{3}{0}$
(e) 0^5
(f) 17^0

30. Demuestre que la división entre 0 no tiene significado como sigue: Suponga que $a \neq 0$. Si $a/0 = b$, entonces $a = 0 \cdot b = 0$, lo cual es una contradicción. Ahora determine una razón por la que $0/0$ también carece de significado.

En los problemas del 31 al 36 cambie cada número racional a uno decimal mediante una división larga.

31. $\frac{1}{12}$

32. $\frac{2}{7}$

33. $\frac{3}{21}$

34. $\frac{5}{17}$

35. $\frac{11}{3}$

36. $\frac{11}{13}$

En los problemas del 37 al 42 cambie cada decimal periódico por una razón de dos enteros (véase el ejemplo 1).

37. $0.123123123\ldots$

38. $0.217171717\ldots$

39. $2.56565656\ldots$

40. $3.929292\ldots$

41. $0.199999\ldots$

42. $0.399999\ldots$

43. Como $0.199999\ldots = 0.200000\ldots$ y $0.399999\ldots = 0.400000\ldots$ (véanse los problemas 41 y 42), vemos que ciertos números racionales tienen diferentes expansiones decimales. ¿Cuáles son los números racionales que tienen esta propiedad?

44. Demuestre que cualquier número racional p/q, para el cual la factorización en primos de q consiste sólo en números 2 y números 5, tiene un desarrollo decimal finito.

45. Encuentre un número racional positivo y un número irracional positivo menores que 0.00001.

46. ¿Cuál es el menor entero positivo? ¿El menor racional positivo? ¿El menor número irracional positivo?

47. Encuentre un número racional entre 3.14159 y π. Note que $\pi = 3.141592\ldots$.

48. ¿Existe un número entre 0.9999... (los 9 se repiten) y 1? ¿Cómo concilia esto con el enunciado de que entre cualesquiera dos números reales diferentes existe otro número real?

49. ¿El número 0.12345678910111213 14... es racional o irracional? (Debe observar un patrón en la sucesión de dígitos dada).

50. Encuentre dos números irracionales cuya suma sea racional.

≈ *En los problemas del 51 al 56 determine la mejor aproximación decimal que su calculadora permita. Inicie haciendo una estimación mental.*

51. $\left(\sqrt{3} + 1\right)^3$

52. $\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^4$

53. $\sqrt[4]{1.123} - \sqrt[3]{1.09}$

54. $(3.1415)^{-1/2}$

55. $\sqrt{8.9\pi^2 + 1} - 3\pi$

56. $\sqrt[4]{(6\pi^2 - 2)\pi}$

57. Demuestre que entre cualesquiera dos números reales diferentes existe un número racional. (*Sugerencia:* si $a < b$, entonces $b - a > 0$, así que existe un número natural n tal que $1/n < b - a$. Considere el conjunto $\{k : k/n > b\}$ y utilice el hecho de que un conjunto de enteros que está acotado por abajo contiene un elemento menor). Demuestre que entre cualesquiera dos números reales diferentes existe una infinidad de números racionales.

≈ **58.** Estime el volumen de su cabeza, en pulgadas cúbicas.

≈ **59.** Estime la longitud del ecuador, en pies. Suponga que el radio de la Tierra es de 4000 millas.

≈ **60.** ¿Alrededor de cuántas veces habrá latido su corazón en su vigésimo cumpleaños?

≈ **61.** El árbol llamado General Sherman, que está en California, tiene una altura de casi 270 pies y promedia alrededor de 16 pies de diámetro. Estime el número de tablones de madera de 1 pulgada por 12 pulgadas por 12 pulgadas que podrían fabricarse con este árbol, suponiendo que no haya desperdicio e ignorando las ramas.

≈ **62.** Suponga que cada año, el árbol General Sherman (véase el problema 61) produce un anillo de crecimiento de un grosor de 0.004 pies. Estime el aumento anual resultante en el volumen de su tronco.

63. Escriba el recíproco y el contrapositivo de los siguientes enunciados.

(a) Si hoy llueve, entonces trabajaré en casa.
(b) Si la candidata satisface todos los requisitos, entonces será contratada.

64. Escriba el recíproco y el contrapositivo de los siguientes enunciados.

(a) Si obtengo una A en el examen final, aprobaré el curso.
(b) Si termino mi artículo de investigación para el viernes, entonces tomaré un descanso la semana próxima.

65. Escriba el recíproco y el contrapositivo de los siguientes enunciados.

(a) (Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo.) Si $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo.
(b) Si el ángulo ABC es agudo, entonces su medida es mayor que 0° y menor que 90°.

66. Escriba el recíproco y el contrapositivo de los siguientes enunciados.

(a) Si la medida del ángulo ABC es 45°, entonces el ángulo ABC es agudo.
(b) Si $a < b$ entonces $a^2 < b^2$.

67. Considere los enunciados del problema 65 junto con sus recíprocos y contrapositivos. ¿Cuáles son verdaderos?

68. Considere los enunciados del problema 66 junto con sus recíprocos y contrapositivos. ¿Cuáles son verdaderos?

69. Utilice las reglas acerca de la negación de proposiciones que incluyen cuantificadores para escribir la negación de las siguientes proposiciones. ¿Cuál es verdadera, la proposición original o su negación?

(a) Todo triángulo isósceles es equilátero.
(b) Existe un número real que no es entero.
(c) Todo número natural es menor o igual a su cuadrado.

70. Utilice las reglas acerca de la negación de proposiciones que incluyen cuantificadores para escribir la negación de las siguientes proposiciones. ¿Cuál es verdadera, la proposición original o su negación?

(a) Todo número natural es racional.
(b) Existe un círculo cuya área es mayor que 9π.
(c) Todo número real es mayor que su cuadrado.

71. ¿Cuáles de los enunciados siguientes son verdaderos? Suponga que x y y son números reales.

(a) Para toda x, $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$.

(b) Para toda x, $x > 0 \Leftrightarrow x^2 > 0$.

(c) Para toda $x, x^2 > x$.

(d) Para toda x, existe una y tal que $y > x^2$.

(e) Para todo número positivo y, existe otro número positivo x tal que $0 < x < y$.

72. ¿Cuáles de las proposiciones siguientes son verdaderas? A menos que se diga lo contrario, suponga que x, y y ε son números reales.

(a) Para toda $x, x < x + 1$.

(b) Existe un número natural N, tal que todos los números primos son menores que N. (Un **número primo** es un número natural mayor que 1 cuyos únicos factores son 1 y él mismo.)

(c) Para cada $x > 0$, existe una y tal que $y > \frac{1}{x}$.

(d) Para toda x positiva, existe un número natural n tal que $\frac{1}{n} < x$.

(e) Para cada ε positiva, existe un número natural n tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

73. Demuestre las siguientes proposiciones.

(a) Si n es impar, entonces n^2 es impar. (*Sugerencia:* si n es **impar**, entonces existe un entero k, tal que $n = 2k + 1$).

(b) Si n^2 es impar, entonces n es impar. (*Sugerencia:* demuestre la contrapositiva).

74. Demuestre que n es impar si y sólo si n^2 es impar. (Véase el problema 73).

75. De acuerdo con el **Teorema fundamental de la aritmética**, todo número natural (distinto de 1) puede escribirse como el producto de primos, de una forma única, salvo por el orden de los factores. Por ejemplo, $45 = 3{\cdot}3{\cdot}5$. Escriba cada uno de los siguientes números como un producto de primos.

(a) 243 (b) 124 (c) 5100

76. Utilice el Teorema fundamental de la aritmética (véase el problema 75) para demostrar que el cuadrado de cualquier número natural (distinto de 1) puede escribirse como el producto de un conjunto único de primos, excepto por el orden de los factores, cada uno de los cuales aparece un número *pàr* de veces. Por ejemplo, $(45)^2 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$.

77. Demuestre que $\sqrt{2}$ es irracional. *Sugerencia:* intente una demostración por contradicción. Suponga que $\sqrt{2} = p/q$, donde p y q son números naturales (necesariamente distintos de 1). Entonces $2 = p^2/q^2$, de modo que $2q^2 = p^2$. Ahora utilice el problema 76 para obtener una contradicción.

78. Demuestre que $\sqrt{3}$ es irracional (véase el problema 77).

79. Demuestre que la suma de dos números racionales es racional.

80. Demuestre que el producto de un número racional (distinto de 0) y un número irracional es irracional. *Sugerencia:* intente una demostración por contradicción.

81. ¿Cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles son irracionales?

(a) $-\sqrt{9}$ (b) 0.375

(c) $(3\sqrt{2})(5\sqrt{2})$ (d) $(1 + \sqrt{3})^2$

82. Un número b se denomina **cota superior** para un conjunto S de números, si $x \le b$ para toda x en S. Por ejemplo, 5, 6.5 y 13 son cotas superiores para el conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. El número 5 es la **mínima cota superior** para S (la más pequeña de las cotas superiores). De manera análoga, 1.6, 2 y 2.5 son cotas superiores para el conjunto infinito $T = \{1.4, 1.49, 1.499, 1.4999, \ldots\}$ mientras que 1.5 es la mínima cota superior. Encuentre la mínima cota superior para cada uno de los siguientes conjuntos,

(a) $S = \{-10, -8, -6, -4, -2\}$

(b) $S = \{-2, -2.1, -2.11, -2.111, -2.1111, \ldots\}$

(c) $S = \{2.4, 2.44, 2.444, 2.4444, \ldots\}$

(d) $S = \left\{1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{4}, 1 - \frac{1}{5}, \ldots\right\}$

(e) $S = \{x|x = (-1)^n + 1/n$, n es un entero positivo$\}$; esto es, S es el conjunto de todos los números x que tienen la forma $x = (-1)^n + 1/n$, donde n es un entero positivo.

(f) $S = \{x : x^2 < 2, x$ es un número racional$\}$.

EXPL **83.** El axioma de completez para los números reales dice: *todo conjunto de números reales que tiene una cota superior tiene una mínima cota superior que es un número real.*

(a) Demuestre que la proposición en cursivas es falsa si las palabras *reales* y *real* se reemplazan por *racionales* y *racional*, respectivamente.

(b) ¿La proposición en cursivas será verdadera o falsa si las palabras *reales* y *real* fuesen reemplazadas por *naturales* y *natural*, respectivamente?

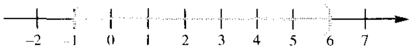
Respuestas a la revisión de conceptos **1.** números racionales **2.** densos **3.** "Si no Q entonces no P". **4.** teoremas

---

0.2 Desigualdades y valor absoluto

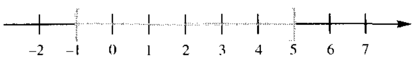
La resolución de ecuaciones (por ejemplo, $3x - 17 = 6$ o $x^2 - x - 6 = 0$) es una de las tareas tradicionales de las matemáticas; en este curso será importante y suponemos que usted recordará cómo hacerlo. Pero, casi de igual importancia en cálculo es la noción de resolver una desigualdad (por ejemplo, $3x - 17 < 6$ o $x^2 - x - 6 \ge 0$). **Resolver** una desigualdad es encontrar el conjunto de todos los números reales que hace que la desigualdad sea verdadera. En contraste con una ecuación, cuyo conjunto solución por lo regular consiste en un número o quizá en un conjunto finito de números, el conjunto solución de una desigualdad por lo regular es un intervalo completo de números o, en algunos casos, la unión de tales intervalos.

Intervalos Varias clases de intervalos surgirán en nuestro trabajo, para los cuales introducimos una terminología y notación especial. La desigualdad $a < x < b$, que en realidad son dos desigualdades, $a < x$ y $x < b$, describe un **intervalo abierto** que consiste en todos los números entre a y b, pero que no incluye los puntos extremos a y b. Lo denotamos por medio del símbolo (a, b) (véase la figura 1). En contraste, la desigualdad $a \le x \le b$ describe el correspondiente **intervalo cerrado**, que incluye los extremos a y b.



$(-1, 6) = \{x : -1 < x < 6\}$

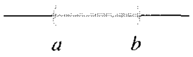
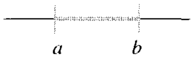
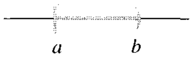
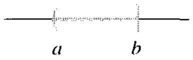
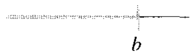
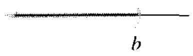
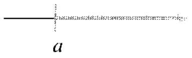
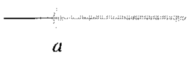
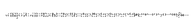
Figura 1



$[-1, 5] = \{x : -1 \leq x \leq 5\}$

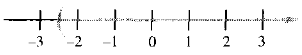
Figura 2

Se denota como $[a, b]$ (véase la figura 2). La tabla indica la amplia variedad de posibilidades e introduce nuestra notación.

Notación de conjuntos	Notación de intervalos	Gráfica
$\{x : a < x < b\}$	(a, b)	
$\{x : a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	
$\{x : a \leq x < b\}$	$[a, b)$	
$\{x : a < x \leq b\}$	$(a, b]$	
$\{x : x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	
$\{x : x < b\}$	$(-\infty, b)$	
$\{x : x \geq a\}$	$[a, \infty)$	
$\{x : x > a\}$	(a, ∞)	
$\mathbb{R}$	$(-\infty, \infty)$	

Resolución de desigualdades Como con las ecuaciones, el procedimiento para resolver una desigualdad consiste en transformar la desigualdad un paso a la vez hasta que el conjunto solución sea obvio. Podemos realizar ciertas operaciones en ambos lados de una desigualdad sin cambiar su conjunto solución. En particular:

1. Podemos sumar el mismo número a ambos lados de una desigualdad.
2. Podemos multiplicar ambos lados de una desigualdad por el mismo número positivo.
3. Podemos multiplicar ambos lados de una desigualdad por el mismo número negativo, pero entonces debemos invertir el sentido del signo de la desigualdad.



$\left(-\frac{5}{2}, \infty\right) = \left\{x : x > -\frac{5}{2}\right\}$

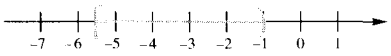
Figura 3

EJEMPLO 1 Resuelva la desigualdad $2x - 7 < 4x - 2$ y muestre la gráfica de su conjunto solución.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} 2x - 7 &< 4x - 2 \\ 2x &< 4x + 5 \qquad \text{(sume 7)} \\ -2x &< 5 \qquad \text{(sume } -4x\text{)} \\ x &> -\tfrac{5}{2} \qquad \text{(multiplique por } -\tfrac{1}{2}\text{)} \end{aligned}$$

La gráfica aparece en la figura 3. ■



$\left[-\frac{11}{2}, -1\right) = \left\{x : -\frac{11}{2} \leq x < -1\right\}$

Figura 4

EJEMPLO 2 Resuelva $-5 \leq 2x + 6 < 4$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} -5 \leq\ & 2x + 6 < 4 \\ -11 \leq\ & 2x \quad < -2 \qquad \text{(sume } -6\text{)} \\ -\tfrac{11}{2} \leq\ & x \quad < -1 \qquad \text{(multiplique por } \tfrac{1}{2}\text{)} \end{aligned}$$

La figura 4 muestra la gráfica correspondiente. ■

Antes de abordar una desigualdad cuadrática hacemos notar que un factor lineal de la forma $x - a$ es positivo para $x > a$ y negativo para $x < a$. Se deduce que un producto $(x - a)(x - b)$ puede cambiar de positivo a negativo, y viceversa, sólo en a o b. Estos puntos, en donde el factor es cero, se denominan **puntos de separación**. Estos puntos son la clave para determinar los conjuntos solución de desigualdades cuadráticas y otras desigualdades más complicadas.

EJEMPLO 3 Resuelva la desigualdad cuadrática $x^2 - x < 6$.

SOLUCIÓN Como con las ecuaciones cuadráticas, pasamos todos los términos distintos de cero a un lado y factorizamos.

$$\begin{aligned} x^2 - x &< 6 & & \\ x^2 - x - 6 &< 0 & &\text{(sume } -6\text{)} \\ (x - 3)(x + 2) &< 0 & &\text{(factorice)} \end{aligned}$$

Vemos que -2 y 3 son los puntos de separación; dividen la recta real en tres intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$ y $(3, \infty)$. En cada uno de estos intervalos $(x - 3)(x + 2)$ conserva el signo; esto es, ahí siempre es positivo o siempre negativo. Para determinar este signo en cada intervalo, utilizamos los **puntos de prueba** $-3, 0$ y 5 (cualesquiera otros puntos en estos intervalos sirven). Nuestros resultados se muestran en la tabla al margen.

Punto de prueba	**Signo de** $(x - 3)$	$(x + 2)$	**Signo de** $(x - 3)(x + 2)$
-3	$-$	$-$	$+$
0	$-$	$+$	$-$
5	$+$	$+$	$+$

La información que hemos obtenido se resume en la parte superior de la figura 5. Concluimos que el conjunto solución para $(x - 3)(x + 2) < 0$ es el intervalo $(-2, 3)$. Su gráfica se muestra en la parte inferior de la figura 5. ■

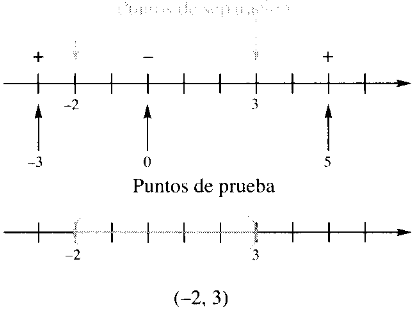


Figura 5

EJEMPLO 4 Resuelva $3x^2 - x - 2 > 0$.

SOLUCIÓN Ya que

$$3x^2 - x - 2 = (3x + 2)(x - 1) = 3(x - 1)\left(x + \tfrac{2}{3}\right)$$

los puntos de separación son $-\frac{2}{3}$ y 1. Estos puntos, junto con los puntos de prueba $-2, 0$ y 2, establecen la información que se muestra en la parte superior de la figura 6. Concluimos que el conjunto solución de la desigualdad consiste en los puntos que se encuentran en $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ o en $(1, \infty)$. En el lenguaje de conjuntos es la **unión** (simbolizada con $\cup$) de estos dos intervalos; esto es, es$\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup (1, \infty)$. ■

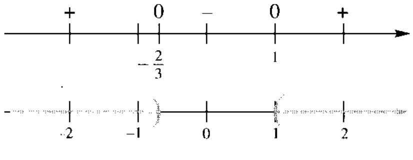

+
0
−
0
+
$-\frac{2}{3}$
1
-2
−1
0
1
2
$\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(1, \infty\right)$

Figura 6

EJEMPLO 5 Resuelva $\dfrac{x - 1}{x + 2} \geq 0$.

SOLUCIÓN Nuestra inclinación a multiplicar ambos lados por $x + 2$ conduce a un dilema inmediato, dado que $x + 2$ puede ser positivo o negativo. ¿Debemos invertir el signo de la desigualdad o dejarlo como está? En lugar de tratar de desenredar este problema (que requeriría dividirlo en dos casos), observamos que el cociente $(x - 1)/(x + 2)$ puede cambiar de signo en los puntos de separación del numerador y del denominador, esto es, en 1 y -2. Los puntos de prueba $-3, 0$ y 2 proporcionan la información de la parte superior de la figura 7. El símbolo n indica que el cociente *no* está definido en -2. Concluimos que el conjunto solución es $(-\infty, -2) \cup [1, \infty)$. Observe que -2 no pertenece al conjunto solución ya que ahí el cociente está indefinido. Por otra parte, 1 está incluido ya que la desigualdad se cumple cuando $x = 1$. ■

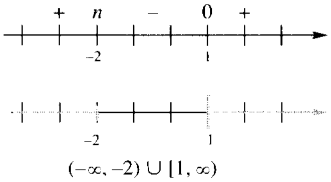


Figura 7

EJEMPLO 6 Resuelva $(x + 1)(x - 1)^2(x - 3) \leq 0$.

SOLUCIÓN Los puntos de separación son $-1, 1$ y 3, los cuales dividen la recta real en cuatro intervalos, como se muestra en la figura 8. Después de probar todos estos intervalos, concluimos que el conjunto solución es $[-1, 1] \cup [1, 3]$ que es el intervalo $[-1, 3]$. ■

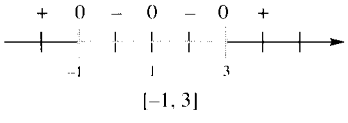


Figura 8

EJEMPLO 7 Resuelva $2.9 < \dfrac{1}{x} < 3.1$.

SOLUCIÓN Es tentador multiplicar por x, pero esto nuevamente lleva al dilema de que x puede ser positiva o negativa. Sin embargo, en este caso, $\frac{1}{x}$ debe estar entre 2.9 y 3.1, lo cual garantiza que x es positivo. Por lo tanto, es válido multiplicar por x y no invertir las desigualdades. Así,

$$2.9x < 1 < 3.1x$$

En este punto debemos dividir esta desigualdad compuesta en dos desigualdades, que resolvemos de manera separada

$$2.9x < 1 \quad \text{y} \quad 1 < 3.1x$$

$$x < \frac{1}{2.9} \quad \text{y} \quad \frac{1}{3.1} < x$$

Cualquier valor de x que satisfaga la desigualdad original debe satisfacer ambas desigualdades. Por lo tanto, el conjunto solución consiste en aquellos valores de x que satisfacen

$$\frac{1}{3.1} < x < \frac{1}{2.9}$$

Esta desigualdad puede escribirse como

$$\frac{10}{31} < x < \frac{10}{29}$$

El intervalo $\left(\frac{10}{31}, \frac{10}{29}\right)$ se muestra en la figura 9. ■

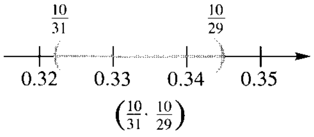


Figura 9

Valores absolutos El concepto de valor absoluto es extremadamente útil en cálculo, y el lector debe adquirir habilidad para trabajar con él. El **valor absoluto** de un número real x, denotado por $|x|$ está definido como

$$\boxed{\begin{aligned} |x| &= x & \text{si } x \geq 0 \\ |x| &= -x & \text{si } x < 0 \end{aligned}}$$

Por ejemplo, $|6| = 6$, $|0| = 0$ y $|-5| = -(-5) = 5$. Esta definición dada en dos partes merece un estudio cuidadoso. Observe que no dice que $|-x| = x$ (para ver por qué, pruebe con -5). Es cierto que $|x|$ siempre es no negativo; también es verdadero que $|-x| = |x|$.

Una de las mejores formas de pensar en el valor absoluto de un número es como una distancia no dirigida. En particular, $|x|$ es la distancia entre x y el origen. De manera análoga, $|x - a|$ es la distancia entre x y a (véase la figura 10).

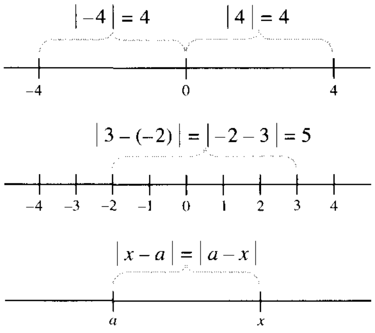


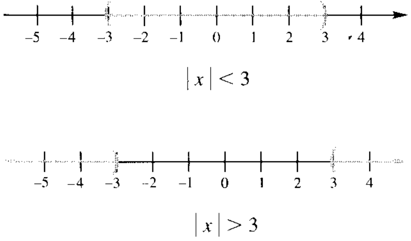
Figura 10

Propiedades El valor absoluto se comporta de manera adecuada con la multiplicación y la división, pero no así con la suma y la resta.

Propiedades del valor absoluto

1. $|ab| = |a||b|$
2. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
3. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdad del triángulo)
4. $|a - b| \geq ||a| - |b||$

Desigualdades que incluyen valores absolutos Si $|x| < 3$, entonces la distancia entre x y el origen debe ser menor que 3. En otras palabras, x debe ser simultáneamente menor que 3 *y* mayor que -3; esto es, $-3 < x < 3$. Por otra parte, si $|x| > 3$, entonces la distancia entre x y el origen debe ser mayor que 3. Esto puede suceder cuando $x > 3$ *o* $x < -3$ (véase la figura 11). Éstos son casos especiales de las siguientes proposiciones generales que se cumplen cuando $a > 0$.



$|x| < 3$

$|x| > 3$

Figura 11

(1) $$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$

$$|x| > a \Leftrightarrow x < -a \quad \text{o} \quad x > a$$

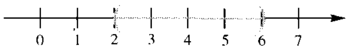
Podemos utilizar estos hechos para resolver desigualdades que impliquen valores absolutos, ya que proporcionan una manera de quitar los signos de valor absoluto.

EJEMPLO 8 Resuelva la desigualdad $|x-4|<2$ y muestre el conjunto solución en la recta real. Interprete el valor absoluto como una distancia.

SOLUCIÓN Con base en las proposiciones en (1), sustituyendo x por $x-4$, vemos que

$$|x-4|<2 \Leftrightarrow -2<x-4<2$$

Cuando sumamos 4 a los tres miembros de esta última desigualdad, obtenemos $2<x<6$. La gráfica se muestra en la figura 12.



$|x-4|<2$

Figura 12

En términos de distancia, el símbolo $|x-4|$ representa la distancia entre x y 4. Por lo tanto, la desigualdad dice que la distancia entre x y 4 debe ser menor a 2. Los números x con esta propiedad son los números entre 2 y 6; esto es, $2<x<6$. ■

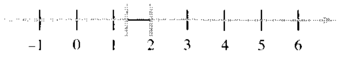
Las proposiciones (1) dadas antes del ejemplo 8 son válidas cuando $<$ y $>$ son reemplazadas por $\leq$ y $\geq$, respectivamente. Necesitamos la segunda proposición en esta forma para nuestro ejemplo siguiente.

EJEMPLO 9 Resuelva la desigualdad $|3x-5|\geq 1$ y muestre su conjunto solución en la recta real.

SOLUCIÓN La desigualdad dada puede escribirse de manera sucesiva como

$$\begin{array}{rcr} 3x-5\leq -1 & \text{o} & 3x-5\geq 1 \\ 3x\leq 4 & \text{o} & 3x\geq 6 \\ x\leq \frac{4}{3} & \text{o} & x\geq 2 \end{array}$$

El conjunto solución es la unión de dos intervalos, $\left(-\infty,\frac{4}{3}\right]\cup[2,\infty)$, y se muestra en la figura 13. ■



$\left(-\infty,\frac{4}{3}\right]\cup\left[2,\infty\right)$

Figura 13

En el capítulo 1 necesitaremos hacer la clase de manipulaciones que se ilustran en los dos ejemplos siguientes. Delta (δ) y épsilon (ε) son la cuarta y quinta letras, respectivamente, del alfabeto griego y se utilizan de manera tradicional para representar números positivos pequeños.

EJEMPLO 10 Sea ε (épsilon) un número positivo. Demuestre que

$$|x-2|<\frac{\varepsilon}{5}\Leftrightarrow|5x-10|<\varepsilon$$

En términos de distancia, esto dice que la distancia entre x y 2 es menor que $\varepsilon/5$, si y sólo si la distancia entre $5x$ y 10 es menor que ε.

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{rrcl} |x-2|<\dfrac{\varepsilon}{5} & \Leftrightarrow\quad 5|x-2| & <\varepsilon & \text{(multiplique por 5)} \\ & \Leftrightarrow\quad |5|\,|(x-2)| & <\varepsilon & (|5|=5) \\ & \Leftrightarrow\quad |5(x-2)| & <\varepsilon & (|a||b|=|ab|) \\ & \Leftrightarrow\quad |5x-10| & <\varepsilon & \end{array}$$

■

EJEMPLO 11 Sea ε un número positivo. Encuentre un número positivo δ (delta) tal que

$$|x-3|<\delta\Rightarrow|6x-18|<\varepsilon$$

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{rl} |6x-18|<\varepsilon & \Leftrightarrow |6(x-3)|<\varepsilon \\ & \Leftrightarrow 6|x-3|<\varepsilon \qquad (|ab|=|a||b|) \\ & \Leftrightarrow |x-3|<\dfrac{\varepsilon}{6} \qquad \left(\text{multiplique por } \dfrac{1}{6}\right) \end{array}$$

Determinación de delta

Observe dos hechos acerca de nuestra solución para el ejemplo 11.

1. El número que encontramos para δ debe depender de ε. nuestra elección es $\delta=\varepsilon/6$.
2. Cualquier número positivo δ más pequeño que $\varepsilon/6$ es aceptable. Por ejemplo $\delta=\varepsilon/7$ o $\delta=\varepsilon/(2\pi)$ son otras opciones correctas.

Por lo tanto, elegimos $\delta = \varepsilon/6$. Siguiendo las implicaciones de regreso, vemos que

$$|x - 3| < \delta \Rightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{6} \Rightarrow |6x - 18| < \varepsilon$$ ■

A continuación se presenta un problema práctico que utiliza el mismo tipo de razonamiento.

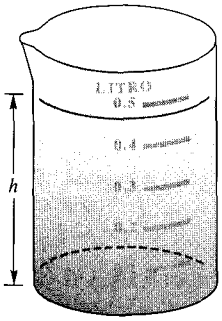


Figura 14

EJEMPLO 12 Un vaso de precipitados de $\frac{1}{2}$ litro (500 centímetros cúbicos) tiene un radio interno de 4 centímetros. ¿Con qué exactitud debemos medir la altura h del agua en el vaso para asegurar que tenemos $\frac{1}{2}$ litro de agua con un error de menos de 1%, esto es, un error de menos de 5 centímetros cúbicos? Véase la figura 14.

SOLUCIÓN El volumen V de agua en el vaso está dado por la fórmula $V = 16\pi h$. Queremos que $|V - 500| < 5$ o, de manera equivalente, $|16\pi h - 500| < 5$. Ahora

$$\begin{aligned} |16\pi h - 500| < 5 &\Leftrightarrow \left|16\pi\left(h - \frac{500}{16\pi}\right)\right| < 5 \\ &\Leftrightarrow \quad 16\pi\left|h - \frac{500}{16\pi}\right| < 5 \\ &\Leftrightarrow \quad \left|h - \frac{500}{16\pi}\right| < \frac{5}{16\pi} \\ &\Leftrightarrow \quad |h - 9.947| < 0.09947 \approx 0.1 \end{aligned}$$

Así, debemos medir la altura con una precisión de alrededor de 1 milímetro. ■

Notación para las raíces cuadradas

Todo número positivo tiene dos raíces cuadradas. Por ejemplo, las dos raíces cuadradas de 9 son 3 y −3. En ocasiones, representamos estos dos números como ±3. Para $a \geq 0$, el símbolo $\sqrt{a}$, que se denomina **raíz cuadrada principal** de a, denota la raíz cuadrada no negativa de a. Por lo tanto, $\sqrt{9} = 3$ y $\sqrt{121} = 11$. Es incorrecto escribir $\sqrt{16} = \pm 4$ ya que $\sqrt{16}$ significa la raíz cuadrada no negativa de 16; esto es, 4. El número 7 tiene dos raíces cuadradas, que se escriben como $\pm\sqrt{7}$, pero $\sqrt{7}$ representa un solo número real. Recuerde esto:

$$a^2 = 16$$

tiene dos soluciones, $a = -4$ y $a = 4$, pero

$$\sqrt{16} = 4$$

Fórmula cuadrática

La mayoría de los estudiantes recordarán la **Fórmula cuadrática**. Las soluciones a la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

El número $d = b^2 - 4ac$ se llama **discriminante** de la ecuación cuadrática. Esta ecuación tiene dos soluciones reales si $d > 0$, una solución real si $d = 0$ y soluciones no reales si $d < 0$. Con la fórmula cuadrática, fácilmente podemos resolver desigualdades cuadráticas, incluso, si no se pueden factorizar por inspección.

EJEMPLO 13 Resuelva $x^2 - 2x - 4 \leq 0$.

SOLUCIÓN Las dos soluciones de $x^2 - 2x - 4 = 0$ son

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{4 + 16}}{2} = 1 - \sqrt{5} \approx -1.24$$

y

$$x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{4 + 16}}{2} = 1 + \sqrt{5} \approx 3.24$$

Así,

$$x^2 - 2x - 4 = (x - x_1)(x - x_2) = \left(x - 1 + \sqrt{5}\right)\left(x - 1 - \sqrt{5}\right)$$

Los puntos de separación $1 - \sqrt{5}$ y $1 + \sqrt{5}$ dividen a la recta real en tres intervalos (véase la figura 15). Cuando los comprobamos con los puntos de prueba −2, 0 y 4, concluimos que el conjunto solución para $x^2 - 2x - 4 \leq 0$ es $\left[1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}\right]$. ■

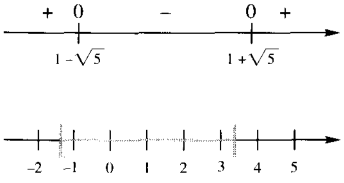


Figura 15

Cuadrados

Regresando a los cuadrados, notemos que

$$\boxed{|x|^2 = x^2 \quad \text{y} \quad |x| = \sqrt{x^2}}$$

Notación para raíces

Si n es número par y $a \geq 0$, el símbolo $\sqrt[n]{a}$ denota la raíz n-ésima no negativa de a. Cuando n es impar, sólo existe una raíz n-ésima real de a, denotada por el símbolo $\sqrt[n]{a}$. Por lo tanto, $\sqrt[4]{16} = 2$, $\sqrt[3]{27} = 3$, y $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Esto se deduce de la propiedad $|a||b| = |ab|$.

¿La operación de elevar al cuadrado preserva las desigualdades? En general, la respuesta es no. Por ejemplo, $-3 < 2$, pero $(-3)^2 > 2^2$. Por otra parte, $2 < 3$ y $2^2 < 3^2$. Si tratamos con números no negativos, entonces $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$. Una variante útil de esto (véase el problema 63) es

$$\boxed{|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2}$$

EJEMPLO 14 Resuelva la desigualdad $|3x + 1| < 2|x - 6|$.

SOLUCIÓN Esta desigualdad es más difícil de resolver que nuestros ejemplos anteriores, debido a que hay dos signos de valor absoluto. Podemos eliminar ambos al usar el resultado del último recuadro.

$$\begin{aligned}
|3x + 1| < 2|x - 6| &\Leftrightarrow |3x + 1| < |2x - 12| \\
&\Leftrightarrow (3x + 1)^2 < (2x - 12)^2 \\
&\Leftrightarrow 9x^2 + 6x + 1 < 4x^2 - 48x + 144 \\
&\Leftrightarrow 5x^2 + 54x - 143 < 0 \\
&\Leftrightarrow (x + 13)(5x - 11) < 0
\end{aligned}$$

Los puntos de separación para esta desigualdad cuadrática son -13 y $\frac{11}{5}$; estos puntos dividen la recta real en tres intervalos $(-\infty, -13)$, $\left(-13, \frac{11}{5}\right)$, y $\left(\frac{11}{5}, \infty\right)$. Cuando utilizamos los puntos de prueba -14, 0 y 3, descubrimos que sólo los puntos en $\left(-13, \frac{11}{5}\right)$ satisfacen la desigualdad. ■

Revisión de conceptos

1. El conjunto $\{x: -1 \leq x < 5\}$ se escribe en notación de intervalos como _______ y el conjunto $\{x: x \leq -2\}$ se escribe como _______.

2. Si $a/b < 0$, entonces $a < 0$ y _______ o bien $a > 0$ y _______.

3. ¿Cuáles de las ecuaciones siguientes siempre son verdaderas?

(a) $|-x| = x$ (b) $|x|^2 = x^2$

(c) $|xy| = |x||y|$ (d) $\sqrt{x^2} = x$

4. La desigualdad $|x - 2| \leq 3$ es equivalente a _______ $\leq x \leq$ _______.

Conjunto de problemas 0.2

1. Muestre cada uno de los intervalos siguientes en la recta real.

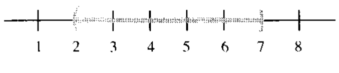
(a) $[-1, 1]$ (b) $(-4, 1]$

(c) $(-4, 1)$ (d) $[1, 4]$

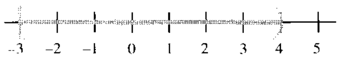
(e) $[-1, \infty)$ (f) $(-\infty, 0]$

2. Utilice la notación del problema 1 para describir los intervalos siguientes.

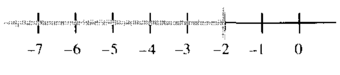
(a)



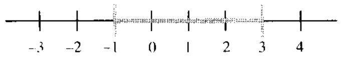
(b)



(c)



(d)



En cada problema del 3 al 26 exprese el conjunto solución de la desigualdad dada en notación de intervalos y bosqueje su gráfica.

3. $x - 7 < 2x - 5$

4. $3x - 5 < 4x - 6$

5. $7x - 2 \leq 9x + 3$

6. $5x - 3 > 6x - 4$

7. $-4 < 3x + 2 < 5$

8. $-3 < 4x - 9 < 11$

9. $-3 < 1 - 6x \leq 4$

10. $4 < 5 - 3x < 7$

11. $x^2 + 2x - 12 < 0$

12. $x^2 - 5x - 6 > 0$

13. $2x^2 + 5x - 3 > 0$

14. $4x^2 - 5x - 6 < 0$

15. $\dfrac{x + 4}{x - 3} \leq 0$

16. $\dfrac{3x - 2}{x - 1} \geq 0$

17. $\dfrac{2}{x} < 5$

18. $\dfrac{7}{4x} \leq 7$

19. $\dfrac{1}{3x - 2} \leq 4$

20. $\dfrac{3}{x + 5} > 2$

21. $(x + 2)(x - 1)(x - 3) > 0$

22. $(2x + 3)(3x - 1)(x - 2) < 0$

23. $(2x - 3)(x - 1)^2(x - 3) \geq 0$

24. $(2x - 3)(x - 1)^2(x - 3) > 0$

25. $x^3 - 5x^2 - 6x < 0$ **26.** $x^3 - x^2 - x + 1 > 0$

27. Indique si cada una de las proposiciones siguientes es verdadera o falsa.

(a) $-3 < -7$ (b) $-1 > -17$ (c) $-3 < -\frac{22}{7}$

28. Indique si cada una de las proposiciones siguientes es verdadera o falsa.

(a) $-5 > -\sqrt{26}$ (b) $\frac{6}{7} < \frac{34}{39}$ (c) $-\frac{5}{7} < -\frac{44}{59}$

29. Suponga que $a > 0, b > 0$. Demuestre cada proposición. *Sugerencia:* cada parte requiere de dos demostraciones: una para $\Rightarrow$ y otra para $\Leftarrow$.

(a) $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ (b) $a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

30. Si $a \leq b$, ¿cuáles de las proposiciones siguientes son verdaderas?

(a) $a^2 \leq ab$ (b) $a - 3 \leq b - 3$

(c) $a^3 \leq a^2b$ (d) $-a \leq -b$

31. Encuentre todos los valores de x que satisfagan, de manera simultánea, ambas desigualdades.

(a) $3x + 7 > 1$ y $2x + 1 < 3$

(b) $3x + 7 > 1$ y $2x + 1 > -4$

(c) $3x + 7 > 1$ y $2x + 1 < -4$

32. Encuentre todos los valores de x que satisfacen al menos una de las dos desigualdades.

(a) $2x - 7 > 1$ o bien $2x + 1 < 3$

(b) $2x - 7 \leq 1$ o bien $2x + 1 < 3$

(c) $2x - 7 \leq 1$ o bien $2x + 1 > 3$

33. Resuelva para x, exprese su respuesta en notación de intervalos.

(a) $(x + 1)(x^2 + 2x - 7) \geq x^2 - 1$

(b) $x^4 - 2x^2 \geq 8$

(c) $(x^2 + 1)^2 - 7(x^2 + 1) + 10 < 0$

34. Resuelva cada desigualdad. Exprese su solución en notación de intervalos.

(a) $1.99 < \frac{1}{x} < 2.01$ (b) $2.99 < \frac{1}{x + 2} < 3.01$

En los problemas del 35 al 44 determine los conjuntos solución de las desigualdades dadas.

35. $|x - 2| \geq 5$ **36.** $|x + 2| < 1$

37. $|4x + 5| \leq 10$ **38.** $|2x - 1| > 2$

39. $\left|\frac{2x}{7} - 5\right| \geq 7$ **40.** $\left|\frac{x}{4} + 1\right| < 1$

41. $|5x - 6| > 1$ **42.** $|2x - 7| > 3$

43. $\left|\frac{1}{x} - 3\right| > 6$ **44.** $\left|2 + \frac{5}{x}\right| > 1$

En los problemas del 45 al 48 resuelva la desigualdad cuadrática por medio de la fórmula cuadrática.

45. $x^2 - 3x - 4 \geq 0$ **46.** $x^2 - 4x + 4 \leq 0$

47. $3x^2 + 17x - 6 > 0$ **48.** $14x^2 + 11x - 15 \leq 0$

En los problemas 49 al 52 muestre que la implicación indicada es verdadera.

49. $|x - 3| < 0.5 \Rightarrow |5x - 15| < 2.5$

50. $|x + 2| < 0.3 \Rightarrow |4x + 8| < 1.2$

51. $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{6} \Rightarrow |6x - 12| < \varepsilon$

52. $|x + 4| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |2x + 8| < \varepsilon$

En los problemas del 53 al 56 determine δ (dependiente de ε) de modo que la implicación dada sea verdadera.

53. $|x - 5| < \delta \Rightarrow |3x - 15| < \varepsilon$

54. $|x - 2| < \delta \Rightarrow |4x - 8| < \varepsilon$

55. $|x + 6| < \delta \Rightarrow |6x + 36| < \varepsilon$

56. $|x + 5| < \delta \Rightarrow |5x + 25| < \varepsilon$

57. En un torno, usted desea fabricar un disco (cilindro circular recto delgado) con circunferencia de 10 pulgadas. Esto se realiza midiendo de manera continua el diámetro conforme se hace el disco más pequeño. ¿Qué tan exacto debe medir el diámetro si puede tolerar un error de, a lo sumo, 0.02 pulgadas en la circunferencia?

58. Las temperaturas Fahrenheit y las temperaturas Celsius están relacionadas por la fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Un experimento requiere mantener una solución a 50°C con un error de 3% (o 1.5°), a lo sumo. Usted sólo tiene un termómetro Fahrenheit. ¿Qué error se le permite en el experimento?

En los problemas del 59 al 62 resuelva las desigualdades.

59. $|x - 1| < 2|x - 3|$ **60.** $|2x - 1| \geq |x + 1|$

61. $2|2x - 3| < |x + 10|$ **62.** $|3x - 1| < 2|x + 6|$

63. Demuestre que $|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2$ dando una razón para cada uno de los siguientes pasos.

$$|x| < |y| \Rightarrow |x||x| \leq |x||y| \quad \text{y} \quad |x||y| < |y||y|$$
$$\Rightarrow |x|^2 < |y|^2$$
$$\Rightarrow x^2 < y^2$$

Recíprocamente,

$$x^2 < y^2 \Rightarrow |x|^2 < |y|^2$$
$$\Rightarrow |x|^2 - |y|^2 < 0$$
$$\Rightarrow (|x| - |y|)(|x| + |y|) < 0$$
$$\Rightarrow |x| - |y| < 0$$
$$\Rightarrow |x| < |y|$$

64. Utilice el resultado del problema 63 para demostrar que

$$0 < a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

65. Utilice las propiedades del valor absoluto para demostrar que cada una de las siguientes proposiciones son verdaderas.

(a) $|a - b| \leq |a| + |b|$ (b) $|a - b| \geq |a| - |b|$

(c) $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$

66. Utilice la desigualdad del triángulo y el hecho de que $0 < |a| < |b| \Rightarrow 1/|b| < 1/|a|$, para establecer la siguiente cadena de desigualdades.

$$\left|\frac{1}{x^2 + 3} - \frac{1}{|x| + 2}\right| \leq \frac{1}{x^2 + 3} + \frac{1}{|x| + 2} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

67. Demuestre que (véase el problema 66)

$$\left|\frac{x - 2}{x^2 + 9}\right| \leq \frac{|x| + 2}{9}$$

68. Demuestre que

$$|x| \leq 2 \Rightarrow \left|\frac{x^2 + 2x + 7}{x^2 + 1}\right| \leq 15$$

69. Demuestre que

$$|x| \le 1 \Rightarrow |x^4 + \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{8}x + \tfrac{1}{16}| < 2$$

70. Demuestre cada una de las siguientes proposiciones:

(a) $x < x^2$ para $x < 0$ o $x > 1$

(b) $x^2 < x$ para $0 < x < 1$

71. Demuestre que $a \neq 0 \Rightarrow a^2 + 1/a^2 \ge 2$. *Sugerencia:* considere $(a - 1/a)^2$.

72. El número $\frac{1}{2}(a + b)$ se le llama promedio, o **media aritmética**, de a y b. Demuestre que la media aritmética de dos números está entre los dos números; es decir, pruebe que

$$a < b \Rightarrow a < \frac{a + b}{2} < b$$

73. El número $\sqrt{ab}$ se denomina **media geométrica** de los dos números positivos a y b. Pruebe que

$$0 < a < b \Rightarrow a < \sqrt{ab} < b$$

74. Para dos números positivos a y b, pruebe que

$$\sqrt{ab} \le \tfrac{1}{2}(a + b)$$

Ésta es la versión más sencilla de una famosa desigualdad llamada **desigualdad de la media geométrica – media aritmética**.

75. Demuestre que, entre todos los rectángulos con un perímetro dado p, el cuadrado tiene la mayor área. *Sugerencia*: si a y b denotan las longitudes de los lados adyacentes de un rectángulo de perímetro p, entonces el área es ab, y para el cuadrado el área es $a^2 = [(a + b)/2]^2$. Ahora vea el problema 74.

76. Resuelva $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{99} \le 0$.

77. La fórmula $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}$ proporciona la resistencia total R en un circuito eléctrico debida a tres resistencias, R_1, R_2 y R_3, conectadas en paralelo. Si $10 \le R_1 \le 20$, $20 \le R_2 \le 30$ y $30 \le R_3 \le 40$, determine el rango de valores de R.

78. El radio de una esfera mide aproximadamente 10 pulgadas. Determine una tolerancia δ en la medición que asegure un error menor que 0.01 pulgadas cuadradas en el valor calculado del área de la superficie de la esfera.

Respuestas a la revisión de conceptos. **1.** $[-1, 5)$; $(-\infty, -2]$ **2.** $b > 0$; $b < 0$ **3.** (b) and (c) **4.** $-1 \le x \le 5$

0.3 El sistema de coordenadas rectangulares

En el plano, produzca dos copias de la recta real, una horizontal y la otra vertical, de modo que se intersecten en los puntos cero de las dos rectas. Las dos rectas se denominan **ejes coordenados**, su intersección se etiqueta con O y se denomina **origen**. Por convención, la recta horizontal se llama **eje *x*** y la recta vertical se llama **eje *y***. La mitad positiva del eje x es hacia la derecha, la mitad positiva del eje y es hacia arriba. Los ejes coordenados dividen al plano en cuatro regiones llamadas **cuadrantes**, que llevan las marcas I, II, III y IV, como se muestra en la figura 1.

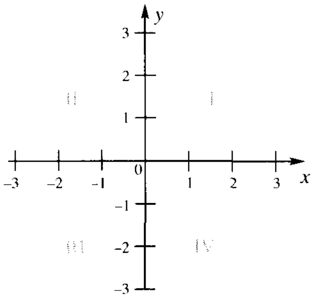


Figura 1

Ahora, cada punto P en el plano puede asignarse a una pareja de números, llamados **coordenadas cartesianas**. Si una línea vertical y otra horizontal que pasan por P intersectan los ejes x y y en a y b, respectivamente, entonces P tiene coordenadas (a, b) (véase la figura 2). Llamamos a (a, b) un **par ordenado** de números debido a que es importante saber cuál número está primero. El primer número, a, es la **coordenada *x*** (o abscisa); el segundo número, b, es la **coordenada *y*** (u ordenada).

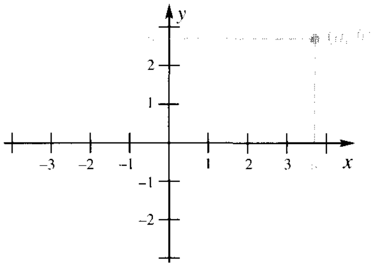


Figura 2

La fórmula de la distancia Con coordenadas a la mano, podemos introducir una fórmula sencilla para la distancia entre cualesquiera dos puntos en el plano. Tiene como base el **Teorema de Pitágoras**, el cual dice que si a y b son las medidas de los dos catetos de un triángulo rectángulo y c es la medida de su hipotenusa (véase la figura 3), entonces

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Recíprocamente, la relación entre los tres lados de un triángulo se cumple sólo para un triángulo rectángulo.

Ahora considérese cualesquiera dos puntos P y Q, con coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2), respectivamente. Junto con R, el punto de coordenadas (x_2, y_1), P y Q son los vértices de un triángulo rectángulo (véase la figura 4). Las longitudes de PR y RQ son $|x_2 - x_1|$ y $|y_2 - y_1|$, respectivamente. Cuando aplicamos el Teorema de Pitágoras y tomamos la raíz cuadrada principal de ambos lados, obtenemos la expresión siguiente para la **fórmula de la distancia**

$$\boxed{d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

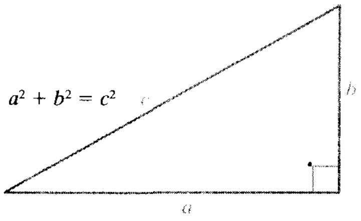


Figura 3

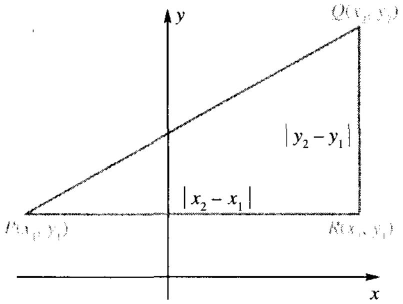


Figura 4

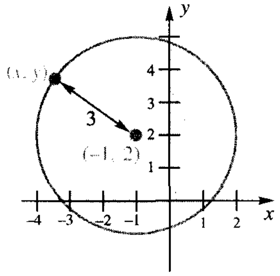


Figura 5

EJEMPLO 1 Encuentre la distancia entre

(a) $P(-2, 3)$ y $Q(4, -1)$ (b) $P(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ y $Q(\pi, \pi)$

SOLUCIÓN

(a) $d(P, Q) = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} \approx 7.21$

(b) $d(P, Q) = \sqrt{(\pi - \sqrt{2})^2 + (\pi - \sqrt{3})^2} \approx \sqrt{4.971} \approx 2.23$ ■

La fórmula es válida incluso si los dos puntos pertenecen a la misma recta horizontal o a la misma recta vertical. Así, la distancia entre $P(-2, 2)$ y $Q(6, 2)$ es

$$\sqrt{(6-(-2))^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{64} = 8$$

La ecuación de una circunferencia Es un paso pequeño ir de la fórmula de la distancia a la ecuación de una circunferencia. Una **circunferencia** es el conjunto de puntos que están a una distancia fija (el *radio*) de un punto fijo (el *centro*). Por ejemplo, considere la circunferencia de radio 3 con centro en $(-1, 2)$ (véase la figura 5). Sea (x, y) un punto cualquiera de esta circunferencia. Por medio de la fórmula de la distancia,

$$\sqrt{(x + 1)^2 + (y - 2)^2} = 3$$

Cuando elevamos al cuadrado ambos lados obtenemos

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

que llamamos la ecuación de esta circunferencia.

En forma más general, la circunferencia de radio r y centro (h, k) tiene la ecuación

(1) $$\boxed{(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2}$$

A esto le llamamos **ecuación estándar de una circunferencia.**

EJEMPLO 2 Determine la ecuación estándar de una circunferencia de radio 5 y centro en $(1, -5)$. También, encuentre las ordenadas de los dos puntos en esta circunferencia con abscisa 2.

SOLUCIÓN La ecuación buscada es

$$(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 25$$

Para realizar la segunda tarea, sustituimos $x = 2$ en la ecuación y despejamos la y.

$$\begin{aligned} (2 - 1)^2 + (y + 5)^2 &= 25 \\ (y + 5)^2 &= 24 \\ y + 5 &= \pm\sqrt{24} \\ y &= -5 \pm \sqrt{24} = -5 \pm 2\sqrt{6} \end{aligned}$$ ■

Si desarrollamos los dos cuadrados en el recuadro (1) y reducimos las constantes, entonces la ecuación adquiere la forma

$$x^2 + ax + y^2 + by = c$$

Esto sugiere la pregunta de si toda ecuación de la última forma es la ecuación de una circunferencia. La respuesta es sí, con algunas excepciones obvias.

Circunferencia ↔ Ecuación

Decir que

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

es la ecuación de la circunferencia de radio 3 con centro $(-1, 2)$ significa dos cosas:

1. Si un punto está en esta circunferencia, entonces sus coordenadas (x, y) satisfacen la ecuación.
2. Si x y y son números que satisfacen la ecuación, entonces son las coordenadas de un punto en la circunferencia.

EJEMPLO 3 Demuestre que la ecuación

$$x^2 - 2x + y^2 + 6y = -6$$

representa una circunferencia, y determine su centro y su radio.

SOLUCIÓN Necesitamos *completar el cuadrado*, un importante proceso en muchos contextos. Para completar el cuadrado de $x^2 \pm bx$, sumamos $(b/2)^2$. Así, sumamos $(-2/2)^2 = 1$ a $x^2 - 2x$ y $(6/2)^2 = 9$ a $y^2 + 6y$, y por supuesto debemos añadir los mismos números al lado derecho de la ecuación, para obtener

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = -6 + 1 + 9$$
$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$$

La última ecuación está en la forma estándar. Es la ecuación de una circunferencia con centro en $(1, -3)$ y radio 2. Si, como resultado de este proceso, obtuviésemos un número negativo en el lado derecho de la ecuación final, la ecuación no representaría curva alguna. Si obtuviésemos cero, la ecuación representaría un solo punto $(1, -3)$. ■

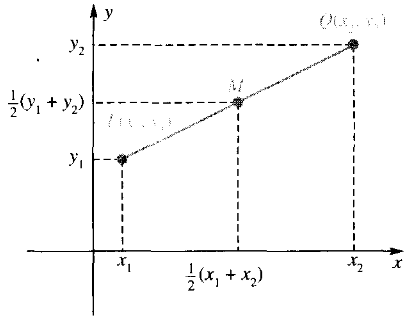


Figura 6

La fórmula del punto medio Considere dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ con $x_1 \leq x_2$ y $y_1 \leq y_2$, como en la figura 6. La distancia entre x_1 y x_2 es $x_2 - x_1$. Cuando le sumamos la mitad de esta distancia, $\frac{1}{2}(x_2 - x_1)$, a x_1, obtenemos el punto medio entre x_1 y x_2.

$$x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Por lo tanto, el punto $(x_1 + x_2)/2$ es el punto medio entre x_1 y x_2 sobre el eje x y, en consecuencia, el punto medio M del segmento PQ tiene a $(x_1 + x_2)/2$ como su coordenada x. De manera análoga, podemos mostrar que $(y_1 + y_2)/2$ es la coordenada y de M. Así, tenemos la **fórmula del punto medio**

El punto medio del segmento de recta que une $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

EJEMPLO 4 Determine la ecuación de la circunferencia que tiene como un diámetro el segmento que va de $(1, 3)$ a $(7, 11)$.

SOLUCIÓN El centro de la circunferencia está en el punto medio del diámetro; por lo tanto, el centro tiene coordenadas $(1 + 7)/2 = 4$ y $(3 + 11)/2 = 7$. La longitud del diámetro, obtenida por medio de la fórmula de distancia, es

$$\sqrt{(7 - 1)^2 + (11 - 3)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$$

de modo que el radio de la circunferencia es 5. La ecuación de la circunferencia es

$$(x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 25$$ ■

Rectas Considere la recta de la figura 7. Del punto A al punto B existe una **elevación** (cambio vertical) de 2 unidades y un **avance** (cambio horizontal) de 5 unidades. Decimos que la recta tiene una pendiente de 2/5. En general (véase la figura 8), para una recta que pasa por $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, en donde $x_1 \neq x_2$, definimos la **pendiente** m de esa recta como

$$\boxed{m = \frac{\text{elevación}}{\text{avance}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

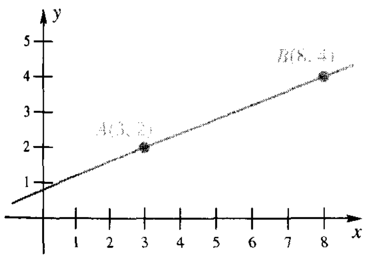


Figura 7

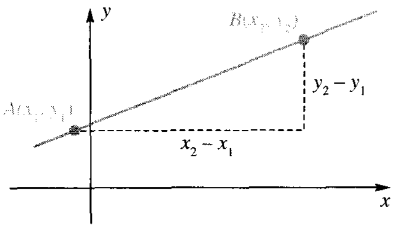


Figura 8

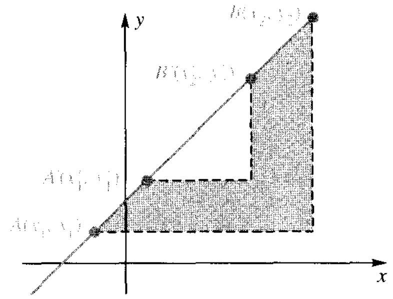


Figura 9

¿El valor que obtuvimos para la pendiente depende de la pareja de puntos que utilicemos para A y B? Los triángulos semejantes en la figura 9 nos muestran que

$$\frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Así, los puntos A' y B' darían lo mismo que A y B. Incluso, no importa si A está a la izquierda o a la derecha de B, ya que

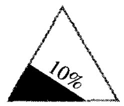
$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Todo lo que importa es que restemos las coordenadas en el mismo orden en el numerador y el denominador.

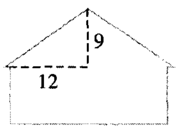
La pendiente m es una medida de la inclinación de una recta, como se ilustra en la figura 10. Observe que una recta horizontal tiene pendiente cero, una recta que se eleva hacia la derecha tiene pendiente positiva y una recta que desciende a la derecha tiene pendiente negativa. Mientras mayor sea el valor absoluto de la pendiente, más inclinada será la recta. El concepto de pendiente de una recta vertical no tiene sentido, ya que implicaría la división entre cero. Por lo tanto, la pendiente para una recta vertical se deja indefinida.

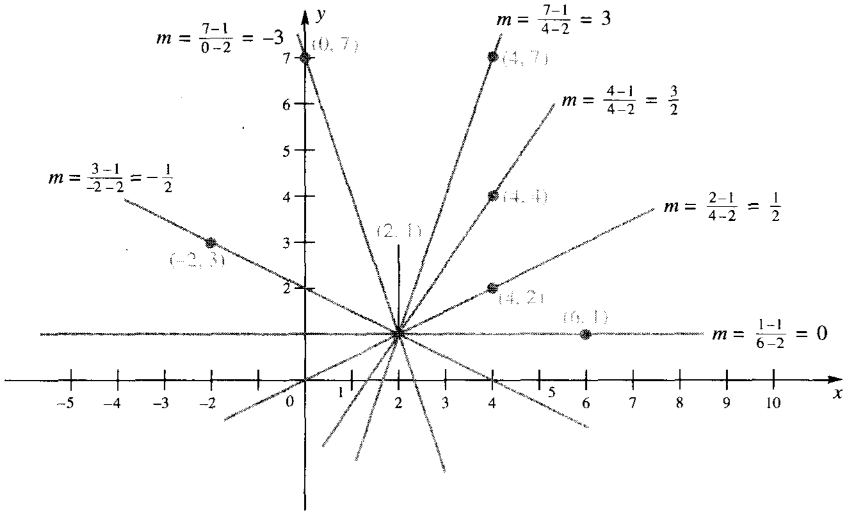
Grado (nivel) e inclinación

El símbolo internacional para la pendiente de un camino (llamado grado) se muestra abajo. El grado está dado como porcentaje. Un grado de 10% corresponde a una pendiente de ±0.10.



Los carpinteros utilizan el término *inclinación*. Una inclinación de 9:12 corresponde a una pendiente de $\frac{9}{12}$.





Rectas con pendientes diferentes

Figura 10

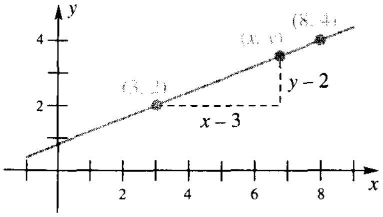


Figura 11

La forma punto-pendiente Otra vez, considere la recta de nuestro estudio inicial; se reproduce en la figura 11. Sabemos que esta recta

1. pasa por $(3, 2)$ y
2. tiene pendiente $\frac{2}{5}$.

Tome cualquier otro punto de esta recta, como el que tiene coordenadas (x, y). Si utilizamos este punto y el punto $(3, 2)$ para medir la pendiente, debemos obtener $\frac{2}{5}$, es decir,

$$\frac{y-2}{x-3}=\frac{2}{5}$$

o, después de multiplicar por $x - 3$,

$$y - 2 = \tfrac{2}{5}(x - 3)$$

Observe que a esta última ecuación la satisfacen todos los puntos de la recta, incluso $(3, 2)$. Además, ningún punto que no pertenezca a la recta puede satisfacer esta ecuación.

Lo que acabamos de hacer en un ejemplo lo podemos hacer en general. La recta que pasa por el punto (fijo) (x_1, y_1) con pendiente m tiene ecuación

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

A esta forma le llamamos **punto–pendiente** de la ecuación de una recta.

Una vez más considere la recta de nuestro ejemplo. Esa recta pasa por $(8, 4)$, así como por $(3, 2)$. Si utilizamos $(8, 4)$ como (x_1, y_1), obtenemos la ecuación

$$y - 4 = \tfrac{2}{5}(x - 8)$$

la cual parece muy diferente de $y - 2 = \frac{2}{5}(x - 3)$. Sin embargo, ambas pueden simplificarse a $5y - 2x = 4$; son equivalentes.

EJEMPLO 5 Determine una ecuación de la recta que pasa por $(-4, 2)$ y $(6, -1)$.

SOLUCIÓN La pendiente es $m = (-1 - 2)/(6 + 4) = -\frac{3}{10}$. Por lo tanto, usando $(-4, 2)$ como el punto fijo obtenemos la ecuación

$$y - 2 = -\tfrac{3}{10}(x + 4) \qquad \blacksquare$$

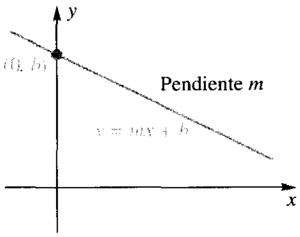


Figura 12

La forma pendiente intersección

La ecuación de una recta puede expresarse de varias formas. Suponga que se nos ha dado la pendiente m de la recta y la intersección b con el eje y —es decir, la recta intersecta al eje y en $(0, b)$—, como se muestra en la figura 12. Al seleccionar $(0, b)$ como (x_1, y_1) y al aplicar la forma punto–pendiente, obtenemos

$$y - b = m(x - 0)$$

que puede reescribirse como

$$\boxed{y = mx + b}$$

La última se denomina forma **pendiente intersección**. En todo momento que veamos una ecuación escrita en esta forma, la reconocemos como una recta y de manera inmediata leemos su pendiente y su intersección con el eje y. Por ejemplo, considere la ecuación

$$3x - 2y + 4 = 0$$

Si despejamos la y, obtenemos

$$y = \tfrac{3}{2}x + 2$$

Ésta es la ecuación de una recta con pendiente $\frac{3}{2}$ e intersección con el eje y igual a 2.

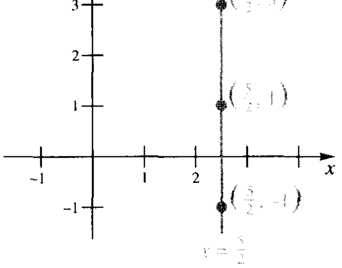

y
3
2
1
-1
-1
1
2
x
$\left(\frac{5}{2}, 3\right)$
$\left(\frac{5}{2}, 1\right)$
$\left(\frac{5}{2}, -1\right)$
$x = \frac{5}{2}$

Figura 13

Ecuación de una recta vertical

Las rectas verticales no caen dentro del estudio precedente, ya que el concepto de pendiente no está definido para ellas; aunque tienen ecuaciones muy sencillas. La recta en la figura 13 tiene ecuación $x = \frac{5}{2}$, ya que un punto está en la recta si y sólo si satisface esta ecuación. La ecuación de cualquier recta vertical puede escribirse en la forma $x = k$, donde k es una constante. Debe notarse que la ecuación de una recta horizontal puede escribirse en la forma $y = k$.

La forma $Ax + By + C = 0$

Sería bueno tener una forma que cubra todos los casos, incluyendo las rectas verticales. Por ejemplo, considere,

Resumen: ecuaciones de rectas

Recta vertical: $x = k$

Recta horizontal: $y = \mathrm{k}$

Forma punto–pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Forma pendiente intercepción:

$$y = mx + b$$

Ecuación lineal general:

$$Ax + By + C = 0$$

$$y - 2 = -4(x + 2)$$

$$y = 5x - 3$$

$$x = 5$$

Éstas pueden reescribirse (pasando todo al lado izquierdo) como sigue:

$$4x + y + 6 = 0$$

$$-5x + y + 3 = 0$$

$$x + 0y - 5 = 0$$

Todas tienen la forma

$$\boxed{Ax + By + C = 0, \qquad A \text{ y } B \text{ no son cero al mismo tiempo}}$$

que llamamos la **ecuación lineal general** (o ecuación general de la recta). Sólo se requiere un poco de reflexión para ver que la ecuación de cualquier recta puede escribirse en esta forma. Recíprocamente, la gráfica de la ecuación lineal general siempre es una recta.

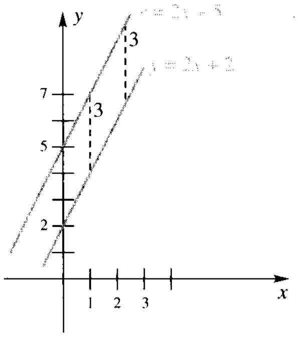


Figura 14

Rectas paralelas Se dice que dos rectas son paralelas cuando no tienen puntos en común. Por ejemplo, las rectas cuyas ecuaciones son $y = 2x + 2$ y $y = 2x + 5$ son paralelas porque, para todo valor de x, la segunda recta está tres unidades por arriba de la primera (véase la figura 14). De manera análoga, las rectas con ecuaciones $-2x + 3y + 12 = 0$ y $4x - 6y = 5$ son paralelas. Para ver esto, de cada ecuación despéjese y (*i.e., es decir*, escriba cada una en la forma pendiente intersección. Esto da $y = \frac{2}{3}x - 4$ y $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{6}$, respectivamente. Otra vez, como las pendientes son iguales, una recta estará un número fijo de unidades por arriba o por debajo de la otra, de modo que las rectas nunca se intersectarán. Si dos rectas tienen la misma pendiente y la misma intersección y, entonces las dos rectas son la misma y no son paralelas.

Resumimos estableciendo que dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente y diferentes intersecciones con el eje y. Dos rectas verticales son paralelas si y sólo si son rectas distintas.

EJEMPLO 6 Encuentre la ecuación de la recta que pasa por (6, 8) y es paralela a la recta con ecuación $3x - 5y = 11$.

SOLUCIÓN Cuando despejamos la y de $3x - 5y = 11$, obtenemos $y = \frac{3}{5}x - \frac{11}{5}$, de la cual leemos que la pendiente de la recta es $\frac{3}{5}$. La ecuación de la recta deseada es

$$y - 8 = \tfrac{3}{5}(x - 6)$$

o, de manera equivalente, $y = \frac{3}{5}x + \frac{22}{5}$. Sabemos que estas rectas son distintas porque las intersecciones con el eje y son diferentes. ■

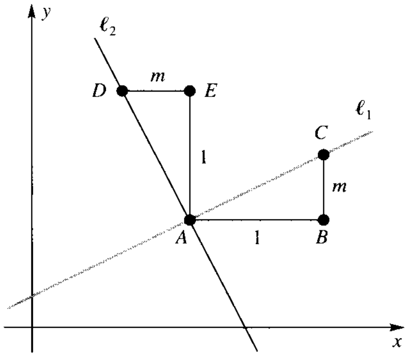


Figura 15

Rectas perpendiculares ¿Existe alguna condición sencilla que caracterice a las rectas perpendiculares? Sí; *dos rectas no verticales son perpendiculares si y sólo si sus pendientes son recíprocas negativas, una respecto de la otra.* Para ver por qué esto es verdadero, considere la figura 15. Ésta cuenta casi toda la historia; se deja como ejercicio (problema 57) construir una demostración geométrica de que dos rectas (no verticales) son perpendiculares si y sólo si $m_2 = -1/m_1$.

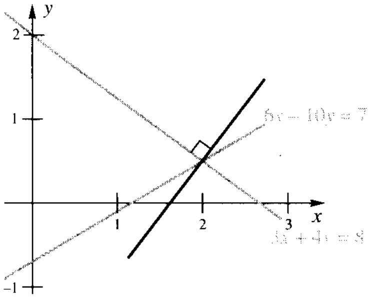


Figura 16

EJEMPLO 7 Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas con ecuaciones $3x + 4y = 8$ y $6x - 10y = 7$ y que es perpendicular a la primera de estas rectas (véase la figura 16).

SOLUCIÓN Para encontrar el punto de intersección de las dos rectas, multiplicamos la primera ecuación por −2 y la sumamos a la segunda ecuación

$$\begin{aligned} -6x - 8y &= -16 \\ 6x - 10y &= 7 \\ \hline -18y &= -9 \\ y &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Al sustituir $y = \frac{1}{2}$ en cualesquiera de las ecuaciones originales se obtiene $x = 2$. El punto de intersección es $\left(2, \frac{1}{2}\right)$. Cuando despejamos la y de la primera ecuación (para ponerla en la forma pendiente intersección), obtenemos $y = -\frac{3}{4}x + 2$. Una recta perpendicular a ellas tiene pendiente $\frac{4}{3}$. La ecuación de la recta requerida es

$$y - \tfrac{1}{2} = \tfrac{4}{3}(x - 2)$$ ■

Revisión de conceptos

1. La distancia entre los puntos $(-2, 3)$ y (x, y) es ________.

2. La ecuación de la circunferencia de radio 5 y centro en $(-4, 2)$ es ________.

3. El punto medio del segmento de recta que une a $(-2, 3)$ y $(5, 7)$ es ________.

4. La recta que pasa por (a, b) y (c, d) tiene pendiente $m =$ ________, siempre que $a \neq c$.

Conjunto de problemas 0.3

En los problemas del 1 al 4 grafique los puntos dados en el plano coordenado y luego determine la distancia entre ellos.

1. $(3, 1), (1, 1)$

2. $(-3, 5), (2, -2)$

3. $(4, 5), (5, -8)$

4. $(-1, 5), (6, 3)$

5. Demuestre que el triángulo cuyos vértices son $(5, 3), (-2, 4)$ y $(10, 8)$ es isósceles.

6. Demuestre que el triángulo cuyos vértices son $(2, -4), (4, 0)$ y $(8, -2)$ es un triángulo rectángulo.

7. Los puntos $(3, -1)$ y $(3, 3)$ son dos vértices de un cuadrado. Proporcione otros tres pares de posibles vértices.

8. Encuentre el punto en el eje x que sea equidistante de $(3, 1)$ y $(6, 4)$.

9. Determine la distancia entre $(-2, 3)$ y el punto medio del segmento de recta que une a $(-2, -2)$ y $(4, 3)$.

10. Determine la longitud del segmento de recta que une los puntos medios de los segmentos AB y CD, donde $A = (1, 3)$, $B = (2, 6)$, $C = (4, 7)$ y $D = (3, 4)$.

En los problemas del 11 al 16 determine la ecuación de la circunferencia que satisface las condiciones dadas.

11. Centro en $(1, 1)$, radio 1.

12. Centro en $(-2, 3)$, radio 4.

13. Centro en $(2, -1)$ y que pasa por $(5, 3)$.

14. Centro en $(4, 3)$ y que pasa por $(6, 2)$.

15. Diámetro AB, donde $A = (1, 3)$ y $B = (3, 7)$.

16. Centro en $(3, 4)$ y tangente al eje x.

En los problemas del 17 al 22 determine el centro y el radio de la circunferencia con la ecuación dada.

17. $x^2 + 2x + 10 + y^2 - 6y - 10 = 0$

18. $x^2 + y^2 - 6y = 16$

19. $x^2 + y^2 - 12x + 35 = 0$

20. $x^2 + y^2 - 10x + 10y = 0$

21. $4x^2 + 16x + 15 + 4y^2 + 6y = 0$

22. $x^2 + 16x + \frac{105}{16} + 4y^2 + 3y = 0$

En los problemas del 23 al 28, determine la pendiente de la recta que contiene los dos puntos dados.

23. $(1, 1)$ y $(2, 2)$

24. $(3, 5)$ y $(4, 7)$

25. $(2, 3)$ y $(-5, -6)$

26. $(2, -4)$ y $(0, -6)$

27. $(3, 0)$ y $(0, 5)$

28. $(-6, 0)$ y $(0, 6)$

En los problemas del 29 al 34 determine una ecuación para cada recta. Luego escriba su respuesta en la forma $Ax + By + C = 0$.

29. Pasa por $(2, 2)$ con pendiente -1

30. Pasa por $(3, 4)$ con pendiente -1

31. Con intercepción y igual a 3 y pendiente 2

32. Con intercepción y igual a 5 y pendiente 0

33. Pasa por $(2, 3)$ y $(4, 8)$

34. Pasa por $(4, 1)$ y $(8, 2)$

En los problemas del 35 al 38 determine la pendiente y la intercepción con el eje y de cada recta.

35. $3y = -2x + 1$

36. $-4y = 5x - 6$

37. $6 - 2y = 10x - 2$ **38.** $4x + 5y = -20$

39. Escriba una ecuación para la recta que pasa por $(3, -3)$ y que es

(a) paralela a la recta $y = 2x + 5$;

(b) perpendicular a la recta $y = 2x + 5$;

(c) paralela a la recta $2x + 3y = 6$;

(d) perpendicular a la recta $2x + 3y = 6$;

(e) paralela a la recta que pasa por $(-1, 2)$ y $(3, -1)$;

(f) paralela a la recta $x = 8$;

(g) perpendicular a la recta $x = 8$.

40. Determine el valor de c para el cual la recta $3x + cy = 5$

(a) pasa por el punto $(3, 1)$;

(b) es paralela al eje y;

(c) es paralela a la recta $2x + y = -1$;

(d) tiene intersecciones con el eje x y con el eje y iguales;

(e) es perpendicular a la recta $y - 2 = 3(x + 3)$.

41. Escriba la ecuación para la recta que pasa por $(-2, -1)$ y que es perpendicular a la recta $y + 3 = -\frac{2}{3}(x - 5)$.

42. Determine el valor de k, tal que la recta $kx - 3y = 10$

(a) es paralela a la recta $y = 2x + 4$;

(b) es perpendicular a la recta $y = 2x + 4$;

(c) es perpendicular a la recta $2x + 3y = 6$.

43. ¿El punto $(3, 9)$ está por arriba o por debajo de la recta $y = 3x - 1$?

44. Demuestre que la ecuación de la recta con intersección con el eje x igual a $a \neq 0$ e intersección con el eje y igual a $b \neq 0$ puede escribirse como

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

En los problemas del 45 al 48 determine las coordenadas del punto de intersección. Después escriba una ecuación para la recta que pasa por ese punto y que es perpendicular a la primera de las rectas dadas.

45. $\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ -3x + y &= 5 \end{aligned}$ **46.** $\begin{aligned} 4x - 5y &= 8 \\ 2x + y &= -10 \end{aligned}$

47. $\begin{aligned} 3x - 4y &= 5 \\ 2x + 3y &= 9 \end{aligned}$ **48.** $\begin{aligned} 5x - 2y &= 5 \\ 2x + 3y &= 6 \end{aligned}$

49. Los puntos $(2, 3)$, $(6, 3)$, $(6, -1)$ y $(2, -1)$ son vértices de un cuadrado. Determine las ecuaciones de la circunferencia inscrita y de la circunferencia circunscrita.

≈ **50.** Un banda se ajusta estrechamente alrededor de dos circunferencias, con ecuaciones $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$ y $(x + 9)^2 + (y - 10)^2 = 16$. ¿Cuál es la longitud de dicha banda?

51. Demuestre que el punto medio de la hipotenusa de cualquier triángulo rectángulo equidista de los tres vértices.

52. Encuentre una ecuación de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo rectángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(8, 0)$ y $(0, 6)$.

53. Demuestre que las dos circunferencias $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 11 = 0$ y $x^2 + y^2 + 20x - 12y + 72 = 0$ no se intersectan. *Sugerencia:* Determine la distancia entre los dos centros.

54. ¿Qué relación deben cumplir a, b y c, si $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$ es la ecuación de una circunferencia?

55. El techo de un ático forma un ángulo de 30° con el piso. Un tubo de 2 pulgadas de radio se coloca a lo largo del borde del ático, de tal manera que un lado del tubo toca el techo y el otro lado toca el piso (véase la figura 17). ¿Cuál es la distancia d desde el borde del ático hasta donde el tubo toca el piso?

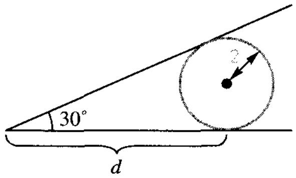


Figura 17

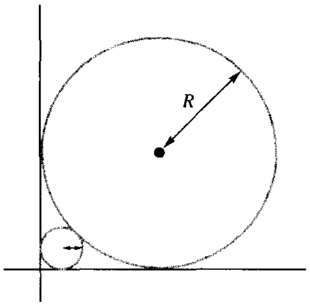


Figura 18

56. Una circunferencia de radio R se coloca en el primer cuadrante, como se muestra en la figura 18. ¿Cuál es el radio r de la circunferencia más grande que puede colocarse entre la primera circunferencia y el origen?

57. Construya una demostración geométrica, con base en la figura 15, que pruebe que dos rectas son perpendiculares sí y sólo si sus pendientes son recíprocas negativas una de la otra.

58. Demuestre que el conjunto de puntos que están al doble de distancia de $(3, 4)$ que de $(1, 1)$ forman una circunferencia. Determine su centro y radio.

59. El Teorema de Pitágoras dice que las áreas A, B y C de los cuadrados en la figura 19 satisfacen $A + B = C$. Demuestre que los semicírculos y los triángulos equiláteros satisfacen la misma relación y luego sugiera un teorema general de estos hechos.

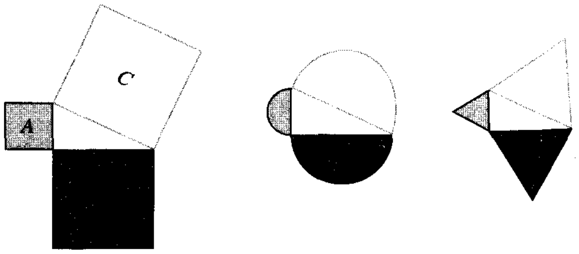


Figura 19

60. Considere una circunferencia C y un punto P exterior a ella. Sea PT el segmento de recta tangente a C en T, y suponga que la recta que pasa por P y por el centro de C intersecta a C en M y en N. Demuestre que $(PM)(PN) = (PT)^2$.

≈ **61.** Una banda se ajusta alrededor de las tres circunferencias $x^2 + y^2 = 4$, $(x - 8)^2 + y^2 = 4$ y $(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 4$, como se muestra en la figura 20. Determine la longitud de esta banda.

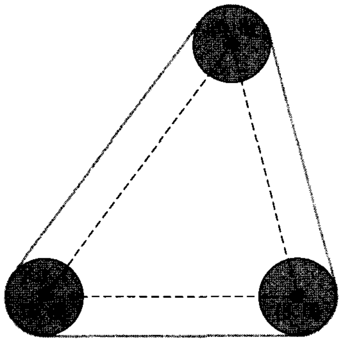


Figura 20

62. Estudie los problemas 50 y 61. Considere un conjunto de circunferencias de radio r que no se intersectan, cuyos centros son los vértices de un polígono convexo de n lados con longitudes $d_1, d_2, \ldots, d_n$. ¿Cuál es la longitud de la banda que se ajusta alrededor de estas circunferencias (de la misma forma que se muestra en la figura 20)?

Puede demostrarse que la distancia d del punto (x_1, y_1) *a la recta* $Ax + By + C = 0$ *es*

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Utilice este resultado para determinar la distancia desde el punto dado hasta la recta dada.

63. $(-3, 2); 3x + 4y = 6$

64. $(4, -1); 2x - 2y + 4 = 0$

65. $(-2, -1); 5y = 12x + 1$

66. $(3, -1); y = 2x - 5$

En los problemas 67 y 68 determine la distancia (perpendicular) entre las rectas paralelas dadas. Sugerencia: primero encuentre un punto sobre una de las rectas.

67. $2x + 4y = 7, 2x + 4y = 5$

68. $7x - 5y = 6, 7x - 5y = -1$

69. Determine la ecuación para la recta que biseca al segmento de recta que va de $(-2, 3)$ a $(1, -2)$ y que forma ángulos rectos con este segmento de recta.

70. El centro de la circunferencia circunscrita a un triángulo se encuentra en los bisectores perpendiculares (mediatrices) de los lados. Utilice este hecho para encontrar el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo con vértices $(0, 4)$, $(2, 0)$ y $(4, 6)$.

71. Determine el radio de la circunferencia que está inscrita en un triángulo con lados de longitudes 3, 4 y 5 (véase la figura 21).

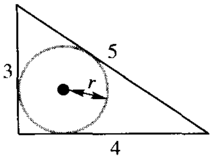


Figura 21

72. Suponga que (a, b) está en la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$. Demuestre que la recta $ax + by = r^2$ es tangente a la circunferencia en (a, b).

73. Determine las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = 36$ que pasan por el punto $(12, 0)$. *Sugerencia:* véase el problema 72.

74. Exprese la distancia perpendicular entre las rectas paralelas $y = mx + b$ y $y = mx + B$, en términos de m, b y B. *Sugerencia:* la distancia pedida es la misma que aquella entre $y = mx$ y $y = mx + B - b$.

75. Demuestre que la recta que pasa por los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al tercer lado. Sugerencia: puede suponer que el triángulo tiene vértices en $(0, 0)$, $(a, 0)$ y (b, c).

76. Demuestre que los segmentos de recta que unen a los puntos medios de lados adyacentes de cualquier cuadrilátero (polígono con cuatro lados) forman un paralelogramo.

≈ **77.** Una rueda cuyo borde tiene ecuación $x^2 + (y - 6)^2 = 25$ gira rápidamente en dirección contraria a las manecillas del reloj. Una partícula de lodo, en el borde, sale despedida en el punto $(3, 2)$ y vuela hacia la pared en $x = 11$. ¿Aproximadamente a qué altura pegará en la pared? *Sugerencia:* la partícula de lodo vuela de forma tangente tan rápido que los efectos de la gravedad son despreciables durante el tiempo que le toma golpear la pared.

Respuestas a la revisión de conceptos:
1. $\sqrt{(x + 2)^2 + (y - 3)^2}$ **2.** $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 25$
3. $(1.5, 5)$ **4.** $(d - b)/(c - a)$

0.4
Gráficas de ecuaciones

El uso de coordenadas para puntos en el plano nos permite describir curvas (un objeto geométrico) por medio de una ecuación (un objeto algebraico). En las secciones anteriores vimos cómo esto se hizo para circunferencias y rectas. Ahora queremos considerar el proceso inverso: graficar una ecuación. La **gráfica de una ecuación** en x y y consiste en aquellos puntos en el plano cuyas coordenadas (x, y) satisfacen la ecuación; es decir, hacen verdadera la igualdad.

Procedimiento para graficar Para graficar una ecuación, por ejemplo, $y = 2x^3 - x + 19$, manualmente, podemos seguir un procedimiento sencillo de tres pasos:

Paso 1: Obtener las coordenadas de algunos puntos que satisfagan la ecuación.

Paso 2: Graficar estos puntos en el plano.

Paso 3: Conectar los puntos con una curva suave.

Este método simplista tendrá que ser suficiente hasta el capítulo 3, cuando utilizaremos métodos más avanzados para graficar ecuaciones. La mejor forma de hacer el paso 1 es construir una tabla de valores. Asignar valores a una de las variables, tal como x, y determinar los valores correspondientes de la otra variable, creando una lista, en forma tabular, de los resultados.

Una calculadora gráfica o un sistema de álgebra por computadora (CAS, del inglés computer algebra sistem) seguirán un procedimiento muy similar, aunque su proceso es transparente para el usuario. Un usuario sólo define la función y pide a la calculadora gráfica, o a la computadora, que la grafique.

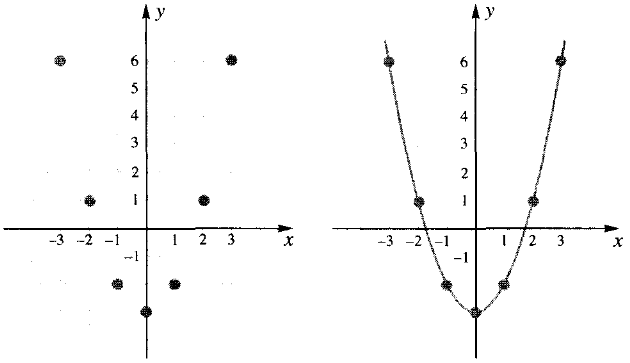
EJEMPLO 1 Haga la gráfica de la ecuación $y = x^2 - 3$.

SOLUCIÓN El procedimiento de tres pasos se muestra en la figura 1.

$y = x^2 - 3$

x	y
−3	6
−2	1
−1	−2
0	−3
1	−2
2	1
3	6

Paso 1
Construya una tabla de valores

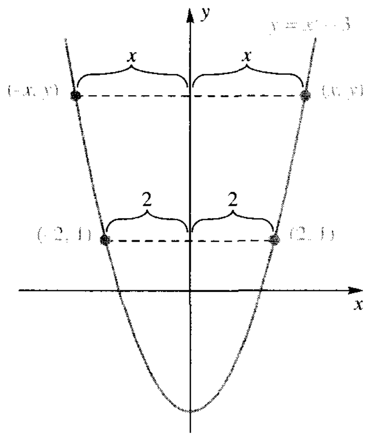


Paso 2
Trace esos puntos

Paso 3
Conecte esos puntos por medio de una curva suave

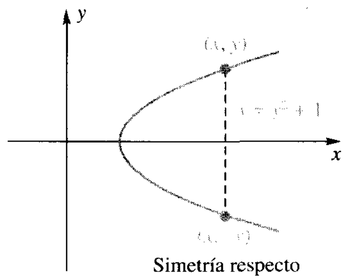
Figura 1 ■

Por supuesto, usted necesita un poco de sentido común y hasta un poco de fe. Cuando obtenga puntos que parecen fuera de lugar, verifique sus cálculos. Cuando conecte los puntos que ha trazado por medio de una curva suave, estará suponiendo que la curva se comporta de manera regular entre puntos consecutivos, lo cual es un acto de fe. Por esto, usted debe graficar suficientes puntos de modo que el esbozo de la curva parezca ser claro; entre más puntos grafique, menos fe necesitará. También, debe reconocer que rara vez muestra la curva completa. En nuestro ejemplo, la curva tiene ramas infinitamente largas que se amplían cada vez más. Pero nuestra gráfica muestra las características esenciales. Ésta es nuestra meta al graficar. Mostrar lo suficiente de la gráfica de modo que las características esenciales sean visibles. Más adelante (sección 3.5) usaremos las herramientas del cálculo para refinar y mejorar nuestra comprensión de las gráficas.



Simetría respecto al eje y

Figura 2



Simetría respecto al eje x

Figura 3

Simetría de una gráfica Algunas veces podemos reducir a la mitad el trabajo de graficar, si reconocemos ciertas simetrías de la gráfica reveladas por su ecuación. Observe la gráfica de $y = x^2 - 3$, dibujada anteriormente y otra vez en la figura 2. Si el plano coordenado se doblase a lo largo del eje y, las dos ramas de la gráfica coincidirían. Por ejemplo, (3, 6) coincidiría con (−3, 6); (2, 1) coincidiría con (−2, 1); y de una manera más general, (x, y) coincidiría con $(-x, y)$. De forma algebraica, esto corresponde al hecho de que reemplazar x por $-x$ en la ecuación $y = x^2 - 3$ resulta en una ecuación equivalente.

Considere una gráfica arbitraria. Es simétrica respecto al eje y si siempre que (x, y) está en la gráfica, entonces $(-x, y)$ también está en la gráfica (véase la figura 2). De forma análoga, es simétrica respecto al eje x si siempre que (x, y) está en la gráfica, $(x, -y)$ también está en la gráfica (véase la figura 3). Por último, una gráfica es simétrica respecto al origen si cada vez que (x, y) está en la gráfica, $(-x, -y)$ también está en la gráfica (véase el ejemplo 2).

En términos de ecuaciones, tenemos tres pruebas sencillas. La gráfica de una ecuación es

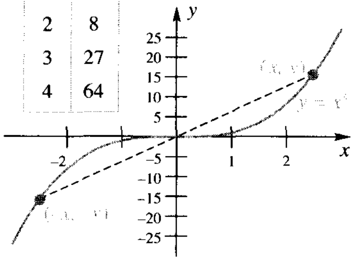
1. simétrica respecto al eje y, si al reemplazar x por $-x$ se obtiene una ecuación equivalente (por ejemplo, $y = x^2$);
2. simétrica respecto al eje x, si al reemplazar y por $-y$ se obtiene una ecuación equivalente (por ejemplo, $x = y^2 + 1$);
3. simétrica respecto al origen, si al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$ se obtiene una ecuación equivalente [$y = x^3$ es un buen ejemplo ya que $-y = (-x)^3$ es equivalente a $y = x^3$].

EJEMPLO 2 Haga un bosquejo de la gráfica de $y = x^3$.

SOLUCIÓN Notemos, como se señaló anteriormente, que la gráfica será simétrica con respecto al origen, así que sólo necesitamos obtener una tabla de valores para x no negativa; por medio de la simetría podemos determinar puntos que estén apareados. Por ejemplo, que $(2, 8)$ pertenezca a la gráfica nos dice que $(-2, -8)$ está en la gráfica; que $(3, 27)$ esté en la gráfica nos dice que $(-3, -27)$ está en la gráfica, y así sucesivamente. Véase la figura 4. ■

$y = x^3$

x	y
0	0
1	1
2	8
3	27
4	64



Simetría respecto al origen

Figura 4

Al graficar $y = x^3$, utilizamos una escala más pequeña en el eje y que en el eje x. Esto hizo posible mostrar una parte mayor de la gráfica (al aplanarse, la gráfica también se distorsionó). Cuando grafique a mano, le sugerimos que antes de colocar las escalas en los dos ejes debe examinar su tabla de valores. Seleccione escalas de modo que todos, o la mayoría de los puntos, puedan graficarse y se conserve su gráfica de tamaño razonable. Con frecuencia, una calculadora gráfica o un sistema de álgebra computacional (CAS) seleccionan la escala para las y una vez que usted ha elegido las x que se utilizarán. Por lo tanto, la primera elección que usted hace es graficar los valores de x. La mayoría de las calculadoras gráficas y los CAS le permiten pasar por alto el escalamiento automático del eje y. Es posible que en algunos casos usted necesite esta opción.

Intersecciones con los ejes coordenados

Los puntos en donde la gráfica de una ecuación cruza los ejes coordenados tienen un papel importante en muchos problemas. Por ejemplo, considere

$$y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$$

Observe que $y = 0$ cuando $x = -2, 1, 3$. Los números -2, 1 y 3 se denominan **intersecciones con el eje x**. De manera análoga, $y = 6$ cuando $x = 0$, y así, 6 se llama la **intersección con el eje y**.

Calculadoras gráficas

Si usted tiene una calculadora gráfica, utilícela siempre que sea posible para reproducir las gráficas que se muestran en las figuras.

EJEMPLO 3 Determine todas las intersecciones con los ejes coordenados de la gráfica de $y^2 - x + y - 6 = 0$.

SOLUCIÓN Haciendo $y = 0$ en la ecuación dada, obtenemos $x = -6$, y así, la intersección con el eje x es -6. Haciendo $x = 0$ en la ecuación, encontramos que $y^2 + y - 6 = 0$, o $(y + 3)(y - 2) = 0$; las intersecciones con el eje y son -3 y 2. Una verificación de las simetrías indica que la gráfica no tiene ninguna simetría de los tres tipos estudiados anteriormente. La gráfica se muestra en la figura 5. ■

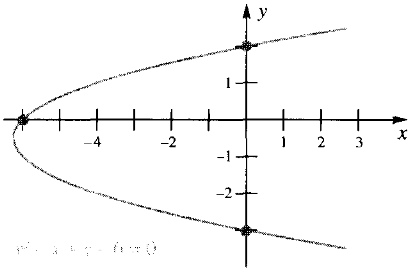


Figura 5

Como las ecuaciones cuadráticas y cúbicas con frecuencia se utilizarán como ejemplos en el trabajo posterior, mostramos sus gráficas comunes en la figura 6.

Las gráficas de las ecuaciones cuadráticas son curvas en forma de copas llamadas **parábolas**. Si una ecuación tiene la forma $y = ax^2 + bx + c$, o $x = ay^2 + by + c$, con $a \neq 0$; su gráfica es una parábola. En el primer caso, la gráfica se abre hacia arriba, si $a > 0$ y se abre hacia abajo si $a < 0$. En el segundo caso, la gráfica se abre hacia la derecha si $a > 0$ y se abre hacia la izquierda si $a < 0$. Observe que la ecuación del ejemplo 3 puede ponerse en la forma $x = y^2 + y - 6$.

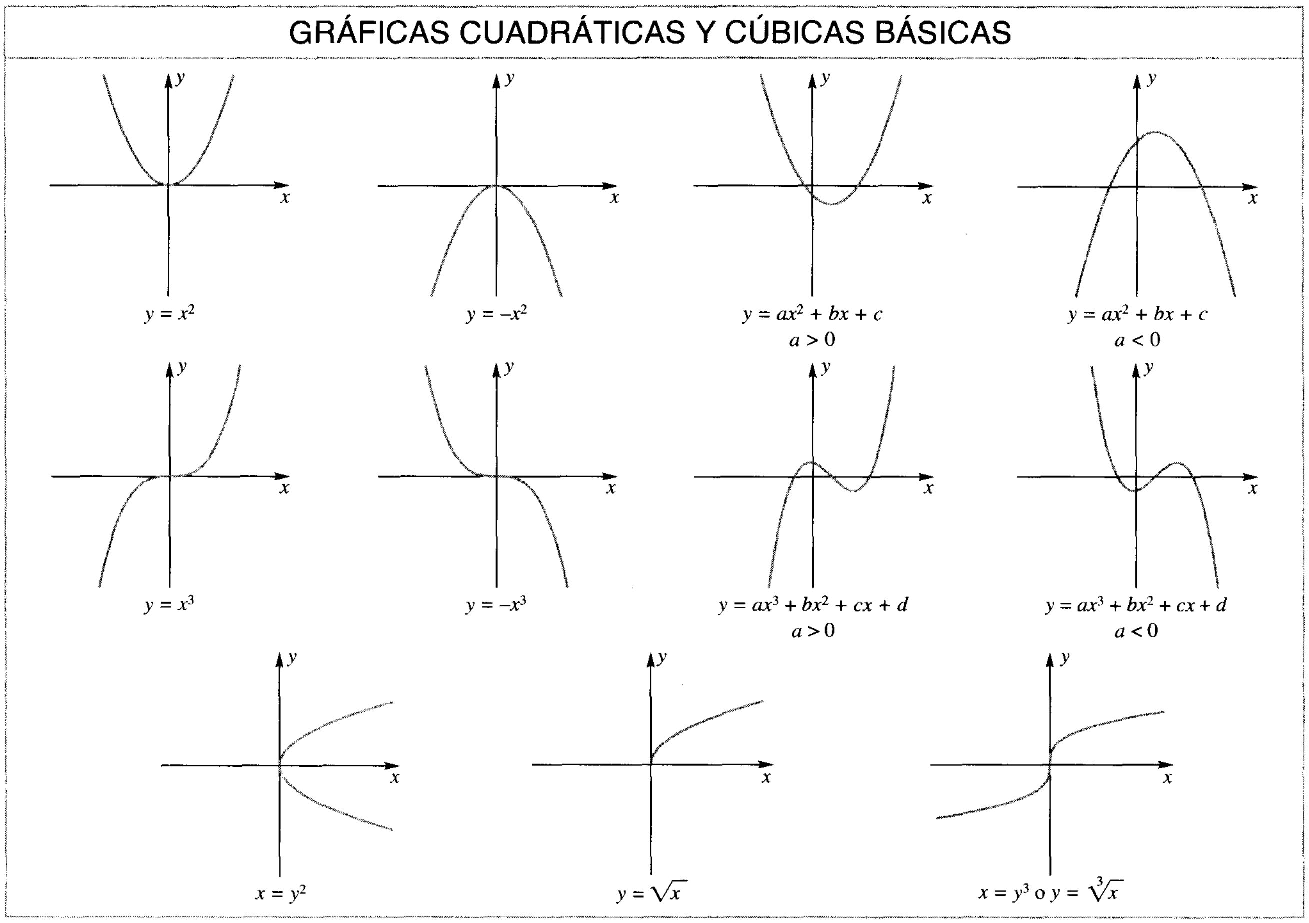
Intersecciones de gráficas

Con frecuencia, necesitamos conocer los puntos de intersección de dos gráficas. Estos puntos se determinan cuando se resuelven, de manera simultánea, las dos ecuaciones para las gráficas, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Determine los puntos de intersección de la recta $y = -2x + 2$ y la parábola $y = 2x^2 - 4x - 2$, y haga un bosquejo de ambas gráficas en el mismo plano de coordenadas.

SOLUCIÓN Debemos resolver de manera simultánea las dos ecuaciones. Esto es fácil de hacer al sustituir la expresión para y de la primera ecuación en la segunda y al despejar enseguida la x de la ecuación resultante.

$$\begin{aligned} -2x + 2 &= 2x^2 - 4x - 2 \\ 0 &= 2x^2 - 2x - 4 \\ 0 &= 2(x + 1)(x - 2) \\ x &= -1, \qquad x = 2 \end{aligned}$$


GRÁFICAS CUADRÁTICAS Y CÚBICAS BÁSICAS

$y = x^2$

$y = -x^2$

$y = ax^2 + bx + c$
$a > 0$

$y = ax^2 + bx + c$
$a < 0$

$y = x^3$

$y = -x^3$

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$a > 0$

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$a < 0$

$x = y^2$

$y = \sqrt{x}$

$x = y^3$ o $y = \sqrt[3]{x}$

Figura 6

Por medio de sustitución, encontramos que los valores correspondientes de y son 4 y -2; por lo tanto, los puntos de intersección son $(-1, 4)$ y $(2, -2)$. Las dos gráficas se muestran en la figura 7.

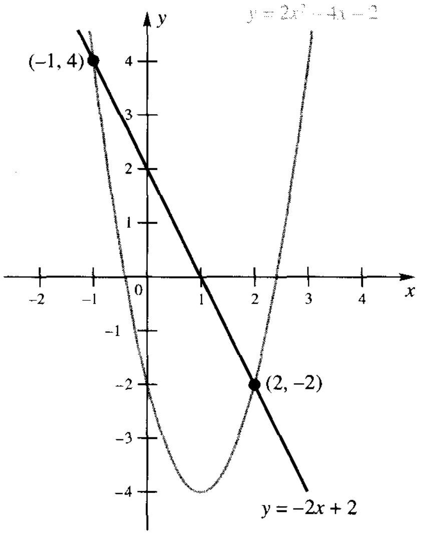


Figura 7

■

Revisión de conceptos

1. Si cada vez que (x, y) está en la gráfica, $(-x, y)$ también está en ella; entonces, la gráfica es simétrica respecto a _______.

2. Si $(-4, 2)$ está en una gráfica que es simétrica respecto al origen, entonces _______ también está en la gráfica.

3. La gráfica de $y = (x + 2)(x - 1)(x - 4)$ tiene intersección con el eje y _______ e intersecciones con el eje x _______.

4. La gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ es una _______ si $a = 0$ y una _______ si $a \neq 0$.

Conjunto de problemas 0.4

En los problemas del 1 al 30 trace la gráfica de cada ecuación. Comience con la verificación de las simetrías y asegúrese de encontrar todas las intersecciones con el eje x *y el eje* y.

1. $y = -x^2 + 1$ **2.** $x = -y^2 + 1$

3. $x = -4y^2 - 1$ **4.** $y = 4x^2 - 1$

5. $x^2 + y = 0$ **6.** $y = x^2 - 2x$

7. $7x^2 + 3y = 0$ **8.** $y = 3x^2 - 2x + 2$

9. $x^2 + y^2 = 4$ **10.** $3x^2 + 4y^2 = 12$

11. $y = -x^2 - 2x + 2$ **12.** $4x^2 + 3y^2 = 12$

13. $x^2 - y^2 = 4$ **14.** $x^2 + (y - 1)^2 = 9$

15. $4(x - 1)^2 + y^2 = 36$

16. $x^2 - 4x + 3y^2 = -2$

17. $x^2 + 9(y + 2)^2 = 36$

GC **18.** $x^4 + y^4 = 1$ GC **19.** $x^4 + y^4 = 16$

GC **20.** $y = x^3 - x$ GC **21.** $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

GC **22.** $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

GC **23.** $2x^2 - 4x + 3y^2 + 12y = -2$

GC **24.** $4(x - 5)^2 + 9(y + 2)^2 = 36$

GC **25.** $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$

GC **26.** $y = x^2(x - 1)(x - 2)$

GC **27.** $y = x^2(x - 1)^2$

GC **28.** $y = x^4(x - 1)^4(x + 1)^4$

GC **29.** $|x| + |y| = 1$ GC **30.** $|x| + |y| = 4$

GC *En los problemas del 31 al 38, en el mismo plano coordenado, trace las gráficas de ambas ecuaciones. Determine y etiquete los puntos de intersección de las dos gráficas (véase el ejemplo 4).*

31. $y = -x + 1$, $y = (x + 1)^2$ **32.** $y = 2x + 3$, $y = -(x - 1)^2$

33. $y = -2x + 3$, $y = -2(x - 4)^2$ **34.** $y = -2x + 3$, $y = 3x^2 - 3x + 12$

35. $y = x$, $x^2 + y^2 = 4$ **36.** $y = x - 1$, $2x^2 + 3y^2 = 12$

37. $y - 3x = 1$, $x^2 + 2x + y^2 = 15$ **38.** $y = 4x + 3$, $x^2 + y^2 = 81$

39. Seleccione la ecuación que corresponda a cada una de las gráficas en la figura 8.

(a) $y = ax^2$, con $a > 0$

(b) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a > 0$

(c) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a < 0$

(d) $y = ax^3$, con $a > 0$

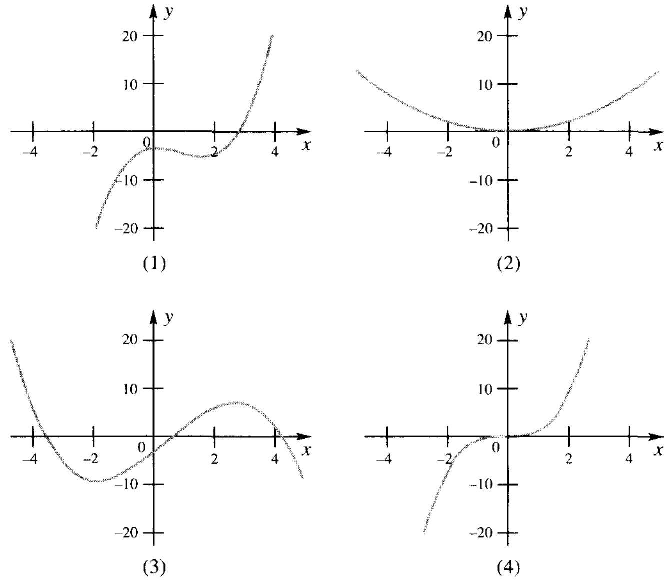


Figura 8

≈ **40.** Determine la distancia entre los puntos en la circunferencia $x^2 + y^2 = 13$ con abscisas -2 y 2. De tales distancias, ¿cuántas existen?

≈ **41.** Determine la distancia entre los puntos en la circunferencia $x^2 + 2x + y^2 - 2y = 20$ con abscisas -2 y 2. De tales distancias, ¿cuántas existen?

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** el eje y
2. $(4, -2)$
3. 8; $-2, 1, 4$ **4.** recta; parábola

0.5

Funciones y sus gráficas

En todas las matemáticas, el concepto de función es uno de los más básicos y desempeña un papel indispensable en cálculo.

Definición

Una **función** f es una regla de correspondencia que asocia a cada objeto x en un conjunto —denominado **dominio**— un solo valor $f(x)$ de un segundo conjunto. El conjunto de todos los valores así obtenidos se denomina **rango** de la función. (Véase la figura 1).

Piense en una función como una máquina que toma como entrada un valor x y produce una salida $f(x)$. (Véase la figura 2). Cada valor de entrada se hace corresponder con un *solo* valor de salida. No obstante, puede suceder que diferentes valores de entrada den el mismo valor de salida.

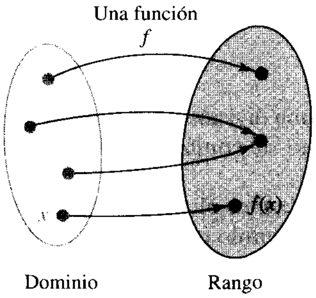


Figura 1

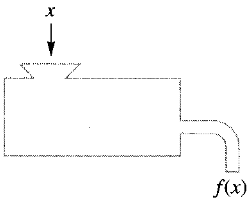


Figura 2

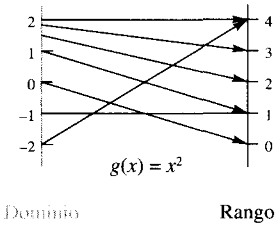


Figura 3

La definición no pone restricción sobre los conjuntos del dominio y del rango. El dominio podría consistir en el conjunto de personas en su curso de cálculo, el rango el conjunto de calificaciones $\{A, B, C, D, F\}$ que obtendrán y la regla de correspondencia la asignación de calificaciones. Casi todas las funciones que usted encontrará en este texto serán funciones de uno o más números reales. Por ejemplo, la función g podría tomar un número real x y elevarlo al cuadrado, lo cual produciría el número real x^2. En este caso tenemos una fórmula que da la regla de correspondencia; esto es, $g(x) = x^2$. Un diagrama esquemático de esta función se muestra en la figura 3.

Notación funcional Una sola letra como f (o g o F) se utiliza para nombrar una función. Entonces $f(x)$, que se lee "f de x" o "f en x", denota el valor que f asigna a x. Por lo tanto, si $f(x) = x^3 - 4$, entonces

$$f(2) = 2^3 - 4 = 4$$

$$f(a) = a^3 - 4$$

$$f(a + h) = (a + h)^3 - 4 = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 4$$

Estudie cuidadosamente los siguientes ejemplos. Aunque algunos podrían parecer extraños, tendrán un papel importante en el capítulo 2.

EJEMPLO 1 Para $f(x) = x^2 - 2x$, determine y simplifique

(a) $f(4)$ (b) $f(4 + h)$

(c) $f(4 + h) - f(4)$ (d) $[f(4 + h) - f(4)]/h$

SOLUCIÓN

(a) $f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 = 8$

(b) $f(4 + h) = (4 + h)^2 - 2(4 + h) = 16 + 8h + h^2 - 8 - 2h$
$= 8 + 6h + h^2$

(c) $f(4 + h) - f(4) = 8 + 6h + h^2 - 8 = 6h + h^2$

(d) $\dfrac{f(4 + h) - f(4)}{h} = \dfrac{6h + h^2}{h} = \dfrac{h(6 + h)}{h} = 6 + h$ ■

Dominio y rango Para especificar por completo una función, debemos establecer, además de la regla de correspondencia, el dominio de la función. Por ejemplo, si F es la función definida por $F(x) = x^2 + 1$ con dominio $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ (véase la figura 4), entonces el rango es $\{1, 2, 5, 10\}$. La regla de correspondencia, junto con el dominio, determina el rango.

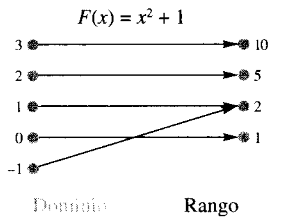


Figura 4

Cuando no se especifica un dominio para una función, suponemos que es el conjunto más grande de números reales para el cual la regla de la función tiene sentido. Éste se denomina **dominio natural**. Los números que debe recordar para excluirlos del dominio natural son aquellos que causarían una división entre cero o la raíz cuadrada de un número negativo.

EJEMPLO 2 Determine los dominios naturales para

(a) $f(x) = 1/(x - 3)$ (b) $g(t) = \sqrt{9 - t^2}$

(c) $h(w) = 1/\sqrt{9 - w^2}$

SOLUCIÓN

(a) Debemos excluir al 3 del dominio porque requeriría una división entre cero. Así, el dominio natural es $\{x: x \neq 3\}$. Esto se puede leer como "el conjunto de las x, tales que x no es igual a 3".

(b) Para evitar la raíz cuadrada de un número negativo debemos elegir t, de modo que $9 - t^2 \geq 0$. Así, t debe satisfacer $|t| \leq 3$. Por lo tanto, el dominio natural es $\{t: |t| \leq 3\}$, que mediante la notación de intervalos puede escribirse como $[-3, 3]$.

(c) Ahora debemos evitar la división entre cero y las raíces cuadradas de números negativos, de modo que excluimos a −3 y 3 del dominio natural. Por lo tanto, el dominio natural es el intervalo $(-3, 3)$. ■

Cuando la regla para una función está dada por medio de una ecuación de la forma $y = f(x)$, llamamos a la x **variable independiente** y a la y **variable dependiente**. *Cualquier* valor en el dominio puede sustituirse por la variable independiente. Una vez seleccionado, este valor de x determina completamente el correspondiente valor de la variable dependiente y.

La entrada para una función no necesita ser un solo número real. En muchas aplicaciones importantes, una función depende de más de una variable independiente. Por ejemplo, el monto A del pago mensual de un automóvil depende del préstamo del capital P, la tasa de interés r y el número n de pagos mensuales solicitados. Podríamos escribir tal función como $A(P, r, n)$. El valor de A (16000, 0.07, 48) —es decir, el pago mensual requerido para saldar un préstamo de \$16,000 en 48 meses a una tasa de interés anual de 7%— es \$383.14. En esta situación no existe una fórmula matemática sencilla que proporcione la salida A en términos de las variables de entrada P, r y n.

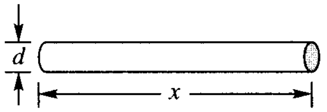


Figura 5

EJEMPLO 3 Denótese con $V(x, d)$ el volumen de una varilla cilíndrica de longitud x y diámetro d. (Véase la figura 5.) Determine

(a) una fórmula para $V(x, d)$
(b) el dominio y rango de V
(c) $V(4, 0.1)$

SOLUCIÓN

(a) $V(x, d) = x \cdot \pi\left(\dfrac{d}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi x d^2}{4}$

(b) Puesto que la longitud y el diámetro de la varilla deben ser positivos, el dominio es el conjunto de pares ordenados (x, d) donde $x > 0$ y $d > 0$. Cualquier volumen positivo es posible, de modo que el rango es $(0, \infty)$.

(c) $V(4, 0.1) = \dfrac{\pi \cdot 4 \cdot 0.1^2}{4} = 0.01\pi$ ■

En los capítulos del 1 al 11 se usarán principalmente funciones de una sola variable independiente. A partir del capítulo 12 estudiaremos propiedades de funciones de dos o más variables independientes.

Calculadora graficadora

Recuerde, utilice su calculadora graficadora para reproducir las figuras en este libro. Experimente con diferentes ventanas hasta que se convenza de que comprende todos los aspectos importantes de la gráfica.

Gráficas de funciones Cuando el dominio y el rango de una función son conjuntos de números reales, podemos describir la función mediante el trazo de su gráfica en un plano coordenado. La **gráfica de una función** f simplemente es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

EJEMPLO 4 Bosqueje las gráficas de

(a) $f(x) = x^2 - 2$ (b) $g(x) = 2/(x - 1)$

SOLUCIÓN Los dominios naturales de f y g son todos los números reales y todos los números reales excepto el 1, respectivamente. Mediante el procedimiento descrito en la sección 0.4 (construir una tabla de valores, trazar los puntos correspondientes, conectarlos por medio de una curva suave) obtenemos las dos gráficas que se muestran en las figuras 6 y 7a. ■

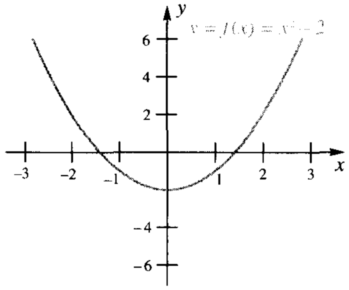


Figura 6

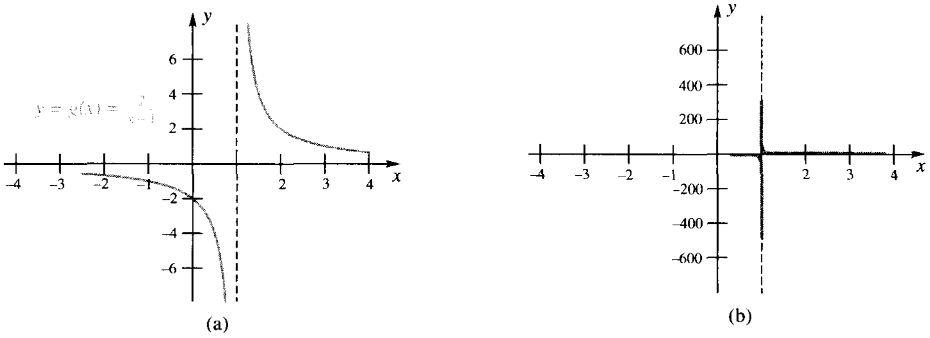


Figura 7

Ponga atención especial en la gráfica de g; ésta apunta a una sobresimplificación de lo que hemos realizado y ahora necesitamos corregir. Cuando se unen los puntos por medio de una curva suave, no se efectúa de una manera mecánica que ignore las características especiales que podrían ser aparentes en la fórmula de la función. En el caso $g(x) = 2/(x - 1)$, algo drástico sucede cuando x se aproxima a 1. De hecho, los valores de $|g(x)|$ aumentan sin cota; por ejemplo, $g(0.99) = 2/(0.99 - 1) = -200$ y $g(1.001) = 2000$. Esto lo hemos indicado mediante una recta vertical, llamada **asíntota**, en $x = 1$. Cuando x se acerca a 1, la gráfica se aproxima cada vez más a esta recta, aunque la recta no es parte de la gráfica. Más bien es una guía. Observe que la gráfica de g también tiene una asíntota horizontal, el eje x.

Funciones como $g(x) = 2/(x - 1)$ pueden causar problemas cuando usted las grafica por medio de un CAS. Por ejemplo, cuando se le pidió a *Maple* graficar $g(x) = 2/(x - 1)$ en el dominio $[-4, 4]$ respondió con la gráfica que se muestra en la figura 7b. Los CAS utilizan un algoritmo muy parecido al que se describió en la sección 0.4; seleccionan diversos valores para x en el dominio establecido; encuentran los correspondientes valores de y, y dibujan estos puntos conectándolos con rectas. Cuando *Maple* seleccionó un número cercano a 1, la salida resultante fue grande, lo cual llevó al eje y a escalar en la figura. *Maple* también conecta los puntos que cruzan el punto de corte en $x = 1$. Siempre debe tener precaución y ser cuidadoso cuando utilice una calculadora gráfica o un CAS para graficar funciones.

Los dominios y rangos para las funciones f y g se muestran en la siguiente tabla.

Función	Dominio	Rango
$f(x) = x^2 - 2$	todos los números reales	$\{y: y \geq -2\}$
$g(x) = \dfrac{2}{x - 1}$	$\{x: x \neq 1\}$	$\{y: y \neq 0\}$

Funciones pares y funciones impares Con frecuencia podemos predecir las simetrías de la gráfica de una función al examinar la fórmula para la función. Si $f(-x) = f(x)$ para toda x, entonces la gráfica es simétrica respecto al eje y. Tal función se denomina

función par, quizá porque una función que se especifica $f(x)$ como una suma de sólo potencias pares de x es par. La función $f(x) = x^2 - 2$ (graficada en la figura 6) es par; al igual que $f(x) = 3x^6 - 2x^4 + 11x^2 - 5$, $f(x) = x^2/(1 + x^4)$ y $f(x) = (x^3 - 2x)/3x$.

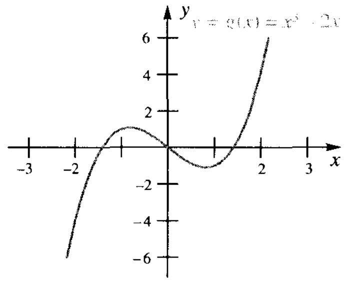


Figura 8

Si $f(-x) = -f(x)$ para toda x, la gráfica es simétrica con respecto al origen. A tal función le llamamos **función impar**. Una función que da $f(x)$ como una suma de sólo potencias impares de x es impar. Así, $g(x) = x^3 - 2x$ (graficada en la figura 8) es impar. Observe que

$$g(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x = -(x^3 - 2x) = -g(x)$$

Considere la función $g(x) = 2/(x - 1)$ del ejemplo 4 que graficamos en la figura 7. No es par ni impar. Para ver esto, note que $g(-x) = 2/(-x - 1)$, que no es igual ni a $g(x)$ ni a $-g(x)$. Observe que la gráfica de $y = g(x)$ no es simétrica respecto al eje y ni con respecto al origen.

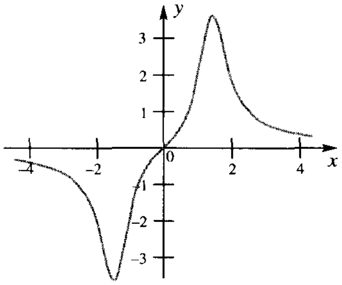


Figura 9

EJEMPLO 5 ¿$f(x) = \dfrac{x^3 + 3x}{x^4 - 3x^2 + 4}$ es par, impar o ninguna de éstas?

SOLUCIÓN Como

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + 3(-x)}{(-x)^4 - 3(-x)^2 + 4} = \frac{-(x^3 + 3x)}{x^4 - 3x^2 + 4} = -f(x)$$

f es una función impar. La gráfica de $y = f(x)$ (véase la figura 9) es simétrica respecto al origen. ■

Dos funciones especiales Entre las funciones que con frecuencia utilizaremos como ejemplos, hay dos que son muy especiales: la **función valor absoluto**, $| \quad |$, y la **función máximo entero**, $[\![\quad]\!]$. Se definen como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y

$$[\![x]\!] = \text{el mayor entero que es menor o igual a } x$$

Así, $|-3.1| = |3.1| = 3.1$, mientras que $[\![-3.1]\!] = -4$ y $[\![3.1]\!] = 3$. En las figuras 10 y 11 mostramos las gráficas de estas dos funciones. La función valor absoluto es par, ya que $|-x| = |x|$. La función máximo entero no es par ni impar, como lo puede ver con base en su gráfica.

Con frecuencia recurrimos a las siguientes características especiales de estas gráficas. La gráfica de $|x|$ tiene un pico en el origen, mientras que la gráfica de $[\![x]\!]$ da un salto en cada entero.

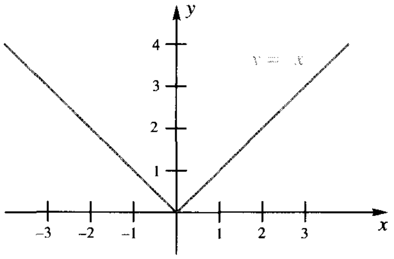


Figura 10

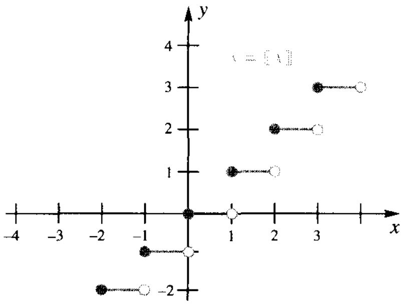


Figura 11

Revisión de conceptos

1. El conjunto de entradas permisibles para una función se denomina _______ de la función; el conjunto de salidas que se obtienen se denomina _______ de la función.

2. Si $f(x) = 3x^2$, entonces $f(2u) =$ _______ y $f(x + h) =$ _______.

3. Si $f(x)$ se acerca cada vez más a L, cuando $|x|$ aumenta indefinidamente, entonces la recta $y = L$ es una _______ para la gráfica de f.

4. Si $f(-x) = f(x)$ para toda x en el dominio de f, entonces f se denomina función _______; si $f(-x) = -f(x)$ para toda x en el dominio de f, entonces f se llama función _______. En el primer caso, la gráfica de f es simétrica con respecto al _______; en el segundo caso, es simétrica con respecto al _______.

Conjunto de problemas 0.5

1. Para $f(x) = 1 - x^2$, determine cada valor.

(a) $f(1)$ (b) $f(-2)$ (c) $f(0)$
(d) $f(k)$ (e) $f(-5)$ (f) $f\left(\frac{1}{4}\right)$
(g) $f(1 + h)$ (h) $f(1 + h) - f(1)$
(i) $f(2 + h) - f(2)$

2. Para $F(x) = x^3 + 3x$, determine cada valor.

(a) $F(1)$ (b) $F\left(\sqrt{2}\right)$ (c) $F\left(\frac{1}{4}\right)$
(d) $F(1 + h)$ (e) $F(1 + h) - F(1)$
(f) $F(2 + h) - F(2)$

3. Para $G(y) = 1/(y - 1)$, determine cada valor.

(a) $G(0)$ (b) $G(0.999)$ (c) $G(1.01)$
(d) $G(y^2)$ (e) $G(-x)$ (f) $G\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

4. Para $\Phi(u) = \dfrac{u + u^2}{\sqrt{u}}$, encuentre cada valor. (Φ es la letra griega fi mayúscula).

(a) $\Phi(1)$ (b) $\Phi(-t)$ (c) $\Phi\left(\frac{1}{2}\right)$
(d) $\Phi(u + 1)$ (e) $\Phi(x^2)$ (f) $\Phi(x^2 + x)$

5. Para

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 3}}$$

determine cada valor.

(a) $f(0.25)$ (b) $f(\pi)$ (c) $f\left(3 + \sqrt{2}\right)$

$\boxed{\text{C}}$ **6.** Para $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}/\left(x - \sqrt{3}\right)$, determine cada valor.

(a) $f(0.79)$ (b) $f(12.26)$ (c) $f\left(\sqrt{3}\right)$

7. ¿Cuáles de las siguientes relaciones determinan una función f con fórmula $y = f(x)$? Para aquellas que lo sean, determine $f(x)$. *Sugerencia:* despeje la y en términos de x y observe que la definición requiere un solo valor de y para cada x.

(a) $x^2 + y^2 = 1$ (b) $xy + y + x = 1, x \neq -1$
(c) $x = \sqrt{2y + 1}$ (d) $x = \dfrac{y}{y + 1}$

8. ¿Cuáles de las gráficas de la figura 12 son gráficas de funciones?

Este problema sugiere una regla: *para que una gráfica sea la gráfica de una función, cada recta vertical debe cortar la gráfica en sólo un punto.*

9. Para $f(x) = 2x^2 - 1$ determine y simplifique $[f(a + h) - f(a)]/h$.

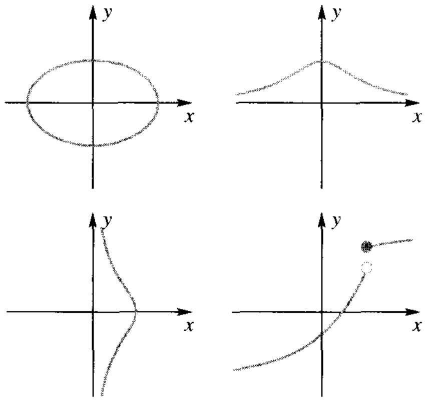


Figura 12

10. Para $F(t) = 4t^2$ determine y simplifique $[F(a + h) - F(a)]/h$.

11. Para $g(u) = 3/(u - 2)$ determine y simplifique $[g(x + h) - g(x)]/h$.

12. Para $G(t) = t/(t + 4)$ determine y simplifique $[G(a + h) - G(a)]/h$.

13. Determine el dominio natural para cada caso siguiente.

(a) $F(z) = \sqrt{2z + 3}$ (b) $g(v) = 1/(4v - 1)$
(c) $\psi(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ (d) $H(y) = -\sqrt{625 - y^4}$

14. En cada caso determine el dominio natural.

(a) $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{x^2 - x - 6}$ (b) $G(y) = \sqrt{(y + 1)^{-1}}$
(c) $\phi(u) = |2u + 3|$ (d) $F(t) = t^{2/3} - 4$

En los problemas del 15 al 30 especifique si la función dada es par, impar o ninguna de las dos, y luego bosqueje su gráfica.

15. $f(x) = -4$ **16.** $f(x) = 3x$
17. $F(x) = 2x + 1$ **18.** $F(x) = 3x - \sqrt{2}$
19. $g(x) = 3x^2 + 2x - 1$ **20.** $g(u) = \dfrac{u^3}{8}$
21. $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ **22.** $\phi(z) = \dfrac{2z + 1}{z - 1}$
23. $f(w) = \sqrt{w - 1}$ **24.** $h(x) = \sqrt{x^2 + 4}$
25. $f(x) = |2x|$ **26.** $F(t) = -|t + 3|$
27. $g(x) = \left[\!\left[\dfrac{x}{2}\right]\!\right]$ **28.** $G(x) = [\![2x - 1]\!]$

29. $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq 0 \\ t + 1 & \text{si } 0 < t < 2 \\ t^2 - 1 & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$

30. $h(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{si } x \leq 1 \\ 3x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

31. Una planta tiene la capacidad para producir desde 0 hasta 100 computadoras por día. Los gastos generales diarios de la planta ascienden a \$5000 y el costo directo (mano de obra y materiales) para producir una computadora es de \$805. Escriba una fórmula para $T(x)$, el costo total de producir x computadoras en un día y, también, para el costo unitario $u(x)$ (costo promedio por computadora). ¿Cuáles son los dominios de estas funciones?

[C] **32.** A la compañía ABC le cuesta $400 + 5\sqrt{x(x-4)}$ dólares fabricar x estufas de juguete que vende en \$6 cada una.

(a) Determine una fórmula para $P(x)$, la utilidad total de fabricar x estufas.

(b) Evalúe $P(200)$ y $P(1000)$.

(c) ¿Cuántas estufas debe fabricar ABC para estar en equilibrio?

[C] **33.** Determine la fórmula para la cantidad $E(x)$ por la cual un número x excede a su cuadrado. Haga una gráfica de $E(x)$ para $0 \leq x \leq 1$. Utilice la gráfica para estimar el número positivo menor o igual a uno que excede a su cuadrado en la máxima cantidad.

34. Sea p el perímetro de un triángulo equilátero. Determine una fórmula para $A(p)$, el área de tal triángulo.

35. Un triángulo rectángulo tiene una hipotenusa fija de longitud h y un cateto tiene longitud x. Determine una fórmula para la longitud, $L(x)$, del otro cateto.

36. Un triángulo rectángulo tiene una hipotenusa fija de longitud h y un cateto tiene longitud x. Determine una fórmula para el área, $A(x)$, del triángulo.

37. La Agencia de Renta de Automóviles Acme cobra \$24 por día por la renta de un automóvil más \$0.40 por milla.

(a) Escriba una fórmula para el gasto de renta total $E(x)$ por un día, en donde x es el número de millas recorridas.

(b) Si usted renta un automóvil durante un día, ¿cuántas millas puede recorrer por \$120?

38. Un cilindro circular recto de radio r está inscrito en una esfera de radio $2r$. Determine una fórmula para $V(r)$, el volumen del cilindro en términos de r.

39. Una pista de una milla tiene lados paralelos y extremos semicirculares iguales. Determine una fórmula para el área encerrada por la pista, $A(d)$, en términos del diámetro d de los semicírculos. ¿Cuál es el dominio natural para esta función?

40. Sea $A(c)$ el área de la región acotada por arriba por la recta $y = x + 1$, del lado izquierdo por el eje y, por abajo por el eje x y por la derecha por la recta $x = c$. Tal función se conoce como **función de acumulación**. (Véase la figura 13.) Determine

(a) $A(1)$ (b) $A(2)$

(c) $A(0)$ (d) $A(c)$

(e) Esboce la gráfica de $A(c)$.

(f) ¿Cuáles son el dominio y el rango de A?

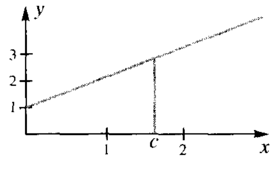


Figura 13

41. Sea $B(c)$ el área de la región acotada por arriba por la gráfica de la curva $y = x(1 - x)$, por abajo por el eje x, y por la derecha por la recta $x = c$. El dominio de B es el intervalo $[0, 1]$. (Véase la figura 14.) Dado que $B(1) = \frac{1}{6}$.

(a) Determine $B(0)$ (b) Determine $B\left(\frac{1}{2}\right)$

(c) Haga una gráfica de $B(c)$, como mejor pueda.

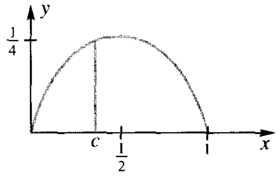


Figura 14

42. ¿Cuál de las siguientes funciones satisface $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todos los números reales x y y?

(a) $f(t) = 2t$ (b) $f(t) = t^2$

(c) $f(t) = 2t + 1$ (d) $f(t) = -3t$

43. Sea $f(x + y) = f(x) + f(y)$, para toda x y y. Demuestre que existe un número m, tal que $f(t) = mt$ para todos los números racionales t. *Sugerencia:* primero decida cuánto tiene que valer m. Luego proceda por pasos, iniciando con $f(0) = 0$, $f(p) = mp$ para un número natural p; $f(1/p) = m/p$, etcétera.

44. Un diamante de beisbol es un cuadrado con lados de 90 pies. Un jugador, después de conectar un cuadrangular, corrió alrededor del diamante a una velocidad de 10 pies por segundo. Sea s la distancia del jugador al *home* después de t segundos.

(a) Exprese s como una función de t por medio de una fórmula con cuatro partes.

(b) Exprese s como una función de t por medio de una fórmula con tres partes.

[GC] *Para utilizar la tecnología de manera eficiente, usted necesita descubrir sus capacidades, fortalezas y debilidades. Le pedimos que practique la graficación de funciones de varios tipos utilizando su propio paquete de cómputo o su calculadora. Los problemas del 45 al 50 están diseñados con este propósito.*

45. Sea $f(x) = (x^3 + 3x - 5)/(x^2 + 4)$.

(a) Evalúe $f(1.38)$ y $f(4.12)$.

(b) Para esta función, construya una tabla de valores correspondiente a $x = -4, -3, \ldots, 3, 4$.

46. Siga las instrucciones del problema 45 para $f(x) = (\operatorname{sen}^2 x - 3 \tan x)/\cos x$.

47. Trace la gráfica de $f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 8$ en el dominio $[-2, 5]$.

(a) Determine el rango de f.

(b) En este dominio, ¿dónde $f(x) \geq 0$?

48. Superponga la gráfica de $g(x) = 2x^2 - 8x - 1$ con dominio $[-2, 5]$ sobre la gráfica de $f(x)$ del problema 47.

(a) Estime los valores de x donde $f(x) = g(x)$.

(b) En $[-2, 5]$, ¿dónde $f(x) \geq g(x)$?

(c) En $[-2, 5]$, estime el valor más grande de $|f(x) - g(x)|$.

49. Grafique $f(x) = (3x - 4)/(x^2 + x - 6)$ en el dominio $[-6, 6]$.

(a) Determine las intersecciones con el eje x y con el eje y.

(b) Determine el rango de f para el dominio dado.

(c) Determine las asíntotas verticales de la gráfica.

(d) Determine la asíntota horizontal para la gráfica, cuando el dominio se amplía a todo el dominio natural.

50. Siga las instrucciones del problema 49 para la función $g(x) = (3x^2 - 4)/(x^2 + x - 6)$.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** dominio, rango **2.** $12u^2$; $3(x + h)^2 = 3x^2 + 6xh + 3h^2$ **3.** asíntota **4.** par; impar; eje y; origen.

0.6 Operaciones con funciones

Al igual que dos números a y b pueden sumarse para producir un nuevo número $a + b$, también dos funciones f y g pueden sumarse para producir una nueva función $f + g$. Ésta es sólo una de las diferentes operaciones sobre funciones que describiremos en esta sección.

Sumas, diferencias, productos, cocientes y potencias Considere las funciones f y g con las fórmulas

$$f(x) = \frac{x - 3}{2}, \qquad g(x) = \sqrt{x}$$

Podemos construir una nueva función $f + g$ al asignar a x el valor $f(x) + g(x) = (x - 3)/2 + \sqrt{x}$; esto es,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x - 3}{2} + \sqrt{x}$$

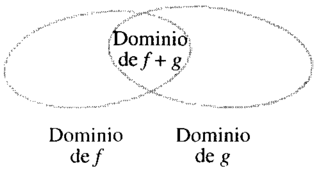


Figura 1

Por supuesto, debemos tener un poco de cuidado con respecto a los dominios. Claramente, x debe ser un número en el que tanto f como g funcionen. En otras palabras, el dominio de $f + g$ es la intersección (parte común) de los dominios de f y g (véase la figura 1).

Las funciones $f - g$, $f \cdot g$ y f/g se introducen de una manera completamente análoga. Suponiendo que f y g tienen sus dominios naturales, entonces:

Fórmula	Dominio
$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x - 3}{2} + \sqrt{x}$	$[0, \infty)$
$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{x - 3}{2} - \sqrt{x}$	$[0, \infty)$
$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{x - 3}{2}\sqrt{x}$	$[0, \infty)$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x - 3}{2\sqrt{x}}$	$(0, \infty)$

Hemos excluido al 0 del dominio de f/g para evitar la división entre cero.

También podemos elevar una función a una potencia. Con f^n representamos la función que a cada x asigna el valor $[f(x)]^n$. Así,

$$g^3(x) = [g(x)]^3 = \left(\sqrt{x}\right)^3 = x^{3/2}$$

Existe una excepción en la convención anterior sobre exponentes; a saber, cuando $n = -1$. Reservamos el símbolo f^{-1} para la función inversa que se estudiará en la sección 6.2. Por lo tanto, f^{-1} no significa $1/f$.

EJEMPLO 1 Sean $F(x) = \sqrt[4]{x + 1}$ y $G(x) = \sqrt{9 - x^2}$, con dominios naturales respectivos $[-1, \infty)$ y $[-3, 3]$. Determine fórmulas para $F + G$, $F - G$, $F \cdot G$, F/G y F^5 y proporcione sus dominios naturales.

SOLUCIÓN

Fórmula	Dominio
$(F+G)(x) = F(x) + G(x) = \sqrt[4]{x+1} + \sqrt{9-x^2}$	$[-1, 3]$
$(F-G)(x) = F(x) - G(x) = \sqrt[4]{x+1} - \sqrt{9-x^2}$	$[-1, 3]$
$(F \cdot G)(x) = F(x) \cdot G(x) = \sqrt[4]{x+1}\sqrt{9-x^2}$	$[-1, 3]$
$\left(\frac{F}{G}\right)(x) = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{9-x^2}}$	$[-1, 3)$
$F^5(x) = [F(x)]^5 = \left(\sqrt[4]{x+1}\right)^5 = (x+1)^{5/4}$	$[-1, \infty)$ ■

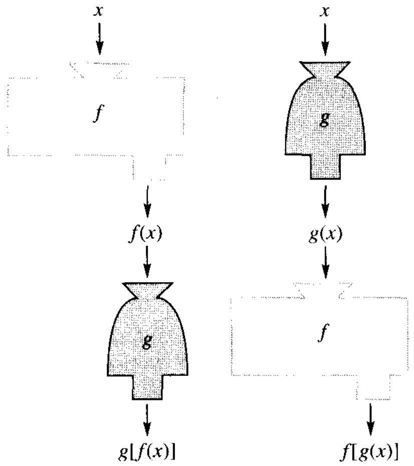


Figura 2

Composición de funciones Al principio, le pedimos que pensase en una función como una máquina. Que recibe x como entrada, trabaja sobre x y produce $f(x)$ como salida. Con frecuencia, dos máquinas se ponen una tras otra para producir una máquina más compleja; del mismo modo, dos funciones f y g (véase la figura 2). Si f actúa sobre x para producir $f(x)$ y luego g actúa sobre $f(x)$ para producir $g(f(x))$, decimos que hemos *compuesto* g con f. La función resultante, llamada **composición** de g con f, se denota con $g \circ f$. Así,

$$\boxed{(g \circ f)(x) = g(f(x))}$$

En nuestros ejemplos anteriores teníamos $f(x) = (x-3)/2$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Podemos componer estas funciones de dos maneras:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x-3}{2}\right) = \sqrt{\frac{x-3}{2}}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x}\right) = \frac{\sqrt{x}-3}{2}$$

Enseguida notamos que $g \circ f$ no es igual a $f \circ g$. Por lo tanto, decimos que la composición de funciones no es conmutativa.

Debemos tener cuidado al describir el dominio de una función compuesta. El dominio de $g \circ f$ es igual al conjunto de aquellos valores de x que satisfacen las siguientes propiedades:

1. x está en el dominio de f.
2. $f(x)$ está en el dominio de g.

En otras palabras, x debe ser una entrada válida para f y $f(x)$ debe ser una entrada válida para g. En nuestro ejemplo, el valor $x = 2$ está en el dominio de f, pero no está en el dominio de $g \circ f$ porque esto llevaría a la raíz cuadrada de un número negativo.

$$g(f(2)) = g((2-3)/2) = g\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{-\frac{1}{2}}$$

El dominio de $g \circ f$ es el intervalo $[3, \infty)$ ya que $f(x)$ es no negativa en este intervalo, y la entrada para g debe ser no negativa. El dominio para $f \circ g$ es el intervalo $[0, \infty)$ (¿por qué?), así vemos que los dominios de $g \circ f$ y $f \circ g$ pueden ser diferentes. La figura 3 muestra cómo el dominio de $g \circ f$ excluye aquellos valores de x para los cuales $f(x)$ no está en el dominio de g.

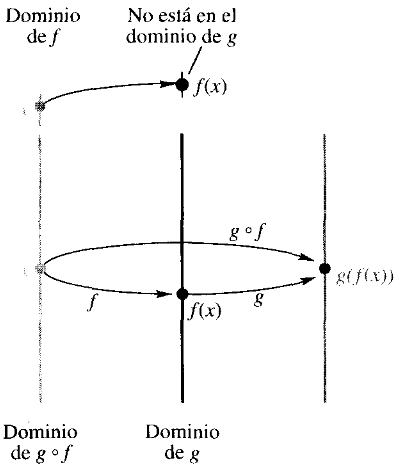


Figura 3

EJEMPLO 2 Sean $f(x) = 6x/(x^2 - 9)$ y $g(x) = \sqrt{3x}$, con sus dominios naturales. Primero, determine $(g \circ f)(12)$; luego $(f \circ g)(x)$ y proporcione su dominio.

SOLUCIÓN

$$(f \circ g)(12) = f(g(12)) = f\left(\sqrt{36}\right) = f(6) = \frac{6 \cdot 6}{6^2 - 9} = \frac{4}{3}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{3x}\right) = \frac{6\sqrt{3x}}{\left(\sqrt{3x}\right)^2 - 9}$$

La expresión $\sqrt{3x}$ aparece tanto en el numerador como en el denominador. Cualquier número negativo para x conduce a la raíz cuadrada de un número negativo. Por lo tanto, todos los números negativos deben excluirse del dominio de $f \circ g$. Para $x \geq 0$, tenemos $\left(\sqrt{3x}\right)^2 = 3x$, permitiéndonos escribir

$$(f \circ g)(x) = \frac{6\sqrt{3x}}{3x - 9} = \frac{2\sqrt{3x}}{x - 3}$$

También debemos excluir $x = 3$ del dominio de $f \circ g$ porque $g(3)$ no está en el dominio de f. (Causaría la división entre cero.) Así, el dominio de $f \circ g$ es $[0, 3) \cup (3, \infty)$. ■

En cálculo, con frecuencia necesitamos tomar una función dada y escribirla como la composición de dos funciones más simples. Usualmente, esto puede hacerse de varias formas. Por ejemplo, $p(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ puede escribirse como

$$p(x) = g(f(x)), \qquad \text{donde } g(x) = \sqrt{x} \quad \text{y} \quad f(x) = x^2 + 4$$

o como

$$p(x) = g(f(x)), \qquad \text{donde } g(x) = \sqrt{x + 4} \quad \text{y} \quad f(x) = x^2$$

(Usted debe verificar que las dos composiciones dan $p(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ con dominio $(-\infty, \infty)$.) La descomposición $p(x) = g(f(x))$ con $f(x) = x^2 + 4$ y $g(x) = \sqrt{x}$ se considera más sencilla y por lo regular se prefiere. Por lo tanto, podemos visualizar a $p(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ como la raíz cuadrada de una función de x. Esta manera de ver las funciones será importante en el capítulo 2.

EJEMPLO 3 Escriba la función $p(x) = (x + 2)^5$ como una función compuesta $g \circ f$.

SOLUCIÓN La manera más obvia de descomponer p es escribir

$$p(x) = g(f(x)), \qquad \text{donde } g(x) = x^5 \quad \text{y} \quad f(x) = x + 2.$$

Así vemos a $p(x) = (x + 2)^5$ como la quinta potencia de una función de x. ■

Traslaciones La observación de cómo se construye una función a partir de otras más sencillas puede ser de gran ayuda al graficar. Podemos hacer esta pregunta: ¿cómo están relacionadas las gráficas de

$$y = f(x) \qquad y = f(x - 3) \qquad y = f(x) + 2 \qquad y = f(x - 3) + 2?$$

Como ejemplo, considere $f(x) = |x|$. Las cuatro gráficas correspondientes se muestran en la figura 4.

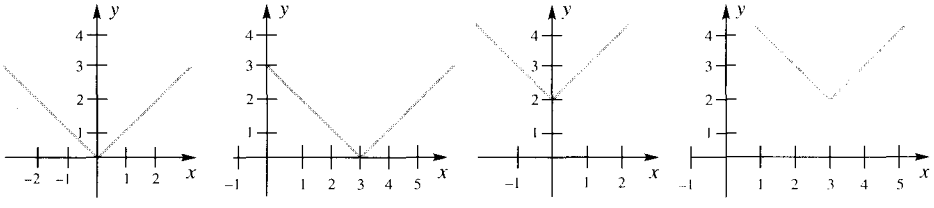
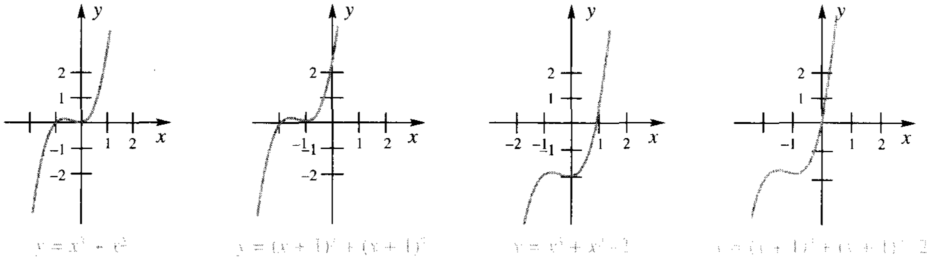


Figura 4

Observe que las cuatro gráficas tienen la misma forma; las últimas tres sólo son traslaciones de la primera. Al reemplazar x por $x - 3$ se traslada la gráfica 3 unidades hacia la derecha; al sumar 2 se traslada 2 unidades hacia arriba.

Lo que sucede con $f(x) = |x|$ es común. La figura 5 ofrece una ilustración para la función $f(x) = x^3 + x^2$.



Gráfica original

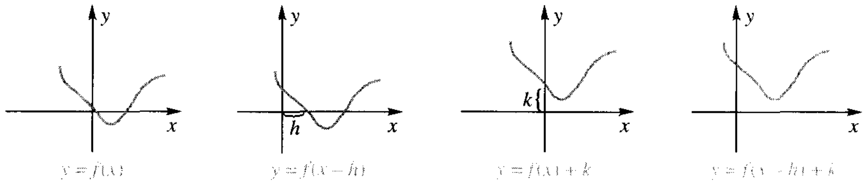
Trasladada 1 unidad hacia la izquierda

Trasladada 2 unidades hacia abajo

Trasladada 1 unidad hacia la izquierda y 2 unidades hacia abajo

Figura 5

Los mismos principios se aplican a la situación general. Se ilustran en la figura 6 con h y k positivas. Si $h < 0$, la traslación es hacia la izquierda, si $k < 0$ la traslación es hacia abajo.



Gráfica original

Trasladada h unidades hacia la derecha

Trasladada k unidades hacia arriba

Trasladada h unidades hacia la derecha y k unidades hacia arriba

Figura 6

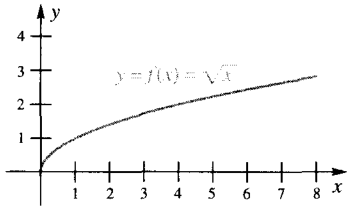


Figura 7

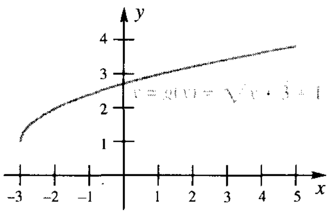


Figura 8

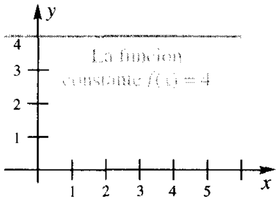


Figura 9

EJEMPLO 4 Bosqueje la gráfica de $g(x) = \sqrt{x + 3} + 1$ graficando primero $f(x) = \sqrt{x}$ y luego haciendo las traslaciones apropiadas.

SOLUCIÓN Por medio de la traslación de la gráfica de f (véase la figura 7) 3 unidades hacia la izquierda y una unidad hacia arriba, obtenemos la gráfica de g (véase la figura 8). ■

Catálogo parcial de funciones Una función de la forma $f(x) = k$, donde k es una constante (número real), se denomina **función constante**. Su gráfica es una recta horizontal (véase la figura 9). La función $f(x) = x$ se denomina **función identidad**. Su gráfica es una recta que pasa por el origen con pendiente 1 (véase la figura 10). Con base en estas funciones sencillas, podemos construir muchas funciones importantes.

Cualquier función que pueda obtenerse a partir de las funciones constantes y la función identidad, mediante el uso de las operaciones de suma, diferencia y multiplicación, se denomina **función polinomial**. Esto equivale a decir que f es una función polinomial si es de la forma

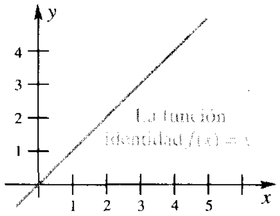


Figura 10

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde las *aes* son números reales y n es un entero no negativo. Si $a_n \neq 0$, n es el **grado** de la función polinomial. En particular, $f(x) = ax + b$ es una función polinomial de primer grado, o **función lineal**, y $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una función polinomial de segundo grado, o **función cuadrática**.

Los cocientes de funciones polinomiales se llaman funciones racionales. Así, f es una **función racional** si es de la forma

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

El dominio de una función racional consiste en aquellos números reales para los cuales el denominador es distinto de cero.

Una **función algebraica explícita** es aquella que puede obtenerse a partir de las funciones constantes y la función identidad por medio de las cinco operaciones de suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces. Algunos ejemplos son

$$f(x) = 3x^{2/5} = 3\sqrt[5]{x^2} \qquad g(x) = \frac{(x+2)\sqrt{x}}{x^3 + \sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

Las funciones listadas hasta el momento, junto con las funciones trigonométricas, trigonométricas inversas, exponencial y logarítmicas (que se introducen más adelante) son la materia prima para cálculo.

Revisión de conceptos

1. Si $f(x) = x^2 + 1$, entonces $f^3(x) =$ _____.

2. El valor de la función compuesta $f \circ g$ en x está dada por $(f \circ g)(x) =$ _____.

3. Comparada con la gráfica de $y = f(x)$, la gráfica de $y = f(x+2)$ está trasladada _______ unidades hacia _______.

4. Una función racional se define como _____.

Conjunto de problemas 0.6

1. Para $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x^2$, determine cada uno de los valores (si esto es posible).

(a) $(f + g)(2)$ (b) $(f \cdot g)(0)$ (c) $(g/f)(3)$

(d) $(f \circ g)(1)$ (e) $(g \circ f)(1)$ (f) $(g \circ f)(-8)$

2. Para $f(x) = x^2 + x$ y $g(x) = 2/(x + 3)$, determine cada uno de los valores.

(a) $(f - g)(2)$ (b) $(f/g)(1)$ (c) $g^2(3)$

(d) $(f \circ g)(1)$ (e) $(g \circ f)(1)$ (f) $(g \circ g)(3)$

3. Para $\Phi(u) = u^3 + 1$ y $\Psi(v) = 1/v$, determine cada uno de los valores.

(a) $(\Phi + \Psi)(t)$ (b) $(\Phi \circ \Psi)(r)$

(c) $(\Psi \circ \Phi)(r)$ (d) $\Phi^3(z)$

(e) $(\Phi - \Psi)(5t)$ (f) $((\Phi - \Psi) \circ \Psi)(t)$

4. Si $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ y $g(x) = 2/x$, determine fórmulas para lo siguiente y también sus dominios.

(a) $(f \cdot g)(x)$ (b) $f^4(x) + g^4(x)$

(c) $(f \circ g)(x)$ (d) $(g \circ f)(x)$

5. Si $f(s) = \sqrt{s^2 - 4}$ y $g(w) = |1 + w|$, determine fórmulas para $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

6. Si $g(x) = x^2 + 1$, determine fórmulas para $g^3(x)$ y $(g \circ g \circ g)(x)$.

$\boxed{\text{C}}$ **7.** Calcule $g(3.141)$, si $g(u) = \dfrac{\sqrt{u^3 + 2u}}{2 + u}$.

$\boxed{\text{C}}$ **8.** Calcule $g(2.03)$ si $g(x) = \dfrac{(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})^4}{1 - x + x^2}$.

$\boxed{\text{C}}$ **9.** Calcule $[g^2(\pi) - g(\pi)]^{1/3}$, si $g(v) = |11 - 7v|$.

$\boxed{\text{C}}$ **10.** Calcule $[g^3(\pi) - g(\pi)]^{1/3}$, si $g(x) = 6x - 11$.

11. Determine f y g de modo que $F = g \circ f$. (Véase el ejemplo 3).

(a) $F(x) = \sqrt{x + 7}$ (b) $F(x) = (x^2 + x)^{15}$

12. Encuentre f y g tales que $p = f \circ g$.

(a) $p(x) = \dfrac{2}{(x^2 + x + 1)^3}$ (b) $p(x) = \dfrac{1}{x^3 + 3x}$

13. Escriba $p(x) = 1/\sqrt{x^2 + 1}$ como una composición de tres funciones, hágalo de dos maneras distintas.

14. Escriba $p(x) = 1/\sqrt{x^2 + 1}$ como una composición de cuatro funciones.

15. Bosqueje la gráfica de $f(x) = \sqrt{x - 2} - 3$, haciendo primero la gráfica de $g(x) = \sqrt{x}$ y luego trasladando ésta. (Véase el ejemplo 4).

16. Bosqueje la gráfica de $g(x) = |x + 3| - 4$; primero grafique $h(x) = |x|$ y luego trasládela.

17. Por medio de traslaciones, bosqueje la gráfica de $f(x) = (x - 2)^2 - 4$.

18. Por medio de traslaciones, bosqueje la gráfica de $g(x) = (x + 1)^3 - 3$.

19. Bosqueje las gráficas de $f(x) = (x - 3)/2$ y $g(x) = \sqrt{x}$; utilice los mismos ejes coordenados. Luego trace $f + g$ al sumar las ordenadas y.

20. Siga las instrucciones del problema 19 para $f(x) = x$ y $g(x) = |x|$.

21. Bosqueje la gráfica de $F(t) = \dfrac{|t| - t}{t}$.

22. Bosqueje la gráfica de $G(t) = t - [\![t]\!]$.

23. Establezca si cada una de las siguientes funciones es impar o par, o bien ninguna de las dos. Demuestre sus afirmaciones.

(a) La suma de dos funciones pares.

(b) La suma de dos funciones impares.

(c) El producto de dos funciones pares.

(d) El producto de dos funciones impares.

(e) El producto de una función par y una función impar.

24. Sea F cualquier función cuyo dominio contiene a $-x$ siempre que contenga a x. Demuestre cada una de las siguientes afirmaciones.

(a) $F(x) - F(-x)$ es una función impar.

(b) $F(x) + F(-x)$ es una función par.

(c) F puede expresarse siempre como la suma de una función impar y una función par.

25. ¿Todo polinomio de grado par es una función par? ¿Todo polinomio de grado impar es una función impar? Explique.

26. Clasifique cada una de las siguientes como FP (función polinomial), FR (función racional pero no función polinomial) o ninguna de éstas.

(a) $f(x) = 3x^{1/2} + 1$ (b) $f(x) = 3$

(c) $f(x) = 3x^2 + 2x^{-1}$ (d) $f(x) = \pi x^3 - 3\pi$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ (f) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x+3}}$

27. La relación entre el precio por unidad P (en centavos) para cierto producto y la demanda D (en miles de unidades) parece satisfacer

$$P = \sqrt{29 - 3D + D^2}$$

Por otra parte, la demanda se ha incrementado, durante los t años, desde 1970 de acuerdo a $D = 2 + \sqrt{t}$.

(a) Exprese P como una función de t.

(b) Evalúe P cuando $t = 15$.

28. Después de estar en los negocios durante t años, un fabricante de automóviles está produciendo $120 + 2t + 3t^2$ unidades por año. Los precios de venta en dólares por unidad han aumentado de acuerdo con la fórmula $6000 + 700t$. Escriba una fórmula para los ingresos anuales del fabricante $R(t)$ después de t años.

29. Al comenzar el mediodía, el aeroplano A vuela con rumbo norte a una velocidad de 400 millas por hora. Exactamente 1 hora más tarde, el aeroplano B vuela con rumbo este a 300 millas por hora. Despreciando la curvatura de la Tierra y suponiendo que los aeroplanos vuelan a la misma altitud, determine una fórmula para $D(t)$, la distancia entre los dos aeroplanos t horas, contadas a partir del mediodía. *Sugerencia:* serán dos fórmulas para $D(t)$, una si $0 \le t < 1$ y la otra si $t \ge 1$.

≡ C **30.** Determine la distancia entre los aeroplanos del problema 29 a las 2:30 p. m.

31. Sea $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx - a}$. Demuestre que $f(f(x)) = x$, siempre y cuando $a^2 + bc \neq 0$ y $x \neq a/c$.

32. Sea $f(x) = \dfrac{x-3}{x+1}$. Demuestre que $f(f(f(x))) = x$, siempre y cuando $x \neq \pm 1$.

33. Sea $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$. Determine y simplifique cada valor.

(a) $f(1/x)$ (b) $f(f(x))$ (c) $f(1/f(x))$

34. Sea $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x} - 1}$. Encuentre y simplifique.

(a) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (b) $f(f(x))$

35. Demuestre que la operación de composición de funciones es asociativa; es decir, $f_1 \circ (f_2 \circ f_3) = (f_1 \circ f_2) \circ f_3$.

36. Sean $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1/x$, $f_3(x) = 1 - x$, $f_4(x) = 1/(1-x)$, $f_5(x) = (x-1)/x$ y $f_6(x) = x/(x-1)$. Observe que $f_3(f_4(x)) = f_3(1/(1-x)) = 1 - 1/(1-x) = x/(x-1) = f_6(x)$; esto es, $f_3 \circ f_4 = f_6$. De hecho, la composición de cualesquiera dos de estas funciones es otra de la lista. Llene la tabla de composiciones de la figura 11.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1						
f_2						
f_3				f_6		
f_4						
f_5						
f_6						

Figura 11

Después utilice esta tabla para determinar cada una de las siguientes. Con base en el problema 35, sabe que se cumple la ley asociativa.

(a) $f_3 \circ f_3 \circ f_3 \circ f_3 \circ f_3$ (b) $f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4 \circ f_5 \circ f_6$

(c) F, si $F \circ f_6 = f_1$ (d) G, si $G \circ f_3 \circ f_6 = f_1$

(e) H si $f_2 \circ f_5 \circ H = f_5$

GC *En los problemas del 37 al 40, utilice una computadora o una calculadora graficadora.*

37. Sea $f(x) = x^2 - 3x$. Utilizando los mismos ejes, dibuje las gráficas de $y = f(x)$, $y = f(x - 0.5) - 0.6$ y $y = f(1.5x)$, todas sobre el dominio $[-2, 5]$.

38. Sea $f(x) = |x^3|$. Utilizando los mismos ejes, dibuje las gráficas de $y = f(x)$, $y = f(3x)$ y $y = f(3(x - 0.8))$, todas sobre el dominio $[-3, 3]$.

39. Sea $f(x) = 2\sqrt{x} - 2x + 0.25x^2$. Utilizando los mismos ejes, dibuje las gráficas de $y = f(x)$, $y = f(1.5x)$ y $y = f(x-1) + 0.5$, todas en el dominio $[0, 5]$.

40. Sea $f(x) = 1/(x^2 + 1)$. Utilizando los mismos ejes, dibuje las gráficas de $y = f(x)$, $y = f(2x)$ y $y = f(x-2) + 0.6$, todas en el dominio $[-4, 4]$.

CAS **41.** Su sistema de álgebra computacional (CAS) puede permitir el uso de parámetros en la definición de funciones. En cada caso, dibuje la gráfica de $y = f(x)$ para los valores especificados del parámetro k; utilice los mismos ejes y $-5 \le x \le 5$.

(a) $f(x) = |kx|^{0.7}$ para $k = 1, 2, 0.5$ y 0.2.

(b) $f(x) = |x - k|^{0.7}$ para $k = 0, 2, -0.5$ y -3.

(c) $f(x) = |x|^k$ para $k = 0.4, 0.7, 1$ y 1.7.

CAS **42.** Utilizando los mismos ejes, dibuje la gráfica de $f(x) = |k(x - c)|^n$ para la siguiente elección de parámetros.

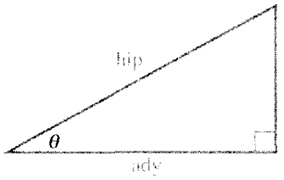
(a) $c = -1, k = 1.4, n = 0.7$ (b) $c = 2, k = 1.4, n = 1$

(c) $c = 0, k = 0.9, n = 0.6$

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $(x^2 + 1)^3$ **2.** $f(g(x))$ **3.** 2; la izquierda **4.** un cociente de dos funciones polinomiales.

0.7 Funciones trigonométricas

Probablemente ha visto la definición de las funciones trigonométricas, con base en triángulos rectángulos. La figura 1 resume las definiciones de las funciones seno, coseno y tangente. Debe revisar con cuidado la figura 1, ya que estos conceptos son necesarios para muchas aplicaciones posteriores en este texto.

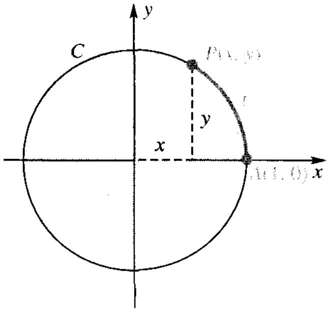


$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}}$$

Figura 1

Más generalmente, definimos las funciones trigonométricas con base en el círculo unitario. El círculo unitario, que denotamos con C, es el círculo con radio 1 y centro en el origen, cuya circunferencia tiene ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Sea A el punto $(1, 0)$ y sea t un número positivo. Existe un solo punto P en el círculo C tal que la distancia, medida en *sentido contrario de las manecillas del reloj* alrededor del arco AP, es igual a t. (Véase la figura 2). Recuerde que la circunferencia de un círculo con radio r es $2\pi r$, de modo que la circunferencia de C es 2π. Por lo tanto, si $t = \pi$, entonces el punto P está exactamente a la mitad del camino alrededor del círculo iniciando en el punto A; en este caso, P es el punto $(-1, 0)$. Si $t = 3\pi/2$, entonces P es el punto $(0, -1)$ y si $t = 2\pi$, entonces P es el punto A. Si $t > 2\pi$, entonces le tomará más de un circuito completo del círculo para trazar el arco AP.

Cuando $t < 0$, trazamos el círculo en el *sentido de las manecillas del reloj*. Habrá un solo punto P en el círculo C tal que la longitud del arco, medida en dirección de las manecillas del reloj a partir de A, sea t. Así, para cada número real t, podemos asociar un único punto $P(x, y)$ en el círculo unitario. Esto nos permite construir las definiciones clave de las funciones seno y coseno. Las funciones seno y coseno se escriben como sen y cos, en lugar de una sola letra como f o g. Por lo regular, se omiten los paréntesis alrededor de la variable independiente, a menos que exista alguna ambigüedad.



Círculo unitario

Figura 2

Definición Funciones seno y coseno

Sea t un número real que determina el punto $P(x, y)$, como se explicó anteriormente. Entonces

$$\operatorname{sen} t = y \qquad \text{y} \qquad \cos t = x$$

Propiedades básicas del seno y del coseno Varios hechos son casi inmediatos a partir de las definiciones dadas anteriormente. Primero, como t puede ser cualquier número real, el dominio de las funciones seno y coseno es $(-\infty, \infty)$ Segundo, x y y siempre están entre -1 y 1. Así, el rango para las funciones seno y coseno es el intervalo $[-1, 1]$.

Puesto que el círculo unitario tiene 2π de circunferencia, los valores de t y $t + 2\pi$ determinan el *mismo* punto $P(x, y)$. Por lo tanto,

$$\operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen} t \qquad \text{y} \qquad \cos(t + 2\pi) = \cos t$$

(Observe que los paréntesis son necesarios para dejar claro que queremos $\operatorname{sen}(t + 2\pi)$ en lugar de $(\operatorname{sen} t) + 2\pi$. La expresión $\operatorname{sen} t + 2\pi$ sería ambigua).

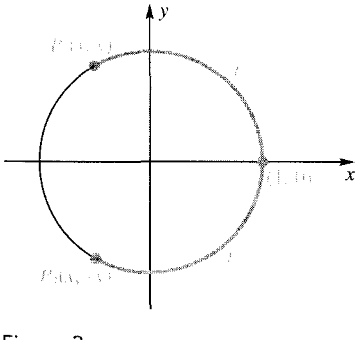


Figura 3

Los puntos P_1 y P_2 que corresponden a t y $-t$, respectivamente, son simétricos con respecto al eje x (véase la figura 3). Por lo tanto, las abscisas para P_1 y P_2 son las mismas y las ordenadas y sólo difieren en el signo. En consecuencia,

$$\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t \qquad \text{y} \qquad \cos(-t) = \cos t$$

En otras palabras, seno es una función impar y coseno es una función par.

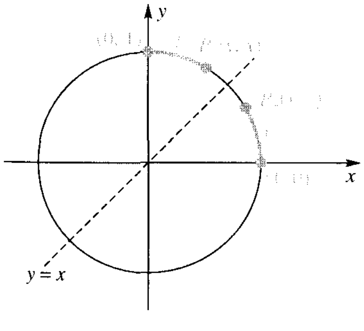


Figura 4

Los puntos P_3 y P_4 correspondientes a t y $\pi/2 - t$, respectivamente, son simétricos con respecto a la recta $y = x$ y, por lo tanto, tenemos sus coordenadas intercambiadas (véase la figura 4). Esto significa que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t \qquad \text{y} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{sen} t$$

Por último, mencionamos una identidad importante que relaciona las funciones seno y coseno:

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

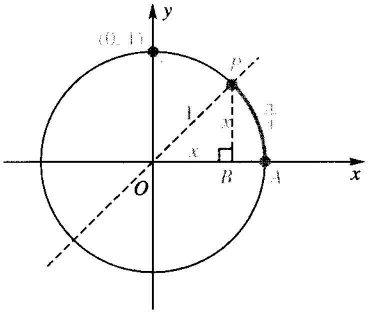


Figura 5

para todo número real t. Esta identidad se deriva del hecho de que el punto (x, y) está en la circunferencia del círculo unitario, de aquí que x y y deben satisfacer $x^2 + y^2 = 1$.

Gráficas de seno y coseno Para graficar $y = \operatorname{sen} t$ y $y = \cos t$, seguimos nuestro procedimiento usual de construir una tabla de valores, trazar los puntos correspondientes y unir estos puntos con una curva suave. Sin embargo, hasta ahora sólo conocemos los valores de seno y coseno para pocos valores de t. Otros valores pueden determinarse a partir de argumentos geométricos. Por ejemplo, si $t = \pi/4$, entonces t determina el punto medio del camino, si se recorre el círculo unitario en sentido contrario a las manecillas del reloj, entre los puntos $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Por simetría, x y y estarán en la recta $y = x$, de modo que $y = \operatorname{sen} t$ y $x = \cos t$ serán iguales. Así, los dos catetos del triángulo rectángulo OBP son iguales, y la hipotenusa es 1 (véase la figura 5). Puede aplicarse el Teorema de Pitágoras para obtener:

$$1 = x^2 + x^2 = \cos^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{4}$$

De esto concluimos que $\cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$. De manera análoga, $\operatorname{sen}(\pi/4) = \sqrt{2}/2$. Podemos determinar $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$ para otros valores de t. Algunos de éstos se muestran en la tabla que aparece en el margen. Utilizando estos resultados, junto con varios resultados de una calculadora (en modo de radianes), obtenemos las gráficas que se muestran en la figura 6.

t	$\operatorname{sen} t$	$\cos t$
0	0	1
$\pi/6$	1/2	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	1/2
$\pi/2$	1	0
$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$
$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
$5\pi/6$	1/2	$-\sqrt{3}/2$
π	0	-1

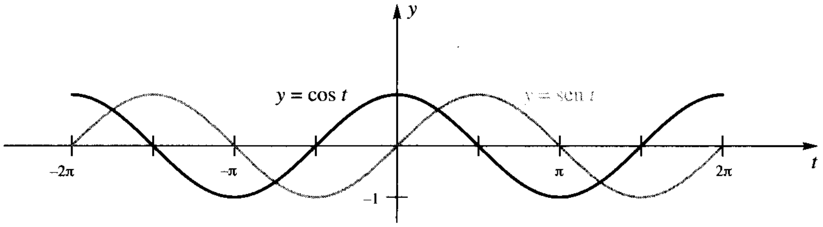


Figura 6

Con respecto a estas gráficas, cuatro cosas son notables:

1. Tanto $\operatorname{sen} t$ como $\cos t$ tienen como rango de -1 a 1.
2. Ambas gráficas se repiten en intervalos adyacentes de longitud 2π.
3. La gráfica de $y = \operatorname{sen} t$ es simétrica respecto al origen, y $y = \cos t$ es simétrica con respecto al eje y. (Por lo tanto, la función seno es impar y la función coseno es par).
4. La gráfica de $y = \operatorname{sen} t$ es la misma que la de $y = \cos t$, pero trasladada $\pi/2$ unidades hacia la derecha.

El siguiente ejemplo trata con funciones de la forma $\operatorname{sen}(at)$ o $\cos(at)$, que con frecuencia aparecen en las aplicaciones.

EJEMPLO 1 Bosqueje las gráficas de

(a) $y = \operatorname{sen}(2\pi t)$ (b) $y = \cos(2t)$

SOLUCIÓN

(a) Cuando t va de 0 a 1, el argumento $2\pi t$ varía de 0 a 2π. Por lo tanto, la gráfica de esta función se repetirá en intervalos adyacentes de longitud 1. Con base en las entradas de la siguiente tabla, podemos bosquejar una gráfica de $y = \operatorname{sen}(2\pi t)$.

t	$\operatorname{sen}(2\pi t)$	t	$\operatorname{sen}(2\pi t)$
0	$\operatorname{sen}(2\pi\cdot 0) = 0$	$\frac{5}{8}$	$\operatorname{sen}\left(2\pi\cdot\frac{5}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{1}{8}$	$\operatorname{sen}\left(2\pi\cdot\frac{1}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\operatorname{sen}\left(2\pi\cdot\frac{3}{4}\right) = -1$
$\frac{1}{4}$	$\operatorname{sen}\left(2\pi\cdot\frac{1}{4}\right) = 1$	$\frac{7}{8}$	$\operatorname{sen}\left(2\pi\cdot\frac{7}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{3}{8}$	$\operatorname{sen}\left(2\pi\cdot\frac{3}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\operatorname{sen}(2\pi\cdot 1) = 0$
$\frac{1}{2}$	$\operatorname{sen}\left(2\pi\cdot\frac{1}{2}\right) = 0$	$\frac{9}{8}$	$\operatorname{sen}\left(2\pi\cdot\frac{9}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

La figura 7 muestra un bosquejo de la gráfica de $y = \operatorname{sen}(2\pi t)$.

(b) Conforme t varía de 0 a π, el argumento $2t$ varía de 0 a 2π. Por lo tanto, la gráfica de $y = \cos(2t)$ se repetirá en intervalos adyacentes de longitud π. Una vez que construimos una tabla podemos bosquejar una gráfica de $y = \cos(2t)$. La figura 8 muestra la gráfica de $y = \cos(2t)$.

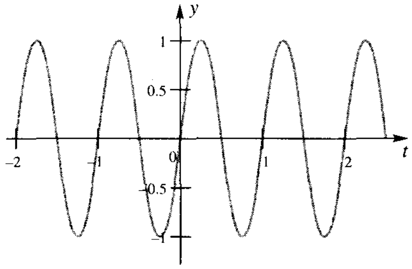


Figura 7

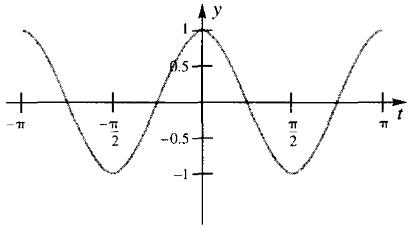


Figura 8

t	$\cos(2t)$	t	$\cos(2t)$
0	$\cos(2\cdot 0) = 1$	$\frac{5\pi}{8}$	$\cos\left(2\cdot\frac{5\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{8}$	$\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\cos\left(2\cdot\frac{3\pi}{4}\right) = 0$
$\frac{\pi}{4}$	$\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 0$	$\frac{7\pi}{8}$	$\cos\left(2\cdot\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{3\pi}{8}$	$\cos\left(2\cdot\frac{3\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	π	$\cos(2\cdot\pi) = 1$
$\frac{\pi}{2}$	$\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = -1$	$\frac{9\pi}{8}$	$\cos\left(2\cdot\frac{9\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

■

Periodo y amplitud de las funciones trigonométricas Una función f es **periódica** si existe un número p tal que

$$f(x+p) = f(x)$$

para todos los números reales x en el dominio de f. El número positivo p más pequeño de tales números se denomina **periodo** de f. La función seno es periódica porque $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$ para toda x. También es cierto que

$$\operatorname{sen}(x + 4\pi) = \operatorname{sen}(x - 2\pi) = \operatorname{sen}(x + 12\pi) = \operatorname{sen} x$$

para toda x. Por lo tanto, 4π, -2π y 12π son números p con la propiedad de que $\operatorname{sen}(x + p) = \operatorname{sen} x$. El periodo se define como el número positivo más pequeño p. Para la función seno, el positivo más pequeño p con la propiedad de que $\operatorname{sen}(x + p) = \operatorname{sen} x$ es $p = 2\pi$. En consecuencia, decimos que la función seno es periódica, con periodo 2π. La función coseno también es periódica, con periodo 2π.

La función $\operatorname{sen}(at)$, con $a > 0$, $2\pi/a$ ya que

$$\operatorname{sen}\left[a\left(t + \frac{2\pi}{a}\right)\right] = \operatorname{sen}[at + 2\pi] = \operatorname{sen}(at)$$

El periodo de la función $\cos(at)$ también es $2\pi/a$.

EJEMPLO 2 ¿Cuáles son los periodos de las funciones siguientes?

(a) $\operatorname{sen}(2\pi t)$ (b) $\cos(2t)$ (c) $\operatorname{sen}(2\pi t/12)$

SOLUCIÓN

(a) Como la función $\operatorname{sen}(2\pi t)$ es de la forma $\operatorname{sen}(at)$ con $a = 2\pi$, su periodo es $p = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1$.

(b) La función $\cos(2t)$ es de la forma $\cos(at)$ con $a = 2$. Por lo tanto, el periodo de $\cos(2t)$ es $p = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

(c) La función $\operatorname{sen}(2\pi t/12)$ tiene periodo $p = \dfrac{2\pi}{2\pi/12} = 12$. ■

Si la función periódica f alcanza un máximo y un mínimo, definimos la **amplitud** A como la mitad de la distancia vertical entre el punto más bajo y el punto más alto de la gráfica.

EJEMPLO 3 Determine la amplitud de las siguientes funciones periódicas.

(a) $\operatorname{sen}(2\pi t/12)$ (b) $3\cos(2t)$

(c) $50 + 21\operatorname{sen}(2\pi t/12 + 3)$

SOLUCIÓN

(a) Como el rango de la función $\operatorname{sen}(2\pi t/12)$ es $[-1, 1]$, su amplitud es $A = 1$.

(b) La función $3\cos(2t)$ tomará valores de -3 (lo cual ocurre cuando $t = \pm\dfrac{\pi}{2}, \pm\dfrac{3\pi}{2}, \ldots$) a 3 (lo cual se da cuando $t = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$). Por lo tanto, la amplitud es $A = 3$.

(c) La función $21\operatorname{sen}(2\pi t/12 + 3)$ toma valores que van de -21 a 21. Por lo tanto, $50 + 21\operatorname{sen}(12\pi t/12 + 3)$ toma valores de $50 - 21 = 29$ a $50 + 21 = 71$. Por lo tanto, la amplitud es 21. ■

En general, para $a > 0$ y $A > 0$,

$C + A\operatorname{sen}(a(t + b))$ y $C + A\cos(a(t + b))$ tienen periodo $\dfrac{2\pi}{a}$ y amplitud A.

Las funciones trigonométricas se pueden usar para modelar diferentes fenómenos físicos, incluyendo niveles diarios de la marea y temperaturas anuales.

EJEMPLO 4 La temperatura alta normal para San Luis, Missouri, varía desde 37°F para el 15 de enero hasta 89°F para el 15 de julio. La temperatura alta normal sigue aproximadamente una curva sinusoidal.

(a) Determine valores de C, A, a y b tales que

$$T(t) = C + A\operatorname{sen}(a(t + b))$$

donde t, expresada en meses desde el 1 de enero, es un modelo razonable para la temperatura alta normal.

(b) Utilice este modelo para aproximar la temperatura alta normal para el 15 de mayo.

SOLUCIÓN

(a) La función pedida debe tener periodo $t = 12$, ya que las estaciones se repiten cada 12 meses. Así, $\dfrac{2\pi}{a} = 12$, de modo que tenemos $a = \dfrac{2\pi}{12}$. La amplitud es la mitad de la diferencia entre los puntos más alto y más bajo; en este caso $A = \dfrac{1}{2}(89 - 37) = 26$.

El valor de C es igual a la mitad de las temperaturas baja y alta, de modo que $C = \frac{1}{2}(89 + 37) = 63$. Por lo tanto, la función $T(t)$ será de la forma

$$T(t) = 63 + 26\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{12}(t + b)\right)$$

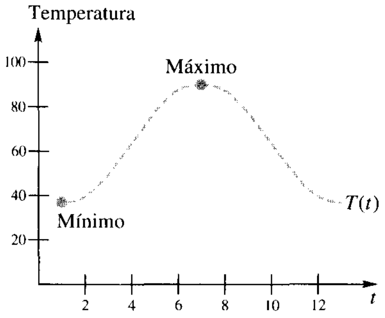


Figura 9

La única constante que queda por determinar es b. La temperatura normal alta inferior es 37, que ocurre el 15 de enero, aproximadamente a mediados de enero. Así, nuestra función debe satisfacer $T(1/2) = 37$, y la función debe alcanzar su mínimo de 37 cuando $t = 1/2$. La figura 9 resume la información que tenemos hasta el momento. La función $63 + 26\,\text{sen}(2\pi t/12)$ alcanza su mínimo cuando $2\pi t/12 = -\pi/2$, esto es, cuando $t = -3$. Por lo tanto, debemos trasladar hacia la derecha $1/2 - (-3) = 7/2$ unidades, la curva definida por $y = 63 + 26\,\text{sen}(2\pi t/12)$. En la sección 0.6 mostramos que reemplazar x por $x - c$ traslada la gráfica de $y = f(x)$ hacia la derecha c unidades. Así, para trasladar la gráfica de $y = 63 + 26\,\text{sen}(2\pi t/12)$ hacia la derecha 7/2 unidades, debemos reemplazar t con $t - 7/2$. Por lo tanto,

$$T(t) = 63 + 26\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{12}\left(t - \frac{7}{2}\right)\right)$$

La figura 10 muestra una gráfica de la temperatura alta normal T como una función de t, donde t está dada en meses.

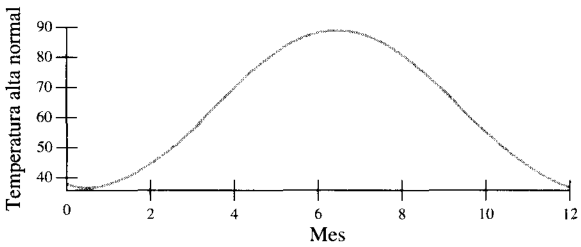


Figura 10

(b) Para estimar la temperatura alta normal el 15 de mayo, sustituimos $t = 4.5$ (ya que la mitad de mayo está a cuatro y medio meses del inicio del año) y obtenemos

$$T(4.5) = 63 + 26\,\text{sen}(2\pi(4.5 - 3.5)/12) = 76$$

La temperatura alta normal para San Luis el 15 de mayo realmente es de 75°F. De este modo, nuestro modelo sobreestima por 1°, lo cual es sorprendentemente preciso considerando la poca información que fue dada. ■

Modelos y modelación

Es importante tener presente que todos los modelos, como éste, son simplificaciones de la realidad. (Por esta razón se denominan *modelos*). Aunque tales modelos son inherentemente simplificaciones de la realidad, muchos de ellos son útiles para realizar pronósticos.

Otras cuatro funciones trigonométricas Podríamos valernos sólo de las funciones seno y coseno, pero es conveniente introducir cuatro funciones trigonométricas más: tangente, cotangente, secante y cosecante.

$$\tan t = \frac{\text{sen}\, t}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\text{sen}\, t}$$

$$\sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \csc t = \frac{1}{\text{sen}\, t}$$

Lo que sabemos de seno y coseno nos proporcionará, de forma automática, conocimiento acerca de estas cuatro nuevas funciones.

EJEMPLO 5 Demuestre que la tangente es una función impar.

SOLUCIÓN

$$\tan(-t) = \frac{\operatorname{sen}(-t)}{\cos(-t)} = \frac{-\operatorname{sen} t}{\cos t} = -\tan t \qquad \blacksquare$$

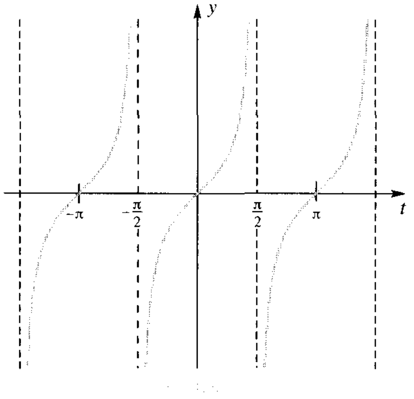


Figura 11

EJEMPLO 6 Verifique que las siguientes son identidades.

$$\boxed{1 + \tan^2 t = \sec^2 t \qquad 1 + \cot^2 t = \csc^2 t}$$

SOLUCIÓN

$$1 + \tan^2 t = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} = \sec^2 t$$

$$1 + \cot^2 t = 1 + \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t} = \frac{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 t} = \csc^2 t \qquad \blacksquare$$

Cuando estudiamos la función tangente (figura 11) nos encontramos con dos pequeñas sorpresas. Primera, notamos que hay asíntotas verticales en $\pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots,$ etcétera. Debimos haber anticipado esto, ya que cos $t = 0$ en estos valores de t, lo cual significa que (sen t)/(cos t) implicaría una división entre cero. Segunda, parece que la tangente es periódica (lo cual esperábamos), pero con periodo π (que podríamos no haber esperado). Usted verá la razón analítica para esto en el problema 33.

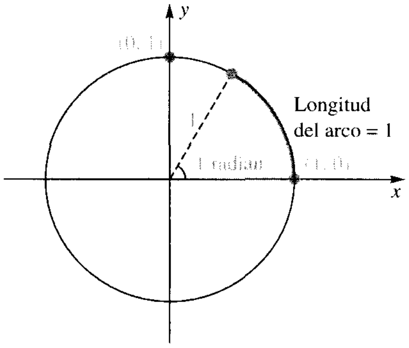


Figura 12

Relación con la trigonometría del ángulo Por lo común, los ángulos se miden en grados o en radianes. Por definición, un radián es el ángulo que corresponde a un arco de longitud 1 en un círculo unitario. Véase la figura 12. El ángulo que corresponde a una vuelta completa mide 360°, pero sólo 2π radianes. De manera equivalente, un ángulo llano (de lados colineales)medirá 180° o π radianes, un hecho importante para recordar.

$$\boxed{180° = \pi \text{ radianes} \approx 3.1415927 \text{ radianes}}$$

Esto conduce a los resultados

$$1 \text{ radián} \approx 57.29578° \qquad 1° \approx 0.0174533 \text{ radián}$$

Grados	Radianes
0	0
30	π/6
45	π/4
60	π/3
90	π/2
120	2π/3
135	3π/4
150	5π/6
180	π
360	2π

Figura 13

La figura 13 muestra algunas otras conversiones comunes entre grados y radianes.

La división de una vuelta en 360 partes es muy arbitraria (debida a los antiguos babilonios, a quienes les agradaban los múltiplos de 60). La división en 2π partes es más fundamental y yace en el uso casi universal de la medida radián en cálculo. En particular, observe que la longitud s del arco que corta un círculo de radio r por medio de un ángulo central de t radianes satisface (véase la figura 14)

$$\frac{s}{2\pi r} = \frac{t}{2\pi}$$

Esto es, la fracción de la circunferencia total $2\pi r$ correspondiente a un ángulo t es la misma fracción del círculo unitario que corresponde al mismo ángulo t. Esto implica que $s = rt$.

Cuando $r = 1$, esto da $s = t$, *lo cual* significa que *la longitud del arco en el círculo unitario cortado por un ángulo central de t radianes es t*. Esto es correcto incluso si t es negativa, con tal que interpretemos la longitud como negativa cuando se mide en dirección de las manecillas del reloj.

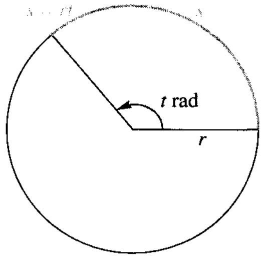


Figura 14

EJEMPLO 7 Determine la distancia recorrida por una bicicleta, cuyas ruedas tienen un radio de 30 centímetros, cuando éstas han girado 100 revoluciones.

SOLUCIÓN Utilizamos el hecho de que $s = rt$, reconociendo que 100 revoluciones corresponden a $100\cdot(2\pi)$ radianes.

$$s = (30)(100)(2\pi) = 6000\pi \approx 18{,}849.6 \text{ centímetros} \approx 188.5 \text{ metros} \quad \blacksquare$$

Ahora podemos hacer la conexión entre la trigonometría del ángulo y la trigonometría del círculo unitario. Si θ es un ángulo medido en k radianes, es decir, si θ es un ángulo que corta un arco de longitud t del círculo unitario, entonces

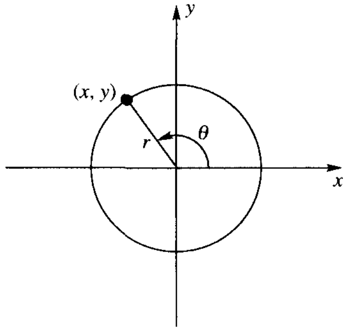
$$\boxed{\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen} t \qquad \cos\theta = \cos t}$$

En cálculo, cuando encontramos un ángulo medido en grados, casi siempre lo cambiamos a radianes antes de realizar cualquier cálculo. Por ejemplo,

$$\boxed{\operatorname{sen} 31.6^\circ = \operatorname{sen}\left(31.6\cdot\frac{\pi}{180}\text{radián}\right) \approx \operatorname{sen} 0.552}$$

Otra vista

Hemos tenido al círculo unitario como base de nuestro estudio de trigonometría. También podríamos utilizar un círculo de radio r.



Entonces

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

Lista de identidades importantes No gastaremos espacio en verificar todas las identidades siguientes. Simplemente aseguraremos su validez y sugerimos que la mayoría de ellas será necesaria en alguna parte de este texto.

Identidades trigonométricas Lo siguiente es cierto para toda x y toda y, siempre que ambos lados estén definidos para las x y y seleccionadas.

Identidades par-impar

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

Identidades de las cofunciones

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Identidades para la suma de ángulos

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Identidades del ángulo doble

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\\ &= 2\cos^2 x - 1\\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2 x\end{aligned}$$

Identidades del medio ángulo

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

Identidades aditivas

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x + y}{2}\right)\cos\left(\frac{x - y}{2}\right)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x + y}{2}\right)\cos\left(\frac{x - y}{2}\right)$$

Identidades multiplicativas

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = -\tfrac{1}{2}[\cos(x + y) - \cos(x - y)]$$

$$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

$$\operatorname{sen} x \cos y = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y)]$$

Revisión de conceptos

1. El dominio natural de la función seno es _______; su rango es _______.

2. El periodo de la función coseno es _______; el periodo de la función seno es _______; el periodo de la función tangente es _______.

3. Como $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, la función seno es _______ y como $\cos(-x) = \cos x$, la función coseno es _______.

4. Si $(-4, 3)$ está en el lado terminal de un ángulo θ cuyo vértice está en el origen y su lado inicial está a lo largo de la parte positiva del eje x, entonces $\cos\theta =$ _______.

Conjunto de problemas 0.7

1. Convierta las siguientes medidas en grados a radianes (deje π en su respuesta)

(a) 30° (b) 45° (c) −60°
(d) 240° (e) −370° (f) 10°

2. Convierta las siguientes medidas en radianes a grados

(a) $\frac{7}{6}\pi$ (b) $\frac{3}{4}\pi$ (c) $-\frac{1}{3}\pi$
(d) $\frac{4}{3}\pi$ (e) $-\frac{35}{18}\pi$ (f) $\frac{3}{18}\pi$

$\boxed{C}$ **3.** Convierta las siguientes medidas en grados a radianes ($1° = \pi/180 \approx 1.7453 \times 10^{-2}$ radianes).

(a) 33.3° (b) 46° (c) −66.6°
(d) 240.11° (e) −369° (f) 11°

$\boxed{C}$ **4.** Convierta las siguientes medidas en radianes a grados (1 radián $= 180/\pi \approx 57.296$ grados).

(a) 3.141 (b) 6.28 (c) 5.00
(d) 0.001 (e) −0.1 (f) 36.0

$\boxed{C}$ **5.** Calcule (asegúrese de que su calculadora está en modo de radianes o de grados, según sea necesario).

(a) $\dfrac{56.4 \tan 34.2°}{\operatorname{sen} 34.1°}$ (b) $\dfrac{5.34 \tan 21.3°}{\operatorname{sen} 3.1° + \cot 23.5°}$

(c) $\tan 0.452$ (d) $\operatorname{sen}(-0.361)$

$\boxed{C}$ **6.** Calcule

(a) $\dfrac{234.1 \operatorname{sen} 1.56}{\cos 0.34}$ (b) $\operatorname{sen}^2 2.51 + \sqrt{\cos 0.51}$

$\boxed{C}$ **7.** Calcule.

(a) $\dfrac{56.3 \tan 34.2°}{\operatorname{sen} 56.1°}$ (b) $\left(\dfrac{\operatorname{sen} 35°}{\operatorname{sen} 26° + \cos 26°}\right)^3$

8. Verifique los valores de $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$ de la tabla utilizada para construir la figura 6.

9. Sin utilizar calculadora, evalúe.

(a) $\tan\dfrac{\pi}{6}$ (b) $\sec \pi$ (c) $\sec\dfrac{3\pi}{4}$

(d) $\csc\dfrac{\pi}{2}$ (e) $\cot\dfrac{\pi}{4}$ (f) $\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

10. Evalúe sin utilizar calculadora.

(a) $\tan\dfrac{\pi}{3}$ (b) $\sec\dfrac{\pi}{3}$ (c) $\cot\dfrac{\pi}{3}$

(d) $\csc\dfrac{\pi}{4}$ (e) $\tan\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$ (f) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$

11. Verifique que las siguientes son identidades (véase el ejemplo 6).

(a) $(1 + \operatorname{sen} z)(1 - \operatorname{sen} z) = \dfrac{1}{\sec^2 z}$

(b) $(\sec t - 1)(\sec t + 1) = \tan^2 t$

(c) $\sec t - \operatorname{sen} t \tan t = \cos t$

(d) $\dfrac{\sec^2 t - 1}{\sec^2 t} = \operatorname{sen}^2 t$

12. Verifique que las siguientes son identidades (véase el ejemplo 6).

(a) $\operatorname{sen}^2 v + \dfrac{1}{\sec^2 v} = 1$

(b) $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$.*Sugerencia:* utilice una identidad del ángulo doble.

(c) $\operatorname{sen} 4x = 8 \operatorname{sen} x \cos^3 x - 4 \operatorname{sen} x \cos x$. *Sugerencia:* utilice dos veces una identidad del ángulo doble.

(d) $(1 + \cos\theta)(1 - \cos\theta) = \operatorname{sen}^2\theta$

13. Verifique que las siguientes son identidades.

(a) $\dfrac{\operatorname{sen} u}{\csc u} + \dfrac{\cos u}{\sec u} = 1$

(b) $(1 - \cos^2 x)(1 + \cot^2 x) = 1$

(c) $\operatorname{sen} t(\csc t - \operatorname{sen} t) = \cos^2 t$

(d) $\dfrac{1 - \csc^2 t}{\csc^2 t} = \dfrac{-1}{\sec^2 t}$

14. Bosqueje las gráficas de las siguientes funciones en $[-\pi, 2\pi]$.

(a) $y = \operatorname{sen} 2x$ (b) $y = 2 \operatorname{sen} t$

(c) $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ (d) $y = \sec t$

15. Bosqueje las gráficas de las siguientes funciones en $[-\pi, 2\pi]$.

(a) $y = \csc t$ (b) $y = 2\cos t$

(c) $y = \cos 3t$ (d) $y = \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$

Determine el periodo, amplitud y corrimiento (tanto horizontal como vertical) y dibuje una gráfica en el intervalo $-5 \le x \le 5$ para las funciones listadas en los problemas del 16 al 23.

16. $y = 3\cos\frac{x}{2}$

17. $y = 2\,\text{sen}\,2x$

18. $y = \tan x$

19. $y = 2 + \frac{1}{6}\cot 2x$

20. $y = 3 + \sec(x - \pi)$

21. $y = 21 + 7\,\text{sen}(2x + 3)$

22. $y = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$

23. $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

24. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones representa la misma gráfica? Verifique su resultado de manera analítica por medio de identidades trigonométricas.

(a) $y = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (b) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

(c) $y = -\text{sen}(x + \pi)$ (d) $y = \cos(x - \pi)$

(e) $y = -\text{sen}(\pi - x)$ (f) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

(g) $y = -\cos(\pi - x)$ (h) $y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

25. ¿Cuáles de las siguientes son funciones impares? ¿Cuáles funciones pares? ¿Y cuáles ninguna de éstas?

(a) $t\,\text{sen}\,t$ (b) $\text{sen}^2 t$ (c) $\csc t$

(d) $|\text{sen}\,t|$ (e) $\text{sen}(\cos t)$ (f) $x + \text{sen}\,x$

26. ¿Cuáles de las siguiente son funciones impares? ¿Cuáles funciones pares? ¿Y cuáles ninguna de éstas?

(a) $\cot t + \text{sen}\,t$ (b) $\text{sen}^3 t$ (c) $\sec t$

(d) $\sqrt{\text{sen}^4 t}$ (e) $\cos(\text{sen}\,t)$ (f) $x^2 + \text{sen}\,x$

Determine los valores exactos en los problemas del 27 al 31. Sugerencia: las identidades del medio ángulo pueden serle útiles.

27. $\cos^2\frac{\pi}{3}$

28. $\text{sen}^2\frac{\pi}{6}$

29. $\text{sen}^3\frac{\pi}{6}$

30. $\cos^2\frac{\pi}{12}$

31. $\text{sen}^2\frac{\pi}{8}$

32. Determine las identidades análogas a las identidades de suma de ángulos para cada expresión.

(a) $\text{sen}(x - y)$ (b) $\cos(x - y)$ (c) $\tan(x - y)$

33. Utilice la identidad de suma de ángulo para la tangente, a fin de demostrar que $\tan(t + \pi) = \tan t$ para toda t en el dominio de $\tan t$.

34. Demuestre que $\cos(x - \pi) = -\cos x$ para toda x.

≋ C **35.** Suponga que la llanta de un camión tiene un radio exterior de 2.5 pies. ¿Cuántas revoluciones por minuto gira la llanta cuando el camión está viajando a 60 millas por hora?

≋ **36.** ¿Cuánto avanza una rueda, de radio 2 pies, que gira al nivel del piso dando 150 revoluciones?

≋ C **37.** Una banda pasa por dos poleas, como se muestra en la figura 15. ¿Cuántas revoluciones por segundo gira la polea pequeña cuando la polea grande gira a 21 revoluciones por segundo?

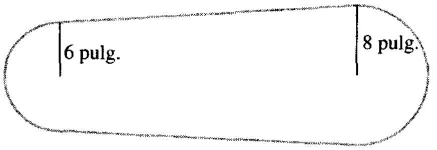


Figura 15

38. El **ángulo de inclinación** α de una recta es el ángulo positivo más pequeño, a partir del eje x a la recta ($\alpha = 0$, para una recta horizontal). Demuestre que la pendiente m de la recta es igual a tan a.

39. Determine el ángulo de inclinación de las siguientes rectas (véase el problema 38).

(a) $y = \sqrt{3}x - 7$ (b) $\sqrt{3}x + 3y = 6$

40. Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas no verticales, que se intersectan, con pendientes m_1 y m_2, respectivamente. Si θ, el ángulo de ℓ_1 a ℓ_2, no es un ángulo recto, entonces

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Demuestre esto utilizando el hecho de que $\theta = \theta_2 - \theta_1$ en la figura 16.

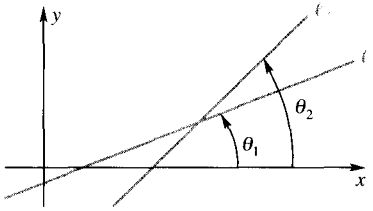


Figura 16

C **41.** Determine el ángulo (en radianes) de la primera a la segunda recta (véase el problema 40).

(a) $y = 2x, y = 3x$ (b) $y = \frac{x}{2}, y = -x$

(c) $2x - 6y = 12, 2x + y = 0$

42. Deduzca la fórmula $A = \frac{1}{2}r^2t$ para el área de un sector circular. Aquí, r es el radio y t es la medida en radianes del ángulo central (véase la figura 17).

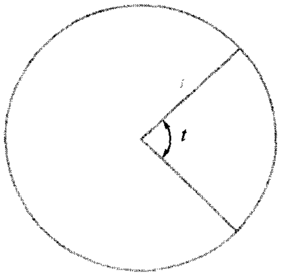


Figura 17

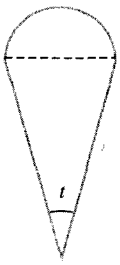


Figura 18

43. Determine el área del sector de un círculo de radio 5 centímetros y ángulo central de 2 radianes (véase el problema 42).

44. Un polígono regular de n lados está inscrito en un círculo de radio r. Determine fórmulas para el perímetro, P, y el área, A, del polígono en términos de n y r.

45. Un triángulo isósceles está coronado por un semicírculo, como se muestra en la figura 18. Encuentre una fórmula para el área A de la figura completa, en términos de la longitud del lado r y el ángulo t (radianes). (Decimos que A es una función de las dos variables independientes r y t.)

46. A partir de una identidad multiplicativa obtenemos

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{3}{4}x\right) + \cos\left(\frac{1}{4}x\right)\right]$$

Determine la correspondiente suma de cosenos para

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cos\frac{x}{16}$$

¿Puede visualizar una generalización?

47. La temperatura alta normal para Las Vegas, Nevada, es de 55°F para el 15 de enero y 105° para el 15 de julio. Suponiendo que éstas sean las temperaturas superior e inferior para el año, utilice esta información para aproximar la temperatura alta promedio para el 15 de noviembre.

48. Con frecuencia, las mareas se miden por medio de marcas de altura arbitrarias en alguna localidad. Suponga que una marea alta ocurre al mediodía cuando el nivel del agua está en 12 pies. Seis horas más tarde, sucede una marea baja con un nivel de 5 pies, y a medianoche tiene lugar otra marea alta con un nivel del agua de 12 pies. Suponiendo que el nivel del agua es periódico, utilice esta información para determinar una fórmula que proporcione el nivel del agua como una función del tiempo. Luego utilice esta función para aproximar el nivel del agua a las 5:30 p. m.

EXPL **49.** El movimiento circular puede modelarse mediante la representación paramétrica de la forma $x(t) = \operatorname{sen} t$ y $y(t) = \cos t$. (Una *representación paramétrica* significa que una variable, en este caso t, determina a $x(t)$ y $y(t)$.) Ésta dará el círculo completo para $0 \le t \le 2\pi$. Si consideramos una rueda con un diámetro de 4 pies que gira en el sentido de las manecillas del reloj una vez cada 10 segundos, demuestre que el movimiento de un punto en la periferia de la rueda puede representarse por medio de $x(t) = 2\operatorname{sen}(\pi t/5)$ y $y(t) = 2\cos(\pi t/5)$.

(a) Determine las posiciones del punto en el borde de la rueda cuando $t = 2, 6$ y 10 segundos. ¿En dónde estaba este punto cuando la rueda comenzó a girar en $t = 0$?

(b) Si la rueda está girando en *sentido contrario a las manecillas del reloj*, ¿cómo cambiarían las fórmulas para dar el movimiento del punto?

(c) ¿Para qué valor de t el punto está en $(2, 0)$ por primera vez?

EXPL **50.** La frecuencia circular v de oscilación de un punto está dada por $v = \dfrac{2\pi}{\text{periodo}}$. ¿Qué sucede cuando suma dos movimientos que tienen la misma frecuencia o periodo? Para investigar, podemos graficar las funciones $y(t) = 2\operatorname{sen}(\pi t/5)$ y $y(t) = \operatorname{sen}(\pi t/5) + \cos(\pi t/5)$ y buscar semejanzas. Armados con esta información, podemos investigar mediante la graficación de las funciones siguientes en el intervalo $[-5, 5]$:

(a) $y(t) = 3\operatorname{sen}(\pi t/5) - 5\cos(\pi t/5) + 2\operatorname{sen}((\pi t/5) - 3)$

(b) $y(t) = 3\cos(\pi t/5 - 2) + \cos(\pi t/5) + \cos((\pi t/5) - 3)$

EXPL **51.** Ahora exploramos la relación entre $A\operatorname{sen}(\omega t) + B\cos(\omega t)$ y $C\operatorname{sen}(\omega t + \phi)$.

(a) Desarrollando $\operatorname{sen}(wt + \phi)$ por medio de la fórmula para la suma de ángulos, demuestre que las dos expresiones son equivalentes si $A = C\cos\phi$ y $B = C\operatorname{sen}\phi$.

(b) En consecuencia, demuestre que $A^2 + B^2 = C^2$ y que entonces ϕ satisface la ecuación $\tan\phi = \dfrac{B}{A}$.

(c) Generalice su resultado para establecer una proposición acerca de $A_1\operatorname{sen}(\omega t + \phi_1) + A_2\operatorname{sen}(\omega t + \phi_2) + A_3\operatorname{sen}(\omega t + \phi_3)$.

(d) Escriba un ensayo, con sus propias palabras, que exprese la importancia de la identidad entre $A\operatorname{sen}(\omega t) + B\cos(\omega t)$ y $C\operatorname{sen}(\omega t + \phi)$. Asegúrese de observar que $|C| \ge \text{máx}(|A|, |B|)$ y que la identidad sólo se cumple cuando usted forma una combinación lineal (sumando y/o restando múltiplos de una sola potencia) de senos y cosenos con la misma frecuencia.

Las funciones trigonométricas que tienen frecuencias altas plantean problemas especiales para su graficación. Ahora exploramos cómo graficar tales funciones.

GC **52.** Grafique la función $f(x) = \operatorname{sen} 50x$; use la ventana dada por un rango de y de $-1.5 \le y \le 1.5$ y rango de x dado por

(a) $[-15, 15]$
(b) $[-10, 10]$
(c) $[-8, 8]$
(d) $[-1, 1]$
(e) $[-0.25, 0.25]$

Indique brevemente cuál ventana de x muestra el comportamiento verdadero de la función, y discuta las razones por las que otras ventanas dan resultados que son diferentes.

GC **53.** Grafique la función $f(x) = \cos x + \dfrac{1}{50}\operatorname{sen} 50x$; utilice la ventana dada por los siguientes rangos para x y y.

(a) $-5 \le x \le 5, -1 \le y \le 1$

(b) $-1 \le x \le 1, 0.5 \le y \le 1.5$

(c) $-0.1 \le x \le 0.1, 0.9 \le y \le 1.1$

De manera breve indique cuál ventana (x, y) muestra el verdadero comportamiento de la función, y discuta las razones por las que las otras ventanas (x, y) dan resultados que son diferentes. En este caso, ¿es cierto que sólo una de las ventanas proporciona el comportamiento importante, o necesitamos más de una ventana para comunicar de manera gráfica el comportamiento de esta función?

GC EXPL **54.** Sean $f(x) = \dfrac{3x + 2}{x^2 + 1}$ y $g(x) = \dfrac{1}{100}\cos(100x)$.

(a) Utilice la composición de funciones para formar $h(x) = (f \circ g)(x)$, así como $j(x) = (g \circ f)(x)$.

(b) Determine la ventana o ventanas adecuadas que proporcionen una representación clara de $h(x)$.

(c) Determine la ventana o ventanas adecuadas que proporcionen una representación clara de $j(x)$.

55. Suponga que una función continua es periódica con periodo 1 y es lineal entre 0 y 0.25, y lineal entre −0.75 y 0. Además, tiene el valor 1 en 0 y 2 en 0.25. Bosqueje la función en el dominio $[-1, 1]$ y proporcione una definición por partes de la función.

56. Suponga que una función continua es periódica con periodo 2 y es cuadrática entre −0.25 y 0.25, y lineal entre −1.75 y −0.25. Además, tiene el valor 0 en 0 y 0.0625 en ±0.25. Bosqueje la función en el dominio $[-2, 2]$ y proporcione una definición por partes de la función.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $(-\infty, \infty)$; $[-1, 1]$ **2.** 2π; 2π; π **3.** impar; par **4.** $-4/5$

0.8 Repaso del capítulo

Examen de conceptos

Responda con verdadero o falso a cada una de las siguientes aseveraciones. Esté preparado para justificar su respuesta. Por lo común, esto significa que usted debe proporcionar una razón si responde verdadero y dar un contraejemplo si responde falso.

1. Cualquier número que puede escribirse como una fracción p/q es racional.

2. La diferencia de cualesquiera dos números racionales es racional.

3. La diferencia de cualesquiera dos números irracionales es irracional.

4. Entre dos números irracionales distintos siempre hay otro número irracional.

5. $0.999\ldots$ (los 9 se repiten) es menor que 1.

6. La operación de exponenciación es conmutativa; esto es, $(a^m)^n = (a^n)^m$.

7. La operación * definida por $m*n = m^n$ es asociativa.

8. Las desigualdades $x \leq y$, $y \leq z$ y $z \leq x$, juntas, implican que $x = y = z$.

9. Si $|x| < \varepsilon$ para todo número positivo ε , entonces $x = 0$.

10. Si x y y son números reales, entonces $(x - y)(y - x) \leq 0$.

11. Si $a < b < 0$, entonces $1/a > 1/b$.

12. Es posible que dos intervalos cerrados tengan exactamente un punto en común.

13. Si dos intervalos abiertos tienen un punto en común, entonces tienen un número infinito de puntos en común.

14. Si $x < 0$, entonces $\sqrt{x^2} = -x$.

15. Si x es un número real, entonces $|-x| = x$.

16. Si $|x| < |y|$, entonces $x < y$.

17. Si $|x| < |y|$, entonces $x^4 < y^4$.

18. Si x y y son negativos, entonces $|x + y| = |x| + |y|$.

19. Si $|r| < 1$, entonces $\dfrac{1}{1 + |r|} \leq \dfrac{1}{1 - r} \leq \dfrac{1}{1 - |r|}$.

20. Si $|r| > 1$, entonces $\dfrac{1}{1 - |r|} \leq \dfrac{1}{1 - r} \leq \dfrac{1}{1 + |r|}$.

21. Siempre es cierto que $||x| - |y|| \leq |x + y|$.

22. Para cada número real positivo y existe un número real x, tal que $x^2 = y$.

23. Para cada número real y existe un número real x, tal que $x^3 = y$.

24. Es posible tener una desigualdad cuyo conjunto solución consista exactamente en un número.

25. La ecuación $x^2 + y^2 + ax + y = 0$ representa un circunferencia para todo número real a.

26. La ecuación $x^2 + y^2 + ax + by = c$ representa una circunferencia para todos los números reales a, b, c.

27. Si (a, b) pertenece a una recta con pendiente $\frac{3}{4}$, entonces $(a + 4, b + 3)$ también está en esa recta.

28. Si (a, b), (c, d) y (e, f) están en la misma recta, entonces $\dfrac{a - c}{b - d} = \dfrac{a - e}{b - f} = \dfrac{e - c}{f - d}$, siempre que los tres números sean diferentes.

29. Si $ab > 0$, entonces (a, b) está en el primero o en el tercer cuadrante.

30. Para cada $\varepsilon > 0$ existe un número positivo x tal que $x < \varepsilon$.

31. Si $ab = 0$, entonces (a, b) está en alguno de los ejes coordenados x o y.

32. Si $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |x_2 - x_1|$, entonces (x_1, y_1) y (x_2, y_2) pertenecen a la misma recta horizontal.

33. La distancia entre $(a + b, a)$ y $(a - b, a)$ es $|2b|$.

34. La ecuación de cualquier recta puede escribirse en la forma punto–pendiente.

35. La ecuación de cualquier recta puede escribirse en la forma lineal general $Ax + By + C = 0$.

36. Si dos rectas no verticales son paralelas, tienen la misma pendiente.

37. Es posible que dos rectas tengan pendientes positivas y sean perpendiculares.

38. Si las intersecciones de una recta con el eje x y el eje y son racionales distintos de cero, entonces la pendiente de la recta es racional.

39. Las rectas $ax + y = c$ y $ax - y = c$ son perpendiculares.

40. $(3x - 2y + 4) + m(2x + 6y - 2) = 0$ es la ecuación de una recta para cada número real m.

41. El dominio natural de

$$f(x) = \sqrt{-(x^2 + 4x + 3)}$$

es el intervalo $-3 \leq x \leq -1$.

42. El dominio natural de $T(\theta) = \sec(\theta) + \cos(\theta)$ es $(-\infty, \infty)$.

43. El rango de $f(x) = x^2 - 6$ es el intervalo $[-6, \infty)$.

44. El rango de la función $f(x) = \tan x - \sec x$ es el conjunto $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

45. El rango de la función $f(x) = \csc x - \sec x$ es el conjunto $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

46. La suma de dos funciones pares es una función par.

47. La suma de dos funciones impares es una función impar.

48. El producto de dos funciones impares es una función impar.

49. El producto de una función par con una función impar es una función impar.

50. La composición de una función par con una función impar es una función impar.

51. La composición de dos funciones impares es una función par.

52. La función $f(x) = (2x^3 + x)/(x^2 + 1)$ es impar.

53. La función

$$f(t) = \frac{(\operatorname{sen} t)^2 + \cos t}{\tan t \csc t}$$

es par

54. Si el rango de una función consiste en un solo número, entonces su dominio también consiste en un solo número.

55. Si el dominio de una función contiene al menos dos números, entonces el rango también contiene al menos dos números.

56. Si $g(x) = [\![x/2]\!]$, entonces $g(-1.8) = -1$.

57. Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$, entonces $f \circ g = g \circ f$.

58. Si $f(x) = x^2$ si $g(x) = x^3$, entonces $(f \circ g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

59. Si f y g tienen el mismo dominio, entonces f/g también tiene ese dominio.

60. Si la gráfica de $y = f(x)$ tiene una intersección con el eje x en $x = a$, entonces la gráfica de $y = f(x + h)$ tiene una intersección con el eje x en $x = a - h$.

61. La cotangente es una función impar.

62. El dominio natural de la función tangente es el conjunto de todos los números reales.

63. Si cos s = cos t, entonces $s = t$.

Conjunto de problemas de práctica

1. Calcule cada valor para $n = 1, 2$ y -2.

(a) $\left(n + \dfrac{1}{n}\right)^n$ (b) $(n^2 - n + 1)^2$

(c) $4^{3/n}$ (d) $\sqrt[n]{\left|\dfrac{1}{n}\right|}$

2. Simplifique

(a) $\left(1 + \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\right)\left(1 - \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\right)^{-1}$

(b) $\dfrac{\dfrac{2}{x+1} - \dfrac{x}{x^2 - x - 2}}{\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{2}{x-2}}$

(c) $\dfrac{t^3 - 1}{t - 1}$

3. Muestre que el promedio de dos números racionales es un número racional.

4. Escriba el decimal periódico 4.1282828... como un cociente de dos enteros.

5. Encuentre un número irracional entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{13}{25}$.

$\boxed{\text{C}}$ **6.** Calcule $\left(\sqrt[3]{8.15 \times 10^4} - 1.32\right)^2/3.24$.

$\boxed{\text{C}}$ **7.** Calcule $\left(\pi - \sqrt{2.0}\right)^{2.5} - \sqrt[3]{2.0}$.

$\boxed{\text{C}}$ **8.** Calcule $\operatorname{sen}^2(2.45) + \cos^2(2.40) - 1.00$.

En los problemas del 9 al 18 determine el conjunto solución en la recta real y exprese este conjunto en la notación de intervalo.

9. $1 - 3x > 0$ **10.** $6x + 3 > 2x - 5$

11. $3 - 2x \le 4x + 1 \le 2x + 7$

12. $2x^2 + 5x - 3 < 0$ **13.** $21t^2 - 44t + 12 \le -3$

14. $\dfrac{2x - 1}{x - 2} > 0$

15. $(x + 4)(2x - 1)^2(x - 3) \le 0$

16. $|3x - 4| < 6$

17. $\dfrac{3}{1 - x} \le 2$

18. $|12 - 3x| \ge |x|$

19. Determine un valor de x para el cual $|-x| \ne x$.

20. ¿Para cuáles valores de x se cumple la ecuación $|-x| = x$?

21. ¿Para cuáles valores de t se cumple la ecuación $|t - 5| = 5 - t$?

22. ¿Para cuáles valores de a y t se cumple la ecuación $|t - a| = a - t$?

23. Suponga que $|x| \le 2$. Utilice las propiedades del valor absoluto para demostrar que

$$\left|\frac{2x^2 + 3x + 2}{x^2 + 2}\right| \le 8$$

24. Escriba una proposición que incluya la palabra *distancia* para expresar las siguientes proposiciones algebraicas:

(a) $|x - 5| = 3$ (b) $|x + 1| \le 2$

(c) $|x - a| > b$

25. Haga un bosquejo del triángulo con vértices $A(-2, 6)$, $B(1, 2)$ y $C(5, 5)$ y demuestre que es un triángulo rectángulo.

26. Determine la distancia de $(3, -6)$ al punto medio del segmento de recta que va de $(1, 2)$ a $(7, 8)$.

27. Determine la ecuación de la circunferencia con diámetro AB, si $A = (2, 0)$ y $B = (10, 4)$.

28. Determine el centro y el radio de la circunferencia con ecuación $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$.

29. Determine la distancia entre los centros de las circunferencias con ecuaciones

$$x^2 - 2x + y^2 + 2y = 2 \quad \text{y} \quad x^2 + 6x + y^2 - 4y = -7$$

30. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto indicado y que es paralela a la recta que se indica; además, bosqueje ambas rectas.

(a) $(3, 2)$: $3x + 2y = 6$ (b) $(1, -1)$: $y = \frac{2}{3}x + 1$

(c) $(5, 9)$: $y = 10$ (d) $(-3, 4)$: $x = -2$

31. Escriba la ecuación de la recta que pasa por $(-2, 1)$ y que

(a) pasa por $(7, 3)$;

(b) es paralela a $3x - 2y = 5$;

(c) es perpendicular a $3x + 4y = 9$;

(d) es perpendicular a $y = 4$;

(e) tiene intersección con el eje y igual a 3.

32. Muestre que $(2, -1)$, $(5, 3)$ y $(11, 11)$ están en la misma recta.

33. ¿Cuál ecuación puede representar la curva de la figura 1?

(a) $y = x^3$ (b) $x = y^3$

(c) $y = x^2$ (d) $x = y^2$

34. ¿Cuál ecuación puede representar la curva de la figura 2?

(a) $y = ax^2 + bx + c$, con $a > 0$, $b > 0$, y $c > 0$

(b) $y = ax^2 + bx + c$, con $a < 0$, $b > 0$, y $c > 0$

(c) $y = ax^2 + bx + c$, con $a < 0$, $b > 0$, y $c < 0$

(d) $y = ax^2 + bx + c$, con $a > 0$, $b > 0$, y $c < 0$

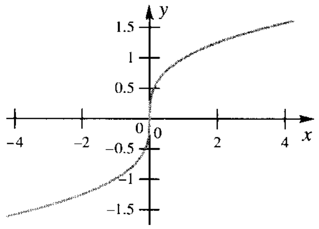


Figura 1

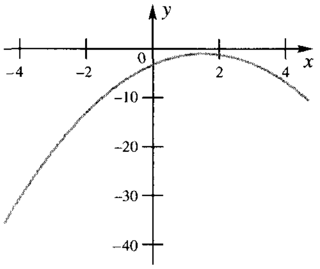


Figura 2

En los problemas del 35 al 38 bosqueje la gráfica de cada ecuación.

35. $3y - 4x = 6$

36. $x^2 - 2x + y^2 = 3$

GC **37.** $y = \dfrac{2x}{x^2 + 2}$

GC **38.** $x = y^2 - 3$

GC **39.** Determine los puntos de intersección de las gráficas de $y = x^2 - 2x + 4$ y $y - x = 4$.

40. Entre todas las rectas perpendiculares a $4x - y = 2$, encuentre la ecuación de aquella que, junto con la parte positiva del eje x y del eje y, forma un triángulo de área 8.

41. Para $f(x) = 1/(x + 1) - 1/x$, determine cada valor (si esto es posible)

(a) $f(1)$
(b) $f\left(-\frac{1}{2}\right)$
(c) $f(-1)$
(d) $f(t - 1)$
(e) $f\left(\dfrac{1}{t}\right)$

42. Para $g(x) = (x + 1)/x$, encuentre y simplifique cada valor.

(a) $g(2)$
(b) $g\left(\frac{1}{2}\right)$
(c) $\dfrac{g(2 + h) - g(2)}{h}$

43. Describa el dominio natural de cada función.

(a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$
(b) $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$

44. ¿Cuál de las funciones siguientes son impares? ¿Cuáles son pares? ¿Y cuáles no son pares ni impares?

(a) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 1}$
(b) $g(x) = |\text{sen}\, x| + \cos x$
(c) $h(x) = x^3 + \text{sen}\, x$
(d) $k(x) = \dfrac{x^2 + 1}{|x| + x^4}$

45. Dibuje la gráfica de cada función.

(a) $f(x) = x^2 - 1$
(b) $g(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$
(c) $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 6 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

46. Suponga que f es una función par que satisface$f(x) = -1 + \sqrt{x}$ para $x \geq 0$. Dibuje la gráfica de f para $-4 \leq x \leq 4$.

47. Una caja abierta se fabrica cortando cuadrados, de lado x pulgadas, en cada una de las cuatro esquinas de una hoja de cartón, de 24 por 32 pulgadas, y luego doblando hacia arriba los lados. Exprese el volumen $V(x)$ en términos de x. ¿Cuál es dominio para esta función?

48. Sea $f(x) = x - 1/x$ y $g(x) = x^2 + 1$. Encuentre cada valor.

(a) $(f + g)(2)$
(b) $(f \cdot g)(2)$
(c) $(f \circ g)(2)$
(d) $(g \circ f)(2)$
(e) $f^3(-1)$
(f) $f^2(2) + g^2(2)$

49. Dibuje la gráfica de cada una de las siguientes funciones; haga uso de traslaciones.

(a) $y = \frac{1}{4}x^2$
(b) $y = \frac{1}{4}(x + 2)^2$
(c) $y = -1 + \frac{1}{4}(x + 2)^2$

50. Sea $f(x) = \sqrt{16 - x}$ y $g(x) = x^4$. ¿Cuál es el dominio de cada una de las siguientes funciones?

(a) f
(b) $f \circ g$
(c) $g \circ f$

51. Escriba $F(x) = \sqrt{1 + \text{sen}^2 x}$ como la composición de cuatro funciones, $f \circ g \circ h \circ k$.

52. Calcule cada una de las siguientes expresiones sin utilizar una calculadora.

(a) sen 570°
(b) $\cos \dfrac{9\pi}{2}$
(c) $\cos\left(\dfrac{-13\pi}{6}\right)$

53. Si sen $t = 0.8$ y cos $t < 0$, determine cada valor.

(a) $\text{sen}(-t)$
(b) $\cos t$
(c) $\text{sen}\, 2t$
(d) $\tan t$
(e) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)$
(f) $\text{sen}(\pi + t)$

54. Escriba sen $3t$ en términos de sen t. *Sugerencia:* $3t = 2t + t$.

55. Una mosca está en el borde de una rueda que gira a una velocidad de 20 revoluciones por minuto. Si el radio de la rueda es de 9 pulgadas, ¿cuánto recorre la mosca en 1 segundo?

PROBLEMAS DE REPASO E INTRODUCCIÓN

1. Resuelva las siguientes desigualdades:

(a) $1 < 2x + 1 < 5$ (b) $-3 < \frac{x}{2} < 8$

2. Resuelva las siguientes desigualdades:

(a) $14 < 2x + 1 < 15$ (b) $-3 < 1 - \frac{x}{2} < 8$

3. Resuelva $|x - 7| = 3$ para x.

4. Resuelva $|x + 3| = 2$ para x.

5. La distancia a lo largo de la recta numérica entre x y 7 es igual a 3. ¿Cuáles son los posibles valores para x?

6. La distancia a lo largo de la recta numérica entre x y 7 es igual a d. ¿Cuáles son los posibles valores para x?

7. Resuelva las siguientes desigualdades:

(a) $|x - 7| < 3$ (b) $|x - 7| \leq 3$

(c) $|x - 7| \leq 1$ (d) $|x - 7| < 0.1$

8. Resuelva las siguientes desigualdades:

(a) $|x - 2| < 1$ (b) $|x - 2| \geq 1$

(c) $|x - 2| < 0.1$ (d) $|x - 2| < 0.01$

9. ¿Cuáles son los dominios naturales de las siguientes funciones?

(a) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ (b) $g(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x - 1}$

10. ¿Cuáles son los dominios naturales de las siguientes funciones?

(a) $F(x) = \frac{|x|}{x}$ (b) $G(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

11. Evalúe las funciones $f(x)$ y $g(x)$ del problema 9 en los siguientes valores de x: 0, 0.9, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.1, 2.

12. Evalúe las funciones $F(x)$ y $G(x)$ del problema 10 en los siguientes valores de x: $-1, -0.1, -0.01, -0.001, 0.001, 0.01, 0.1, 1$.

13. La distancia entre x y 5 es menor que 0.1. ¿Cuáles son los posibles valores para x?

14. La distancia entre x y 5 es menor que e, donde e es un número positivo. ¿Cuáles son los posibles valores para x?

15. Verdadero o falso. Suponga que a, x y y son números reales y n es un número natural.

(a) Para toda $x > 0$ existe una y, tal que $y > x$.

(b) Para toda $a \geq 0$ existe una n, tal que $\frac{1}{n} < a$.

(c) Para toda $a > 0$ existe una n, tal que $\frac{1}{n} < a$.

(d) Para toda circunferencia C en el plano existe una n, tal que la circunferencia C y su interior se encuentran dentro de n unidades del origen.

16. Utilice la identidad aditiva para la función seno, a fin de determinar $\operatorname{sen}(c + h)$ en términos de $\operatorname{sen} c$, $\operatorname{sen} h$, $\cos c$ y $\cos h$.

CAPÍTULO 1 Límites

1.1 Introducción a límites
1.2 Estudio riguroso (formal) de límites
1.3 Teoremas de límites
1.4 Límites que involucran funciones trigonométricas
1.5 Límites al infinito; límites infinitos
1.6 Continuidad de funciones
1.7 Repaso

1.1

Introducción a límites

Los temas estudiados en el capítulo anterior son parte de lo que se denomina *precálculo*. Proporcionan los fundamentos para el cálculo, pero no son cálculo. Ahora estamos listos para una nueva idea importante, la noción de *límite*. Ésta es la idea que distingue al cálculo de otras ramas de las matemáticas. De hecho, podríamos definir cálculo de esta manera:

El cálculo es el estudio de los límites.

Problemas que conducen al concepto de límite El concepto de **límite** es primordial para muchos problemas en física, ingeniería y ciencias sociales. Básicamente, la pregunta es ésta: ¿qué le pasa con la función $f(x)$ cuando x se acerca a alguna constante c? Existen variaciones de este tema, pero la idea básica es la misma en muchas circunstancias.

Suponga que cuando un objeto se mueve de forma constante hacia adelante conocemos su posición en cualquier momento. Denotamos la posición en el instante t por $s(t)$. ¿Qué tan rápido se está moviendo el objeto en el instante $t = 1$? Podemos utilizar la fórmula "distancias iguales a tiempos iguales" para determinar la rapidez (tasa de cambio de la posición) en cualquier intervalo de tiempo; en otras palabras

$$\text{rapidez} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$$

A esto le llamamos la rapidez "promedio" en el intervalo, ya que sin importar qué tan pequeño sea el intervalo, nunca sabemos si la rapidez es constante en este intervalo. Por ejemplo, en el intervalo [1, 2], la rapidez promedio es $\frac{s(2) - s(1)}{2 - 1}$; en el intervalo [1, 1.2], la rapidez promedio es $\frac{s(1.2) - s(1)}{1.2 - 1}$; en el intervalo [1, 1.02], la rapidez promedio es $\frac{s(1.02) - s(1)}{1.02 - 1}$, etcétera ¿Qué tan rápido viaja el objeto en el instante $t = 1$? Para dar significado a esta rapidez "instantánea" debemos hablar acerca del *límite* de la rapidez promedio en intervalos cada vez más pequeños.

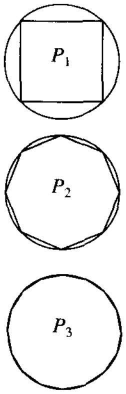


Figura 1

Podemos determinar áreas de rectángulos y triángulos por medio de fórmulas de geometría; pero, ¿qué hay de regiones con fronteras curvas, como un círculo? Arquímedes tuvo esta idea hace más de dos mil años. Imagine polígonos regulares inscritos en un círculo, como se muestra en la figura 1. Arquímedes determinó el área de un polígono regular con n lados, y tomando el polígono cada vez con más lados fue capaz de aproximar el área de un círculo a cualquier nivel de precisión. En otras palabras, el área del círculo es el *límite* de las áreas de los polígonos inscritos cuando n (el número de lados del polígono) aumenta tanto como se quiera.

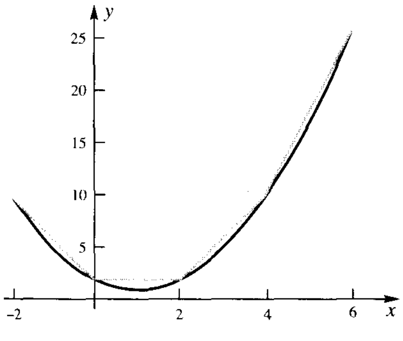


Figura 2

Considere la gráfica de la función $y = f(x)$, para $a \leq x \leq b$. Si la gráfica es una línea recta, la longitud de la curva es fácil de determinar mediante la fórmula de la distancia. Sin embargo, ¿qué sucede si la gráfica es curvada? Podemos determinar una gran cantidad de puntos a lo largo de la curva y conectarlos con segmentos de recta, como se muestra en la figura 2. Si sumamos las longitudes de estos segmentos de recta, debemos obtener una suma que es aproximadamente la longitud de la curva. De hecho, por "longitud de la curva" queremos decir el *límite* de la suma de las longitudes de estos segmentos de recta, cuando el número de éstos aumenta tanto como se desee.

Los últimos tres párrafos describen situaciones que conducen al concepto de *límite*. Existen muchos otros y los estudiaremos a lo largo del texto. Iniciamos con una explicación intuitiva de límites. La definición precisa se da en la siguiente sección.

Una noción intuitiva Considere la función definida por

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

Observe que no está definida en $x = 1$, ya que en este punto $f(x)$ tiene la forma $\frac{0}{0}$, que carece de significado. Sin embargo, aún podemos preguntarnos qué le está sucediendo a $f(x)$ cuando x se aproxima a 1. Con mayor precisión, ¿cuando x se aproxima a 1, $f(x)$ se está aproximando a algún número específico? Para obtener la respuesta podemos hacer tres cosas: calcular algunos valores de $f(x)$ para x cercana a 1; mostrar estos valores en un diagrama esquemático, y bosquejar la gráfica de $y = f(x)$. Todo esto se ha hecho y los resultados se muestran en la figura 3.

x	$y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$
1.25	3.813
1.1	3.310
1.01	3.030
1.001	3.003
↓	↓
1.000	?
↑	↑
0.999	2.997
0.99	2.970
0.9	2.710
0.75	2.313

Tabla de valores

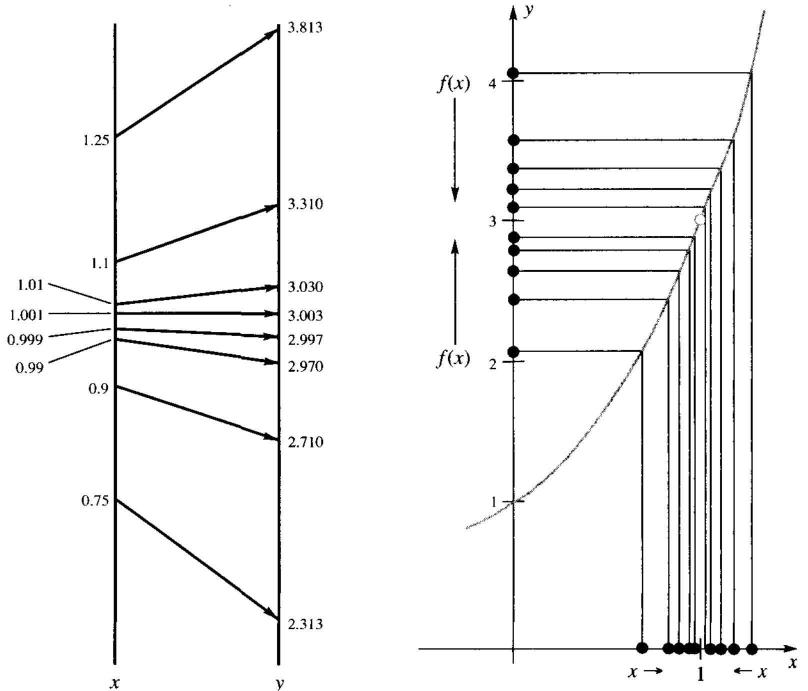


Diagrama esquemático

Gráfica de $y = f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

Figura 3

Toda la información que hemos reunido parece apuntar a la misma conclusión: $f(x)$ se aproxima a 3 cuando x se aproxima a 1. En símbolos matemáticos, escribimos

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

Esto se lee "el límite de $(x^3 - 1)/(x - 1)$ cuando x tiende a 1 es 3".

Como buenos algebristas (es decir, conociendo cómo se factoriza una diferencia de cubos), podemos proporcionar más y mejor evidencia,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3 \end{aligned}$$

Observe que $(x - 1)/(x - 1) = 1$ siempre que $x \neq 1$. Esto justifica el segundo paso. El tercer paso parece razonable; pero posteriormente se hará una justificación rigurosa.

Para asegurarnos de que estamos en el camino correcto, necesitamos tener una clara comprensión del significado de la palabra *límite*. A continuación haremos nuestro primer intento de una definición.

Definición **Significado intuitivo de límite**

Decir que $\lim_{x \to c} f(x) = L$ significa que cuando x está cerca pero diferente de c, entonces $f(x)$ está cerca de L.

Obsérvese que no pedimos nada *en* c. Incluso, la función no necesita estar definida en c, como no lo estaba en el ejemplo $f(x) = (x^3 - 1)/(x - 1)$ recién considerado. La noción de límite está asociada con el comportamiento de una función cuando x está *cerca* de c, pero no *en c*.

Seguramente, un lector cauto, objetará nuestro uso de la palabra *cerca*. ¿Qué significa *cerca*? ¿Qué tan cerca es cerca? Para precisar respuestas, tendrá que estudiar la siguiente sección; no obstante, algunos ejemplos más le ayudarán a aclarar la idea.

Más ejemplos Nuestro primer ejemplo es casi trivial aunque no menos importante.

EJEMPLO 1 Determine $\lim_{x \to 3}(4x - 5)$.

SOLUCIÓN Cuando x está cerca de 3, $4x - 5$ está cerca de $4 \cdot 3 - 5 = 7$. Escribimos

$$\lim_{x \to 3}(4x - 5) = 7 \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Encuentre $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$.

SOLUCIÓN Observe que $(x^2 - x - 6)/(x - 3)$ no está definida en $x = 3$, pero todo está bien. Para tener una idea de lo que está sucediendo cuando x se aproxima a 3, podríamos emplear una calculadora para evaluar la expresión dada; por ejemplo, en 3.1, 3.01, 3.001, etcétera. Pero es mucho mejor utilizar un poco de álgebra para simplificar el problema.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x + 2)}{x - 3} = \lim_{x \to 3}(x + 2) = 3 + 2 = 5$$

La cancelación de $x - 3$ en el segundo paso es válida ya que la definición de límite ignora el comportamiento *en* $x = 3$. Recuerde, $\dfrac{x - 3}{x - 3} = 1$ siempre que x no sea igual a 3. ■

x	$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$
1.0	0.84147
0.1	0.99833
0.01	0.99998
↓	↓
0	?
↑	↑
-0.01	0.99998
-0.1	0.99833
-1.0	0.84147

Figura 4

EJEMPLO 3 Determine $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

SOLUCIÓN Ningún truco algebraico simplificará nuestra tarea; ciertamente, no podemos cancelar las x. Una calculadora nos ayudará a tener una idea del límite. Utilice su propia calculadora (en modo de radianes) para verificar los valores en la tabla de la figura 4. La figura 5 muestra una gráfica de $y = (\operatorname{sen} x)/x$. Nuestra conclusión, aunque admitimos que es poco firme, es que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Daremos una demostración rigurosa en la sección 1.4. ■

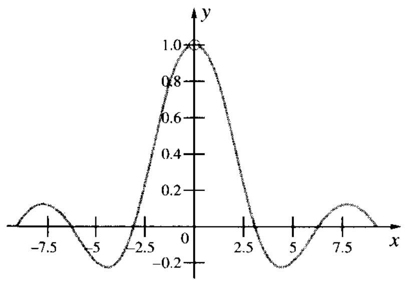


Figura 5

Algunas señales de alerta Las cosas no son tan sencillas como parecen. Las calculadoras podrían engañarnos, así como nuestra intuición. Los ejemplos que siguen sugieren algunas dificultades posibles.

EJEMPLO 4 **(Su calculadora puede engañarlo).** Determine $\lim_{x\to 0}\left[x^2 - \dfrac{\cos x}{10{,}000}\right]$.

SOLUCIÓN Siguiendo el procedimiento utilizado en el ejemplo 3, construimos la tabla de valores que se muestra en la figura 6. La conclusión que sugiere es que el límite deseado es 0. Pero esto es incorrecto. Si recordamos la gráfica de $y = \cos x$, nos damos cuenta de que $\cos x$ se aproxima a 1 cuando x tiende a 0. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0}\left[x^2 - \frac{\cos x}{10{,}000}\right] = 0^2 - \frac{1}{10{,}000} = -\frac{1}{10{,}000} \qquad \blacksquare$$

x	$x^2 - \dfrac{\cos x}{10{,}000}$
± 1	0.99995
± 0.5	0.24991
± 0.1	0.00990
± 0.01	0.000000005
↓	↓
0	?

Figura 6

EJEMPLO 5 **(No hay límite en un salto).** Determine $\lim_{x\to 2}[\![x]\!]$.

SOLUCIÓN Recuerde que $[\![x]\!]$ denota al entero más grande que es menor o igual a x (véase la sección 0.5). La gráfica de $y = [\![x]\!]$ se muestra en la figura 7. Para todos los números x menores a 2, pero cercanos a 2, $[\![x]\!] = 1$, pero para todos los números x mayores que 2, pero cercanos a 2, $[\![x]\!] = 2$. ¿Está $[\![x]\!]$ cerca de un solo número L cuando x está cerca de 2? No. No importa qué número propongamos para L, habrá x arbitrariamente cercanas a 2 a cada lado, donde $[\![x]\!]$ difiere de L en al menos $\frac{1}{2}$. Nuestra conclusión es que $\lim_{x\to 2}[\![x]\!]$ no existe. Si usted verifica lo anterior, verá que no hemos afirmado que todo límite que podamos escribir deba existir. ■

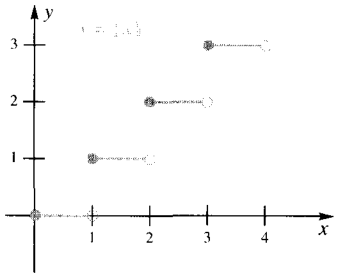


Figura 7

EJEMPLO 6 **(Demasiadas oscilaciones).** Determine $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x)$.

SOLUCIÓN Este ejemplo plantea la interrogante más sutil acerca de límites que hayamos manifestado hasta el momento. Ya que no queremos hacer larga la historia, le pedimos que haga dos cosas. Primera, escoja una sucesión de valores para x que se aproxime a 0. Utilice su calculadora para evaluar sen $(1/x)$ en estas x. A menos que corra con mucha suerte, sus valores oscilarán de manera desordenada.

Segunda, intente construir la gráfica de $y = \operatorname{sen}(1/x)$. Nadie hará esto muy bien, pero la tabla de valores en la figura 8 da una buena pista acerca de lo que está sucediendo. En cualquier vecindad alrededor del origen, la gráfica oscila de arriba abajo entre -1 y 1 un número infinito de veces (véase la figura 9). Claramente, sen $(1/x)$ no está cerca de un solo número L, cuando x está cerca de cero. Concluimos que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ no existe. ■

x	$\operatorname{sen}\frac{1}{x}$
$2/\pi$	1
$2/(2\pi)$	0
$2/(3\pi)$	−1
$2/(4\pi)$	0
$2/(5\pi)$	1
$2/(6\pi)$	0
$2/(7\pi)$	−1
$2/(8\pi)$	0
$2/(9\pi)$	1
$2/(10\pi)$	0
$2/(11\pi)$	−1
$2/(12\pi)$	0
↓	↓
0	?

Figura 8

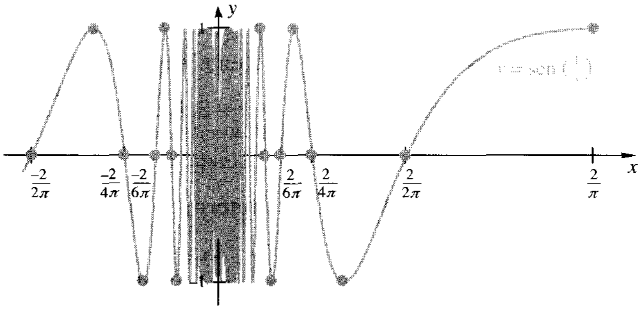


Figura 9

Límites laterales Cuando una función da un salto (como lo hace $[\![x]\!]$ en cada entero en el ejemplo 5), entonces el límite no existe en los puntos de salto. Para tales funciones, se introduce el concepto de **límites laterales**. El símbolo $x \to c^+$ significa que x se aproxima a c por la derecha, y $x \to c^-$ significa que x se aproxima a c por la izquierda.

Definición Límites por la derecha y por la izquierda

Decir que $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ significa que cuando x está cerca pero a la derecha de c, entonces $f(x)$ está cerca de L. De manera análoga, decir que $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$ significa que cuando x está cerca pero a la izquierda de c, entonces $f(x)$ está cerca de L.

Por lo tanto, mientras que $\lim\limits_{x\to 2}[\![x]\!]$ no existe, es correcto escribir (véase la gráfica en la figura 7)

$$\lim_{x\to 2^-}[\![x]\!] = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^+}[\![x]\!] = 2$$

Creemos que usted encontrará muy razonable el siguiente teorema.

Teorema A

$\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ si y sólo si $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L$.

La figura 10 debe darle una comprensión adicional. Dos de los límites no existen, aunque todos, excepto uno de los límites unilaterales, existen.

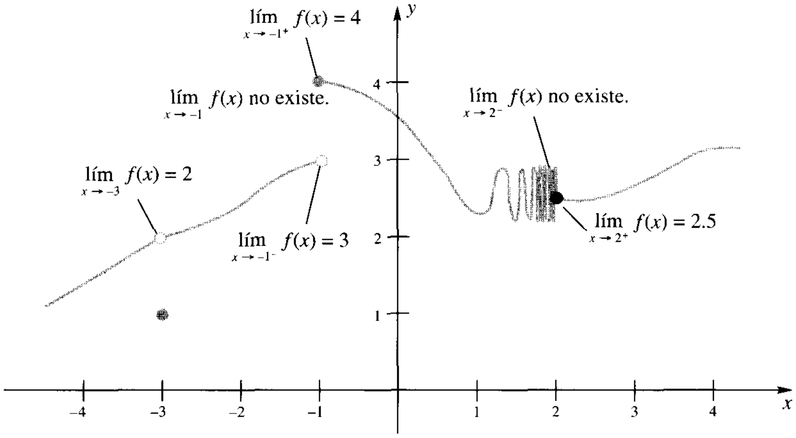


Figura 10

Revisión de conceptos

1. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ significa que $f(x)$ está cerca de _____, cuando x está suficientemente cerca (pero es diferente) de _____.

2. Sea $f(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$ donde $f(3)$ está indeterminada. Sin embargo, $\lim\limits_{x\to 3} f(x) =$ _____.

3. $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L$ significa que $f(x)$ está cerca de _____ cuando x se aproxima a c por la _____.

4. Si $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = M$ y $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = M$, entonces _____.

Conjunto de problemas 1.1

En los problemas del 1 al 6 determine el límite que se indica.

1. $\lim\limits_{x\to 3}(x - 5)$

2. $\lim\limits_{t\to -1}(1 - 2t)$

3. $\lim\limits_{x\to -2}(x^2 + 2x - 1)$

4. $\lim\limits_{x\to -2}(x^2 + 2t - 1)$

5. $\lim\limits_{t\to -1}(t^2 - 1)$

6. $\lim\limits_{t\to -1}(t^2 - x^2)$

En los problemas del 7 al 18 determine el límite que se indica. En la mayoría de los casos, es buena idea usar primero un poco de álgebra (véase el ejemplo 2).

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

8. $\lim\limits_{t\to -7}\dfrac{t^2 + 4t - 21}{t + 7}$

9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x + 1}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4 + 2x^3 - x^2}{x^2}$

11. $\lim\limits_{x\to -t}\dfrac{x^2 - t^2}{x + t}$

12. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

13. $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{\sqrt{(t + 4)(t - 2)^4}}{(3t - 6)^2}$

14. $\lim\limits_{t\to 7^+}\dfrac{\sqrt{(t - 7)^3}}{t - 7}$

15. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4 - 18x^2 + 81}{(x - 3)^2}$

16. $\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{(3u + 4)(2u - 2)^3}{(u - 1)^2}$

17. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2 + h)^2 - 4}{h}$

18. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x + h)^2 - x^2}{h}$

GC *En los problemas del 19 al 28 utilice una calculadora para encontrar el límite indicado. Utilice una calculadora gráfica para trazar la función cerca del punto límite.*

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{2x}$

20. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1 - \cos t}{2t}$

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x - \operatorname{sen} x)^2}{x^2}$

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1 - \cos x)^2}{x^2}$

23. $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^2 - 1}{\operatorname{sen}(t - 1)}$

24. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x - \operatorname{sen}(x - 3) - 3}{x - 3}$

25. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1 + \operatorname{sen}(x - 3\pi/2)}{x - \pi}$

26. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1 - \cot t}{1/t}$

27. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{(x - \pi/4)^2}{(\tan x - 1)^2}$

28. $\lim\limits_{u\to \pi/2}\dfrac{2 - 2\operatorname{sen} u}{3u}$

29. Para la función f que se grafica en la figura 11 determine el límite que se indica o el valor de la función, o establezca que el límite o el valor de la función no existe.

(a) $\lim_{x \to -3} f(x)$ (b) $f(-3)$ (c) $f(-1)$

(d) $\lim_{x \to -1} f(x)$ (e) $f(1)$ (f) $\lim_{x \to 1} f(x)$

(g) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ (h) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ (i) $\lim_{x \to -1^+} f(x)$

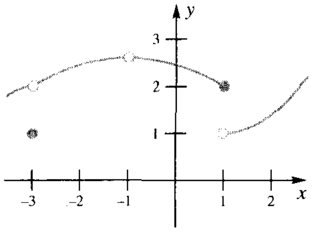


Figura 11

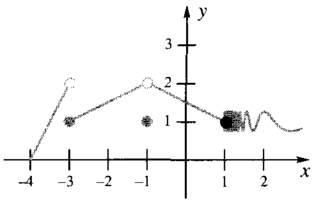


Figura 12

30. Siga las instrucciones del problema 29 para la función que se grafica en la figura 12.

31. Para la función que se grafica en la figura 13 determine el límite que se indica o el valor de la función, o bien, indique que no existe.

(a) $f(-3)$ (b) $f(3)$ (c) $\lim_{x \to -3^-} f(x)$

(d) $\lim_{x \to -3^+} f(x)$ (e) $\lim_{x \to -3} f(x)$ (f) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

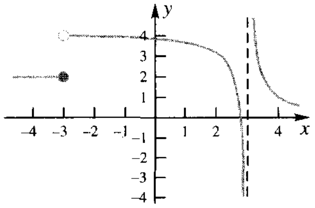


Figura 13

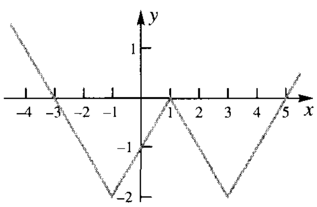


Figura 14

32. Para la función que se grafica en la figura 14 determine el límite que se indica o el valor de la función, o indique que no existe.

(a) $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \to -1} f(x)$

(d) $f(-1)$ (e) $\lim_{x \to 1} f(x)$ (f) $f(1)$

33. Bosqueje la gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 + x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Luego determine cada uno de los siguientes o establezca que no existen.

(a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 1} f(x)$

(c) $f(1)$ (d) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

34. Bosqueje la gráfica de

$$g(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 5 - x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Después determine cada uno de los siguientes o establezca que no existen.

(a) $\lim_{x \to 1} g(x)$ (b) $g(1)$

(c) $\lim_{x \to 2} g(x)$ (d) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$

35. Bosqueje la gráfica de $f(x) = x - \llbracket x \rrbracket$; luego encuentre cada uno de los siguientes o establezca que no existen.

(a) $f(0)$ (b) $\lim_{x \to 0} f(x)$

(c) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ (d) $\lim_{x \to 1/2} f(x)$

36. Siga las instrucciones del problema 35 para $f(x) = x/|x|$.

37. Determine $\lim_{x \to 1} (x^2 - 1)/|x - 1|$ o establezca que no existe.

38. Evalúe $\lim_{x \to 0} \left(\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}\right)/x$. *Sugerencia:* racionalice el numerador multiplicando el numerador y el denominador por $\sqrt{x + 2} + \sqrt{2}$.

39. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es racional} \\ -x & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Determine cada valor, si es posible.

(a) $\lim_{x \to 1} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 0} f(x)$

40. Bosqueje, como mejor pueda, la gráfica de una función f que satisfaga todas las condiciones siguientes.

(a) Su dominio es el intervalo $[0, 4]$.

(b) $f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 1$

(c) $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$ (d) $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$

(e) $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2$ (f) $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 1$

41. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es racional} \\ x^4 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

¿Para qué valores de a existe $\lim_{x \to a} f(x)$?

42. La función $f(x) = x^2$ ha sido cuidadosamente graficada, pero durante la noche un visitante misterioso cambió los valores de f en un millón de lugares diferentes. ¿Esto afecta al valor de $\lim_{x \to a} f(x)$ en alguna a? Explique.

43. Determine cada uno de los siguientes límites o establezca que no existen.

(a) $\lim_{x \to 1} \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$ (b) $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$

(c) $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 - |x - 1| - 1}{|x - 1|}$ (d) $\lim_{x \to 1^-} \left[\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{1}{|x - 1|}\right]$

44. Determine cada uno de los siguientes límites o establezca que no existen.

(a) $\lim_{x \to 1^+} \sqrt{x - \llbracket x \rrbracket}$ (b) $\lim_{x \to 0^+} \llbracket 1/x \rrbracket$

(c) $\lim_{x \to 0^+} x(-1)^{\llbracket 1/x \rrbracket}$ (d) $\lim_{x \to 0^+} \llbracket x \rrbracket (-1)^{\llbracket 1/x \rrbracket}$

45. Determine cada uno de los siguientes límites o establezca que no existen.

(a) $\lim_{x \to 0^+} x\llbracket 1/x \rrbracket$ (b) $\lim_{x \to 0^+} x^2 \llbracket 1/x \rrbracket$

(c) $\lim_{x \to 3^-} (\llbracket x \rrbracket + \llbracket -x \rrbracket)$ (d) $\lim_{x \to 3^+} (\llbracket x \rrbracket + \llbracket -x \rrbracket)$

46. Determine cada uno de los siguientes límites o establezca que no existen.

(a) $\lim_{x \to 3} \llbracket x \rrbracket / x$ (b) $\lim_{x \to 0^+} \llbracket x \rrbracket / x$

(c) $\lim_{x \to 1.8} \llbracket x \rrbracket$ (d) $\lim_{x \to 1.8} \llbracket x \rrbracket / x$

CAS *Muchos paquetes de software tienen programas para calcular límites, aunque usted debe ser cuidadoso porque no son infalibles. Para adquirir confianza en su programa, utilícelo para volver a calcular algunos límites en los problemas del 1 al 28. Después para cada uno de los siguientes determine el límite o establezca que no existe.*

47. $\lim_{x \to 0} \sqrt{x}$ **48.** $\lim_{x \to 0^+} x^x$

49. $\lim_{x \to 0} \sqrt{|x|}$ **50.** $\lim_{x \to 0} |x|^x$

51. $\lim_{x\to 0}(\text{sen }2x)/4x$

52. $\lim_{x\to 0}(\text{sen }5x)/3x$

53. $\lim_{x\to 0}\cos(1/x)$

54. $\lim_{x\to 0}x\cos(1/x)$

55. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\sqrt{2x+2}-2}$

56. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x\text{ sen }2x}{\text{sen}(x^2)}$

57. $\lim_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-x-2}{|x-2|}$

58. $\lim_{x\to 1^+}\dfrac{2}{1+2^{1/(x-1)}}$

CAS **59.** Como los paquetes de software para cálculo encuentran $\lim_{x\to a}f(x)$ por medio de un muestreo de algunos valores de $f(x)$ para x cerca de a, pueden estar equivocados. Determine una función f para la que $\lim_{x\to 0}f(x)$ no exista, pero por la que su software obtenga un valor para el límite.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $L; c$ **2.** 6 **3.** L; derecha **4.** $\lim_{x\to c}f(x) = M$

1.2 Estudio riguroso (formal) de límites

En la sección anterior dimos una definición informal de *límite*. A continuación damos otra ligeramente mejor, pero todavía informal, reformulando esa definición. Decir que $\lim_{x\to c}f(x) = L$ significa que $f(x)$ puede hacerse tan cercana como se desee a L siempre que x sea suficientemente cercana, pero no igual a c. El primer ejemplo ilustra este punto.

EJEMPLO 1 Utilice la gráfica de $y = f(x) = 3x^2$ para determinar qué tan cercana debe estar x de 2 para garantizar que $f(x)$ esté a no menos de 0.05 de 12.

SOLUCIÓN Para que $f(x)$ esté a menos de 0.05 de 12, debemos tener $11.95 < f(x) < 12.05$. En la figura 1 se dibujaron las rectas $y = 11.95$ y $y = 12.05$. Si despejamos x de $y = 3x^2$, obtenemos $x = \sqrt{y/3}$. Por lo tanto, $f\left(\sqrt{11.95/3}\right) = 11.95$ y $f\left(\sqrt{12.05/3}\right) = 12.05$. La figura 1 indica que si $\sqrt{11.95/3} < x < \sqrt{12.05/3}$ entonces $f(x)$ satisface $11.95 < f(x) < 12.05$. Este intervalo para x es aproximadamente $1.99583 < x < 2.00416$. De los dos extremos de este intervalo, el más cercano a 2 es el superior, 2.00416, y se encuentra a 0.00416 de 2. Por lo tanto, si x está a menos de 0.00416 de 2, entonces $f(x)$ está a menos de 0.05 de 12. ■

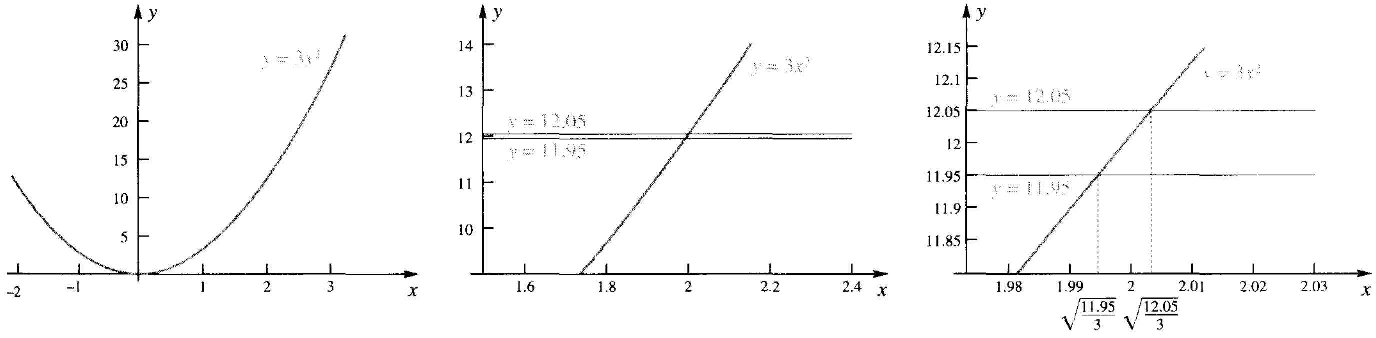


Figura 1

Si ahora preguntamos qué tan cerca debe estar x de 2 para garantizar que $f(x)$ esté a menos de 0.01 de 12, la solución seguiría las mismas líneas y determinaríamos que x tendría que estar en un intervalo más pequeño al que se obtuvo anteriormente. Si queremos que $f(x)$ esté a menos de 0.001 de 12, necesitaríamos un intervalo que fuese aún más angosto. En este ejemplo, parece plausible que no importa cuán cercano queramos que $f(x)$ esté de 12, podemos realizar esto tomando x suficientemente cercana a 2.

Ahora precisamos la definición de límite.

El valor absoluto como distancia

Considere dos puntos a y b en la recta numérica. ¿Cuál es la distancia entre ellos? Si $a < b$, entonces $b - a$ es la distancia; pero si $b < a$, entonces la distancia es $a - b$. Podemos combinar estos enunciados en uno y decir que la distancia es $|b - a|$. Esta interpretación geométrica del valor absoluto de una diferencia, como la distancia entre dos puntos en una recta numérica, es importante en la comprensión de nuestra definición del límite.

Precisando la definición

Seguimos la tradición al utilizar las letras griegas ε (épsilon) y δ (delta) para representar números positivos arbitrarios (por lo regular pequeños).

Decir que $f(x)$ difiere de L en menos que ε, significa que $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$, o de forma equivalente, $|f(x) - L| < \varepsilon$. Esto significa que $f(x)$ se encuentra en el intervalo abierto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, como se muestra en la gráfica de la figura 2.

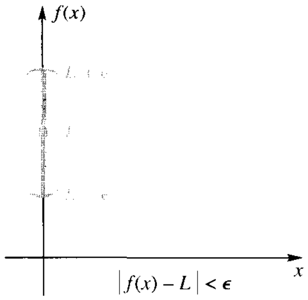


Figura 2

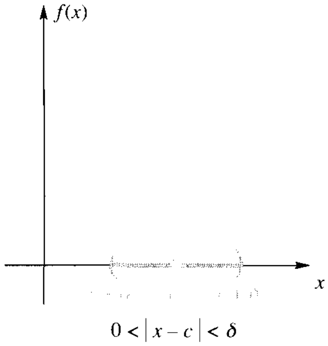


Figura 3

Ahora, decir que x está suficientemente cerca pero diferente de c es decir que, para alguna δ, x pertenece al intervalo abierto $(c - \delta, c + \delta)$, con c eliminado de éste. Tal vez la mejor forma de decir esto es escribir

$$0 < |x - c| < \delta$$

Obsérvese que $|x - c| < \delta$ describiría al intervalo $c - \delta < x < c + \delta$, mientras que $0 < |x - c|$ requiere que se excluya $x = c$. El intervalo que estamos describiendo se muestra en la figura 3.

Ahora estamos preparados para lo que algunas personas han denominado la definición más importante del cálculo.

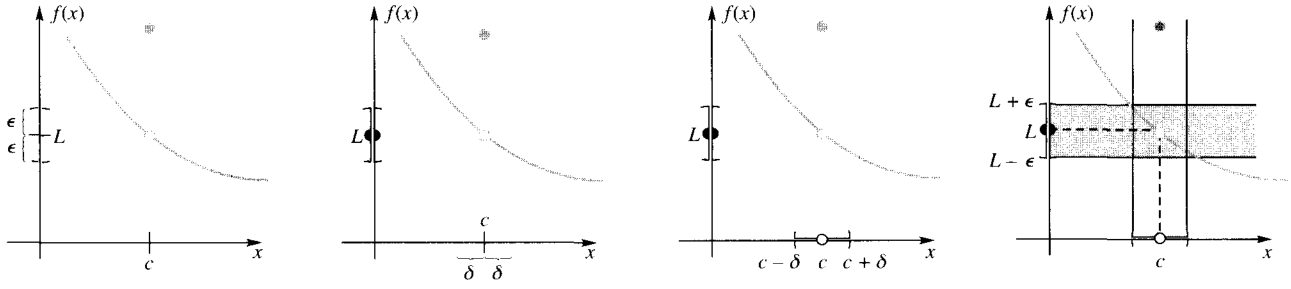
Definición Significado preciso de límite

Decir que $\lim_{x \to c} f(x) = L$ significa que para cada $\varepsilon > 0$ dada (no importa qué tan pequeña) existe una correspondiente $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$, siempre que $0 < |x - c| < \delta$; esto es,

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Las gráficas de la figura 4 pueden ayudarle a comprender esta definición.

Debemos recalcar que el número real ε se debe dar *primero*; el número δ debe producirse y por lo regular depende de ε. Supóngase que David desea demostrar a Emilia que $\lim_{x \to c} f(x) = L$. Emilia puede retar a David con cualquier ε particular que ella elija (por ejemplo, $\varepsilon = 0.01$) y pedir a David que obtenga una δ correspondiente. Apliquemos el razonamiento de David al límite $\lim_{x \to 3}(2x + 1)$. Por inspección, David conjeturaría que el límite es 7. Ahora, ¿podrá David determinar una δ tal que $|(2x + 1) - 7| < 0.01$ siempre que $0 < |x - 3| < \delta$? Un poco de álgebra muestra que



Para cada $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que $0 < |x - c| < \delta$ $\Longrightarrow$ $|f(x) - L| < \epsilon$

Figura 4

$$|(2x + 1) - 7| < 0.01 \Leftrightarrow 2|x - 3| < 0.01$$

$$\Leftrightarrow |x - 3| < \frac{0.01}{2}$$

Por lo tanto, la respuesta a la pregunta es ¡sí! David puede elegir $\delta = 0.01/2$ (o cualquier valor más pequeño) y esto garantizará que $|(2x + 1) - 7| < 0.01$ siempre que $0 < |x - 3| < 0.01/2$. En otras palabras, David puede hacer que $2x + 1$ esté a menos de 0.01 de 7, siempre que x esté a menos de 0.01/2 de 3.

Ahora, supóngase que Emilia reta a David de nueva cuenta, pero esta vez ella quiere que $|(2x + 1) - 7| < 0.000002$. ¿Podrá encontrar David una δ para este valor de ε? Siguiendo el razonamiento usado anteriormente,

$$\begin{aligned} |(2x + 1) - 7| < 0.000002 &\Leftrightarrow 2|x - 3| < 0.000002 \\ &\Leftrightarrow |x - 3| < \frac{0.000002}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $|(2x + 1) - 7| < 0.000002$ siempre que $|x - 3| < 0.000002/2$.

Esta clase de razonamiento, aunque podría convencer un poco, no es una prueba de que el límite sea 7. La definición dice que debe ser capaz de encontrar una δ para *toda* $\varepsilon > 0$ (no para *alguna* ε). Emilia podría retar continuamente a David, pero ambos nunca *demostrarían* que el límite es 7. David debe ser capaz de obtener una δ para *toda* ε positiva (sin importar qué tan pequeña sea).

David opta por tomar las cosas en sus manos y propone que ε sea cualquier número real positivo. Entonces sigue el mismo razonamiento como antes, pero esta vez utiliza ε en lugar de 0.000002.

$$\begin{aligned} |(2x + 1) - 7| < \varepsilon &\Leftrightarrow 2|x - 3| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

David puede elegir $\delta = \varepsilon/2$ y se deduce que $|(2x + 1) - 7| < \varepsilon$ siempre que $|x - 3| < \varepsilon/2$. En otras palabras, puede hacer que $2x + 1$ esté a menos de ε de 7 siempre que x esté a menos de $\varepsilon/2$ de 3. Ahora David tiene los requerimientos de la definición de límite y por lo tanto ha verificado que el límite es 7, como lo sospechaba.

¿Dos límites distintos?

Una pregunta natural es: "¿una función puede tener dos límites distintos en c?". La respuesta intuitiva obvia es no. Si una función se aproxima cada vez más a L, cuando $x \to c$, no puede acercarse también cada vez más a un número diferente M. En el problema 23 se le pide que demuestre esto de manera rigurosa.

Algunas demostraciones de límites En cada uno de los siguientes ejemplos empezamos con lo que denominamos un análisis preliminar. Lo incluimos para que nuestra elección de δ, en cada prueba, no parezca sugerir una increíble perspicacia de nuestra parte. Muestra la clase de trabajo que usted necesita hacer en borrador para determinar la ruta correcta a lo largo de la prueba. Una vez que usted sienta que comprende un ejemplo, véalo otra vez, pero oculte el análisis preliminar y note qué elegante, aunque misteriosa, parece ser la prueba.

EJEMPLO 2 Demuestre que $\lim\limits_{x\to 4}(3x - 7) = 5$.

ANÁLISIS PRELIMINAR Sea ε cualquier número positivo. Debemos producir una $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - 4| < \delta \Rightarrow |(3x - 7) - 5| < \varepsilon$$

Considere la desigualdad de la derecha

$$\begin{aligned} |(3x - 7) - 5| < \varepsilon &\Leftrightarrow |3x - 12| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |3(x - 4)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |3||(x - 4)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |x - 4| < \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Ahora vemos cómo elegir δ; esto es, $\delta = \varepsilon/3$. Por supuesto, cualquier δ más pequeña funcionaría.

DEMOSTRACIÓN FORMAL Sea $\varepsilon > 0$ dada. Seleccione $\delta = \varepsilon/3$. Entonces $0 < |x - 4| < \delta$ implica que

$$|(3x - 7) - 5| = |3x - 12| = |3(x - 4)| = 3|x - 4| < 3\delta = \varepsilon$$

Si usted lee esta cadena de igualdades y una desigualdad, de izquierda a derecha, y utiliza las propiedades transitivas de = y <, usted ve que

$$|(3x - 7) - 5| < \varepsilon$$

Ahora David conoce una regla para elegir el valor de δ dada en el reto de Emilia. Si Emilia hubiera retado a David con $\varepsilon = 0.01$, entonces David respondería con $\delta = 0.01/3$. Si Emilia dijese $\varepsilon = 0.000003$, entonces David diría $\delta = 0.000001$. Si él diese un valor más pequeño para δ, también estaría bien.

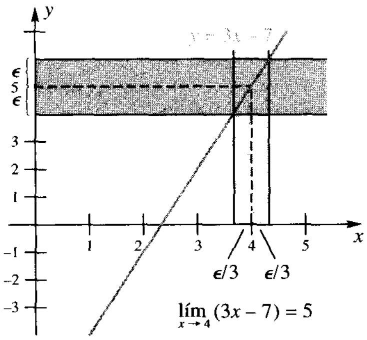


Figura 5

Por supuesto, si considera la gráfica de $y = 3x - 7$ (una recta con pendiente 3, como en la figura 5), sabe que para forzar a que $3x - 7$ esté cerca de 5 tendría que hacer a x aún más próximo a 4 (más cercano por un factor de un tercio). ■

Mire la figura 6 y convénzase de que $\delta = 2\varepsilon$ sería una elección apropiada para δ en la demostración de que $\lim_{x \to 4}\left(\frac{1}{2}x + 3\right) = 5$.

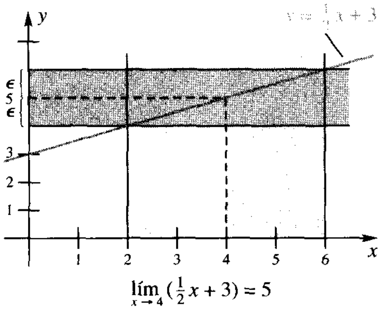


Figura 6

EJEMPLO 3 Demuestre que $\lim_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = 5$.

ANÁLISIS PRELIMINAR Estamos buscando una δ tal que

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow \left|\frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5\right| < \varepsilon$$

Ahora, para $x \neq 2$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5\right| < \varepsilon &\Leftrightarrow \left|\frac{(2x + 1)(x - 2)}{x - 2} - 5\right| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |(2x + 1) - 5| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |2(x - 2)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |2||x - 2| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Esto indica que $\delta = \varepsilon/2$ funcionará (véase la figura 7)

DEMOSTRACIÓN FORMAL Sea $\varepsilon > 0$ dada. Elegimos $\delta = \varepsilon/2$. Entonces $0 < |x - 2| < \delta$ implica que

$$\begin{aligned} \left|\frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5\right| &= \left|\frac{(2x + 1)(x - 2)}{x - 2} - 5\right| = |2x + 1 - 5| \\ &= |2(x - 2)| = 2|x - 2| < 2\delta = \varepsilon \end{aligned}$$

La cancelación del factor $x - 2$ es válida porque $0 < |x - 2|$ implica que $x \neq 2$, y

$$\frac{x - 2}{x - 2} = 1 \text{ siempre que } x \neq 2.$$ ■

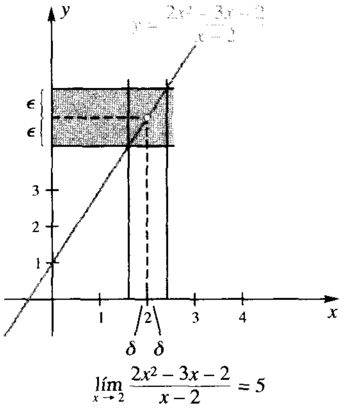


Figura 7

EJEMPLO 4 Demuestre que $\lim_{x \to c}(mx + b) = mc + b$.

ANÁLISIS PRELIMINAR Queremos encontrar una δ tal que

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |(mx + b) - (mc + b)| < \varepsilon$$

Ahora

$$|(mx + b) - (mc + b)| = |mx - mc| = |m(x - c)| = |m||x - c|$$

Parece que $\delta = \varepsilon/|m|$ funciona, con tal que $m \neq 0$. (Observe que m podría ser positiva o negativa, así que necesitamos conservar las barras de valor absoluto. Del capítulo 0 recuerde que $|ab| = |a||b|$).

DEMOSTRACIÓN FORMAL Sea $\varepsilon > 0$ dada. Elegimos $\delta = \varepsilon/|m|$. Entonces $0 < |x - c| < \delta$ implica que

$$|(mx + b) - (mc + b)| = |mx - mc| = |m||x - c| < |m|\delta = \varepsilon$$

Y en caso de que $m = 0$, cualquier δ funcionará bien ya que

$$|(0x + b) - (0c + b)| = |0| = 0$$

Esto último es menor que ε para toda x. ■

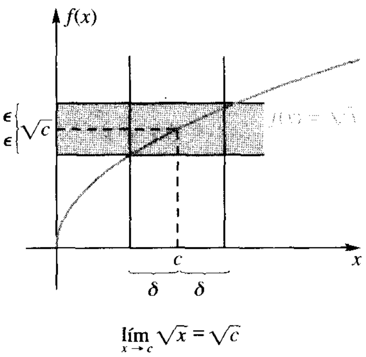


Figura 8

EJEMPLO 5 Demuestre que si $c > 0$ entonces $\lim_{x \to c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$.

ANÁLISIS PRELIMINAR Con respecto a la figura 8, debemos determinar una δ tal que

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{c}| < \varepsilon$$

Ahora

$$\begin{aligned}|\sqrt{x}-\sqrt{c}| &= \left|\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{c})(\sqrt{x}+\sqrt{c})}{\sqrt{x}+\sqrt{c}}\right| = \left|\frac{x-c}{\sqrt{x}+\sqrt{c}}\right| \\ &= \frac{|x-c|}{\sqrt{x}+\sqrt{c}} \le \frac{|x-c|}{\sqrt{c}}\end{aligned}$$

Para hacer lo último menor que ε se requiere que tengamos $|x-c|<\varepsilon\sqrt{c}$.

DEMOSTRACIÓN FORMAL Sea $\varepsilon>0$ dada. Elegimos a $\delta=\varepsilon\sqrt{c}$. Entonces $0<|x-c|<\delta$ implica que

$$\begin{aligned}|\sqrt{x}-\sqrt{c}| &= \left|\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{c})(\sqrt{x}+\sqrt{c})}{\sqrt{x}+\sqrt{c}}\right| = \left|\frac{x-c}{\sqrt{x}+\sqrt{c}}\right| \\ &= \frac{|x-c|}{\sqrt{x}+\sqrt{c}} \le \frac{|x-c|}{\sqrt{c}} < \frac{\delta}{\sqrt{c}} = \varepsilon\end{aligned}$$

Aquí hay un punto técnico. Empezamos con $c>0$, pero podría suceder que c esté muy cercano a 0 sobre el eje x. Deberíamos insistir en que $\delta \le c$, para que entonces $|x-c|<\delta$ implique que $x>0$, de modo que $\sqrt{x}$ esté definida. Así, para un rigor absoluto, elegimos δ como el más pequeño entre c y $\varepsilon\sqrt{c}$. ■

Nuestra demostración en el ejemplo 5 depende de la *racionalización del numerador*, un truco que con frecuencia es útil en cálculo.

EJEMPLO 6 Demuestre que $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+x-5)=7$.

ANÁLISIS PRELIMINAR Nuestra tarea es encontrar una δ tal que

$$0<|x-3|<\delta \Rightarrow |(x^2+x-5)-7|<\varepsilon$$

Ahora

$$|(x^2+x-5)-7| = |x^2+x-12| = |x+4||x-3|$$

El factor $|x-3|$ puede hacerse tan pequeño como queramos y sabemos que $|x+4|$ estará alrededor de 7. Por lo tanto, buscamos una cota superior para $|x+4|$. Para hacer esto, primero convenimos en hacer $\delta \le 1$. Entonces $|x-3|<\delta$ implica que

$$\begin{aligned}|x+4| &= |x-3+7| \\ &\le |x-3|+|7| \qquad \text{(desigualdad del triángulo)} \\ &< 1+7=8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|x-3|<1 &\Rightarrow 2<x<4 \\ &\Rightarrow 6<x+4<8 \\ &\Rightarrow |x+4|<8\end{aligned}$$

Figura 9

(La figura 9 ofrece una demostración alternativa de este hecho). Si también requerimos que $\delta \le \varepsilon/8$, entonces el producto $|x+4||x-3|$ será menor que ε.

DEMOSTRACIÓN FORMAL Sea $\varepsilon>0$ dada. Elegimos a $\delta = \text{mín}\{1, \varepsilon/8\}$; esto es, elegimos a δ como el más pequeño entre 1 y $\varepsilon/8$. Entonces $0<|x-3|<\delta$ implica que

$$|(x^2+x-5)-7| = |x^2+x-12| = |x+4||x-3| < 8\cdot\frac{\varepsilon}{8} = \varepsilon \quad ■$$

EJEMPLO 7 Demuestre que $\lim\limits_{x\to c} x^2 = c^2$.

DEMOSTRACIÓN Reproducimos la demostración en el ejemplo 6. Sea $\varepsilon>0$ dada. Elegimos como $\delta = \text{mín}\{1, \varepsilon/(1+2|c|)\}$. Entonces $0<|x-c|<\delta$ implica que

$$\begin{aligned}|x^2-c^2| &= |x+c||x-c| = |x-c+2c||x-c| \\ &\le (|x-c|+2|c|)|x-c| \qquad \text{(Desigualdad del triángulo)} \\ &< (1+2|c|)|x-c| < \frac{(1+2|c|)\cdot\varepsilon}{1+2|c|} = \varepsilon \quad ■\end{aligned}$$

Aunque parezca increíblemente perspicaz, en el ejemplo 7 no sacamos a δ "de la manga". Simplemente, esta vez no le mostramos el análisis preliminar.

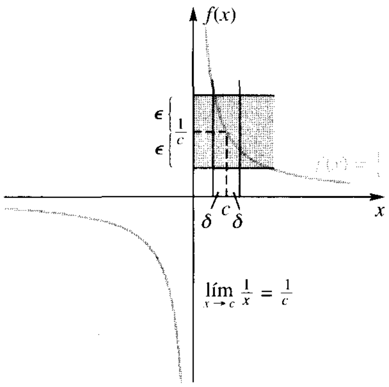


Figura 10

EJEMPLO 8 Demuestre que $\lim_{x\to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}, c \neq 0$.

ANÁLISIS PRELIMINAR Estudie la figura 10. Debemos determinar una δ tal que

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right| < \varepsilon$$

Ahora

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right| = \left|\frac{c - x}{xc}\right| = \frac{1}{|x|}\cdot\frac{1}{|c|}\cdot|x - c|$$

El factor $1/|x|$ es problemático, en especial si x está cerca de cero. Podemos acotar este factor si podemos mantener a x alejado de 0. Con ese fin, observe que

$$|c| = |c - x + x| \leq |c - x| + |x|$$

de modo que

$$|x| \geq |c| - |x - c|$$

Por lo tanto, si elegimos $\delta \leq |c|/2$, tenemos éxito en hacer $|x| \geq |c|/2$. Por último, si también pedimos que $\delta \leq \varepsilon c^2/2$, entonces

$$\frac{1}{|x|}\cdot\frac{1}{|c|}\cdot|x - c| < \frac{1}{|c|/2}\cdot\frac{1}{|c|}\cdot\frac{\varepsilon c^2}{2} = \varepsilon$$

DEMOSTRACIÓN FORMAL Sea $\varepsilon > 0$ dada. Elegimos $\delta = \text{mín}\{|c|/2, \varepsilon c^2/2\}$. Entonces $0 < |x - c| < \delta$ implica que

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c.}\right| = \left|\frac{c - x}{xc}\right| = \frac{1}{|x|}\cdot\frac{1}{|c|}\cdot|x - c| < \frac{1}{|c|/2}\cdot\frac{1}{|c|}\cdot\frac{\varepsilon c^2}{2} = \varepsilon \qquad \blacksquare$$

Límites unilaterales No se necesita mucha imaginación para dar las definiciones ε–δ del límite por la derecha y del límite por la izquierda.

Definición Límite por la derecha

Decir que $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe una correspondiente $\delta > 0$, tal que

$$0 < x - c < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Al lector le dejamos la definición ε–δ para el límite por la izquierda. (Véase el problema 5).

El concepto ε–δ presentado en esta sección es probablemente el tema más intrincado y elusivo en un curso de cálculo. Le podría tomar algún tiempo entender este concepto, pero vale la pena. El cálculo es el estudio de límites, de modo que una clara comprensión del concepto de límite es una meta valiosa.

Por lo regular, el descubrimiento del cálculo se atribuye a Isaac Newton (1642–1727) y a Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716), quienes trabajaron de manera independiente a finales de 1600. Aunque Newton y Leibniz, junto con sus sucesores, descubrieron muchas propiedades del cálculo y se encontró que tiene muchas aplicaciones en las ciencias físicas, no fue sino hasta el siglo XIX que se propuso una definición precisa de un límite. Augustin Louis Cauchy (1789–1857), un ingeniero y matemático francés, dio esta definición: "Si los valores sucesivos atribuidos a la misma variable que se aproxima indefinidamente a un valor fijo, tal que ellos finalmente difieren de él por tan poco como uno quiera, este último es llamado el límite de todos los demás." Incluso Cauchy, un maestro del rigor, fue un poco vago en su definición de límite. ¿Qué significa "valores sucesivos"? ¿Qué significa "finalmente difieren"? La frase "finalmente difieren de él por tan poco como uno quiera" contiene la semilla de la definición ε–δ, pues indica que la diferencia entre $f(x)$ y su límite L puede hacerse más pequeña que cualquier número dado, el número que fue etiquetado como ε. El matemático alemán Karl Weierstrass (1815–1897) fue el primero en reunir la definición que es equivalente a nuestra definición ε–δ de límite.

Revisión de conceptos

1. La desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$ es equivalente a ____ $< f(x) <$ ____.

2. El significado preciso de $\lim_{x \to a} f(x) = L$ es éste: dado cualquier número positivo ε existe un correspondiente número positivo δ, tal que _____ implica _____.

3. Para asegurar que $|3x - 3| < \varepsilon$, requeriríamos que $|x - 1| <$ ____.

4. $\lim_{x \to a}(mx + b) =$ ____.

Conjunto de problemas 1.2

En los problemas del 1 al 6 dé la definición ε–δ apropiada para cada proposición.

1. $\lim_{t \to a} f(t) = M$

2. $\lim_{u \to b} g(u) = L$

3. $\lim_{z \to d} h(z) = P$

4. $\lim_{y \to e} \phi(y) = B$

5. $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$

6. $\lim_{t \to a^+} g(t) = D$

En los problemas del 7 al 10 trace la función $f(x)$ en el intervalo [1.5, 2.5]. *Haga un acercamiento a la gráfica de cada función para determinar qué tan cercano debe estar* x *de 2 para que $f(x)$ esté a menos de 0.002 de 4. Su respuesta debe ser de la forma "si* x *está a menos de* ____ *de 2, entonces $f(x)$ está a menos de 0.002 de 4".*

7. $f(x) = 2x$

8. $f(x) = x^2$

9. $f(x) = \sqrt{8x}$

10. $f(x) = \dfrac{8}{x}$

En los problemas del 11 al 22 proporcione una prueba ε–δ para cada límite dado.

11. $\lim_{x \to 0}(2x - 1) = -1$

12. $\lim_{x \to -21}(3x - 1) = -64$

13. $\lim_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5} = 10$

14. $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{2x^2 - x}{x}\right) = -1$

15. $\lim_{x \to 5} \dfrac{2x^2 - 11x + 5}{x - 5} = 9$

16. $\lim_{x \to 1} \sqrt{2x} = \sqrt{2}$

17. $\lim_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{2x - 1}}{\sqrt{x - 3}} = \sqrt{7}$

18. $\lim_{x \to 1} \dfrac{14x^2 - 20x + 6}{x - 1} = 8$

19. $\lim_{x \to 1} \dfrac{10x^3 - 26x^2 + 22x - 6}{(x - 1)^2} = 4$

20. $\lim_{x \to 1}(2x^2 + 1) = 3$

21. $\lim_{x \to -1}(x^2 - 2x - 1) = 2$

22. $\lim_{x \to 0} x^4 = 0$

23. Demuestre que si $\lim_{x \to c} f(x) = L$ y $\lim_{x \to c} f(x) = M$, entonces $L = M$.

24. Sean F y G funciones tales que $0 \le F(x) \le G(x)$ para toda x cercana a c, excepto posiblemente en c. Demuestre que si $\lim_{x \to c} G(x) = 0$, entonces $\lim_{x \to c} F(x) = 0$.

25. Demuestre que $\lim_{x \to 0} x^4 \operatorname{sen}^2(1/x) = 0$. *Sugerencia:* utilice los problemas 22 y 24.

26. Demuestre que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

27. Considerando los límites por la derecha y por la izquierda, demuestre que $\lim_{x \to 0} |x| = 0$.

28. Demuestre que si $|f(x)| < B$ para $|x - a| < 1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ entonces $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0$.

29. Suponga que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y que $f(a)$ existe (aunque podría ser diferente de L). Demuestre que f está acotada en algún intervalo que contiene a a; esto es, demuestre que existen un intervalo (c, d) con $c < a < d$ y una constante M, tal que $|f(x)| \le M$ para toda x en (c, d).

30. Demuestre que si $f(x) \le g(x)$ para toda x en algún intervalo alrededor de a, al cual se le quite a, y si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces $L \le M$.

31. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son equivalentes a la definición de límite?

(a) Para algún $\varepsilon > 0$ y toda $\delta > 0$, $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

(b) Para toda $\delta > 0$, existe una correspondiente $\varepsilon > 0$ tal que

$$0 < |x - c| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \delta$$

(c) Para todo entero positivo N existe un entero correspondiente positivo M, tal que $0 < |x - c| < 1/M \Rightarrow |f(x) - L| < 1/N$.

(d) Para toda $\varepsilon > 0$, existe una correspondiente $\delta > 0$ tal que $0 < |x - c| < \delta$ y $|f(x) - L| < \varepsilon$ para alguna x.

32. En lenguaje ε–δ qué significa decir $\lim_{x \to c} f(x) \ne L$.

GC **33.** Suponga que deseamos dar una demostración con ε–δ de que

$$\lim_{x \to 3} \frac{x + 6}{x^4 - 4x^3 + x^2 + x + 6} = -1$$

Empezamos por escribir $\dfrac{x + 6}{x^4 - 4x^3 + x^2 + x + 6} + 1$ en la forma $(x - 3)g(x)$.

(a) Determine $g(x)$.

(b) ¿Podríamos elegir $\delta = \text{mín}(1, \varepsilon/n)$ para alguna n? Explique.

(c) Si elegimos $\delta = \text{mín}\left(\frac{1}{4}, \varepsilon/m\right)$, ¿cuál es el entero más pequeño m que podríamos utilizar?

Respuestas a la revisión de conceptos **1.** $L - \varepsilon$; $L + \varepsilon$ **2.** $0 < |x - a| < \delta$; $|f(x) - L| < \varepsilon$ **3.** $\varepsilon/3$ **4.** $ma + b$

1.3
Teoremas de límites

La mayoría de los lectores coincidirá en que demostrar la existencia y obtener los valores de los límites mediante la definición $\varepsilon-\delta$ de la sección anterior consume tiempo y es difícil. Por esto son bienvenidos los teoremas de esta sección. Nuestro primer teorema es el principal. Con él podemos manejar la mayoría de los problemas de límites con los que nos enfrentaremos durante bastante tiempo.

Límites laterales

Aunque el teorema A se establece en términos de límites por los dos lados, sigue cumpliéndose tanto para límites por la izquierda como para límites por la derecha.

Teorema A **Teorema principal de los límites**

Sean n un entero positivo, k una constante y f y g funciones que tengan límites en c. Entonces

1. $\lim\limits_{x \to c} k = k$;
2. $\lim\limits_{x \to c} x = c$;
3. $\lim\limits_{x \to c} kf(x) = k \lim\limits_{x \to c} f(x)$;
4. $\lim\limits_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x)$;
5. $\lim\limits_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x)$;
6. $\lim\limits_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to c} g(x)$;
7. $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$, siempre que $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$;
8. $\lim\limits_{x \to c} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to c} f(x)\right]^n$;
9. $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$, siempre que $\lim\limits_{x \to c} f(x) > 0$ cuando n sea par.

Estos importantes resultados se recuerdan mejor si se aprenden en palabras. Por ejemplo, la afirmación 4 se traduce como: *el límite de una suma es la suma de los límites.*

Por supuesto, el teorema A necesita demostrarse. Posponemos esa tarea hasta el final de la sección, pues preferimos mostrar primero cómo se utiliza este teorema con varias partes.

Aplicaciones del teorema principal de los límites

En los ejemplos siguientes, los números dentro de un círculo se refieren al número de la afirmación del teorema A. Cada igualdad está justificada por la afirmación indicada.

EJEMPLO 1 Determine $\lim\limits_{x \to 3} 2x^4$.

$$\lim_{x \to 3} 2x^4 \overset{\textcircled{3}}{=} 2 \lim_{x \to 3} x^4 \overset{\textcircled{8}}{=} 2\left[\lim_{x \to 3} x\right]^4 \overset{\textcircled{2}}{=} 2[3]^4 = 162$$

■

EJEMPLO 2 Encuentre $\lim\limits_{x \to 4} (3x^2 - 2x)$.

SOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 4} (3x^2 - 2x) \overset{\textcircled{5}}{=} \lim_{x \to 4} 3x^2 - \lim_{x \to 4} 2x \overset{\textcircled{3}}{=} 3 \lim_{x \to 4} x^2 - 2 \lim_{x \to 4} x$$

$$\overset{\textcircled{8}}{=} 3\left(\lim_{x \to 4} x\right)^2 - 2 \lim_{x \to 4} x \overset{\textcircled{2}}{=} 3(4)^2 - 2(4) = 40$$

■

EJEMPLO 3 Determine $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{x}$.

SOLUCIÓN

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x^2+9}}{x} \overset{\textcircled{7}}{=} \frac{\lim\limits_{x\to4}\sqrt{x^2+9}}{\lim\limits_{x\to4}x} \overset{\textcircled{9,2}}{=} \frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to4}(x^2+9)}}{4} \overset{\textcircled{4}}{=} \frac{1}{4}\sqrt{\lim_{x\to4}x^2+\lim_{x\to4}9}$$

$$\overset{\textcircled{8,1}}{=} \frac{1}{4}\sqrt{\left[\lim_{x\to4}x\right]^2+9} \overset{\textcircled{2}}{=} \frac{1}{4}\sqrt{4^2+9} = \frac{5}{4}$$

■

EJEMPLO 4 Si $\lim\limits_{x\to3}f(x)=4$ y $\lim\limits_{x\to3}g(x)=8$, encuentre

$$\lim_{x\to3}\left[f^2(x)\cdot\sqrt[3]{g(x)}\,\right]$$

SOLUCIÓN

$$\lim_{x\to3}\left[f^2(x)\cdot\sqrt[3]{g(x)}\right] \overset{\textcircled{6}}{=} \lim_{x\to3}f^2(x)\cdot\lim_{x\to3}\sqrt[3]{g(x)}$$

$$\overset{\textcircled{8,9}}{=} \left[\lim_{x\to3}f(x)\right]^2\cdot\sqrt[3]{\lim_{x\to3}g(x)}$$

$$= [4]^2\cdot\sqrt[3]{8} = 32$$

■

Recuerde que una función polinomial *f* tiene la forma

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

mientras que una función racional *f* es el cociente de dos funciones polinomiales, esto es,

$$f(x) = \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0}$$

Teorema B **Teorema de sustitución**

Si *f* es una función polinomial o una función racional, entonces

$$\lim_{x\to c}f(x) = f(c)$$

con tal que $f(c)$ esté definida. En el caso de una función racional, esto significa que el valor del denominador en *c* no sea cero.

Evaluación de un límite por "sustitución"

Cuando aplicamos el teorema B, teorema de sustitución, decimos que evaluamos el límite por *sustitución*. No todos los límites pueden evaluarse por sustitución; considere $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$. El teorema de sustitución no se aplica aquí, ya que el denominador es cero cuando x = 1, pero el límite sí existe.

La demostración del teorema B se obtiene con base en aplicaciones repetidas del teorema A. Observe que el teorema B nos permite encontrar límites de funciones polinomiales y racionales con la simple sustitución de *c* por *x* en toda la expresión, siempre y cuando el denominador de la función racional no sea cero en *c*.

EJEMPLO 5 Encuentre $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{7x^5-10x^4-13x+6}{3x^2-6x-8}$.

SOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 2} \frac{7x^5 - 10x^4 - 13x + 6}{3x^2 - 6x - 8} = \frac{7(2)^5 - 10(2)^4 - 13(2) + 6}{3(2)^2 - 6(2) - 8} = -\frac{11}{2}$$ ■

EJEMPLO 6 Determine $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + 3x + 7}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3 + 3x + 7}{(x-1)^2}$.

SOLUCIÓN No se aplican ni el teorema B ni la afirmación 7 del teorema A, ya que el límite del denominador es cero. Sin embargo, como el límite del numerador es 11, vemos que cuando x se aproxima a 1 estamos dividiendo un número cercano a 11 entre un número positivo cercano a cero. El resultado es un número positivo grande. De hecho, el número resultante puede hacerlo tan grande como quiera tomando a x suficientemente cercana a 1. Decimos que el límite no existe. (Más adelante, en este capítulo —véase la sección 1.5— nos permitiremos decir que el límite es $+\infty$). ■

En muchos casos no se puede aplicar el teorema B, ya que la sustitución de c provoca que el denominador se haga igual a 0. En casos como éste, en ocasiones sucede que la función se puede simplificar mediante la factorización. Por ejemplo, podemos escribir

$$\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 6} = \frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x+3)} = \frac{x+5}{x+3}$$

Debemos ser cuidadosos en este último paso. La fracción $(x + 5)/(x + 3)$ es igual a la del lado izquierdo del signo de igualdad sólo si x no es igual a 2. Si $x = 2$, el lado izquierdo está indeterminado (ya que el denominador es 0), mientras que el lado derecho es igual a $(2 + 5)/(2 + 3) = 7/5$. Esto plantea la pregunta acerca de si los límites

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 6} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2} \frac{x+5}{x+3}$$

son iguales. La respuesta se encuentra en el siguiente teorema.

Teorema C

Si $f(x) = g(x)$ para toda x en un intervalo abierto que contenga a c, excepto posiblemente en el mismo número c, y si existe $\lim_{x\to c} g(x)$ entonces $\lim_{x\to c} f(x)$ existe y $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x)$.

EJEMPLO 7 Determine $\lim_{x\to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

SOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1) = \sqrt{1} + 1 = 2$$ ■

EJEMPLO 8 Determine $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 6}$.

SOLUCIÓN No se aplica el teorema B porque el denominador es 0 cuando $x = 2$. Al sustituir $x = 2$ en el numerador también obtenemos 0, por lo que el cociente toma una forma carente de significado 0/0 en $x = 2$. Cuando esto suceda deberemos buscar alguna simplificación algebraica, como la factorización.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+5}{x+3} = \frac{7}{5}$$

¿Opcional?

En un primer curso de cálculo, ¿cuántos teoremas deben demostrarse? Los profesores de matemáticas han discutido largo y tendido en torno a esto y acerca del balance correcto entre:

- lógica e intuición
- demostración y explicación
- teoría y aplicación

Un gran científico de hace mucho tiempo dio un sabio consejo.

"Quien ama la práctica sin teoría es como el marinero que se embarca sin timón ni brújula y nunca sabe a dónde ir".

Leonardo da Vinci

El paso de la segunda a la última igualdad se justifica por medio del teorema C, ya que

$$\frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x+3)} = \frac{x+5}{x+3}$$

para toda x, salvo para $x = 2$. Una vez que aplicamos el teorema C, podemos evaluar el límite por medio de sustitución (es decir, mediante la aplicación del teorema B). ■

Demostración del teorema A (opcional) No debe sorprenderse demasiado cuando le decimos que las demostraciones de algunas partes del teorema A son muy complicadas. Como consecuencia de esto, aquí sólo demostramos las primeras cinco partes y dejamos las otras al apéndice (sección A.2, teorema A). Para que se dé cuenta, podría intentar con los problemas 35 y 36.

Demostraciones de las afirmaciones 1 y 2 Estas afirmaciones resultan de $\lim\limits_{x\to c}(mx + b) = mc + b$ (véase el ejemplo 4 de la sección 1.2) utilizando primero $m = 0$ y luego $m = 1, b = 0$. ■

Demostración de la afirmación 3 Si $k = 0$, el resultado es trivial, así que suponemos que $k \neq 0$. Sea $\varepsilon > 0$ dada. Por hipótesis, $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ existe; llamemos L a su valor. Por definición de límite existe un número δ, tal que

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{|k|}$$

Es seguro que algunos reclamarían que pongamos $\varepsilon/|k|$ en lugar de ε al final de la desigualdad anterior. Bueno, ¿acaso $\varepsilon/|k|$ no es un número positivo? Sí. ¿Acaso la definición de límite no requiere que para cualquier número positivo exista una correspondiente δ? Sí.

Ahora, para una δ así determinada (nuevamente por medio de un análisis preliminar que no hemos mostrado aquí), aseguramos que $0 < |x - c| < \delta$ implica que

$$|kf(x) - kL| = |k||f(x) - L| < |k|\frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$$

Esto muestra que

$$\lim_{x\to c} kf(x) = kL = k \lim_{x\to c} f(x)$$ ■

Demostración de la afirmación 4 Respecto a la figura 1. Sea $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to c} g(x) = M$. Si ε es cualquier número positivo, entonces $\varepsilon/2$ es positivo. Como $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$, existe un número positivo δ_1 tal que

$$0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Como $\lim\limits_{x\to c} g(x) = M$, existe un número positivo δ_2, tal que

$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Elegimos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$; esto es, elegimos δ como la más pequeña de δ_1 y δ_2. Entonces $0 < |x - c| < \delta$ implica que

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &= |[f(x) - L] + [g(x) - M]| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

En esta cadena, la primera desigualdad es la desigualdad del triángulo (véase la sección 0.2); la segunda resulta de la elección de δ. Acabamos de demostrar que

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to c}[f(x) + g(x)] = L + M = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$$ ■

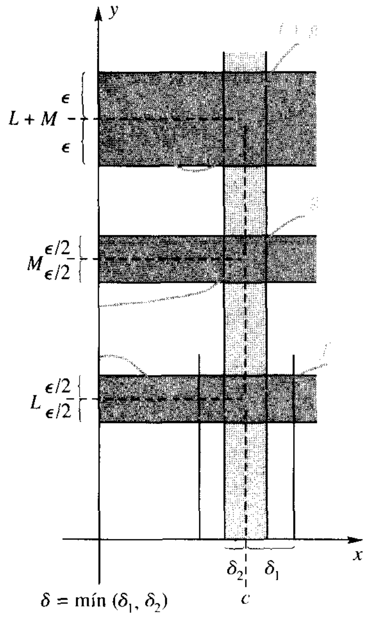


Figura 1

Demostración de la afirmación 5

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)] &= \lim_{x\to c}[f(x)+(-1)g(x)]\\ &= \lim_{x\to c}f(x)+\lim_{x\to c}(-1)g(x)\\ &= \lim_{x\to c}f(x)+(-1)\lim_{x\to c}g(x)\\ &= \lim_{x\to c}f(x)-\lim_{x\to c}g(x)\end{aligned}$$ ■

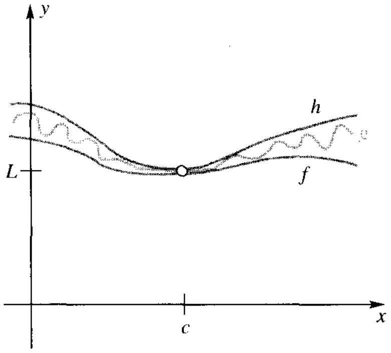


Figura 2

El teorema del emparedado Probablemente ha oído decir a alguien: "me encuentro entre la espada y la pared". Esto es lo que le sucede a g en el siguiente teorema (véase la figura 2).

Teorema D **Teorema del emparedado**

Sean f, g y h funciones que satisfacen $f(x) \le g(x) \le h(x)$ para toda x cercana a c, excepto posiblemente en c. Si $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$, entonces $\lim_{x\to c} g(x) = L$.

Demostración (Opcional) Sea $\varepsilon > 0$ dada. Elegimos δ_1 tal que

$$0 < |x-c| < \delta_1 \Rightarrow L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$$

y δ_2 tal que

$$0 < |x-c| < \delta_2 \Rightarrow L-\varepsilon < h(x) < L+\varepsilon$$

Elegimos δ_3, de modo que

$$0 < |x-c| < \delta_3 \Rightarrow f(x) \le g(x) \le h(x)$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Entonces

$$0 < |x-c| < \delta \Rightarrow L-\varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < L+\varepsilon$$

Concluimos que $\lim_{x\to c} g(x) = L$. ■

EJEMPLO 9 Suponga que hemos demostrado que $1 - x^2/6 \le (\text{sen } x)/x \le 1$ para toda x cercana pero distinta de cero. ¿Qué podemos concluir acerca de $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x}{x}$?

SOLUCIÓN Sea $f(x) = 1 - x^2/6$, $g(x) = (\text{sen } x)/x$, y $h(x) = 1$. Se sigue que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = \lim_{x\to 0} h(x)$ y de este modo, por el teorema D,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x}{x} = 1$$ ■

Revisión de conceptos

1. Si $\lim_{x\to 3} f(x) = 4$, entonces $\lim_{x\to 3}(x^2+3)f(x) =$ ____.
2. Si $\lim_{x\to 2} g(x) = -2$, entonces $\lim_{x\to 2}\sqrt{g^2(x)+12} =$ ____.
3. Si $\lim_{x\to c} f(x) = 4$ y $\lim_{x\to c} g(x) = -2$, entonces $\lim_{x\to c}\frac{f^2(x)}{g(x)} =$ ____ y $\lim_{x\to c}\left[g(x)\sqrt{f(x)} + 5x\right] =$ ____.
4. Si $\lim_{x\to c} f(x) = L$ y $\lim_{x\to c} g(x) = L$, entonces $\lim_{x\to c}[f(x) - L]g(x) =$ ____.

Conjunto de problemas 1.3

En los problemas del 1 al 12 utilice el teorema A para encontrar cada uno de los límites. Justifique cada paso apelando a cada una de las afirmaciones numeradas, como en los ejemplos del 1 al 4.

1. $\lim_{x\to 1}(2x+1)$
2. $\lim_{x\to -1}(3x^2-1)$
3. $\lim_{x\to 0}[(2x+1)(x-3)]$
4. $\lim_{x\to\sqrt{2}}[(2x^2+1)(7x^2+13)]$
5. $\lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{5-3x}$
6. $\lim_{x\to -3}\frac{4x^3+1}{7-2x^2}$

7. $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{3x - 5}$ **8.** $\lim\limits_{x \to -3} \sqrt{5x^2 + 2x}$

9. $\lim\limits_{t \to -2} (2t^3 + 15)^{13}$ **10.** $\lim\limits_{w \to -2} \sqrt{-3w^3 + 7w^2}$

11. $\lim\limits_{y \to 2} \left(\dfrac{4y^3 + 8y}{y + 4} \right)^{1/3}$

12. $\lim\limits_{w \to 5} (2w^4 - 9w^3 + 19)^{-1/2}$

En los problemas del 13 al 24 encuentre el límite indicado o establezca que no existe. En muchos casos, necesitará usar un poco de álgebra antes de intentar evaluar el límite.

13. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$ **14.** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$

15. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$ **16.** $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + x}{x^2 + 1}$

17. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^3 + 4x^2 - 19x + 14}$

18. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 7x + 10}{x + 2}$

19. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$ **20.** $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 14x - 51}{x^2 - 4x - 21}$

21. $\lim\limits_{u \to -2} \dfrac{u^2 - ux + 2u - 2x}{u^2 - u - 6}$ **22.** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + ux - x - u}{x^2 + 2x - 3}$

23. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{2x^2 - 6x\pi + 4\pi^2}{x^2 - \pi^2}$

24. $\lim\limits_{w \to -2} \dfrac{(w + 2)(w^2 - w - 6)}{w^2 + 4w + 4}$

En los problemas del 25 al 30 encuentre los límites $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 3$ *y* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -1$ *(véase el ejemplo 4).*

25. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$ **26.** $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{2f(x) - 3g(x)}{f(x) + g(x)}$

27. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[3]{g(x)}\,[f(x) + 3]$ **28.** $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - 3]^4$

29. $\lim\limits_{t \to a} [|f(t)| + |3g(t)|]$ **30.** $\lim\limits_{u \to a} [f(u) + 3g(u)]^3$

En los problemas del 31 al 34 encuentre $\lim\limits_{x \to 2} [f(x) - f(2)]/(x - 2)$ *para cada función f dada.*

31. $f(x) = 3x^2$ **32.** $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

33. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **34.** $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$

35. Demuestre la afirmación 6 del teorema A. *Sugerencia:*

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - LM| &= |f(x)g(x) - Lg(x) + Lg(x) - LM| \\ &= |g(x)[f(x) - L] + L[g(x) - M]| \\ &\le |g(x)||f(x) - L| + |L||g(x) - M| \end{aligned}$$

Ahora demuestre que si $\lim\limits_{x \to c} g(x) = M$, entonces existe un número δ_1, tal que

$$0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |g(x)| < |M| + 1$$

36. Demuestre la afirmación 7 del teorema A; primero dé una demostración ε–δ de que $\lim\limits_{x \to c} [1/g(x)] = 1/\left[\lim\limits_{x \to c} g(x)\right]$ y luego aplique la afirmación 6.

37. Demuestre que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to c} [f(x) - L] = 0$.

38. Demuestre que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to c} |f(x)| = 0$.

39. Demuestre que $\lim\limits_{x \to c} |x| = |c|$.

40. Encuentre ejemplos para demostrar que si

(a) $\lim\limits_{x \to c} [f(x) + g(x)]$ existe, esto no implica que exista $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ o $\lim\limits_{x \to c} g(x)$;

(b) $\lim\limits_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)]$ existe, esto no implica que exista $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ o $\lim\limits_{x \to c} g(x)$.

En los problemas del 41 al 48 encuentre cada uno de los límites unilaterales o establezca que no existen.

41. $\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{\sqrt{3 + x}}{x}$ **42.** $\lim\limits_{x \to -\pi^+} \dfrac{\sqrt{\pi^3 + x^3}}{x}$

43. $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 9}}$ **44.** $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\sqrt{1 + x}}{4 + 4x}$

45. $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{(x^2 + 1)[\![x]\!]}{(3x - 1)^2}$ **46.** $\lim\limits_{x \to 3^-} (x - [\![x]\!])$

47. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x}{|x|}$ **48.** $\lim\limits_{x \to 3^+} [\![x^2 + 2x]\!]$

49. Suponga que $f(x)g(x) = 1$ para toda x y que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$. Demuestre que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ no existe.

50. Sea R el rectángulo que une los puntos medios de los lados del cuadrilátero Q, el cual tiene vértices $(\pm x, 0)$ y $(0, \pm 1)$. Calcule

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\text{perímetro de } R}{\text{perímetro de } Q}$$

51. Sea $y = \sqrt{x}$ y considere los puntos M, N, O y P con coordenadas $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 0)$ y (x, y) en la gráfica de $y = \sqrt{x}$, respectivamente. Calcule:

(a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\text{perímetro de } \Delta NOP}{\text{perímetro de } \Delta MOP}$ (b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\text{área de } \Delta NOP}{\text{área de } \Delta MOP}$

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** 48 **2.** 4 **3.** -8; $-4 + 5c$ **4.** 0

1.4
Límites que involucran funciones trigonométricas

El teorema B de la sección anterior dice que los límites de funciones polinomiales siempre pueden encontrarse por sustitución y los límites de funciones racionales pueden encontrarse por sustitución, siempre y cuando el denominador no sea cero en el punto límite. Esta regla de sustitución se aplica también a las funciones trigonométricas. Este resultado se establece a continuación.

Teorema A **Límites de funciones trigonométricas**

Para todo número real c en el dominio de la función,

1. $\lim\limits_{t\to c} \operatorname{sen} t = \operatorname{sen} c$
2. $\lim\limits_{t\to c} \cos t = \cos c$
3. $\lim\limits_{t\to c} \tan t = \tan c$
4. $\lim\limits_{t\to c} \cot t = \cot c$
5. $\lim\limits_{t\to c} \sec t = \sec c$
6. $\lim\limits_{t\to c} \csc t = \csc c$

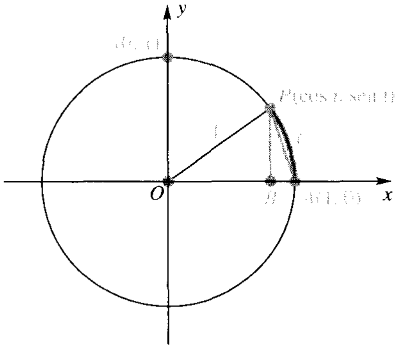


Figura 1

Demostración de la afirmación 1 Primero establecemos el caso especial en el que $c = 0$. Supóngase que $t > 0$ y que los puntos A, B y P están definidos como en la figura 1. Entonces

$$0 < |BP| < |AP| < \operatorname{arc}(AP)$$

Pero $|BP| = \operatorname{sen} t$ y $\operatorname{arco}(AP) = t$, de modo que

$$0 < \operatorname{sen} t < t$$

Si $t < 0$, entonces $t < \operatorname{sen} t < 0$. Así que podemos aplicar el teorema del emparedado (teorema 1.3D) y concluir que $\lim\limits_{t\to 0} \operatorname{sen} t = 0$. Para completar la demostración, también necesitaremos el resultado de que $\lim\limits_{t\to 0} \cos t = 1$. Ésta se deduce aplicando una identidad trigonométrica y el teorema 1.3A:

$$\lim_{t\to 0} \cos t = \lim_{t\to 0} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{1 - \left(\lim_{t\to 0} \operatorname{sen} t\right)^2} = \sqrt{1 - 0^2} = 1$$

Ahora, para demostrar que $\lim\limits_{t\to c} \operatorname{sen} t = \operatorname{sen} c$, primero hacemos $h = t - c$ de modo que $h \to 0$ cuando $t \to c$. Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{t\to c} \operatorname{sen} t &= \lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(c + h)\\ &= \lim_{h\to 0}(\operatorname{sen} c \cos h + \cos c \operatorname{sen} h) \quad \text{(Identidad de la suma de ángulos)}\\ &= (\operatorname{sen} c)\left(\lim_{h\to 0} \cos h\right) + (\cos c)\left(\lim_{h\to 0} \operatorname{sen} h\right)\\ &= (\operatorname{sen} c)(1) + (\cos c)(0) = \operatorname{sen} c\end{aligned}$$

■

Demostración de la afirmación 2 Otra vez utilizamos la identidad junto con el teorema 1.3A. Si $\cos c > 0$, entonces para t cercano a c tenemos $\cos t = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}$. Por lo tanto,

$$\lim_{t\to c} \cos t = \lim_{t\to c} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{1 - \left(\lim_{t\to c} \operatorname{sen} t\right)^2} = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 c} = \cos c$$

Por otra parte, si $\cos c < 0$, entonces para t cercano a c tenemos $\cos t = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}$.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to c} \cos t &= \lim_{t\to c}\left(-\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}\right) = -\sqrt{1 - \left(\lim_{t\to c} \operatorname{sen} t\right)^2} = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 c}\\ &= -\sqrt{\cos^2 c} = -|\cos c| = \cos c\end{aligned}$$

El caso $c = 0$ se trabajó en la demostración de la afirmación 1. ■

Las demostraciones de las demás afirmaciones se dejan como ejercicios. (Véanse los problemas 21 y 22). El teorema A puede utilizarse junto con el teorema 1.3A para evaluar otros límites.

EJEMPLO 1 Encuentre $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^2 \cos t}{t + 1}$.

SOLUCIÓN

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2 \cos t}{t + 1} = \left(\lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t + 1}\right)\left(\lim_{t\to 0} \cos t\right) = 0 \cdot 1 = 0$$

■

Dos límites importantes que no pueden evaluarse por sustitución son

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \quad \text{y} \quad \lim_{t\to 0} \frac{1 - \cos t}{t}$$

En la sección 1.1 encontramos el primero de estos límites, en donde conjeturamos que el límite era 1. Ahora demostramos que en verdad 1 es el límite.

Teorema B **Límites trigonométricos especiales**

1. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$
2. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1 - \cos t}{t} = 0$

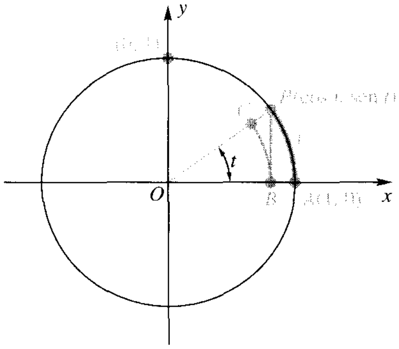


Figura 2

Demostración de la afirmación 1 En la demostración del teorema A de esta sección mostramos que

$$\lim_{t \to 0} \cos t = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{t \to 0} \operatorname{sen} t = 0$$

Para $-\pi/2 \le t \le \pi/2, t \neq 0$ (recuerde, no importa qué suceda *en* $t = 0$), dibuje el segmento de recta vertical BP y el arco circular BC, como se muestra en la figura 2. (Si $t < 0$, entonces considere la región sombreada reflejada con respecto al eje x.) De la figura 2 se hace evidente que

$$\text{área(sector } OBC) \le \text{área}(\Delta OBP) \le \text{área(sector } OAP)$$

El área de un triángulo es un medio del producto de su base por la altura, y el área de un sector circular con ángulo central t y radio r es $\frac{1}{2}r^2|t|$ (véase el problema 42 de la sección 0.7). Al aplicar estos resultados a las tres regiones dadas

$$\frac{1}{2}(\cos t)^2|t| \le \frac{1}{2}\cos t\,|\operatorname{sen} t| \le \frac{1}{2}1^2|t|$$

que, después de multiplicar por 2 y dividir entre el número positivo $|t|\cos t$, se obtiene

$$\cos t \le \frac{|\operatorname{sen} t|}{|t|} \le \frac{1}{\cos t}$$

Como la expresión $(\operatorname{sen} t)/t$ es positiva para $-\pi/2 \le t \le \pi/2, t \neq 0$, tenemos $|\operatorname{sen} t|/|t| = (\operatorname{sen} t)/t$. Por lo tanto,

$$\cos t \le \frac{\operatorname{sen} t}{t} \le \frac{1}{\cos t}$$

Como estamos buscando el límite de la función de en medio y conocemos el límite de cada una de las funciones "exteriores", esta doble desigualdad pide que apliquemos el teorema del emparedado. Cuando lo aplicamos, obtenemos

$$\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$$

■

Demostración de la afirmación 2 El segundo límite se deduce con facilidad a partir del primero. Sólo multiplique el numerador y el denominador por $(1 + \cos t)$; esto da

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t} &= \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t} \cdot \frac{1 + \cos t}{1 + \cos t} = \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos^2 t}{t(1 + \cos t)} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t(1 + \cos t)} \\
&= \left(\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\right) \frac{\lim\limits_{t \to 0} \operatorname{sen} t}{\lim\limits_{t \to 0}(1 + \cos t)} = 1 \cdot \frac{0}{2} = 0
\end{aligned}$$

■

Haremos uso explícito de estos dos límites en el capítulo 2. En este momento podemos usarlos para evaluar otros límites.

EJEMPLO 2 Encuentre cada límite,

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}$ (b) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1 - \cos t}{\operatorname{sen} t}$ (c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{\tan x}$

SOLUCIÓN

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 3\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x} = 3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x}$

Aquí, el argumento de la función seno es $3x$, no sólo x, como lo requiere el teorema B. Sea $y = 3x$. Entonces $y \to 0$ si y sólo si $x \to 0$, de modo que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} = \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = 3\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} = 3$$

(b)
$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{\operatorname{sen} t} = \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{1-\cos t}{t}}{\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}} = \frac{\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\cos t}{t}}{\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}} = \frac{0}{1} = 0$$

(c)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 4x}{\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{4\operatorname{sen} 4x}{4x}}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x\cos x}}$$

$$= \frac{4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 4x}{4x}}{\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}\right)} = \frac{4}{1\cdot 1} = 4 \qquad ■$$

EJEMPLO 3 Haga un bosquejo de las gráficas de $u(x) = |x|$, $l(x) = -|x|$ y $f(x) = x\cos(1/x)$. Utilice estas gráficas junto con el teorema del emparedado (teorema D de la sección 1.3) para determinar $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

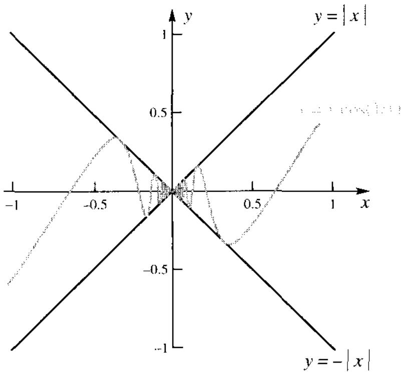


Figura 3

SOLUCIÓN Observe que $\cos(1/x)$ siempre está entre -1 y 1 y $f(x) = x\cos(1/x)$. Por lo tanto, $x\cos(1/x)$ siempre estará entre $-x$ y x, si x es positiva y entre x y $-x$, si x es negativa. En otras palabras, la gráfica de $y = x\cos(1/x)$ está entre las gráficas de $y = |x|$ y $y = -|x|$, como se muestra en la figura 3. Sabemos que $\lim\limits_{x\to 0}|x| = \lim\limits_{x\to 0}(-|x|) = 0$ (véase el problema 27 de la sección 1.2) y como la gráfica de $y = f(x) = x\cos(1/x)$ está "emparedada" entre las gráficas de $u(x) = |x|$ y $l(x) = -|x|$, ambas tienden a cero cuando $x \to 0$ y podemos aplicar el teorema del emparedado para concluir que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. ■

Revisión de conceptos

1. $\lim\limits_{t\to 0}\operatorname{sen} t =$ _____.

2. $\lim\limits_{t\to \pi/4}\tan t =$ _____.

3. El límite $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$ no puede evaluarse por sustitución porque ________.

4. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} t}{t} =$ ______.

Conjunto de problemas 1.4

En los problemas del 1 al 14 evalúe cada límite.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{x+1}$

2. $\lim\limits_{\theta\to\pi/2} \theta\cos\theta$

3. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cos^2 t}{1+\operatorname{sen} t}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x\tan x}{\operatorname{sen} x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{2x}$

6. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3\theta}{2\theta}$

7. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3\theta}{\tan\theta}$

8. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\tan 5\theta}{\operatorname{sen} 2\theta}$

9. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\cot(\pi\theta)\operatorname{sen}\theta}{2\sec\theta}$

10. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 3t}{2t}$

11. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\tan^2 3t}{2t}$

12. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\tan 2t}{\operatorname{sen} 2t - 1}$

13. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3t + 4t}{t\sec t}$

14. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\theta^2}$

En los problemas del 15 al 19 trace las funciones $u(x)$, $l(x)$ y $f(x)$. Después utilice estas gráficas junto con el teorema del emparedado para determinar $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

15. $u(x) = |x|, l(x) = -|x|, f(x) = x\operatorname{sen}(1/x)$

16. $u(x) = |x|, l(x) = -|x|, f(x) = x\operatorname{sen}(1/x^2)$

17. $u(x) = |x|, l(x) = -|x|, f(x) = (1-\cos^2 x)/x$

18. $u(x) = 1, l(x) = 1 - x^2, f(x) = \cos^2 x$

19. $u(x) = 2, l(x) = 2 - x^2, f(x) = 1 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

20. Demuestre que $\lim\limits_{t\to c} \cos t = \cos c$ utilizando un argumento similar al que se empleó en la demostración de que $\lim\limits_{t\to c} \operatorname{sen} t = \operatorname{sen} c$.

21. Demuestre las afirmaciones 3 y 4 del teorema A mediante el teorema 1.3A.

22. Demuestre las afirmaciones 5 y 6 del teorema 1.3A.

23. Con base en área(OBP) ≤ área(sector OAP) ≤ área(OBP) + área($ABPQ$) en la figura 4, demuestre que

$$\cos t \le \frac{t}{\operatorname{sen} t} \le 2 - \cos t$$

y así obtenga otra demostración de que $\lim\limits_{t\to 0^+} (\operatorname{sen} t)/t = 1$.

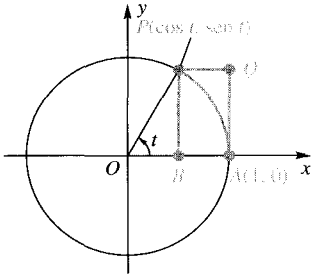


Figura 4

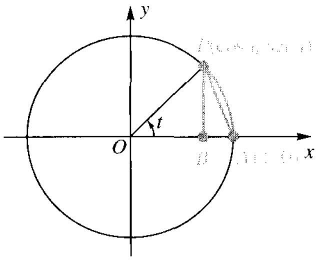


Figura 5

24. En la figura 5, sea D el área del triángulo ABP y E el área de la región sombreada.

(a) Haga una conjetura acerca del valor de $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{D}{E}$ observando la figura.

(b) Encuentre una fórmula para D/E en términos de t.

C (c) Utilice una calculadora para obtener una estimación precisa de $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{D}{E}$.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** 0 **2.** 1 **3.** el denominador es cero cuando $t = 0$ **4.** 1

1.5 Límites al infinito; límites infinitos

Con frecuencia, los problemas y paradojas más profundos de las matemáticas están entrelazados con el uso del concepto de infinito. Incluso, el progreso matemático, en parte, puede medirse en términos de la comprensión del concepto de infinito. Ya hemos utilizado los símbolos ∞ y $-\infty$ en nuestra notación para ciertos intervalos. Así, $(3, \infty)$ es nuestra forma para denotar al conjunto de todos los números reales mayores que 3. Observe que nunca nos hemos referido a ∞ como un número. Por ejemplo, nunca lo hemos sumado ni dividido entre algún número. Utilizaremos los símbolos ∞ y $-\infty$ de una manera nueva en esta sección, pero éstos aún no representan números.

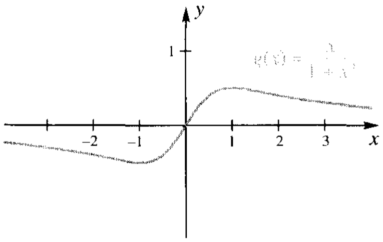


Figura 1

Límites al infinito Considere la función $g(x) = x/(1 + x^2)$ cuya gráfica se muestra en la figura 1. Hacemos esta pregunta: ¿qué le sucede a $g(x)$ cuando x se hace cada vez más grande? En símbolos, preguntamos por el valor de $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$.

Cuando escribimos $x \to \infty$, *no* queremos dar a entender que en un lugar muy, muy alejado a la derecha del eje x exista un número —más grande que todos los demás— al cual se aproxima x. En lugar de eso utilizamos $x \to \infty$ como una forma breve de decir que x se hace cada vez más grande sin cota.

En la tabla de la figura 2 hemos listado valores de $g(x) = x/(1 + x^2)$ para diversos valores de x. Parece que $g(x)$ se hace cada vez más pequeño conforme x se hace cada vez más grande. Escribimos

x	$\frac{x}{1+x^2}$
10	0.099
100	0.010
1000	0.001
10000	0.0001
↓	↓
∞	?

Figura 2

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1 + x^2} = 0$$

Al experimentar con números negativos cada vez más lejanos del cero nos conduciría a escribir

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1 + x^2} = 0$$

Definiciones rigurosas de límites cuando $x \to \pm\infty$ En analogía con nuestra definición $\varepsilon - \delta$ para límites ordinarios, hacemos la siguiente definición.

Definición Límite cuando $x \to \infty$

Sea f definida en $[c, \infty)$ para algún número c. Decimos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un correspondiente número M, tal que

$$x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Notará que M puede depender de ε. En general, entre más pequeña sea ε, más grande tendrá que ser M. La gráfica en la figura 3 puede ayudarle a comprender lo que estamos diciendo.

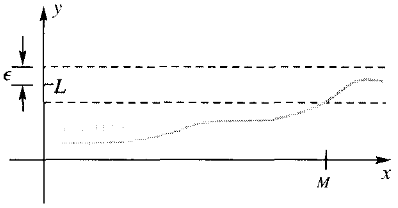


Figura 3

Definición Límite cuando $x \to -\infty$

Sea f definida en $(-\infty, c]$ para algún número c. Decimos que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un correspondiente número M, tal que

$$x < M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

EJEMPLO 1 Demuestre que si k es un entero positivo, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^k} = 0$$

SOLUCIÓN Sea $\varepsilon > 0$ dada. Después de un análisis preliminar (como en la sección 1.2), elegimos $M = \sqrt[k]{1/\varepsilon}$. Entonces $x > M$ implica que

$$\left|\frac{1}{x^k} - 0\right| = \frac{1}{x^k} < \frac{1}{M^k} = \varepsilon$$

La demostración de la segunda proposición es similar. ■

Habiendo dado las definiciones de esta nueva clase de límites, debemos enfrentarnos a la pregunta de si el teorema principal de límites (teorema 1.3A) se cumple para ellos. La respuesta es sí, y la demostración es similar a la de las proposiciones originales. Observe cómo utilizamos este teorema en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 2 Demuestre que $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1 + x^2} = 0$.

SOLUCIÓN Aquí utilizamos un truco común: dividir el numerador y el denominador entre la potencia más alta de x que aparece en el denominador, esto es, x^2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1 + x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{1 + x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + 1}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x\to\infty} 1} = \frac{0}{0 + 1} = 0$$ ■

EJEMPLO 3 Encuentre $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3}{1+x^3}$.

SOLUCIÓN La gráfica de $f(x) = 2x^3/(1+x^3)$ se muestra en la figura 4. Para encontrar el límite, divida el numerador y el denominador entre x^3.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{1+x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{1/x^3+1} = \frac{2}{0+1} = 2 \qquad ■$$

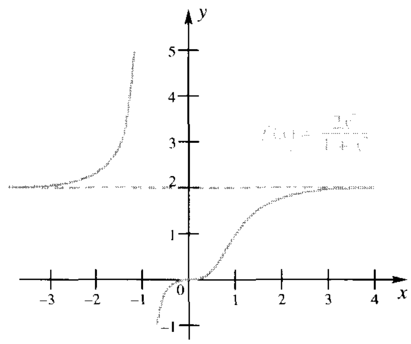


Figura 4

Límites de sucesiones El dominio para algunas funciones es el conjunto de los números naturales $\{1, 2, 3, \ldots\}$. En esta situación, por lo regular escribimos a_n en lugar de $a(n)$ para denotar al n-ésimo término de la sucesión, o $\{a_n\}$ para denotar a toda la sucesión. Por ejemplo, podríamos definir la sucesión por medio de $a_n = n/(n+1)$. Considere lo que sucede cuando n se hace grande. Unos cuantos cálculos muestran que

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{2}{3}, \quad a_3 = \frac{3}{4}, \quad a_4 = \frac{4}{5}, \quad \ldots, \quad a_{100} = \frac{100}{101}, \quad \ldots$$

Pareciera que estos valores se aproximan a 1, de modo que sería razonable decir que para esta sucesión $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. La siguiente definición proporciona significado a esta idea del límite de una sucesión.

Definición Límite de una sucesión

Sea a_n definida para todos los números naturales mayores o iguales que algún número c. Decimos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un correspondiente número natural M, tal que

$$n > M \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

Observe que esta definición es casi idéntica a la definición de $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. La única diferencia es que ahora pedimos que el argumento de la función sea un número natural. Como podríamos esperar, el teorema principal de los límites (teorema 1.3A) se cumple para las sucesiones.

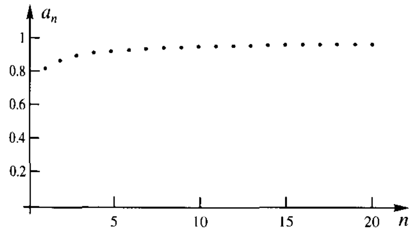


Figura 5

EJEMPLO 4 Determine $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n+1}{n+2}}$.

SOLUCIÓN La figura 5 muestra una gráfica de $a_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{n+2}}$. Al aplicar el teorema 1.3A se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2}\right)^{1/2} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1+1/n}{1+2/n}\right)^{1/2} = \left(\frac{1+0}{1+0}\right)^{1/2} = 1 \qquad ■$$

Necesitaremos el concepto de límite de una sucesión en la sección 3.7 y en el capítulo 4. Las sucesiones se estudian con mayor detalle en el capítulo 9.

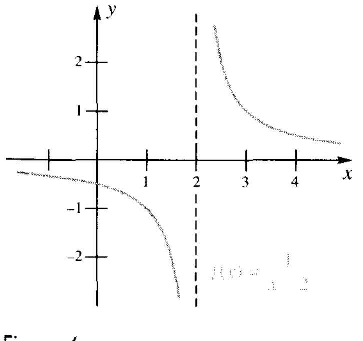


Figura 6

Límites infinitos Considere la gráfica de $f(x) = 1/(x-2)$ que se muestra en la figura 6. Cuando x se acerca a 2 por la izquierda, la función parece que disminuye sin cota. De forma análoga, cuando x se aproxima a 2 por la derecha, la función parece que aumenta sin cota. Por lo tanto, no tiene sentido hablar acerca de $\lim\limits_{x\to2} 1/(x-2)$, pero creemos que es razonable escribir

$$\lim_{x\to2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$$

Aquí está la definición precisa.

Definición Límite infinito

Decimos que $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = \infty$, si para cada número positivo M corresponde una $\delta > 0$ tal que

$$0 < x - c < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

En otras palabras, $f(x)$ puede hacerse tan grande como deseemos (mayor que cualquier M que elijamos) tomando x lo suficientemente cerca, pero a la derecha de c. Existen definiciones correspondientes para

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to c^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to \infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$$

(Véase los problemas 51 y 52).

EJEMPLO 5 Encuentre $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{(x-1)^2}$ y $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

SOLUCIÓN La gráfica de $f(x) = 1/(x-1)^2$ se muestra en la figura 7. Cuando $x \to 1^+$, el denominador permanece positivo pero tiende a cero, mientras que el numerador es 1 para toda x. Así, la razón $1/(x-1)^2$ puede hacerse arbitrariamente grande restringiendo la cercanía de x respecto de 1, pero a la derecha de él. De manera análoga, cuando $x \to 1-$, el denominador es positivo y puede hacerse arbitrariamente cercano a cero. Así, $1/(x-1)^2$ puede hacerse arbitrariamente grande restringiendo a que x esté cerca de 1, pero a la izquierda de él. Por lo tanto, concluimos que

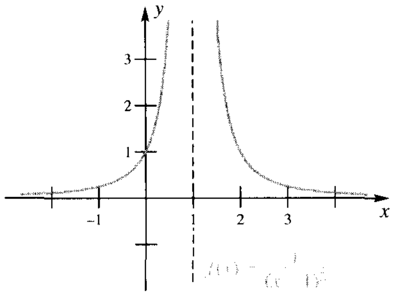


Figura 7

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

Ya que ambos límites son ∞, también podríamos escribir

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

■

EJEMPLO 6 Encuentre $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$.

SOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{(x-3)(x-2)}$$

Cuando $x \to 2^+$ vemos que $x + 1 \to 3$, $x - 3 \to -1$ y $x - 2 \to 0^+$; por lo tanto, el numerador se aproxima a 3, pero el denominador es negativo y tiende a cero. Concluimos que

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{(x-3)(x-2)} = -\infty$$

■

Relación con las asíntotas Las asíntotas se estudiaron brevemente en la sección 0.5, pero ahora podemos decir más acerca de ellas. La recta $x = c$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de $y = f(x)$, si cualquiera de las siguientes cuatro proposiciones es verdadera.

1. $\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty$
2. $\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$
3. $\lim_{x\to c^-} f(x) = \infty$
4. $\lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty$

Así, en la figura 6 la recta $x = 2$ es una asíntota vertical. Del mismo modo, en el ejemplo 6 las rectas $x = 2$ y $x = 3$, aunque no se muestran gráficamente, son asíntotas verticales.

De una forma similar, la recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de $y = f(x)$ si se cumple

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = b \quad \text{o} \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = b$$

La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal en las figuras 6 y 7.

EJEMPLO 7 Encuentre las asíntotas horizontales y verticales de la gráfica de $y = f(x)$, si

$$f(x) = \frac{2x}{x-1}$$

¿Existen los límites infinitos?

En las secciones anteriores pedimos que un límite sea igual a un número real. Por ejemplo, dijimos que $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2}$ no existe porque $1/(x-2)$ no se aproxima a un número real cuando x se aproxima a 2 por la derecha. Muchos matemáticos sostienen que este límite no existe, a pesar de que escribimos $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = \infty$; decir que el límite es ∞ es describir la forma particular en que el límite no existe. Aquí utilizaremos la frase "existe en el sentido infinito" para describir tales límites.

SOLUCIÓN Con frecuencia tenemos una asíntota vertical en un punto en donde el denominador es cero, y en este caso así es, ya que

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2x}{x-1}=\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^-}\frac{2x}{x-1}=-\infty$$

Por otra parte,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1-1/x}=2 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x-1}=2$$

y así $y = 2$ es una asíntota horizontal. La gráfica de $y = 2x/(x - 1)$ se muestra en la figura 8. ■

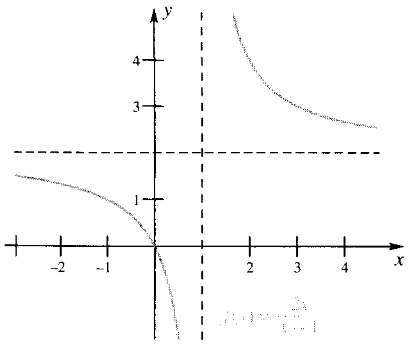


Figura 8

Revisión de conceptos

1. Decir que $x\to\infty$ significa que ____; decir que $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ significa que ____. Dé sus respuestas en lenguaje informal.

2. Decir que $\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty$ significa que ____; decir que $\lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty$ significa que ____. Dé sus respuestas en lenguaje informal.

3. Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = 6$, entonces la recta ____ es una asíntota ____ de la gráfica de $y = f(x)$.

4. Si $\lim_{x\to 6^+} f(x) = \infty$, entonces la recta ____ es una asíntota ____ de la gráfica de $y = f(x)$.

Conjunto de problemas 1.5

En los problemas del 1 al 42 determine los límites.

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-5}$

2. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{5-x^3}$

3. $\lim_{t\to-\infty}\frac{t^2}{7-t^2}$

4. $\lim_{t\to-\infty}\frac{t}{t-5}$

5. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x-5)(3-x)}$

6. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-8x+15}$

7. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x^3-100x^2}$

8. $\lim_{\theta\to-\infty}\frac{\pi\theta^5}{\theta^5-5\theta^4}$

9. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-x^2}{\pi x^3-5x^2}$

10. $\lim_{\theta\to\infty}\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\theta^2-5}$

11. $\lim_{x\to\infty}\frac{3\sqrt{x^3}+3x}{\sqrt{2x^3}}$

12. $\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{\pi x^3+3x}{\sqrt{2x^3}+7x}}$

13. $\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1+8x^2}{x^2+4}}$

14. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2+x+3}{(x-1)(x+1)}}$

15. $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}$

16. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$

17. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+1}$

18. $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}$

19. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}}$. *Sugerencia:* divida el numerador y el denominador entre x. Observe que, para $x > 0$, $\sqrt{x^2+3}/x = \sqrt{(x^2+3)/x^2}$.

20. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x+1}}{x+4}$

21. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+3}-\sqrt{2x^2-5}\right)$. *Sugerencia:* multiplique y divida por $\sqrt{2x^2+3}+\sqrt{2x^2-5}$.

22. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$

23. $\lim_{y\to-\infty}\frac{9y^3+1}{y^2-2y+2}$. *Sugerencia:* divida el numerador y el denominador entre y^2.

24. $\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n}$, donde $a_0\neq 0, b_0\neq 0$ y n es un número natural.

25. $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

26. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n^3+2n+1}}$

27. $\lim_{x\to 4^+}\frac{x}{x-4}$

28. $\lim_{t\to-3^+}\frac{t^2-9}{t+3}$

29. $\lim_{t\to 3}\frac{t^2}{9-t^2}$

30. $\lim_{x\to\sqrt[3]{5}^+}\frac{x^2}{5-x^3}$

31. $\lim_{x\to 5^-}\frac{x^2}{(x-5)(3-x)}$

32. $\lim_{\theta\to\pi^+}\frac{\theta^2}{\operatorname{sen}\theta}$

33. $\lim_{x\to 3^-}\frac{x^3}{x-3}$

34. $\lim_{\theta\to(\pi/2)^+}\frac{\pi\theta}{\cos\theta}$

35. $\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-x-6}{x-3}$

36. $\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+2x-8}{x^2-4}$

37. $\lim_{x\to 0^+}\frac{[\![x]\!]}{x}$

38. $\lim_{x\to 0^-}\frac{[\![x]\!]}{x}$

39. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$

40. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x}$

41. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x}$

42. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

GC *En los problemas del 43 al 48 encuentre las asíntotas horizontales y verticales para las gráficas de las funciones indicadas. Después dibuje sus gráficas.*

43. $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$

44. $f(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2}$

45. $F(x) = \dfrac{2x}{x-3}$

46. $F(x) = \dfrac{3}{9-x^2}$

47. $g(x) = \dfrac{14}{2x^2+7}$

48. $g(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+5}}$

49. La recta $y = ax + b$ se denomina **asíntota oblicua** a la gráfica de $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ o $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$. Encuentre la asíntota oblicua para

$$f(x) = \frac{2x^4 + 3x^3 - 2x - 4}{x^3 - 1}$$

Sugerencia: Comience por dividir el denominador entre el numerador.

50. Encuentre la asíntota oblicua para

$$f(x) = \frac{3x^3 + 4x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$$

51. Utilizando los símbolos M y δ, dé definiciones precisas de cada expresión.

(a) $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = -\infty$

(b) $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \infty$

52. Utilizando los símbolos M y N, dé definiciones precisas de cada expresión.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

53. Dé una demostración rigurosa de que si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ y $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = B$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) + g(x)] = A + B$$

54. Hemos dado el significado de $\lim\limits_{x\to A} f(x)$para $A = a, a-, a^+, -\infty, \infty$. Además, en cada caso, este límite puede ser L (finito), $-\infty, \infty$ o es posible que no exista. Construya una tabla que ilustre cada uno de los 20 casos posibles.

55. Encuentre cada uno de los siguientes límites o indique que no existe, incluso, en el sentido infinito.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{3/2} \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-1/2} \operatorname{sen} x$

(f) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{x}\right)$

(g) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

(h) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - \operatorname{sen} x\right]$

56. La Teoría Especial de la Relatividad de Einstein dice que la masa $m(v)$ de un objeto está relacionada con su velocidad v por medio de

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Aquí, m_0 es la masa en reposo y c es la velocidad de la luz. ¿Qué es $\lim\limits_{v\to c^-} m(v)$?

GC *Utilice una computadora o una calculadora gráfica para encontrar los límites en los problemas del 57 al 64. Empiece por la gráfica de la función en una ventana adecuada.*

57. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 + x + 1}{2x^2 - 1}$

58. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{2x^2 - 3x}{5x^2 + 1}}$

59. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{2x^2 + 3x} - \sqrt{2x^2 - 5}\right)$

60. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x + 1}{\sqrt{3x^2 + 1}}$

61. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{10}$

62. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x}$

63. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$

64. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x}$

CAS *Encuentre los límites unilaterales en los problemas del 65 al 71. Comience por graficar la función en una ventana adecuada. Su computadora puede indicar que alguno de estos límites no existen, pero si es así, usted debe ser capaz de interpretar la respuesta como ∞ o −∞.*

65. $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{\operatorname{sen}|x-3|}{x-3}$

66. $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{\operatorname{sen}|x-3|}{\tan(x-3)}$

67. $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{\cos(x-3)}{x-3}$

68. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\cos x}{x - \pi/2}$

69. $\lim\limits_{x\to 0^+} (1 + \sqrt{x})^{1/\sqrt{x}}$

70. $\lim\limits_{x\to 0^+} (1 + \sqrt{x})^{1/x}$

71. $\lim\limits_{x\to 0^+} (1 + \sqrt{x})^{x}$

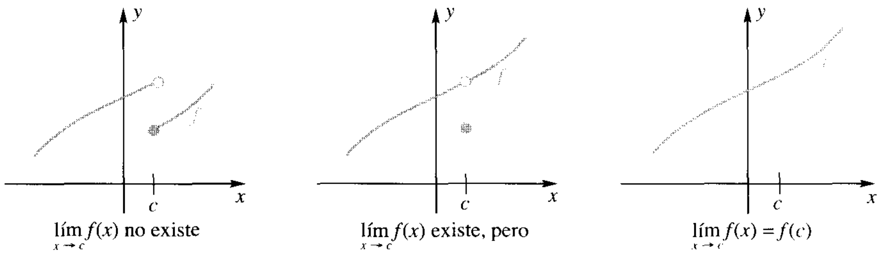
Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** x aumenta sin cota; $f(x)$ se aproxima a L cuando x aumenta sin cota. **2.** $f(x)$ aumenta sin cota cuando x se aproxima a c por la derecha; $f(x)$ disminuye sin cota cuando x tiende a c por la izquierda. **3.** $y = 6$; horizontal **4.** $x = 6$; vertical.

1.6
Continuidad de funciones

En matemáticas y ciencias utilizamos la palabra *continuo* para describir un proceso que sigue sin cambios abruptos. De hecho, nuestra experiencia nos lleva a suponer que esto es una característica esencial de muchos procesos naturales. Es esta noción, con respecto a funciones, la que ahora queremos precisar. En las tres gráficas que se muestran en la figura 1, sólo la tercera exhibe continuidad en c. En las primeras dos gráficas, $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ no existe, o bien existe pero no es igual a $f(c)$. Sólo en la tercera gráfica $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Una máquina discontinua

Un buen ejemplo de una máquina de discontinuidades es la máquina de servicio postal, que (en 2005, en Estados Unidos) cobraba \$0.37 por una carta de 1 onza, pero \$0.60 por una carta de un poco más de una onza.



$\lim_{x \to c} f(x)$ no existe

$\lim_{x \to c} f(x)$ existe, pero $\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$.

$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Figura 1

He aquí la definición formal.

Definición Continuidad en un punto

Sea f definida en un intervalo abierto que contiene a c. Decimos que f es **continua** en c si

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Con esta definición queremos decir que necesitamos tres cosas:

1. que $\lim_{x \to c} f(x)$ existe,
2. que $f(c)$ existe (es decir, c está en el dominio de f) y
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Si cualquiera de estas tres no se cumple, entonces f es **discontinua** en c. Así, las funciones representadas por la primera y segunda gráficas de la figura 1 son discontinuas en c. Sin embargo, no parecen ser discontinuas en otros puntos de sus dominios.

EJEMPLO 1 Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, $x \neq 2$. ¿Cómo debe definirse f en $x = 2$ para hacer que sea continua allí?

SOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2}(x + 2) = 4$$

Por lo tanto, definimos $f(2) = 4$. La gráfica de la función resultante se muestra en la figura 2. De hecho, vemos que $f(x) = x + 2$ para toda x. ■

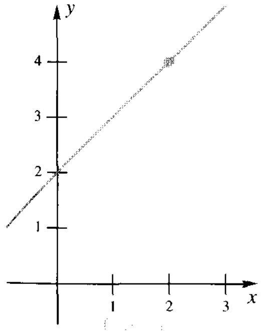


Figura 2

Un punto de discontinuidad c se denomina **removible**, si la función puede definirse o redefinirse en c, de modo que se haga continua la función. De otra forma, un punto de discontinuidad se denomina **no removible**. La función f del ejemplo 1 tiene una discontinuidad removible en 2, ya que podríamos definir $f(2) = 4$ y la función sería continua allí.

Continuidad de funciones conocidas La mayoría de las funciones con las que nos enfrentaremos en este texto son (1) continuas en todas partes o (2) continuas en todas partes, excepto en algunos puntos. En particular, el teorema 1.3B implica el siguiente resultado.

Teorema A **Continuidad de funciones polinomiales y racionales**

Una función polinomial es continua en todo número real c. Una función racional es continua en todo número real c en su dominio; es decir, en todas partes, excepto en donde su denominador es cero.

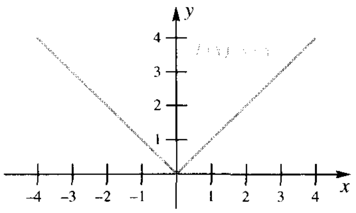


Figura 3

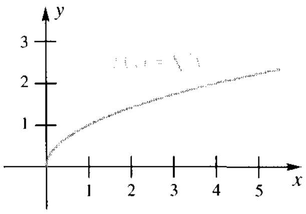


Figura 4

Recuerde la función valor absoluto $f(x) = |x|$; su gráfica se muestra en la figura 3. Para $x < 0, f(x) = -x$, es una función polinomial; para $x > 0, f(x) = x$, es otra función polinomial. Así, por el teorema A, $|x|$ es continua en todos los números diferentes de cero. Pero

$$\lim_{x\to 0} |x| = 0 = |0|$$

(véase el problema 27 de la sección 1.2). Por lo tanto, $|x|$ también es continua en cero por lo que es continua en todas partes.

Por medio del teorema principal sobre límites (teorema 1.3A)

$$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} x} = \sqrt[n]{c}$$

siempre que $c > 0$, cuando n es par. Esto significa que $f(x) = \sqrt[n]{x}$ es continua en cada punto donde tiene sentido hablar acerca de continuidad. En particular, $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en cada número real $c > 0$ (véase la figura 4). Resumimos.

Teorema B Continuidad de las funciones valor absoluto y raíz n-ésima

La función valor absoluto es continua en todo número real c. Si n es impar, la función raíz n-ésima es continua en todo número real c; si n es par, la función raíz n-ésima es continua en todo número real positivo.

Continuidad en operaciones con funciones ¿Las operaciones ordinarias entre funciones preservan la continuidad? Sí, de acuerdo con el teorema siguiente. En éste, f y g son funciones, k es una constante y n es un entero positivo.

Teorema C Continuidad en operaciones con funciones

Si f y g son continuas en c, entonces también lo son $kf, f + g, f - g, f \cdot g, f/g$ (con tal que $g(c) \neq 0$), f^n, $\sqrt[n]{f}$ (siempre que $f(c) > 0$, si n es par).

Demostración Todos estos resultados son consecuencias fáciles de los correspondientes hechos para límites del teorema 1.3A. Por ejemplo, ese teorema, combinado con el hecho de que f y g son continuas en c, produce

$$\lim_{x\to c} f(x)g(x) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) = f(c)g(c)$$

Esto es precisamente lo que significa decir que $f \cdot g$ es continua en c. ■

EJEMPLO 2 ¿En qué números $F(x) = (3|x| - x^2)/\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)$ es continua?

SOLUCIÓN No necesitamos considerar números no positivos, ya que F no está definida en tales números. Para cualquier número positivo, todas las funciones $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $|x|$, y x^2 son continuas (teoremas A y B). Se deduce, con base en el teorema C, que $3|x|$, $3|x| - x^2$, $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$, y por último,

$$\frac{(3|x| - x^2)}{\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)}$$

son continuas en cada número positivo. ■

La continuidad de funciones trigonométricas se deduce del teorema 1.4A.

Teorema D Continuidad de funciones trigonométricas

Las funciones seno y coseno son continuas en todo número real c. Las funciones tan x, cot x, sec x y csc x son continuas en todo número real c en sus dominios.

Demostración El teorema 1.4A dice que para todo número real c en el dominio de la función $\lim_{x \to c} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} c$, $\lim_{x \to c} \cos x = \cos c$, y así sucesivamente para las seis funciones trigonométricas. Éstas son exactamente las condiciones requeridas para que estas funciones sean continuas en cada número real en sus respectivos dominios. ■

EJEMPLO 3 Determine todos los puntos de discontinuidad de $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x(1-x)}$, $x \neq 0, 1$. Clasifique cada punto de discontinuidad como removible o no removible.

SOLUCIÓN Mediante el teorema D, el numerador es continuo en todo número real. El denominador también es continuo en todo número real, pero cuando $x = 0$ o $x = 1$, el denominador es 0. Por lo tanto, con base en el teorema C, f es continua en todo número real, excepto $x = 0$ y $x = 1$. Como

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x(1-x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{(1-x)} = (1)(1) = 1$$

podríamos definir $f(0) = 1$ y, allí, la función sería continua. Por lo que $x = 0$ es una discontinuidad removible. Además, como

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x(1-x)} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x(1-x)} = \infty$$

no existe forma de definir $f(1)$ para hacer que f sea continua en $x = 1$. Por lo tanto, $x = 1$ es una discontinuidad no removible. Una gráfica de $y = f(x)$ se muestra en la figura 5. ■

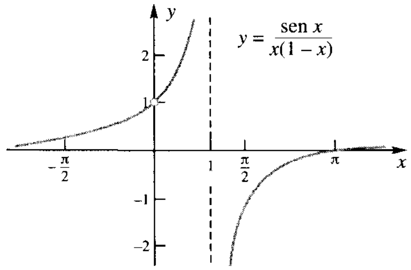


Figura 5

Existe otra operación con funciones, la composición, que será muy importante en el trabajo posterior. También preserva la continuidad.

Teorema E **Teorema del límite de composición de funciones**

Si $\lim_{x \to c} g(x) = L$ y si f es continua en L, entonces

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to c} g(x)\right) = f(L)$$

En particular, si g es continua en c y f es continua en $g(c)$, entonces la composición $f \circ g$ es continua en c.

Demostración del teorema E (opcional)

Demostración Sea $\varepsilon > 0$ dada. Como f es continua en L existe una $d_1 > 0$ correspondiente, tal que

$$|t - L| < \delta_1 \Rightarrow |f(t) - f(L)| < \varepsilon$$

y así (véase la figura 6)

$$|g(x) - L| < \delta_1 \Rightarrow |f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon$$

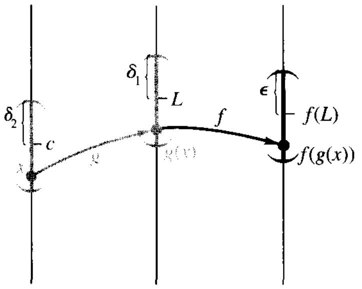


Figura 6

Pero ya que $\lim_{x \to c} g(x) = L$, para una $\delta_1 > 0$ dada existe una correspondiente $\delta_2 > 0$, tal que

$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L| < \delta_1$$

Cuando reunimos estos dos hechos, tenemos

$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon$$

Esto demuestra que

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(L)$$

La segunda proposición en el teorema E se deduce de la observación de que si g es continua en c entonces $L = g(c)$. ■

EJEMPLO 4 Demuestre que $h(x) = |x^2 - 3x + 6|$ es continua en todo número real.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = |x|$ y $g(x) = x^2 - 3x + 6$. Ambas son continuas en cada número real y, por lo tanto, su composición

$$h(x) = f(g(x)) = |x^2 - 3x + 6|$$

también lo es. ■

EJEMPLO 5 Demuestre que

$$h(x) = \operatorname{sen} \frac{x^4 - 3x + 1}{x^2 - x - 6}$$

es continua excepto en 3 y −2.

SOLUCIÓN $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$. Así, la función racional

$$g(x) = \frac{x^4 - 3x + 1}{x^2 - x - 6}$$

es continua excepto en 3 y −2 (teorema A). Del teorema D sabemos que la función seno es continua en todo número real. Así, con base en el teorema E concluimos que, como $h(x) = \operatorname{sen}(g(x))$, h también es continua excepto en 3 y −2. ■

Continuidad en un intervalo Hasta el momento hemos estudiado continuidad en un punto. Ahora, deseamos analizar la continuidad en un intervalo. La continuidad en un intervalo tiene que significar continuidad en cada punto de ese intervalo. Esto es exactamente lo que significa para un intervalo *abierto*.

Cuando consideramos un intervalo cerrado $[a, b]$, nos enfrentamos a un problema. Podría ser que f incluso no esté definida a la izquierda de a (por ejemplo, esto ocurre para $f(x) = \sqrt{x}$ en $a = 0$), así que hablando estrictamente, $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe. Elegimos darle la vuelta a este problema diciendo que f es continua en $[a, b]$ si es continua en cada punto de (a, b) y si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$. Resumimos esto en una definición formal.

Definición Continuidad en un intervalo

La función f es **continua por la derecha** en a si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ y **continua por la izquierda** en b si $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Decimos que f es **continua en un intervalo abierto** si es continua en cada punto de ese intervalo. Es **continua en el intervalo cerrado** $[a, b]$ si es continua en (a, b), continua por la derecha en a y continua por la izquierda en b.

Por ejemplo, es correcto decir que $f(x) = 1/x$ es continua en $(0, 1)$ y que $g(x) = \sqrt{x}$ es continua en $[0, 1]$.

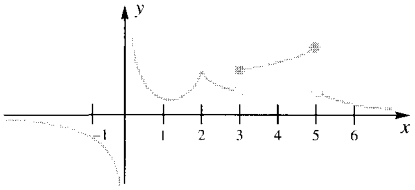


Figura 7

EJEMPLO 6 Mediante la definición anterior describa las propiedades de la continuidad de la función cuya gráfica está dibujada en la figura 7.

SOLUCIÓN La función parece que es continua en los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 3)$ y $(5, \infty)$ y también en el intervalo cerrado $[3, 5]$ ■

EJEMPLO 7 ¿Cuál es el intervalo más grande sobre el cual la función definida por $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ es continua?

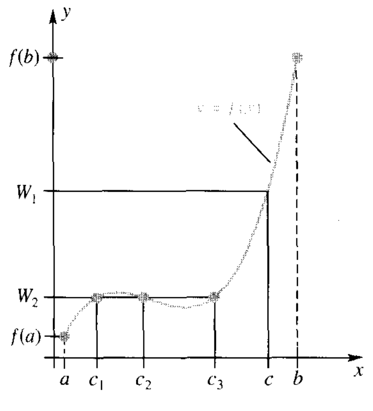
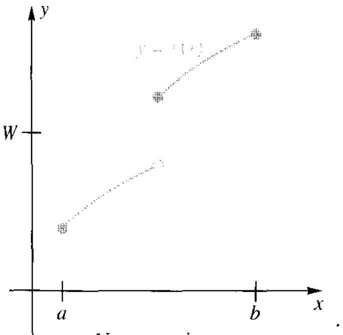
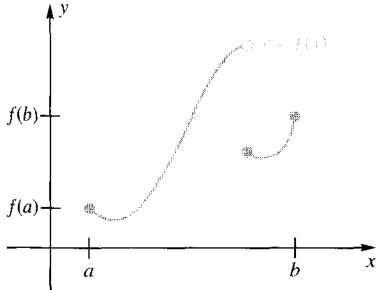


Figura 8



No es continua;
la propiedad del valor
intermedio no se cumple.

Figura 9



No es continua, aunque se cumple
la propiedad del valor intermedio

Figura 10

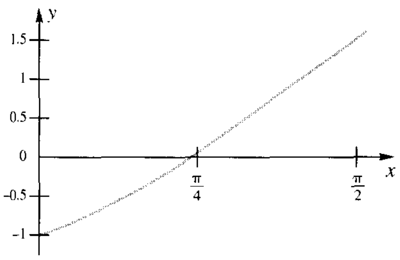


Figura 11

SOLUCIÓN El dominio de g es el intervalo $[-2, 2]$. Si c pertenece al intervalo abierto $(-2, 2)$, entonces, por el teorema E, g es continua en c; de aquí que g es continua en $(-2, 2)$. Los límites laterales son

$$\lim_{x\to -2^+}\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-\left(\lim_{x\to -2^+}x\right)^2}\sqrt{4-4} = 0 = g(-2)$$

y

$$\lim_{x\to 2^-}\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-\left(\lim_{x\to 2^-}x\right)^2} = \sqrt{4-4} = 0 = g(2)$$

Esto implica que g es continua por la derecha en -2 y continua por la izquierda en 2. Así, g es continua en su dominio, el intervalo cerrado $[-2, 2]$. ■

De manera intuitiva, que f sea continua en $[a, b]$ significa que la gráfica de f en $[a, b]$ no debe tener saltos, de modo que debemos ser capaces de "dibujar" la gráfica de f desde el punto $(a, f(a))$ al punto $(b, f(b))$ sin levantar nuestro lápiz del papel. Así, la función f debe tomar todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$. Esta propiedad se establece de manera más precisa en el teorema F.

Teorema F **Teorema del valor intermedio**

Sea f una función definida en $[a, b]$ y sea W un número entre $f(a)$ y $f(b)$. Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe al menos un número c entre a y b, tal que $f(c) = W$.

La figura 8 muestra la gráfica de una función $f(x)$ que es continua en $[a, b]$. El teorema del valor intermedio dice que para toda W en $(f(a), f(b))$ debe existir una c en $[a, b]$, tal que $f(c) = W$. En otras palabras, f toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$. La continuidad es necesaria para este teorema, pues de otra forma es posible encontrar una función f y un número W entre $f(a)$ y $f(b)$, tal que no exista una c en $[a, b]$ que satisfaga $f(c) = W$. La figura 9 muestra un ejemplo de tal función.

Parece claro que la continuidad es suficiente, aunque una demostración formal de este resultado es difícil. Dejamos la demostración para obras más avanzadas.

El inverso de este teorema, el cual no es cierto en general, dice que si f toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces f es continua. Las figuras 8 y 10 muestran funciones que toman todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$, pero la función en la figura 10 no es continua en $[a, b]$. Sólo porque una función tenga la propiedad del valor intermedio no significa que deba ser continua.

El teorema del valor intermedio puede usarse para decirnos algo acerca de las soluciones de ecuaciones, como lo muestra el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 8 Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que la ecuación $x - \cos x = 0$ tiene una solución entre $x = 0$ y $x = \pi/2$.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = x - \cos x$, y sea $W = 0$. Entonces $f(0) = 0 - \cos 0 = -1$ y $f(\pi/2) = \pi/2 - \cos \pi/2 = \pi/2$. Como f es continua en $[0, \pi/2]$ y puesto que $W = 0$ está entre $f(0)$ y $f(\pi/2)$, el teorema del valor intermedio implica la existencia de una c en el intervalo $(0, \pi/2)$ con la propiedad de que $f(c) = 0$. Tal c es una solución para la ecuación $x - \cos x = 0$. La figura 11 sugiere que existe exactamente una de tales c.

Podemos ir un paso más adelante. El punto medio del intervalo $[0, \pi/2]$ es el punto $x = \pi/4$. Cuando evaluamos $f(\pi/4)$ obtenemos

$$f(\pi/4) = \frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.0782914$$

que es mayor a cero. Así, $f(0) < 0$ y $f(\pi/4) > 0$, de tal manera que otra aplicación del teorema del valor intermedio nos dice que existe una c entre 0 y $\pi/4$, tal que $f(c) = 0$. Hemos reducido el intervalo que contiene a la c deseada de $[0, \pi/2]$ a $[0, \pi/4]$. Nada nos impide seleccionar el punto medio de $[0, \pi/4]$ y evaluar f en ese punto, y por ello reducir aún más el intervalo que contiene a c. Este proceso puede continuar de manera indefinida hasta que encontremos que c está en un intervalo suficientemente pequeño. Este método para obtener una solución se denomina *método de bisección*, y los estudiaremos en la sección 3.7. ■

El teorema del valor intermedio también puede conducir a algunos resultados sorprendentes.

EJEMPLO 9 Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que en un anillo circular siempre existen dos puntos opuestos con la misma temperatura.

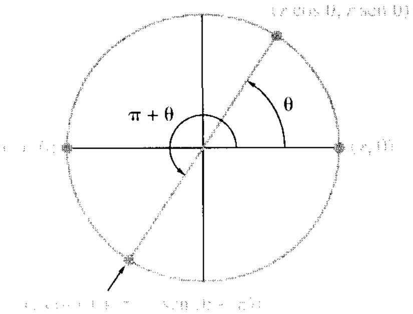


Figura 12

SOLUCIÓN Elija coordenadas para este problema de modo que el centro del anillo sea el origen, y sea r el radio del anillo. (Véase la figura 12). Defina $T(x, y)$ como la temperatura en el punto (x, y). Considere un diámetro del círculo que forma un ángulo θ con el eje x y defina $f(\theta)$ como la diferencia de las temperaturas entre los puntos que forman ángulos de θ y $\theta + \pi$, esto es,

$$f(\theta) = T(r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta) - T(r\cos(\theta + \pi), r \operatorname{sen}(\theta + \pi))$$

Con esta definición

$$f(0) = T(r, 0) - T(-r, 0)$$
$$f(\pi) = T(-r, 0) - T(r, 0) = -\left[T(r, 0) - T(-r, 0)\right] = -f(0)$$

Así, $f(0)$ y $f(\pi)$ son cero, o una es positiva y la otra es negativa. Si ambas son cero, entonces hemos encontrado los dos puntos requeridos. De otra forma, podemos aplicar el teorema del valor intermedio. Suponiendo que la temperatura varía de manera continua, concluimos que existe c entre 0 y π, tal que $f(c) = 0$. Así, para los dos puntos con ángulos c y $c + \pi$, las temperaturas son iguales. ■

Revisión de conceptos

1. Una función f es continua en c si _______ $= f(c)$.

2. La función $f(x) = [\![x]\!]$ es discontinua en _______.

3. Se dice que una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, si es continua en cada punto de (a, b) y si _______ y _______.

4. El teorema del valor intermedio dice que si una función f es continua en $[a, b]$ y W es un número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un número c entre _______ y _______ tal que _______.

Conjunto de problemas 1.6

En los problemas del 1 al 15 establezca si la función indicada es continua en 3. Si no es continua, diga por qué.

1. $f(x) = (x - 3)(x - 4)$

2. $g(x) = x^2 - 9$

3. $h(x) = \dfrac{3}{x - 3}$

4. $g(t) = \sqrt{t - 4}$

5. $h(t) = \dfrac{|t - 3|}{t - 3}$

6. $h(t) = \dfrac{|\sqrt{(t - 3)^4}|}{t - 3}$

7. $f(t) = |t|$

8. $g(t) = |t - 2|$

9. $h(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

10. $f(x) = \dfrac{21 - 7x}{x - 3}$

11. $r(t) = \begin{cases} \dfrac{t^3 - 27}{t - 3} & \text{si } t \neq 3 \\ 27 & \text{si } t = 3 \end{cases}$

12. $r(t) = \begin{cases} \dfrac{t^3 - 27}{t - 3} & \text{si } t \neq 3 \\ 23 & \text{si } t = 3 \end{cases}$

13. $f(t) = \begin{cases} t - 3 & \text{si } t \leq 3 \\ 3 - t & \text{si } t > 3 \end{cases}$

14. $f(t) = \begin{cases} t^2 - 9 & \text{si } t \leq 3 \\ (3 - t)^2 & \text{si } t > 3 \end{cases}$

15. $f(x) = \begin{cases} -3x + 7 & \text{si } x \leq 3 \\ -2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

16. Con base en la gráfica de g (véase la figura 13), indique los valores en donde g es discontinua. Para cada uno de estos valores establezca si g es continua por la derecha, por la izquierda o ninguna.

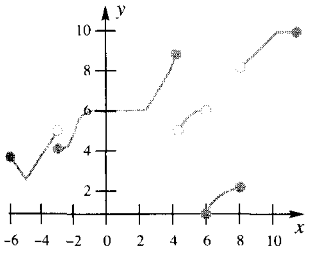


Figura 13

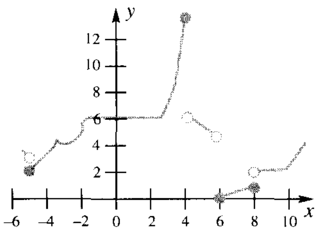


Figura 14

17. A partir de la gráfica de h dada en la figura 14, indique los intervalos en los que h es continua.

En los problemas del 18 al 23 la función dada no está definida en cierto punto. ¿Cómo debe definirse para hacerla continua en ese punto? (Véase el ejemplo 1).

18. $f(x) = \dfrac{x^2 - 49}{x - 7}$

19. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 18}{3 - x}$

20. $g(\theta) = \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\theta}$

21. $H(t) = \dfrac{\sqrt{t} - 1}{t - 1}$

22. $\phi(x) = \dfrac{x^4 + 2x^2 - 3}{x + 1}$

23. $F(x) = \operatorname{sen} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

En los problemas del 24 al 35, ¿en qué puntos, si los hay, las funciones son discontinuas?

24. $f(x) = \dfrac{3x + 7}{(x - 30)(x - \pi)}$

25. $f(x) = \dfrac{33 - x^2}{x\pi + 3x - 3\pi - x^2}$

26. $h(\theta) = |\operatorname{sen} \theta + \cos \theta|$

27. $r(\theta) = \tan \theta$

28. $f(u) = \dfrac{2u + 7}{\sqrt{u + 5}}$

29. $g(u) = \dfrac{u^2 + |u - 1|}{\sqrt[3]{u + 1}}$

30. $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 + x^2}}$

31. $G(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

32. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

33. $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ -x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

34. $f(t) = [\![t]\!]$

35. $g(t) = [\![t + \tfrac{1}{2}]\!]$

36. Dibuje la gráfica de una función f que satisfaga todas las condiciones siguientes.

(a) Su dominio es $[-2, 2]$.

(b) $f(-2) = f(-1) = f(1) = f(2) = 1$.

(c) Es discontinua en -1 y 1.

(d) Es continua por la derecha en -1 y continua por la izquierda en 1.

37. Haga el bosquejo de la gráfica de una función que tenga dominio $[0, 2]$ y sea continua en $[0, 2)$, pero no en $[0, 2]$.

38. Bosqueje la gráfica de una función que tenga dominio $[0, 6]$ y sea continua en $[0, 2]$ y en $(2, 6]$, pero que no sea continua en $[0, 6]$.

39. Haga el bosquejo de la gráfica de una función que tenga dominio $[0, 6]$ y sea continua en $(0, 6)$ pero no en $[0, 6]$.

40. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es racional} \\ -x & \text{si } x \text{ si es irracional} \end{cases}$$

Dibuje la gráfica de esta función lo mejor que pueda y decida en dónde es continua.

En los problemas del 41 al 48 determine si la función es continua en el punto dado c. Si la función no es continua, determine si la discontinuidad es removible o no removible.

41. $f(x) = \operatorname{sen} x;\ c = 0$

42. $f(x) = \dfrac{x^2 - 100}{x - 10};\ c = 10$

43. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x};\ c = 0$

44. $f(x) = \dfrac{\cos x}{x};\ c = 0$

45. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

46. $F(x) = x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x};\ c = 0$

47. $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x};\ c = 0$

48. $f(x) = \dfrac{4 - x}{2 - \sqrt{x}};\ c = 4$

49. Una compañía de teléfonos celulares cobra \$0.12 por hacer una llamada más \$0.08 por minuto o fracción (por ejemplo, una llamada telefónica que dure 2 minutos y 5 segundos cuesta \$0.12 + 3 × \$0.08). Haga el bosquejo de una gráfica del costo de una llamada como función de la duración t de la llamada. Analice la continuidad de esta función.

50. Una compañía que renta automóviles cobra \$20 por día, con 200 millas incluidas. Por cada 100 millas adicionales, o cualquier fracción de éstas, la compañía cobra \$18. Haga el bosquejo de una gráfica del costo por la renta de un automóvil durante un día como función de las millas recorridas. Analice la continuidad de esta función.

51. Una compañía de taxis cobra \$2.50 durante el primer cuarto de milla y \$0.20 por cada $\frac{1}{8}$ de milla adicional. Haga un bosquejo del costo de un viaje en taxi como función del número de millas recorridas. Analice la continuidad de esta función.

52. Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que $x^3 + 3x - 2 = 0$ tiene una solución real entre 0 y 1.

53. Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que $(\cos t)t^3 + 6 \operatorname{sen}^5 t - 3 = 0$ tiene una solución real entre 0 y 2π.

GC **54.** Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$ tiene al menos una solución real en el intervalo $[0, 5]$. Haga un bosquejo de la gráfica de $y = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$ en $[0, 5]$. En realidad, ¿cuántas soluciones tiene esta ecuación?

GC **55.** Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que $\sqrt{x} - \cos x = 0$ tiene una solución entre 0 y $\pi/2$. Haga un acercamiento de la gráfica de $y = \sqrt{x} - \cos x$ para determinar un intervalo que tenga longitud 0.1 y que contenga esta solución.

56. Demuestre que la ecuación $x^5 + 4x^3 - 7x + 14 = 0$ tiene al menos una solución real.

57. Pruebe que f es continua en c si y sólo si $\lim_{t \to 0} f(c + t) = f(c)$.

58. Demuestre que si f es continua en c y $f(c) > 0$, existe un intervalo $(c - \delta, c + \delta)$, tal que $f(x) > 0$ en este intervalo.

59. Demuestre que si f es continua en $[0, 1]$ y ahí satisface $0 \le f(x) \le 1$, entonces f tiene un *punto fijo*; esto es, existe un número c en $[0, 1]$, tal que $f(c) = c$. *Sugerencia:* aplique el teorema del valor intermedio a $g(x) = x - f(x)$.

60. Encuentre los valores de a y b de modo que la siguiente función sea continua en todas partes.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 3x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

61. Una liga estirada cubre el intervalo $[0, 1]$. Los extremos se sueltan y la liga se contrae de modo que cubre el intervalo $[a, b]$ con $a \ge 0$ y $b \le 1$. Demuestre que esto resulta en un punto de la liga (en realidad exactamente un punto) que estará en donde estaba originalmente. Véase el problema 59.

62. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$. Entonces $f(-2) = -\dfrac{1}{3}$ y $f(2) = 1$. ¿El teorema del valor intermedio implica la existencia de un número c entre -2 y 2, tal que $f(c) = 0$? Explique.

63. Iniciando a las 4 a. m., un excursionista escala lentamente hacia la cima de una montaña, a donde llega al mediodía. Al día siguiente, regresa a por la misma ruta, iniciando a las 5 a. m.; a las 11 de la mañana llega al pie de la montaña. Demuestre que en algún punto a lo largo de la ruta su reloj mostraba la misma hora en ambos días.

64. Sea D una región acotada, pero arbitraria en el primer cuadrante. Dado un ángulo θ, $0 \le \theta \le \pi/2$, D puede ser circunscrita por medio de un rectángulo cuya base forme un ángulo θ con el eje x, como se muestra en la figura 15. Demuestre que para algún ángulo este rectángulo es un cuadrado. (Esto significa que *cualquier* región acotada puede ser encerrada dentro de un *cuadrado*).

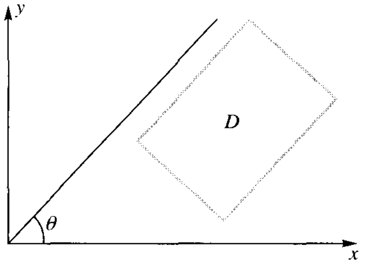


Figura 15

65. La fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre un objeto que tiene masa m y que se encuentra a una distancia r del centro de la Tierra es

$$g(r) = \begin{cases} \dfrac{GMmr}{R^3}, & \text{si } r < R \\ \dfrac{GMm}{r^2}, & \text{si } r \ge R \end{cases}$$

Aquí, G es la constante gravitacional, M es la masa de la Tierra y R es el radio de la Tierra. ¿Es g una función continua de r?

66. Suponga que f es continua en $[a, b]$ y nunca es cero allí. ¿Es posible que f cambie de signo en $[a, b]$? Explique.

67. Sea $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para toda x y y, y suponga que f es continua en $x = 0$.

(a) Demuestre que f es continua en todas partes.

(b) Demuestre que existe una constante m, tal que $f(t) = mt$ para toda t (véase el problema 43 de la sección 0.5).

68. Pruebe que si $f(x)$ es una función continua en un intervalo, entonces también lo es la función $|f(x)| = \sqrt{(f(x))^2}$.

69. Demuestre que si $g(x) = |f(x)|$ es continua, no necesariamente es cierto que $f(x)$ sea continua.

70. Sea $f(x) = 0$, si x es irracional, y sea $f(x) = 1/q$, si x es el número racional p/q en su mínima expresión ($q > 0$).

(a) Dibuje, lo mejor que pueda, la gráfica de f en $(0, 1)$.

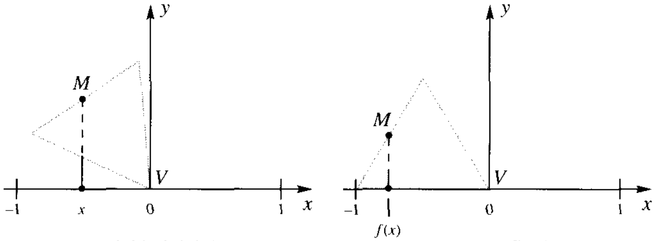
(b) Demuestre que f es continua en cada número irracional en $(0, 1)$, pero es discontinua en cada número racional en $(0, 1)$.

71. Un bloque delgado en forma de triángulo equilátero con lado de longitud 1 unidad tiene su cara en la vertical del plano xy con un vértice en el origen. Bajo la influencia de la gravedad, girará alrededor de V hasta que un lado golpee el piso, en el eje x (véase la figura 16). Denótese con x la abscisa inicial del punto medio M, del lado opuesto a V, y sea $f(x)$ la abscisa final de este punto. Suponga que el bloque queda en equilibrio cuando M está directamente arriba de V.

(a) Determine el dominio y rango de f.

(b) En el dominio de f, ¿en dónde es discontinua?

(c) Identifique cualesquiera puntos fijos de f (véase el problema 59).



Posición inicial

Posición final

Figura 16

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $\lim_{x \to c} f(x)$ **2.** Todos los enteros **3.** $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$; $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ **4.** a; b; $f(c) = W$

1.7 Repaso del capítulo

Examen de conceptos

A cada una de las siguientes aseveraciones responda con verdadero o falso. Justifique sus respuestas.

1. Si $f(c) = L$, entonces $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

2. Si $\lim_{x \to c} f(x) = L$, entonces $f(c) = L$.

3. Si $\lim_{x \to c} f(x)$ existe, entonces $f(c)$ existe.

4. Si $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, entonces para toda $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$, tal que $0 < |x| < \delta$ implica $|f(x)| < \varepsilon$.

5. Si $f(c)$ no está definida, entonces $\lim_{x \to c} f(x)$ no existe.

6. Las coordenadas del agujero en la gráfica de $y = \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$ son $(5, 10)$.

7. Si $\pi(x)$ es un polinomio, entonces $\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$.

8. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ no existe.

9. Para todo número real c, $\lim_{x \to c} \tan x = \tan c$.

10. $\tan x$ es continua en todo punto de su dominio.

11. La función $f(x) = 2\,\text{sen}^2 x - \cos x$ es continua en todos los números reales.

12. Si f es continua en c, entonces $f(c)$ existe.

13. Si f es continua en el intervalo $(1, 3)$, entonces f es continua en 2.

14. Si f es continua en $[0, 4]$, entonces $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe.

15. Si f es una función continua tal que $A \le f(x) \le B$ para toda x, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existe y satisface $A \le \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \le B$.

16. Si f es continua en (a, b), entonces $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$ para toda c en (a, b).

17. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\text{sen}\, x}{x} = 1$

18. Si la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal de la gráfica de $y = f(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$.

19. La gráfica de $y = \tan x$ tiene muchas asíntotas horizontales.

20. La gráfica de $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ tiene dos asíntotas verticales.

21. $\lim\limits_{t\to 1^+} \dfrac{2t}{t - 1} = \infty$.

22. Si $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \lim\limits_{x\to c^+} f(x)$, entonces f es continua en $x = c$.

23. Si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f\left(\lim\limits_{x\to c} x\right)$, entonces f es continua en $x = c$.

24. La función $f(x) = [\![x/2]\!]$ es continua en $x = 2.3$.

25. Si $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) > 0$, entonces $f(x) < 1.001 f(2)$ para toda x en algún intervalo que contenga a 2.

26. Si $\lim\limits_{x\to c} [f(x) + g(x)]$ existe, entonces existen $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to c} g(x)$.

27. Si $0 \le f(x) \le 3x^2 + 2x^4$ para toda x, entonces $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

28. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = M$, entonces $L = M$.

29. Si $f(x) \ne g(x)$ para toda x, entonces $\lim\limits_{x\to c} f(x) \ne \lim\limits_{x\to c} g(x)$.

30. Si $f(x) < 10$ para toda x y $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existe, entonces $\lim\limits_{x\to 2} f(x) < 10$.

31. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, entonces $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |b|$.

32. Si f es continua y positiva en $[a, b]$, entonces $1/f$ debe tomar todos los valores entre $1/f(a)$ y $1/f(b)$.

Problemas de examen

En los problemas del 1 al 22 encuentre los límites indicados o establezca que no existen.

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x - 2}{x + 2}$

2. $\lim\limits_{u\to 1} \dfrac{u^2 - 1}{u + 1}$

3. $\lim\limits_{u\to 1} \dfrac{u^2 - 1}{u - 1}$

4. $\lim\limits_{u\to 1} \dfrac{u + 1}{u^2 - 1}$

5. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1 - 2/x}{x^2 - 4}$

6. $\lim\limits_{z\to 2} \dfrac{z^2 - 4}{z^2 + z - 6}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{\text{sen}\, 2x}$

8. $\lim\limits_{y\to 1} \dfrac{y^3 - 1}{y^2 - 1}$

9. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{x}$

11. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x}$

12. $\lim\limits_{x\to 1/2^+} [\![4x]\!]$

13. $\lim\limits_{t\to 2^-} ([\![t]\!] - t)$

14. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, 5x}{3x}$

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{3x}$

17. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - 1}{x + 2}$

18. $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\text{sen}\, t}{t}$

19. $\lim\limits_{t\to 2} \dfrac{t + 2}{(t - 2)^2}$

20. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos x}{x}$

21. $\lim\limits_{x\to \pi/4^-} \tan 2x$

22. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1 + \text{sen}\, x}{x}$

23. Por medio de argumentos ε-δ demuestre que $\lim\limits_{x\to 3} (2x + 1) = 7$.

24. Sea $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 - x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

Determine cada valor.

(a) $f(1)$

(b) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

(d) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

25. Con respecto a f del problema 24. (a) ¿Cuáles son los valores de x en los cuales f es discontinua? (b) ¿Cómo se debe definir f en $x = -1$ para hacer que sea continua allí?

26. Proporcione la definición ε–δ en cada caso.

(a) $\lim\limits_{u\to a} g(u) = M$

(b) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$

27. Si $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 3$ y $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = -2$ y si g es continua en $x = 3$, encuentre cada valor.

(a) $\lim\limits_{x\to 3} [2f(x) - 4g(x)]$

(b) $\lim\limits_{x\to 3} g(x) \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

(c) $g(3)$

(d) $\lim\limits_{x\to 3} g(f(x))$

(e) $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{f^2(x) - 8g(x)}$

(f) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{|g(x) - g(3)|}{f(x)}$

28. Dibuje la gráfica de una función f que satisfaga todas las condiciones siguientes.

(a) Su dominio es $[0, 6]$.

(b) $f(0) = f(2) = f(4) = f(6) = 2$.

(c) f es continua, excepto en $x = 2$.

(d) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 3$.

29. Sea $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \le 0 \\ ax + b & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

Determine a y b de modo que f sea continua en todas partes.

30. Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que la ecuación $x^5 - 4x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene al menos una solución entre $x = 2$ y $x = 3$.

En los problemas del 31 al 36 determina las ecuaciones de todas las asíntotas horizontales y verticales para la función dada.

31. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

32. $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

33. $F(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

34. $G(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

35. $h(x) = \tan 2x$

36. $H(x) = \dfrac{\text{sen}\, x}{x^2}$

PROBLEMAS DE REPASO E INTRODUCCIÓN

1. Sea $f(x) = x^2$. Determine y simplifique cada uno de lo siguiente.

(a) $f(2)$

(b) $f(2.1)$

(c) $f(2.1) - f(2)$

(d) $\dfrac{f(2.1) - f(2)}{2.1 - 2}$

(e) $f(a + h)$

(f) $f(a + h) - f(a)$

(g) $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{(a + h) - a}$

(h) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a + h) - f(a)}{(a + h) - a}$

2. Repita las partes desde (a) hasta (h) del problema 1 para la función $f(x) = 1/x$.

3. Repita las partes desde (a) hasta (h) del problema 1 para la función $f(x) = \sqrt{x}$.

4. Repita las partes desde (a) hasta (h) del problema 1 para la función $f(x) = x^3 + 1$.

5. Escriba los primeros dos términos en el desarrollo de los binomios siguientes:

(a) $(a + b)^3$

(b) $(a + b)^4$

(c) $(a + b)^5$

6. Con base en sus resultados del problema 5 haga una conjetura acerca de los primeros dos términos en el desarrollo de $(a + b)^n$ para una n arbitraria.

7. Utilice una identidad trigonométrica para escribir $\operatorname{sen}(x + h)$ en términos de $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen} h$, $\cos x$ y $\cos h$.

8. Utilice una identidad trigonométrica para escribir $\cos(x + h)$ en términos de $\cos x$, $\cos h$, $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{sen} h$.

9. Una rueda con centro en el origen y radio de 10 centímetros gira en sentido contrario a las manecillas del reloj con una rapidez de 4 revoluciones por segundo. Un punto P en el borde de la rueda se encuentra en la posición $(10, 0)$ en el instante $t = 0$.

(a) ¿Cuáles son las coordenadas de P en los instantes $t = 1, 2, 3$?

(b) ¿En qué primer instante el punto P regresará a la posición inicial $(10, 0)$?

10. Suponga que una pompa de jabón conserva su forma esférica cuando se expande. En el instante $t = 0$ la burbuja de jabón tiene radio de 2 centímetros. En el instante $t = 1$, el radio aumentó a 2.5 centímetros. En este intervalo de 1 segundo, ¿cuánto cambió el volumen?

11. Un aeroplano despega de un aeropuerto al mediodía y vuela con rumbo norte a 300 millas por hora. Otro avión parte del mismo aeropuerto una hora después y vuela con rumbo este a 400 millas por hora.

(a) ¿Cuáles son las posiciones de los aeroplanos a las 2:00 P. M.?

(b) ¿Cuál es la distancia que separa a los dos aeroplanos a las 2:00 P. M.?

(c) ¿Cuál es la distancia entre los aeroplanos a las 2:15 P. M.?

CAPÍTULO 2 La derivada

2.1 Dos problemas con el mismo tema
2.2 La derivada
2.3 Reglas para encontrar derivadas
2.4 Derivadas de funciones trigonométricas
2.5 La regla de la cadena
2.6 Derivadas de orden superior
2.7 Derivación implícita
2.8 Tasas de cambio relacionadas
2.9 Diferenciales y aproximaciones
2.10 Repaso del capítulo

2.1

Dos problemas con el mismo tema

Nuestro primer problema es muy antiguo; se remonta a la época del gran científico griego Arquímedes (287-212 A. C.). Nos referimos al problema de la *pendiente de la recta tangente*. Nuestro segundo problema es más reciente. Surgió con los intentos de Kepler (1571-1630), Galileo (1564-1642), Newton (1642-1727) y otros para describir la velocidad de un cuerpo en movimiento. Es el problema de la *velocidad instantánea*.

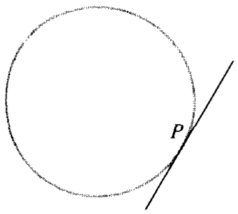
Los dos problemas, uno geométrico y el otro mecánico, parecen no estar muy relacionados. En este caso, las apariencias engañan. Los dos problemas son gemelos idénticos.

La recta tangente La noción de Euclides de una tangente, como una recta que toca a una curva en un solo punto es totalmente correcta para circunferencias (véase la figura 1); pero completamente insatisfactoria para otras curvas (véase la figura 2). La idea de una tangente, en P a una curva como la recta que mejor se aproxima a la curva cerca de P es bastante mejor, pero aún muy vaga para la precisión matemática. El concepto de límite proporciona una manera de obtener una mejor descripción.

Sea P un punto en una curva y sea Q un *punto móvil* cercano a P en esa curva. Considere la recta que pasa por P y Q, llamada **recta secante.** La **recta tangente** en P es la posición límite (si ésta existe) de la recta secante cuando Q se mueve hacia P a lo largo de la curva (véase la figura 3).

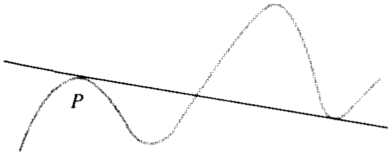
Suponga que la curva es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$. Entonces, P tiene coordenadas $(c, f(c))$, un punto cercano Q tiene coordenadas $(c + h, f(c + h))$, y la recta secante de P y Q tiene pendiente m_{sec} dada por (véase la figura 4):

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$



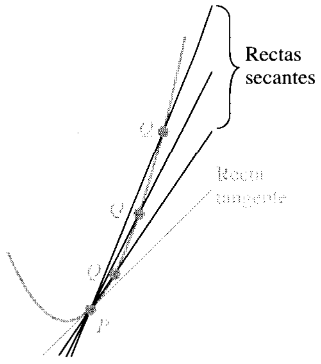
Recta tangente en P

Figura 1



Recta tangente en P

Figura 2



La recta tangente es la posición límite de la recta secante.

Figura 3

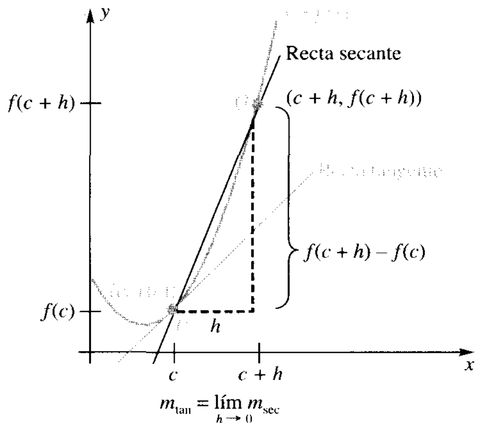


Figura 4

Mediante el concepto de límite, que estudiamos en el capítulo anterior, ahora podemos dar una definición formal de la recta tangente.

Definición Recta tangente

La **recta tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(c, f(c))$ es aquella recta que pasa por P con pendiente

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} m_{\text{sec}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

siempre y cuando este límite exista y no sea ∞ o $-\infty$.

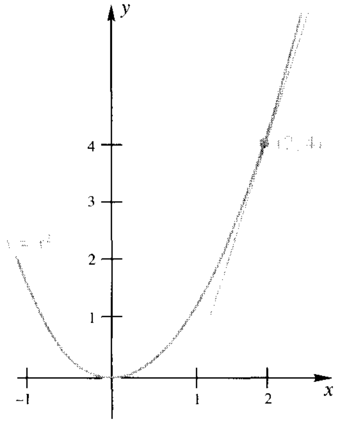


Figura 5

EJEMPLO 1 Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x) = x^2$ en el punto (2, 4).

SOLUCIÓN La recta cuya pendiente estamos buscando se muestra en la figura 5. Es claro que tiene una pendiente positiva grande.

$$\begin{aligned} m_{\tan} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2-2^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4+4h+h^2-4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(4+h)}{\cancel{h}} \\ &= 4 \end{aligned}$$

■

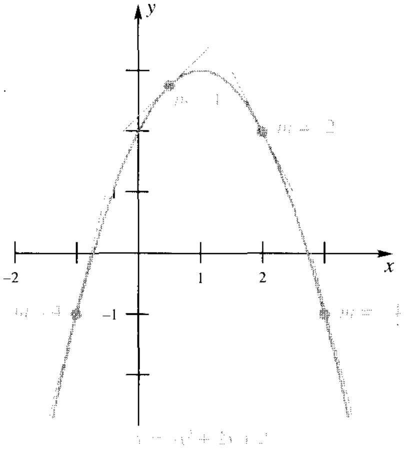


Figura 6

EJEMPLO 2 Encuentre las pendientes de las rectas tangentes a la curva $y = f(x) = -x^2 + 2x + 2$ en los puntos con abscisas $-1, \frac{1}{2}, 2$, y 3.

SOLUCIÓN En lugar de realizar cálculos por separado, parece mejor calcular la pendiente en el punto con abscisa c y luego obtener las cuatro respuestas deseadas por medio de sustitución.

$$\begin{aligned} m_{\tan} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-(c+h)^2+2(c+h)+2-(-c^2+2c+2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-c^2-2ch-h^2+2c+2h+2+c^2-2c-2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(-2c-h+2)}{\cancel{h}} \\ &= -2c+2 \end{aligned}$$

Las cuatro pendientes deseadas (obtenidas haciendo $c = -1, \frac{1}{2}, 2, 3$) son 4, 1, −2, y −4. Estas respuestas parecen ser coherentes con la gráfica en la figura 6. ■

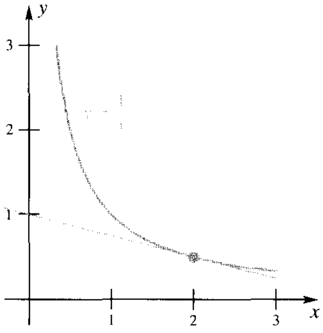


Figura 7

EJEMPLO 3 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 1/x$ en $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ (véase la figura 7).

SOLUCIÓN Sea $f(x) = 1/x$.

$$\begin{aligned} m_{\tan} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{2+h}-\dfrac{1}{2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{2}{2(2+h)}-\dfrac{2+h}{2(2+h)}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2-(2+h)}{2(2+h)h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{2(2+h)h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{2(2+h)} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Sabiendo que la pendiente de la recta es $-\frac{1}{4}$ y que el punto $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ pertenece a ella, con facilidad podemos escribir su ecuación utilizando la forma punto pendiente $y - y_0 = m(x - x_0)$. El resultado es $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 2)$, de forma equivalente $y = 1 - \frac{1}{4}x$. ■

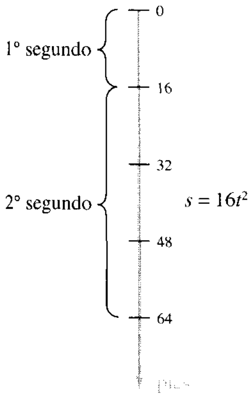


Figura 8

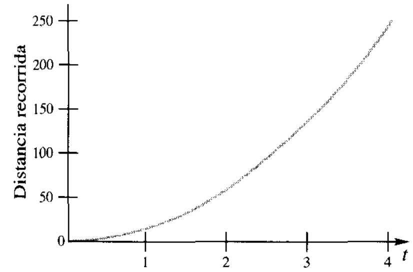


Figura 9

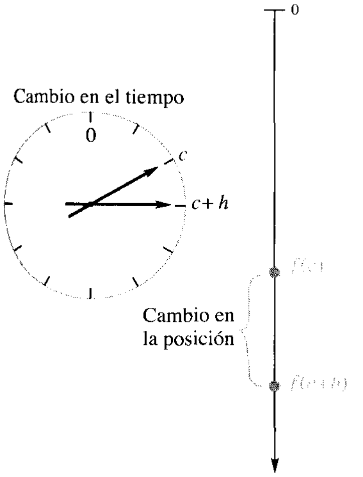


Figura 10

Velocidad promedio y velocidad instantánea Si en 2 horas conducimos un automóvil de una ciudad a otra que está a 80 millas, nuestra velocidad promedio es de 40 millas por hora. La *velocidad promedio* es la distancia de la primera posición a la segunda, dividida entre el tiempo empleado.

Pero durante el viaje la lectura del velocímetro con frecuencia fue diferente de 40. Al principio, registró 0; a veces subió hasta 57; al final, regresó a 0. ¿Qué mide el velocímetro? Ciertamente, no indica una velocidad promedio.

Considere el ejemplo más preciso de un objeto P que cae en el vacío. El experimento muestra que si inicia desde el reposo, P cae $16t^2$ pies en t segundos. Por lo tanto, cae 16 pies en el primer segundo y 64 pies durante los primeros dos segundos (véase la figura 8); claramente, desciende cada vez más rápido conforme el tiempo avanza. La figura 9 muestra la distancia recorrida (en el eje vertical) como una función del tiempo (en el eje horizontal).

Durante el segundo segundo (es decir, en el intervalo de tiempo de $t = 1$ a $t = 2$), P cayó $64 - 16 = 48$ pies. Su velocidad promedio fue

$$v_{\text{prom}} = \frac{64 - 16}{2 - 1} = 48 \text{ pies por segundo}$$

Durante el intervalo de $t = 1$ a $t = 1.5$, cayó $16(1.5)^2 - 16 = 20$ pies. Su velocidad promedio fue

$$v_{\text{prom}} = \frac{16(1.5)^2 - 16}{1.5 - 1} = \frac{20}{0.5} = 40 \text{ pies por segundo}$$

De manera similar, en los intervalos de tiempo $t = 1$ a $t = 1.1$ y $t = 1$ a $t = 1.01$, calculamos las velocidades promedio respectivas

$$v_{\text{prom}} = \frac{16(1.1)^2 - 16}{1.1 - 1} = \frac{3.36}{0.1} = 33.6 \text{ pies por segundo}$$

$$v_{\text{prom}} = \frac{16(1.01)^2 - 16}{1.01 - 1} = \frac{0.3216}{0.01} = 32.16 \text{ pies por segundo}$$

Lo que hemos hecho es calcular la velocidad promedio en intervalos de tiempo cada vez más pequeños; cada uno comienza en $t = 1$. Entre más breve sea el intervalo de tiempo, mejor aproximamos la *velocidad instantánea* en el instante $t = 1$. Al mirar los números 48, 40, 33.6 y 32.16 podríamos suponer que 32 pies por segundo es la velocidad instantánea.

Pero seamos más precisos. Suponga que un objeto P se mueve a lo largo de un eje coordenado, de modo que su posición en el instante t está dada por $s = f(t)$. En el instante c el objeto está en $f(c)$; en un instante cercano, $c + h$, está en $f(c + h)$ (véase la figura 10). Así, la **velocidad promedio** en este intervalo es

$$v_{\text{prom}} = \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

Ahora podemos definir la velocidad instantánea.

Definición Velocidad instantánea

Si un objeto se mueve a lo largo de un eje coordenado con función de posición $f(t)$, entonces su **velocidad instantánea** en el instante c es

$$v = \lim_{h \to 0} v_{\text{prom}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

siempre que el límite exista y no sea ∞ o $-\infty$.

En el caso donde $f(t) = 16t^2$, la velocidad instantánea en $t = 1$ es

$$\begin{aligned} v &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{16(1+h)^2 - 16}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{16 + 32h + 16h^2 - 16}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (32 + 16h) = 32 \end{aligned}$$

Esto confirma nuestra suposición previa.

Dos problemas con el mismo tema

Ahora puede ver por qué llamamos a esta sección "dos problemas con el mismo tema". Véanse las definiciones de *pendiente de la recta tangente* y de *velocidad instantánea*. Éstas dan nombres diferentes para el mismo concepto matemático.

EJEMPLO 4 Un objeto, inicialmente en reposo, cae debido a la acción de la gravedad. Determine su velocidad instantánea en $t = 3.8$ segundos y en $t = 5.4$ segundos.

SOLUCIÓN Calculamos la velocidad instantánea en $t = c$ segundos. Como $f(t) = 16t^2$,

$$\begin{aligned} v &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{16(c+h)^2 - 16c^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{16c^2 + 32ch + 16h^2 - 16c^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (32c + 16h) = 32c \end{aligned}$$

Así, la velocidad instantánea en 3.8 segundos es $32(3.8) = 121.6$ pies por segundo; en 5.4 segundos es $32(5.4) = 172.8$ pies por segundo. ■

EJEMPLO 5 ¿Cuánto tiempo tardará, el objeto del ejemplo 4 para alcanzar una velocidad instantánea de 112 pies por segundo?

SOLUCIÓN Aprendimos en el ejemplo 4 que la velocidad instantánea después de c segundos es $32c$. Por lo tanto, debemos resolver la ecuación $32c = 112$. La solución es $c = \frac{112}{32} = 3.5$ segundos. ■

EJEMPLO 6 Una partícula se mueve a lo largo de un eje coordenado y s, su distancia dirigida en centímetros, medida desde el origen al final de t segundos está dada por $s = f(t) = \sqrt{5t + 1}$. Encuentre la velocidad instantánea de la partícula al final de 3 segundos.

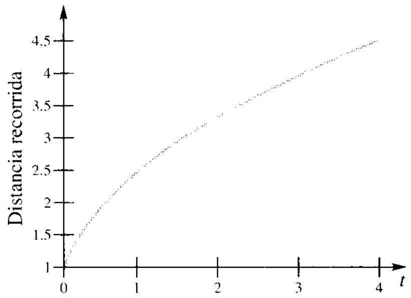


Figura 11

SOLUCIÓN La figura 11 muestra la distancia recorrida como función del tiempo. La velocidad instantánea en el instante $t = 3$ es igual a la pendiente de la recta tangente en $t = 3$.

$$\begin{aligned} v &= \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5(3+h) + 1} - \sqrt{5(3) + 1}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{16 + 5h} - 4}{h} \end{aligned}$$

Para evaluar este límite, racionalizamos el numerador multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{16 + 5h} + 4$. Obtenemos

$$
\begin{aligned}
v &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{16+5h}-4}{h}\cdot\frac{\sqrt{16+5h}+4}{\sqrt{16+5h}+4}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{16+5h-16}{h\left(\sqrt{16+5h}+4\right)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{5}{\sqrt{16+5h}+4}=\frac{5}{8}
\end{aligned}
$$

Concluimos que la velocidad instantánea al final de 3 segundos es de $\frac{5}{8}$ de centímetro por segundo. ■

Velocidad o rapidez

Por el momento, usaremos los términos *velocidad* y *rapidez* de manera indistinta. Posteriormente, en este capítulo, haremos una distinción entre estas dos palabras.

Tasa de cambio La velocidad es sólo una de las muchas tasas de cambio que serán importantes en este curso; es la tasa de cambio de la distancia con respecto al tiempo. Otras tasas de cambio que nos interesarán son la densidad de un alambre (la tasa de cambio de la masa con respecto a la distancia); el ingreso marginal (la tasa de cambio del ingreso con respecto al número de artículos producidos), y la corriente (la tasa de cambio de la carga eléctrica con respecto al tiempo). Estas tasas y muchas más se estudian en el conjunto de problemas. En cada caso debemos distinguir entre una tasa de cambio *promedio* en un intervalo y una tasa de cambio *instantánea* en un punto. La frase *tasa de cambio* sin un adjetivo significará tasa de cambio instantánea.

Revisión de conceptos

1. La recta que más se aproxima a una curva cerca del punto P es la _____ que pasa por ese punto.

2. Con mayor precisión, la recta tangente a una curva en P es la posición límite de las rectas _____ que pasan por P y Q cuando Q a se aproxima a P lo largo de la curva.

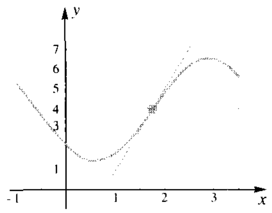
3. La pendiente $m_{\tan}$ de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $(c, f(c))$ está dada por $m_{\tan} = \lim_{h\to 0}$ _____.

4. La velocidad instantánea de un punto P (que se mueve a lo largo de una recta) en el instante c es el límite de _____ en el intervalo de c a $c + h$ cuando h se aproxima a cero.

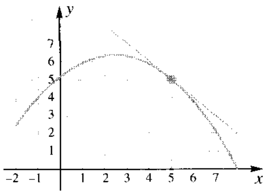
Conjunto de problemas 2.1

En los problemas 1 y 2 está dibujada una recta tangente a una curva. Evalúe su pendiente (pendiente = elevación/avance). Sea cuidadoso al observar la diferencia en escalas sobre los dos ejes.

1.

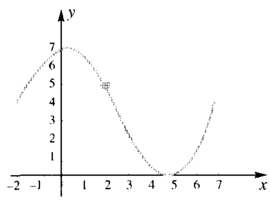


2.

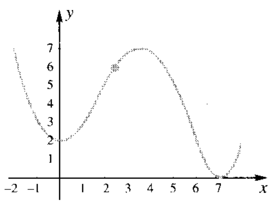


En los problemas 3–6, dibuje la recta tangente a la curva que pasa por el punto indicado y estime su pendiente.

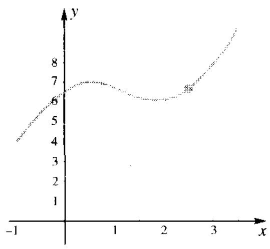
3.



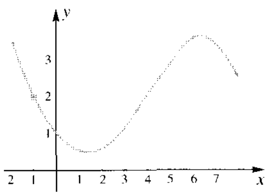
4.



5.



6.



7. Considere $y = x^2 + 1$.

(a) Haga un bosquejo de su gráfica tan cuidadosamente como pueda.

(b) Dibuje la recta tangente en $(1, 2)$.

$\boxed{\approx}$ (c) Estime la pendiente de esta recta tangente.

$\boxed{C}$ (d) Calcule la pendiente de la recta tangente que pasa por $(1, 2)$ y $(1.01, (1.01)^2 + 1.0)$.

(e) Encuentre, por medio del proceso de límite (véase el ejemplo 1), la pendiente de la recta tangente en $(1, 2)$.

8. Considere $y = x^3 - 1$.

(a) Haga un bosquejo de su gráfica tan cuidadosamente como pueda.

(b) Dibuje la recta tangente en $(2, 7)$.

≈ (c) Estime la pendiente de esta recta tangente.

C (d) Calcule la pendiente de la recta secante que pasa por $(2, 7)$ y $(2.01, (2.01)^3 - 1.0)$.

(e) Encuentre, por medio del proceso de límite (véase el ejemplo 1), la pendiente de la recta tangente en $(2, 7)$.

9. Encuentre las pendientes de las rectas tangentes a la curva $y = x^2 - 1$ en los puntos donde $x = -2, -1, 0, 1, 2$ (véase el ejemplo 2).

10. Encuentre las pendientes de las rectas tangentes a la curva $y = x^3 - 3x$ en los puntos donde $x = -2, -1, 0, 1, 2$.

11. Haga un bosquejo de la gráfica de $y = 1/(x + 1)$ y luego encuentre la ecuación de la recta tangente en $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ (véase el ejemplo 3).

12. Encuentre una ecuación de la recta tangente a $y = 1/(x - 1)$ en $(0, -1)$.

13. Un experimento sugiere que un cuerpo que cae descenderá aproximadamente $16t^2$ pies en t segundos.

(a) ¿Cuánto caerá entre $t = 0$ y $t = 1$?

(b) ¿Cuánto caerá entre $t = 1$ y $t = 2$?

(c) ¿Cuál es su velocidad promedio en el intervalo $2 \le t \le 3$?

C (d) ¿Cuál es su velocidad promedio en el intervalo $3 \le t \le 3.01$?

≈ (e) Encuentre su velocidad instantánea en $t = 3$ (véase el ejemplo 4).

14. Un objeto viaja a lo largo de una recta de modo que su posición s es $s = t^2 + 1$ metros después de t segundos.

(a) ¿Cuál es su velocidad promedio en el intervalo $2 \le t \le 3$?

C (b) ¿Cuál es su velocidad promedio en el intervalo $2 \le t \le 2.003$?

(c) ¿Cuál es su velocidad promedio en el intervalo $2 \le t \le 2 + h$?

≈ (d) Determine su velocidad instantánea en $t = 2$.

15. Suponga que un objeto se mueve a lo largo de un eje coordenado, de modo que su distancia dirigida —medida desde el origen— después de t segundos es $\sqrt{2t + 1}$ pies.

(a) Encuentre su velocidad instantánea en $t = \alpha, \alpha > 0$.

(b) ¿Cuándo alcanzará una velocidad de $\frac{1}{2}$ pie por segundo? (Véase el ejemplo 5).

16. Si una partícula se mueve a lo largo de un eje coordenado, de modo que su distancia dirigida —medida desde el origen— después de t segundos es $(-t^2 + 4t)$ pies, ¿cuándo la partícula está momentáneamente detenida? (Es decir, ¿en qué momento su velocidad instantánea es cero?).

17. Cierto cultivo de bacteria crece de modo que tiene una masa de $\frac{1}{2}t^2 + 1$ gramos después de t horas.

C (a) ¿Cuánto creció durante el intervalo $2 \le t \le 2.01$?

(b) ¿Cuál fue la tasa promedio de crecimiento durante el intervalo $2 \le t \le 2.01$?

≈ (c) ¿Cuál fue su tasa instantánea de crecimiento en $t = 2$?

18. Un negocio está prosperando de tal manera que su ganancia total (acumulada) después de t años es $1000t^2$ dólares.

(a) ¿Cuál fue su ganancia durante el tercer año (entre $t = 2$ y $t = 3$)?

(b) ¿Cuál fue su tasa promedio de ganancia durante la primera mitad del tercer año, entre $t = 2$ y $t = 2.5$? (La tasa será en dólares por año).

(c) ¿Cuál fue la tasa instantánea de ganancia en $t = 2$?

19. Un alambre de 8 centímetros de largo es tal que la masa entre su extremo izquierdo y un punto x centímetros a la derecha es de x^3 gramos (véase la figura 12).

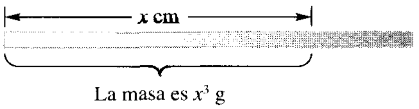


Figura 12

(a) ¿Cuál es la densidad promedio de los dos centímetros centrales, es decir, del centímetro 3 al 5 de este alambre? *Observación*: la densidad promedio es igual a masa/longitud.

(b) ¿Cuál es la densidad real en el punto que se encuentra a 3 centímetros del extremo izquierdo?

20. Suponga que el ingreso $I(n)$ en dólares por producir n computadoras está dado por $I(n) = 0.4n - 0.001n^2$. Encuentre las tasas instantáneas de cambio del ingreso cuando $n = 10$ y $n = 100$. (La tasa instantánea de cambio del ingreso con respecto a la cantidad de producto fabricado se denomina *ingreso marginal.*)

21. La razón (tasa) de cambio de la velocidad con respecto al tiempo se llama **aceleración.** Suponga que la velocidad de una partícula en el instante t está dada por $v(t) = 2t^2$. Encuentre la aceleración instantánea cuando $t = 1$ segundo.

22. Una ciudad es azotada por una epidemia de gripe asiática. Las autoridades estiman que t días después del inicio de la epidemia, el número de personas enfermas con la gripe está dado por $p(t) = 120t^2 - 2t^3$, cuando $0 \le t \le 40$. ¿A qué tasa se expande la gripe en el instante $t = 10$; $t = 20$; $t = 40$?

23. La gráfica de la figura 13 muestra la cantidad de agua en un tanque de la ciudad durante un día que no se bombeó el vital líquido a ese recipiente. ¿Cuál fue la tasa promedio de uso de agua durante el día? ¿Qué tan rápido estaba siendo usada el agua a las 8 A.M.?

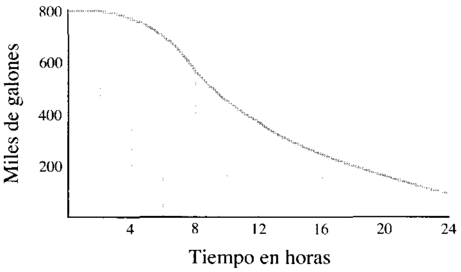


Figura 13

24. Unos pasajeros abordan un elevador en la planta baja (es decir, el piso cero) y lo dejan en el séptimo piso, que se encuentra 84 pies por arriba de la planta baja. La posición del elevador, s como función del tiempo t (medido en segundos), se muestra en la figura 14.

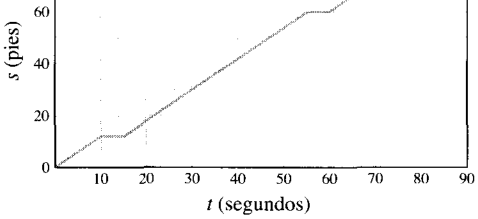


Figura 14

(a) ¿Cuál fue la velocidad promedio del elevador desde el instante que inició a moverse hasta que llegó al séptimo piso?

(b) Aproximadamente, ¿cuál fue la velocidad promedio del elevador en el instante $t = 20$?

(c) ¿Cuántas paradas hizo el elevador entre la planta baja y el séptimo piso (exceptuando la planta baja y el séptimo piso)? ¿En qué pisos cree usted que el elevador se detuvo?

25. La figura 15 muestra la temperatura máxima normal para San Luis, Missouri, como una función del tiempo (medido en días desde el 1 de enero).

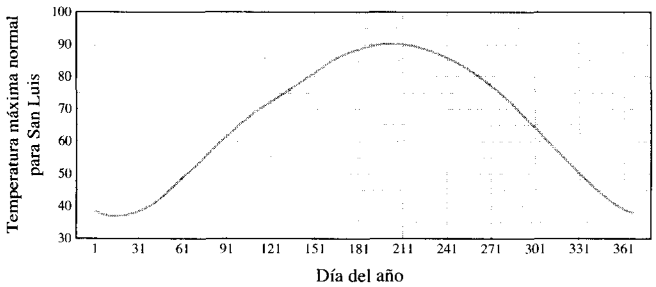


Figura 15

(a) En forma aproximada, ¿cuál es la tasa de cambio de la temperatura máxima normal el 2 de marzo (es decir, en el día número 61)? ¿Cuáles son las unidades de esta tasa de cambio?

(b) Aproximadamente, ¿cuál es la tasa de cambio en la temperatura máxima normal el 10 de julio (es decir, en el día 191)?

(c) ¿En cuáles meses hay un momento en que la tasa de cambio es igual a cero?

(d) ¿En qué meses el valor absoluto de la tasa de cambio es la máxima?

26. La figura 16 muestra la población, en millones, de un país en desarrollo para los años de 1900 a 1999. Aproximadamente, ¿cuál es la tasa de cambio de la población en 1930? ¿Y en 1990? Con frecuencia, el crecimiento porcentual es una medida más apropiada del crecimiento poblacional. Ésta es la tasa de crecimiento dividida entre el tamaño de la población en ese instante. Para esta población, ¿cuál fue el crecimiento porcentual aproximado en 1930? ¿Y en 1990?

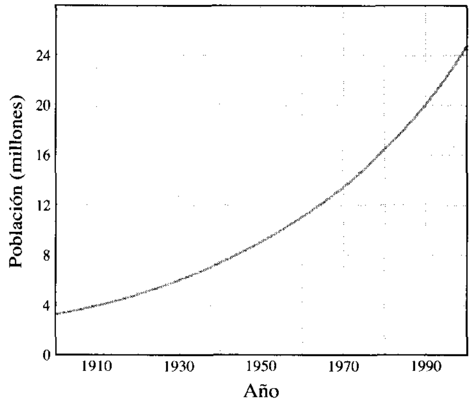
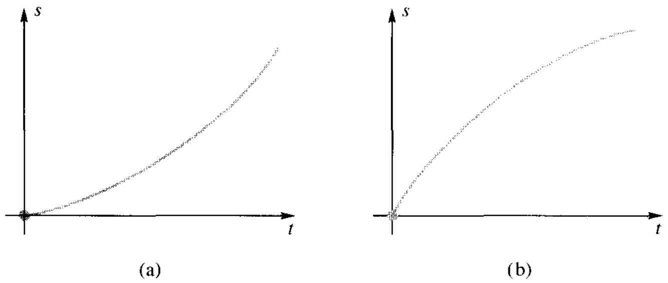


Figura 16

27. Las figuras 17a y 17b muestran la posición s como una función del tiempo t para dos partículas que se mueven a lo largo de una recta. Para cada partícula, ¿la velocidad aumenta o disminuye? Explique.



(a) (b)

Figura 17

28. La tasa de cambio de la carga eléctrica con respecto al tiempo se denomina **corriente.** Suponga que $\frac{1}{3}t^3 + t$ coulombs de carga fluye a través de una alambre en t segundos. Encuentre la corriente, en amperes (coulombs por segundo) después de 3 segundos. ¿Cuándo se fundirá un fusible de 20 amperes en la línea?

29. Debido a un derrame, el radio de una mancha circular de aceite está creciendo a una velocidad constante de 2 kilómetros por día. ¿A qué velocidad está creciendo el área del derrame 3 días después de que comenzó?

30. El radio de un balón esférico está aumentando a una velocidad de 0.25 pulgadas por segundo. Si el radio es de 0 en el instante $t = 0$, encuentre la tasa de cambio del volumen en el instante $t = 3$.

GC *Utilice una calculadora gráfica (GC) o un* CAS *(sistema de álgebra computacional) para resolver los problemas del 31 al 34.*

31. Dibuje la gráfica de $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$. Después encuentre la pendiente de la recta tangente en

(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) 3.2

32. Dibuje la gráfica de $y = f(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 2x$. Después encuentre la pendiente de la recta tangente en

(a) $\pi/3$ (b) 2.8 (c) π (d) 4.2

33. Si un punto se mueve a lo largo de una recta, de modo que su distancia s (en pies) desde 0 está dada por $s = t + t\cos^2 t$ a los t segundos, encuentre su velocidad instantánea en $t = 3$.

34. Si un punto se mueve a lo largo de una recta, de modo que su distancia s (en metros) desde 0 está dada por $s = (t + 1)^3/(t + 2)$ a los t minutos, encuentre su velocidad instantánea en $t = 1.6$.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** recta tangente **2.** secante **3.** $[f(c + h) - f(c)]/h$ **4.** velocidad promedio

2.2 La derivada

Hemos visto que la *pendiente de la recta tangente* y la *velocidad instantánea* son manifestaciones de la misma idea básica. Tasa de crecimiento de un organismo (biología), ganancia marginal (economía), densidad de un alambre (física) y velocidad de disolución (química) son otras versiones del mismo concepto básico. El buen sentido matemático sugiere que estudiemos este concepto independientemente de estos vocabularios especializados y de sus diversas aplicaciones. Elegimos el nombre neutral de *derivada*, el cual añadiremos a *función* y *límite* como una de las palabras clave del cálculo.

Definición Derivada

La **derivada** de una función f es otra función f' (léase "f prima") cuyo valor en cualquier número x es

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Si este límite existe, decimos que f es **derivable** en x. Determinar una derivada recibe el nombre de **derivación**; la parte del cálculo asociada con la derivada se denomina **cálculo diferencial.**

Cálculo de derivadas

Ilustramos con varios ejemplos.

EJEMPLO 1 Sea $f(x) = 13x - 6$. Encuentre $f'(4)$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[13(4+h) - 6] - [13(4) - 6]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{13h}{h} = \lim_{h\to 0} 13 = 13 \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 Si $f(x) = x^3 + 7x$, encuentre $f'(x)$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\left[(x+h)^3 + 7(x+h)\right] - \left[x^3 + 7x\right]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 7h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 + 7) \\ &= 3x^2 + 7 \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 3 Si $f(x) = 1/x$, encuentre $f'(x)$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{x - (x+h)}{(x+h)x} \cdot \frac{1}{h}\right] = \lim_{h\to 0} \left[\frac{-h}{(x+h)x} \cdot \frac{1}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Así, f' es la función dada por $f'(x) = -1/x^2$. Su dominio es todos los números reales, excepto $x = 0$. ■

EJEMPLO 4 Encuentre $F'(x)$ si $F(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \end{aligned}$$

En este momento habrá notado que encontrar una derivada siempre implica tomar el límite de un cociente, en donde el numerador y el denominador se aproximan a cero. Nuestra tarea es simplificar este cociente, de modo que podamos cancelar un factor h, del numerador y del denominador, permitiéndonos con ello evaluar el límite por sustitución. En el ejemplo actual, esto puede realizarse por medio de la racionalización del numerador.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Así, F', la derivada de F, está dada por $F'(x) = 1/\left(2\sqrt{x}\right)$. Su dominio es $(0, \infty)$. ■

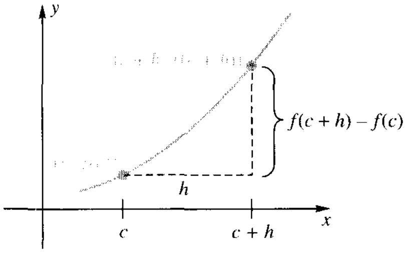


Figura 1

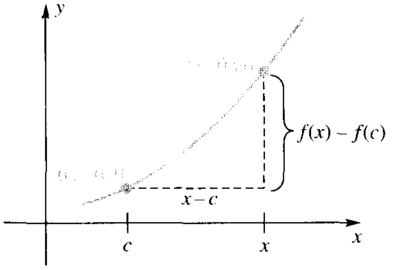


Figura 2

Formas equivalentes de la derivada No hay nada sagrado acerca del uso de la letra h en la definición de $f'(c)$. Por ejemplo, observe que

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \\ &= \lim_{p\to 0} \frac{f(c+p) - f(c)}{p} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{f(c+s) - f(c)}{s} \end{aligned}$$

Un cambio más radical, pero todavía sólo un cambio de notación, puede entenderse comparando las figuras 1 y 2. Observe cómo x toma el lugar de $c + h$, y por lo tanto $x - c$ reemplaza a h. En consecuencia,

$$\boxed{f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}}$$

Obsérvese que en todos los casos el número en el que f' se evalúa se mantiene fijo durante la operación del límite.

EJEMPLO 5 Utilice el último recuadro para determinar $g'(c)$ si $g(x) = 2/(x + 3)$.

SOLUCIÓN

$$g'(c) = \lim_{x\to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} = \lim_{x\to c} \frac{\dfrac{2}{x+3} - \dfrac{2}{c+3}}{x - c}$$

$$= \lim_{x\to c} \left[\frac{2(c+3) - 2(x+3)}{(x+3)(c+3)} \cdot \frac{1}{x - c}\right]$$

$$= \lim_{x\to c} \left[\frac{-2(x-c)}{(x+3)(c+3)} \cdot \frac{1}{x - c}\right]$$

$$= \lim_{x\to c} \frac{-2}{(x+3)(c+3)} = \frac{-2}{(c+3)^2}$$

Aquí hemos manipulado el cociente hasta que pudimos cancelar el factor $x - c$ del numerador y del denominador. Entonces pudimos evaluar el límite. ■

EJEMPLO 6 Cada una de las siguientes es una derivada, pero ¿de qué función? ¿Y en qué punto?

(a) $\lim_{h\to 0} \frac{(4+h)^2 - 16}{h}$ (b) $\lim_{x\to 3} \frac{\dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{3}}{x - 3}$

SOLUCIÓN

(a) Ésta es la derivada de $f(x) = x^2$ en $x = 4$.

(b) Ésta es la derivada de $f(x) = 2/x$ en $x = 3$. ■

Derivabilidad implica continuidad Si una curva tiene una recta tangente en un punto, entonces esa curva no puede dar un salto ni oscilar demasiado en ese punto. La formulación precisa de este hecho es un teorema importante.

Teorema A Derivabilidad implica continuidad

Si $f'(c)$ existe, entonces f es continua en c.

Demostración Necesitamos demostrar que $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Empezamos por escribir $f(x)$ de una manera especial.

$$f(x) = f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c), \qquad x \neq c$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} \left[f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c)\right]$$

$$= \lim_{x\to c} f(c) + \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot \lim_{x\to c} (x - c)$$

$$= f(c) + f'(c) \cdot 0$$

$$= f(c)$$

■

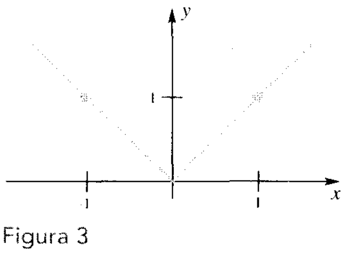


Figura 3

El inverso de este teorema es falso. Si una función f es continua en c, no se sigue que f tenga una derivada en c. Esto es fácil de ver considerando $f(x) = |x|$ en el origen (véase la figura 3). Esta función en verdad es continua en cero. Sin embargo, no tiene una derivada allí, como ahora lo demostramos. Observe que

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{|0+h|-|0|}{h}=\frac{|h|}{h}$$

Así,

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1$$

mientras que

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$$

Ya que los límites por la derecha y por la izquierda son diferentes,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

no existe. Por lo tanto, $f'(0)$ no existe.

Un argumento similar muestra que cualquier punto en donde la gráfica de una función continua tenga una esquina o vértice, la función no es derivable. La gráfica en la figura 4 indica algunas formas para que una función no sea derivable en un punto.

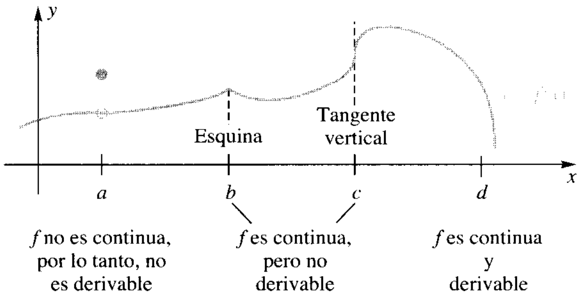

y
Esquina
Tangente vertical
x
a
b
c
d
f no es continua, por lo tanto, no es derivable
f es continua, pero no derivable
f es continua y derivable

Figura 4

Para la función que se muestra en la figura 4 la derivada no existe en el punto c, en donde la recta tangente es vertical. Esto es porque

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\infty$$

Esto corresponde al hecho de que la pendiente de una recta vertical no está definida.

Incrementos Si el valor de una variable x cambia de x_1 a x_2, entonces $x_2 - x_1$, el cambio de x, se denomina un **incremento** de x y por lo regular se denota por Δx (léase "delta x"). Obsérvese que Δx *no* significa Δ por x. Si $x_1 = 4.1$ y $x_2 = 5.7$, entonces

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 5.7 - 4.1 = 1.6$$

Si $x_1 = c$ y $x_2 = c + h$, entonces

$$\Delta x = x_2 - x_1 = c + h - c = h$$

Ahora suponga que $y = f(x)$ determina una función. Si x cambia de x_1 a x_2, entonces y cambia de $y_1 = f(x_1)$ a $y_2 = f(x_2)$. Así, al incremento $\Delta x = x_2 - x_1$ en x, existe un correspondiente incremento en y dado por

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$$

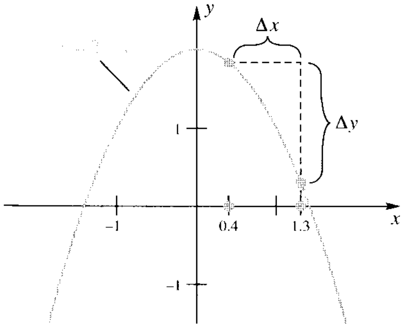


Figura 5

EJEMPLO 7 Sea $y = f(x) = 2 - x^2$. Encuentre Δy cuando x cambia de 0.4 a 1.3 (véase la figura 5).

SOLUCIÓN

$$\Delta y = f(1.3) - f(0.4) = \left[2 - (1.3)^2\right] - \left[2 - (0.4)^2\right] = -1.53 \qquad \blacksquare$$

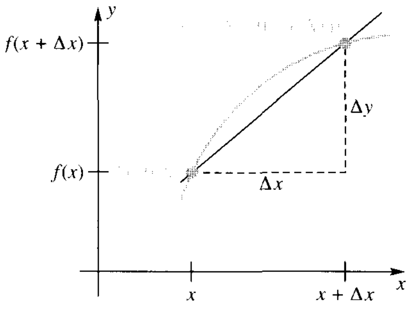


Figura 6

Notación de Leibniz para la derivada Ahora, suponga que la variable independiente cambia de x a $x + \Delta x$. El cambio correspondiente en la variable dependiente, y, será

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

y la razón

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

representa la pendiente de una recta secante que pasa por $(x, f(x))$, como se muestra en la figura 6. Cuando $\Delta x \to 0$, la pendiente de esta recta secante tiende a la recta tangente, y para esta última pendiente utilizamos el símbolo dy/dx. Por lo tanto,

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)}$$

Gottfried Wilhelm Leibniz, contemporáneo de Isaac Newton, llamó a dy/dx cociente de dos infinitesimales. El significado de la palabra *infinitesimal* es vago y no lo utilizaremos. Sin embargo, dy/dx es un símbolo estándar para la derivada y lo usaremos con frecuencia de ahora en adelante.

La gráfica de la derivada La derivada $f'(x)$ proporciona la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el valor de x. Por lo tanto, cuando la recta tangente está ascendiendo hacia la derecha, la derivada es positiva, y cuando la recta tangente está descendiendo hacia la derecha, la derivada es negativa. Por lo tanto, podemos obtener una gráfica aproximada de la derivada dando solo la gráfica de la función.

EJEMPLO 8 Dada la gráfica de $y = f(x)$ que se muestra en la primera parte de la figura 7, haga un bosquejo de la gráfica de la derivada $f'(x)$.

SOLUCIÓN Para $x < 0$, la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ tiene pendiente positiva. Un cálculo aproximado a partir de la gráfica sugiere que cuando $x = -2$, la pendiente es alrededor de 3. Conforme nos movemos de izquierda a derecha a lo largo de la curva en la figura 7, vemos que la pendiente sigue siendo positiva (durante un tiempo), pero las rectas tangentes se hacen cada vez más planas (horizontales). Cuando $x = 0$, la recta tangente es horizontal y nos dice que $f'(0) = 0$. Para x entre 0 y 2, las rectas tangentes tienen pendiente negativa, lo cual indica que la derivada será negativa en este intervalo. Cuando $x = 2$, nuevamente estamos en un punto en donde la recta tangente es horizontal, por lo que la derivada es igual a cero cuando $x = 2$. Para $x > 2$, la recta tangente tiene pendiente positiva otra vez. La gráfica de la derivada $f'(x)$ se muestra en la última parte de la figura 7. ■

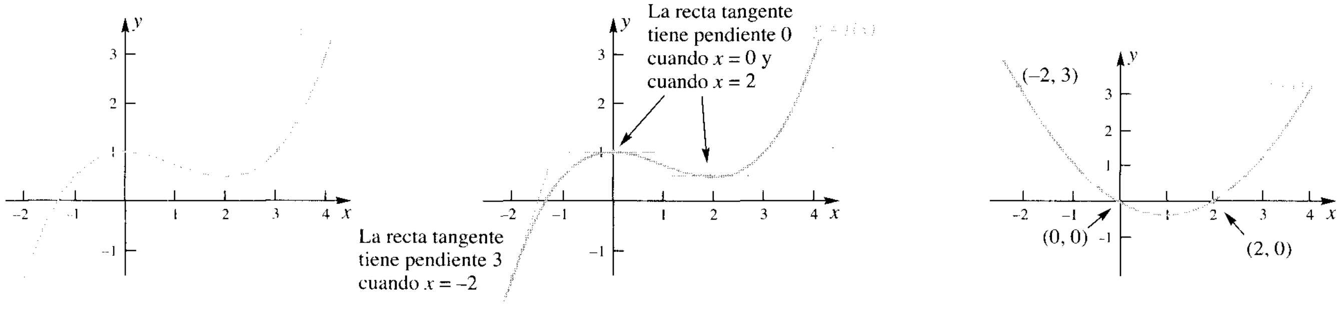


Figura 7

Revisión de conceptos

1. La derivada f en x está dada por $f'(x) = \lim_{h\to 0}$ _____. De forma equivalente, $f'(x) = \lim_{t\to x}$ _____.

2. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(c, f(c))$ es _____.

3. Si f es derivable en c, entonces f es _____ en c. El inverso es falso, como se demostró mediante el ejemplo $f(x) =$ _____.

4. Si $y = f(x)$, ahora tenemos dos símbolos diferentes para la derivada de y con respecto a x. Son _____ y _____.

Conjunto de problemas 2.2

En los problemas del 1–4, utilice la definición

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

para encontrar la derivada indicada.

1. $f'(1)$ si $f(x) = x^2$

2. $f'(2)$ si $f(t) = (2t)^2$

3. $f'(3)$ si $f(t) = t^2 - t$

4. $f'(4)$ si $f(s) = \dfrac{1}{s-1}$

En los problemas del 5–22, use $f'(x) = \lim_{h\to 0}[f(x+h) - f(x)]/h$ para determinar la derivada en x.

5. $s(x) = 2x + 1$

6. $f(x) = \alpha x + \beta$

7. $r(x) = 3x^2 + 4$

8. $f(x) = x^2 + x + 1$

9. $f(x) = ax^2 + bx + c$

10. $f(x) = x^4$

11. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$

12. $g(x) = x^4 + x^2$

13. $h(x) = \dfrac{2}{x}$

14. $S(x) = \dfrac{1}{x+1}$

15. $F(x) = \dfrac{6}{x^2+1}$

16. $F(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

17. $G(x) = \dfrac{2x-1}{x-4}$

18. $G(x) = \dfrac{2x}{x^2-x}$

19. $g(x) = \sqrt{3x}$

20. $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x}}$

21. $H(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x-2}}$

22. $H(x) = \sqrt{x^2+4}$

En los problemas del 23–26, use $f'(x) = \lim_{t\to x}[f(t) - f(x)]/[t - x]$ para determinar $f'(x)$ (véase el ejemplo 5).

23. $f(x) = x^2 - 3x$

24. $f(x) = x^3 + 5x$

25. $f(x) = \dfrac{x}{x-5}$

26. $f(x) = \dfrac{x+3}{x}$

En los problemas del 27 al 36 el límite dado es una derivada, pero ¿de qué función? ¿Y en qué punto? (Véase el ejemplo 6).

27. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{2(5+h)^3 - 2(5)^3}{h}$

28. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 + 2(3+h) - 15}{h}$

29. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

30. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^3+x-30}{x-3}$

31. $\displaystyle\lim_{t\to x} \frac{t^2-x^2}{t-x}$

32. $\displaystyle\lim_{p\to x} \frac{p^3-x^3}{p-x}$

33. $\displaystyle\lim_{x\to t} \frac{\frac{2}{x} - \frac{2}{t}}{x-t}$

34. $\displaystyle\lim_{x\to y} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{x-y}$

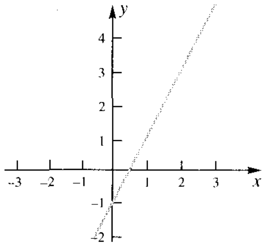
35. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$

36. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\tan(t+h) - \tan t}{h}$

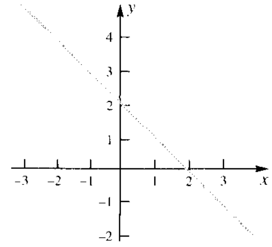
En los problemas del 37 al 44 se da la gráfica de una función $y = f(x)$

Utilice esta gráfica para bosquejar la gráfica de $y = f'(x)$.

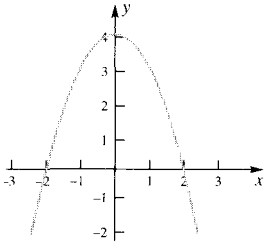
37.



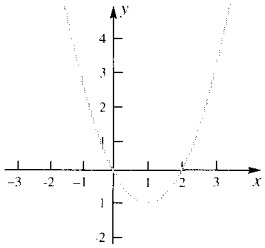
38.



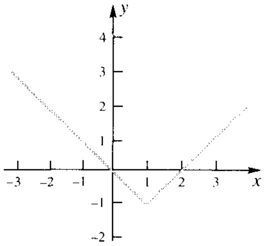
39.



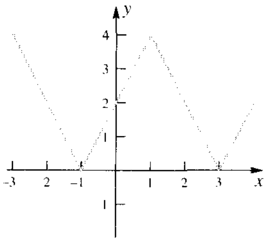
40.



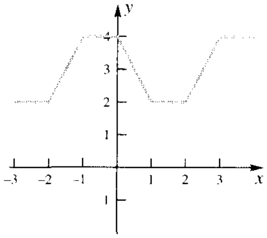
41.



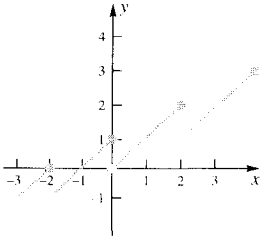
42.



43.



44.



En los problemas del 45 al 50 determine Δy para los valores dados de x_1 y x_2 (véase el ejemplo 7).

45. $y = 3x + 2, x_1 = 1, x_2 = 1.5$

46. $y = 3x^2 + 2x + 1, x_1 = 0.0, x_2 = 0.1$

47. $y = \frac{1}{x}, x_1 = 1.0, x_2 = 1.2$

48. $y = \frac{2}{x+1}, x_1 = 0, x_2 = 0.1$

C **49.** $y = \frac{3}{x+1}, x_1 = 2.34, x_2 = 2.31$

C **50.** $y = \cos 2x, x_1 = 0.571, x_2 = 0.573$

En los problemas del 51 al 56 primero determine y simplifique

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Luego determine dy/dx tomando el límite de su respuesta cuando $\Delta x \to 0$.

51. $y = x^2$

52. $y = x^3 - 3x^2$

53. $y = \frac{1}{x+1}$

54. $y = 1 + \frac{1}{x}$

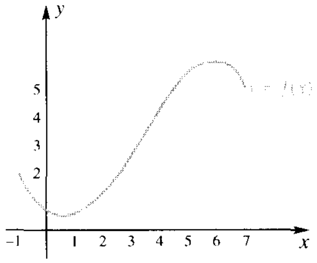


Figura 8

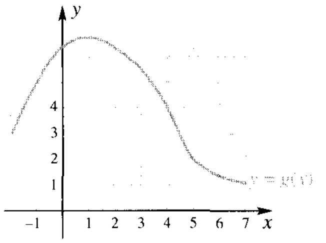


Figura 9

55. $y = \frac{x-1}{x+1}$

56. $y = \frac{x^2 - 1}{x}$

57. Con base en la figura 8, estime $f'(0), f'(2), f'(5)$, y $f'(7)$.

58. Con base en la figura 9, estime $g'(-1), g'(1), g'(4)$, y $g'(6)$.

59. Haga un bosquejo de la gráfica de $y = f'(x)$ en $-1 < x < 7$ para la función f de la figura 8.

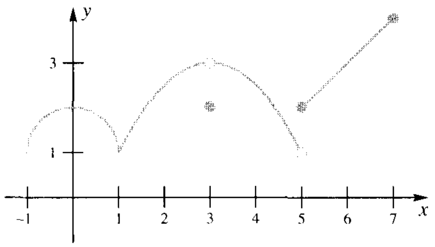


Figura 10

60. Haga un bosquejo de la gráfica de $y = g'(x)$ en $-1 < x < 7$ para la función g de la figura 9.

61. Considere la función $y = f(x)$, cuya gráfica está bosquejada en la figura 10.

(a) Estime $f(2), f'(2), f(0.5)$, y $f'(0.5)$.

(b) Estime la tasa de cambio promedio en f sobre el intervalo $0.5 \leq x \leq 2.5$.

(c) En el intervalo $-1 < x < 7$, ¿en dónde $\lim_{u \to x} f(u)$ no existe?

(d) En el intervalo $-1 < x < 7$, ¿en dónde f no es continua?

(e) En el intervalo $-1 < x < 7$, ¿en dónde f no tiene derivada?

(f) En el intervalo $-1 < x < 7$, ¿en dónde $f'(x) = 0$?

(g) En el intervalo $-1 < x < 7$, ¿en dónde $f'(x) = 1$?

62. La figura 14 en la sección 2.1 muestra la posición s de un elevador como función del tiempo t. ¿En qué puntos la derivada existe? Bosqueje la derivada de s.

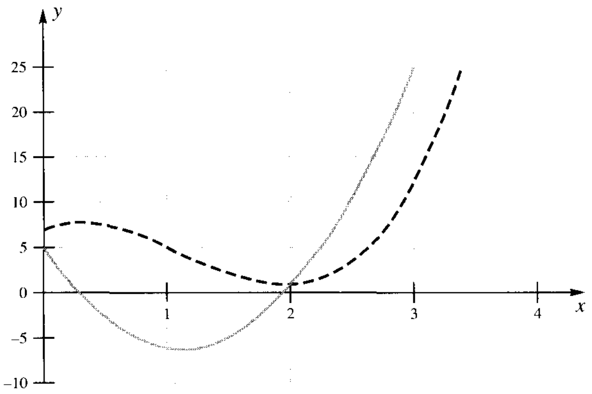


Figura 11

63. La figura 15 en la sección 2.1 muestra la temperatura máxima normal para San Luis, Missouri. Haga un bosquejo de la derivada.

64. La figura 11 muestra dos funciones. Una es la función f, y la otra es su derivada f'. ¿Cuál es cuál?

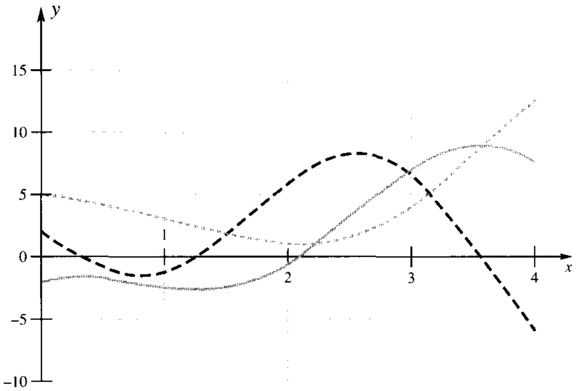


Figura 12

65. La figura 12 muestra tres funciones. Una es la función f; otra es su derivada f', a la cual llamaremos g; y la tercera es la derivada de g. ¿Cuál es cuál?

EXPL **66.** Suponga que $f(x + y) = f(x)f(y)$ para toda x y toda y. Muestre que si $f'(0)$ existe, entonces $f'(a)$ existe y $f'(a) = f(a)f'(0)$.

67. Sea $f(x) = \begin{cases} mx + b & \text{si } x < 2 \\ x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Determine m y b de modo que f sea diferenciable en todas partes.

EXPL **68.** La **derivada simétrica** $f_s(x)$ se define como

$$f_s(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h}$$

(b) f es una función par.

70. Demuestre que la derivada de una función impar es una función par y que la derivada de una función par es una función impar.

CAS *Utilice un* CAS *para resolver los problemas 71 y 72.*

EXPL **71.** Dibuje las gráficas de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ y su derivada $f'(x)$ en el intervalo $[-2, 5]$ utilizando los mismo ejes.

(a) En este intervalo, ¿en dónde está $f'(x) < 0$?

(b) En este intervalo, ¿en dónde $f(x)$ disminuye cuando x aumenta?

(c) Haga una conjetura. Experimente con otros intervalos y otras funciones para sustentar esta conjetura.

EXPL **72.** Dibuje las gráficas de $f(x) = \cos x - \operatorname{sen}(x/2)$ y su derivada $f'(x)$ en el intervalo $[0, 9]$ utilizando los mismos ejes.

(a) En este intervalo, ¿en dónde $f'(x) > 0$?

(b) En este intervalo, ¿en dónde $f(x)$ aumenta cuando x aumenta?

(c) Haga una conjetura. Experimente con otros intervalos y otras funciones para sustentar esta conjetura.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $[f(x + h) - f(x)]/h$; $[f(t) - f(x)]/(t - x)$ **2.** $f'(c)$ **3.** continua; $|x|$ **4.** $f'(x)$; $\dfrac{dy}{dx}$

2.3 Reglas para encontrar derivadas

El proceso de encontrar la derivada de una función de manera directa a partir de la definición de la derivada, esto es, estableciendo el cociente de diferencias

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

y evaluando su límite, puede consumir tiempo y ser tedioso. Vamos a desarrollar herramientas que nos permitan acortar este largo proceso —de hecho, nos permitirá encontrar derivadas de las funciones más complicadas que se vean.

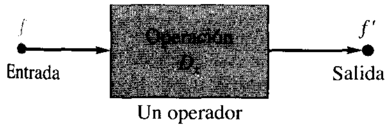


Figura 1

Recuerde que la derivada de una función f es otra función f'. En la sección anterior vimos que si $f(x) = x^3 + 7x$ es la fórmula para f, entonces $f'(x) = 3x^2 = 7$ es la fórmula para f'. Cuando tomamos la derivada de f, decimos que estamos derivando a f. La derivada *opera* sobre f para producir f'. Con frecuencia utilizamos el símbolo D_x para indicar la operación de derivación (véase la figura 1). El símbolo D_x indica que estamos tomando la derivada (con respecto a la variable x) de lo que sigue. Así, escribimos $D_x f(x) = f'(x)$ o (en el caso antes mencionado) $D_x(x^3 + 7x) = 3x^2 + 7$. Esta D_x es un ejemplo de un **operador.** Como sugiere la figura 1, un operador es una función cuya entrada es una función y cuya salida es otra función.

Con la notación de Leibniz, que se introdujo en la sección pasada, ahora tenemos tres notaciones para la derivada. Si $y = f(x)$, podemos denotar la derivada de f por medio de

$$f'(x) \quad \text{o} \quad D_x f(x) \quad \text{o} \quad \frac{dy}{dx}$$

Ahora utilizaremos la notación $\dfrac{d}{dx}$ para querer decir lo mismo que el operador D_x.

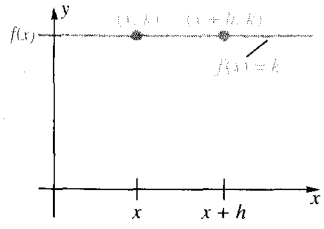


Figura 2

Las reglas para la constante y la potencia

La gráfica de la función constante $f(x) = k$ es una recta horizontal (véase la figura 2), que, por lo tanto, tiene pendiente cero en todas partes. Ésta es una manera de entender nuestro primer teorema.

Teorema A **Regla para la función constante**

Si $f(x) = k$, donde k es una constante, entonces para cualquier x, $f'(x) = 0$; esto es,

$$D_x(k) = 0$$

Demostración

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0 \qquad \blacksquare$$

La gráfica de $f(x) = x$ es una recta que pasa por el origen y tiene pendiente 1 (véase la figura 3); de modo que debemos esperar que la derivada de esta función sea 1 para toda x.

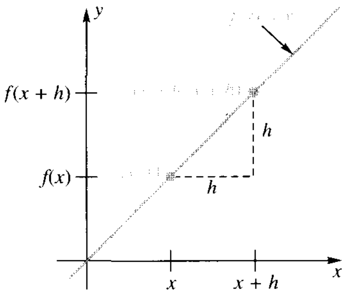


Figura 3

Teorema B **Regla para la función identidad**

Si $f(x) = x$, entonces $f'(x) = 1$; esto es,

$$D_x(x) = 1$$

Demostración

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1 \qquad \blacksquare$$

Antes de iniciar con nuestro siguiente teorema, recordemos algo de álgebra; cómo elevar un binomio a una potencia.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$\vdots$$
$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + nab^{n-1} + b^n$$

Teorema C **Regla para la potencia**

Si $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$; esto es,

$$D_x(x^n) = nx^{n-1}$$

Demostración

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right]}{\cancel{h}}$$

Dentro de los corchetes, todos los términos —excepto el primero— tienen a h como factor, y así que para todo valor de x cada uno de estos términos tiene límite cero cuando h se aproxima a cero. Por lo tanto,

$$f'(x) = nx^{n-1} \qquad \blacksquare$$

Como ejemplos del teorema C, observe que

$$D_x(x^3) = 3x^2 \qquad D_x(x^9) = 9x^8 \qquad D_x(x^{100}) = 100x^{99}$$

D_x es un operador lineal El operador D_x se comporta muy bien cuando se aplica a múltiplos constantes de funciones o sumas de funciones.

Teorema D **Regla del múltiplo constante**

Si k es una constante f es una función derivable, entonces $(kf)'(x) = k \cdot f'(x)$; esto es,

$$D_x[k \cdot f(x)] = k \cdot D_x f(x)$$

En palabras, *una constante k, que multiplica, puede "sacarse" del operador D_x.*

Demostración Sea $F(x) = k \cdot f(x)$. Entonces

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k \cdot f(x+h) - k \cdot f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} k \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= k \cdot f'(x)$$

El penúltimo paso fue fundamental. Pudimos pasar k a través del signo de límite a consecuencia del teorema principal de límites parte 3. ■

Ejemplos que ilustran este resultado son

$$D_x(-7x^3) = -7D_x(x^3) = -7 \cdot 3x^2 = -21x^2$$

y

$$D_x\left(\tfrac{4}{3}x^9\right) = \tfrac{4}{3}D_x(x^9) = \tfrac{4}{3} \cdot 9x^8 = 12x^8$$

Teorema E Regla para la suma

Si f y g son funciones derivables, entonces $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$; esto es,

$$D_x\left[f(x) + g(x)\right] = D_x f(x) + D_x g(x)$$

En palabras, *la derivada de una suma es la suma de las derivadas.*

Demostración Sea $F(x) = f(x) + g(x)$. Entonces

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\left[f(x+h) + g(x+h)\right] - \left[f(x) + g(x)\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x) + g'(x)$$

Nuevamente, el penúltimo paso fue el fundamental. Está justificado por el teorema principal de límites parte 4. ■

Operador lineal

El significado fundamental de la palabra *lineal*, como se utiliza en matemáticas, es el que se da en esta sección. Un operador L es lineal si satisface las dos condiciones clave:

- $L(ku) = kL(u)$
- $L(u + v) = L(u) + L(v)$

Los operadores lineales desempeñan un papel central en el curso de *álgebra lineal*, que muchos lectores de esta obra cursarán.

Funciones de la forma $f(x) = mx + b$ se denominan *funciones lineales* a consecuencia de su relación con líneas rectas. Esta terminología puede ser confusa, ya que no todas las funciones lineales son lineales, en el sentido de operadores. Para ver esto, observe que

$$f(kx) = m(kx) + b$$

mientras que

$$kf(x) = k(mx + b)$$

Por lo tanto, $f(kx) \neq kf(x)$ a menos que b sea cero.

Cualquier operador L con la propiedad establecida en los teoremas D y E se denomina *lineal*; esto es, L es un **operador lineal** si para todas las funciones f y g:

1. $L(kf) = kL(f)$, para toda constante k;
2. $L(f + g) = L(f) + L(g)$.

Los operadores lineales aparecerán una y otra vez en este texto: D_x es un ejemplo particularmente importante. Un operador lineal siempre satisface la regla de diferencia $L(f - g) = L(f) - L(g)$, establecida enseguida para D_x.

Teorema F Regla para la diferencia

Si f y g son funciones derivables, entonces $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$; esto es,

$$D_x\left[f(x) - g(x)\right] = D_x f(x) - D_x g(x)$$

La demostración del teorema F se deja como ejercicio (véase el problema 54).

EJEMPLO 1 Encuentre las derivadas de $5x^2 + 7x - 6$ y $4x^6 - 3x^5 - 10x^2 + 5x + 16$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} D_x(5x^2 + 7x - 6) &= D_x(5x^2 + 7x) - D_x(6) && \text{(Teorema F)} \\ &= D_x(5x^2) + D_x(7x) - D_x(6) && \text{(Teorema E)} \\ &= 5D_x(x^2) + 7D_x(x) - D_x(6) && \text{(Teorema D)} \\ &= 5 \cdot 2x + 7 \cdot 1 - 0 && \text{(Teoremas C, B, A)} \\ &= 10x + 7 \end{aligned}$$

Para encontrar la derivada siguiente, notamos que los teoremas de sumas y diferencias se extienden a cualquier número finito de términos. Así,

$$\begin{aligned} &D_x(4x^6 - 3x^5 - 10x^2 + 5x + 16) \\ &\quad = D_x(4x^6) - D_x(3x^5) - D_x(10x^2) + D_x(5x) + D_x(16) \\ &\quad = 4D_x(x^6) - 3D_x(x^5) - 10D_x(x^2) + 5D_x(x) + D_x(16) \\ &\quad = 4(6x^5) - 3(5x^4) - 10(2x) + 5(1) + 0 \\ &\quad = 24x^5 - 15x^4 - 20x + 5 \end{aligned}$$

■

El método del ejemplo 1 nos permite encontrar la derivada de cualquier polinomio. Si conocemos la regla de la potencias y hacemos que se vuelva natural, casi seguramente usted obtendrá el resultado correcto. También, con la práctica, encontrará que puede escribir la derivada de manera inmediata, sin tener que escribir todos los pasos intermedios.

Reglas para el producto y el cociente Ahora tendremos una sorpresa. Hasta aquí, hemos visto que el límite de una suma o diferencia es igual a la suma o diferencia de los límites (teorema 1.3A, partes 4 y 5); el límite de un producto o de un cociente es el producto o el cociente de los límites (teorema 1.3A, partes 6 y 7), y que la derivada de una suma o diferencia es la suma o diferencia de las derivadas (teoremas E y F). Así, ¿qué podría ser más natural que tener que la derivada de un producto es el producto de las derivadas?

Esto podría parecer natural, pero es erróneo. Para ver por qué, mírese el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Sea $g(x) = x$, $h(x) = 1 + 2x$, y $f(x) = g(x) \cdot h(x) = x(1 + 2x)$. Encuentre $D_xf(x)$, $D_xg(x)$, y $D_xh(x)$, y demuestre que $D_xf(x) \neq [D_xg(x)][D_xh(x)]$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} D_xf(x) &= D_x[x(1 + 2x)] \\ &= D_x(x + 2x^2) \\ &= 1 + 4x \\ D_xg(x) &= D_xx = 1 \\ D_xh(x) &= D_x(1 + 2x) = 2 \end{aligned}$$

Obsérvese que

$$D_x(g(x))D_x(h(x)) = 1 \cdot 2 = 2$$

mientras que

$$D_xf(x) = D_x[g(x)h(x)] = 1 + 4x$$

Por lo tanto, $D_xf(x) \neq [D_xg(x)][D_xh(x)]$. ■

Que la derivada de un producto debe ser el producto de las derivadas parecía tan natural que, incluso, engañó a Gottfried Wilhelm von Leibniz, uno de los descubridores del cálculo. En un manuscrito del 11 de noviembre de 1675, Leibniz calculó la derivada del producto de dos funciones y dijo (sin verificarlo) que era igual al producto de las derivadas. Diez días después, se dio cuenta del error y dio la regla correcta para el producto, que presentamos como teorema G.

Memorización

Algunas personas dicen que la memorización está pasada de moda y que sólo el razonamiento lógico es importante en matemáticas. Están equivocadas. Algunas cosas, (incluso, las reglas de esta sección) deben convertirse en parte de nuestro aparato mental para que puedan utilizarse sin detenerse a reflexionar.

"La civilización avanza extendiendo el número de operaciones importantes que podemos realizar sin pensar acerca de ellas".

Alfred N. Whitehead

Teorema G **Regla para el producto**

Si f y g son funciones derivables, entonces

$$(f \cdot g)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Esto es,

$$D_x[f(x)g(x)] = f(x)D_x g(x) + g(x)D_x f(x)$$

Esta regla debe ser memorizada en palabras como sigue: *la derivada de un producto de dos funciones es la primera por la derivada de la segunda, más la segunda por la derivada de la primera.*

Demostración Sea $F(x) = f(x)g(x)$. Entonces

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[f(x+h) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\
&= \lim_{h\to 0} f(x+h) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= f(x)g'(x) + g(x)f'(x)
\end{aligned}$$

La deducción que se acaba de dar depende, primero, del truco de sumar y restar la misma cosa, es decir, $f(x + h)g(x)$. Segundo, casi al final, utilizamos el hecho de que

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$$

Esto es sólo una aplicación del teorema 2.2A (que dice que la derivabilidad en un punto implica continuidad allí) y la definición de continuidad en un punto. ■

EJEMPLO 3 Encuentre la derivada de $(3x^2 - 5)(2x^4 - x)$ mediante el uso de la regla del producto. Verifique su respuesta resolviendo el problema de una forma diferente.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
D_x\left[(3x^2 - 5)(2x^4 - x)\right] &= (3x^2 - 5)D_x(2x^4 - x) + (2x^4 - x)D_x(3x^2 - 5) \\
&= (3x^2 - 5)(8x^3 - 1) + (2x^4 - x)(6x) \\
&= 24x^5 - 3x^2 - 40x^3 + 5 + 12x^5 - 6x^2 \\
&= 36x^5 - 40x^3 - 9x^2 + 5
\end{aligned}$$

Para verificar, primero multipliquemos y luego tomemos la derivada.

$$(3x^2 - 5)(2x^4 - x) = 6x^6 - 10x^4 - 3x^3 + 5x$$

Así,

$$\begin{aligned} D_x\left[(3x^2-5)(2x^4-x)\right] &= D_x(6x^6) - D_x(10x^4) - D_x(3x^3) + D_x(5x) \\ &= 36x^5 - 40x^3 - 9x^2 + 5 \end{aligned}$$ ■

Teorema H **Regla para el cociente**

Sean f y g funciones derivables con $g(x) \neq 0$. Entonces

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Es decir,

$$D_x\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)D_xf(x) - f(x)D_xg(x)}{g^2(x)}$$

Le recomendamos ampliamente que lo memorice en palabras como sigue: *la derivada de un cociente es igual al denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador, todo dividido entre el cuadrado del denominador.*

Demostración Sea $F(x) = f(x)/g(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} \cdot \frac{1}{g(x)g(x+h)} \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{g(x)f(x+h) - g(x)f(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h} \right. \\ &\qquad\qquad \left. \cdot \frac{1}{g(x)g(x+h)}\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \left\{\left[g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]\frac{1}{g(x)g(x+h)}\right\} \\ &= \left[g(x)f'(x) - f(x)g'(x)\right]\frac{1}{g(x)g(x)} \end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 4 Encuentre $\dfrac{d}{dx}\dfrac{(3x-5)}{(x^2+7)}$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[\frac{3x-5}{x^2+7}\right] &= \frac{(x^2+7)\dfrac{d}{dx}(3x-5) - (3x-5)\dfrac{d}{dx}(x^2+7)}{(x^2+7)^2} \\ &= \frac{(x^2+7)(3) - (3x-5)(2x)}{(x^2+7)^2} \\ &= \frac{-3x^2 + 10x + 21}{(x^2+7)^2} \end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 5 Encuentre $D_x y$ si $y = \dfrac{2}{x^4 + 1} + \dfrac{3}{x}$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} D_x y &= D_x\left(\frac{2}{x^4+1}\right) + D_x\left(\frac{3}{x}\right) \\ &= \frac{(x^4+1)D_x(2) - 2D_x(x^4+1)}{(x^4+1)^2} + \frac{xD_x(3) - 3D_x(x)}{x^2} \\ &= \frac{(x^4+1)(0) - (2)(4x^3)}{(x^4+1)^2} + \frac{(x)(0) - (3)(1)}{x^2} \\ &= \frac{-8x^3}{(x^4+1)^2} - \frac{3}{x^2} \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6 Demuestre que la regla para la potencia se cumple para exponentes enteros negativos, es decir,

$$\boxed{D_x\left(x^{-n}\right) = -nx^{-n-1}}$$

$$D_x(x^{-n}) = D_x\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{x^n \cdot 0 - 1 \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$$

■

Como parte del ejemplo 5, vimos que $D_x(3/x) = -3/x^2$. Ahora tenemos otra forma de ver la misma cosa.

Revisión de conceptos

1. La derivada de un producto de dos funciones es la primera por ____ más la ____ por la derivada de la primera. En símbolos, $D_x[f(x)g(x)] =$ ____.

2. La derivada de un cociente es el ____ por la derivada del numerador, menos el numerador por la derivada del ____, todo dividido entre el ____. En símbolos, $D_x[f(x)/g(x)] =$ ____.

3. El segundo término (el término que incluye a h) en la expansión de $(x + h)^n$ es ____. Este hecho lleva a la fórmula $D_x[x^n] =$ ____.

4. L se denomina operador lineal, si $L(kf) =$ ____ y $L(f + g) =$ ____. El operador de derivación denotado por ____ es un operador lineal.

Conjunto de problemas 2.3

En los problemas del 1 al 44, encuentre $D_x y$ mediante las reglas de esta sección.

1. $y = 2x^2$

2. $y = 3x^3$

3. $y = \pi x$

4. $y = \pi x^3$

5. $y = 2x^{-2}$

6. $y = -3x^{-4}$

7. $y = \dfrac{\pi}{x}$

8. $y = \dfrac{\alpha}{x^3}$

9. $y = \dfrac{100}{x^5}$

10. $y = \dfrac{3\alpha}{4x^5}$

11. $y = x^2 + 2x$

12. $y = 3x^4 + x^3$

13. $y = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

14. $y = 3x^4 - 2x^3 - 5x^2 + \pi x + \pi^2$

15. $y = \pi x^7 - 2x^5 - 5x^{-2}$

16. $y = x^{12} + 5x^{-2} - \pi x^{-10}$

17. $y = \dfrac{3}{x^3} + x^{-4}$

18. $y = 2x^{-6} + x^{-1}$

19. $y = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}$

20. $y = \dfrac{3}{x^3} - \dfrac{1}{x^4}$

21. $y = \dfrac{1}{2x} + 2x$

22. $y = \dfrac{2}{3x} - \dfrac{2}{3}$

23. $y = x(x^2 + 1)$

24. $y = 3x(x^3 - 1)$

25. $y = (2x + 1)^2$

26. $y = (-3x + 2)^2$

27. $y = (x^2 + 2)(x^3 + 1)$

28. $y = (x^4 - 1)(x^2 + 1)$

29. $y = (x^2 + 17)(x^3 - 3x + 1)$

30. $y = (x^4 + 2x)(x^3 + 2x^2 + 1)$

31. $y = (5x^2 - 7)(3x^2 - 2x + 1)$

32. $y = (3x^2 + 2x)(x^4 - 3x + 1)$

33. $y = \dfrac{1}{3x^2 + 1}$ **34.** $y = \dfrac{2}{5x^2 - 1}$

35. $y = \dfrac{1}{4x^2 - 3x + 9}$ **36.** $y = \dfrac{4}{2x^3 - 3x}$

37. $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$ **38.** $y = \dfrac{2x - 1}{x - 1}$

39. $y = \dfrac{2x^2 - 1}{3x + 5}$ **40.** $y = \dfrac{5x - 4}{3x^2 + 1}$

41. $y = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{2x + 1}$ **42.** $y = \dfrac{5x^2 + 2x - 6}{3x - 1}$

43. $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$ **44.** $y = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 2x - 3}$

45. Si $f(0) = 4, f'(0) = -1, g(0) = -3$, y $g'(0) = 5$, encuentre (a) $(f \cdot g)'(0)$ (b) $(f + g)'(0)$ (c) $(f/g)'(0)$

46. Si $f(3) = 7, f'(3) = 2, g(3) = 6$, y $g'(3) = -10$, encuentre (a) $(f - g)'(3)$ (b) $(f \cdot g)'(3)$ (c) $(g/f)'(3)$

47. Utilice la regla del producto para mostrar que $D_x[f(x)]^2 = 2 \cdot f(x) \cdot D_x f(x)$.

EXPL **48.** Desarrolle una regla para $D_x[f(x)g(x)h(x)]$.

49. Encuentre la ecuación de la recta tangente a $y = x^2 - 2x + 2$ en el punto $(1, 1)$.

50. Encuentre la ecuación de la recta tangente a $y = 1/(x^2 + 4)$ en el punto $(1, 1/5)$.

51. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $y = x^3 - x^2$, donde la recta tangente es horizontal.

52. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x$, en donde la recta tangente tenga pendiente 1.

53. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $y = 100/x^5$, donde la recta tangente sea perpendicular a la recta $y = x$.

54. Demuestre el teorema F de dos formas.

55. La altura, s, medida en pies, a la que se encuentra un balón, por encima del suelo a los t segundos está dada por $s = -16t^2 + 40t + 100$.

(a) ¿Cuál es su velocidad instantánea en $t = 2$?

(b) ¿Cuándo su velocidad instantánea es cero?

56. Una pelota rueda hacia abajo a lo largo de un plano inclinado, de modo que su distancia s desde su punto de inicio después de t segundos es $s = 4.5t^2 + 2t$ pies. ¿Cuándo su velocidad instantánea será de 30 pies por segundo?

≈ **57.** Existen dos rectas tangentes a la curva $y = 4x - x^2$ que pasan por el punto $(2, 5)$. Encuentre las ecuaciones de ambas. *Sugerencia*: sea (x_0, y_0) un punto de tangencia. Determine dos condiciones que (x_0, y_0) debe satisfacer. Véase la figura 4.

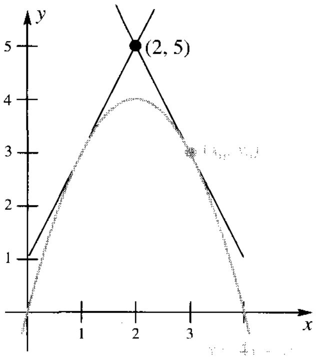


Figura 4

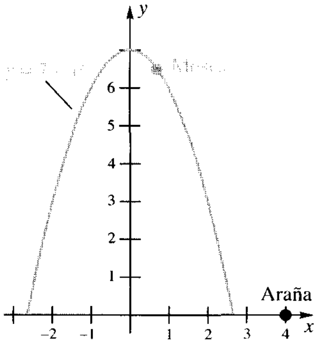


Figura 5

≈ **58.** Una viajera espacial se mueve de izquierda a derecha a lo largo de la curva $y = x^2$. Cuando apague los motores, continuará viajando a lo largo de la recta tangente en el punto en que ella esté en ese momento. ¿En qué momento debe apagar los motores para que alcance el punto $(4, 15)$?

≈ **59.** Una mosca se arrastra de izquierda a derecha a lo largo de la parte superior de la curva $y = 7 - x^2$ (véase la figura 5). Una araña espera en el punto $(4, 0)$. Determine la distancia entre los dos insectos cuando se ven por primera vez.

60. Sea $P(a, b)$ un punto en la parte del primer cuadrante de la curva $y = 1/x$ suponga que la recta tangente en P interseca al eje x en A. Demuestre que el triángulo AOP es isósceles y determine su área.

61. El radio de una sandia esférica está creciendo a una velocidad constante de 2 centímetros por semana. El grosor de la cáscara siempre es la décima parte del radio. ¿Qué tan rápido está creciendo el volumen de la cáscara al final de la quinta semana? Suponga que el radio inicialmente es cero.

CAS **62.** Vuelva a resolver los problemas del 29 al 44 en una computadora y compare sus respuestas con las obtenidas de forma manual.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** la derivada de la segunda; segunda; $f(x)D_x g(x) + g(x)D_x f(x)$ **2.** denominador, denominador; cuadrado del denominador; $[g(x)D_x f(x) - f(x)D_x g(x)]/g^2(x)$ **3.** $nx^{n-1}h$; nx^{n-1} **4.** $kL(f)$; $L(f) + L(g)$; D_x

---

2.4

Derivadas de funciones trigonométricas

La figura 1 nos recuerda la definición de las funciones seno y coseno. En lo que sigue, t debe considerarse como un número que mide la longitud de un arco en el círculo unitario o, de forma equivalente, como el número de radianes en el ángulo correspondiente. Por lo tanto, $f(t) = \operatorname{sen} t$ y $g(t) = \cos t$ son funciones para las cuales tanto el dominio como el rango son conjuntos de números reales. Podemos considerar el problema de determinar sus derivadas.

Fórmulas de las derivadas Elegimos utilizar x en lugar de t como nuestra variable básica. Para determinar $D_x(\operatorname{sen} x)$, apelamos a la definición de la derivada y utilizamos la identidad de suma de ángulos para $\operatorname{sen}(x + h)$.

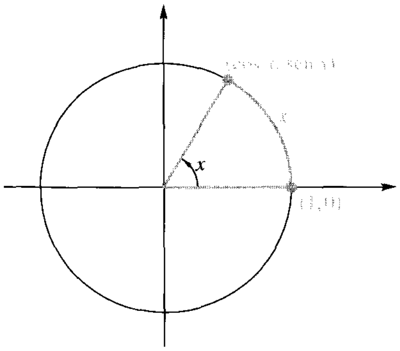


Figura 1

$$D_x(\operatorname{sen} x) = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(-\operatorname{sen} x \frac{1 - \cos h}{h} + \cos x \frac{\operatorname{sen} h}{h} \right)$$

$$= (-\operatorname{sen} x)\left[\lim_{h \to 0} \frac{1 - \cos h}{h}\right] + (\cos x)\left[\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}\right]$$

Observe que los dos límites en esta última expresión son exactamente los límites estudiados en la sección 1.4. En el teorema 1.4B demostramos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{h \to 0} \frac{1 - \cos h}{h} = 0$$

Por consiguiente,

$$D_x(\operatorname{sen} x) = (-\operatorname{sen} x) \cdot 0 + (\cos x) \cdot 1 = \cos x$$

De manera análoga,

$$D_x(\cos x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(-\cos x \frac{1 - \cos h}{h} - \operatorname{sen} x \frac{\operatorname{sen} h}{h} \right)$$

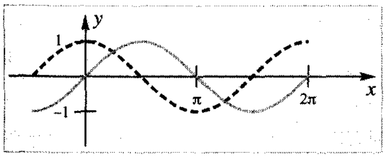
$$= (-\cos x) \cdot 0 - (\operatorname{sen} x) \cdot 1$$

$$= -\operatorname{sen} x$$

Resumimos estos resultados en un teorema importante.

¿Pudo haber adivinado?

La curva con línea continua es la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$. Observe que la pendiente es 1 en 0, 0 en $\pi/2$, -1 en π y así sucesivamente. Cuando graficamos la función de las pendientes (la derivada), obtenemos la curva con línea discontinua. ¿Pudo haber adivinado que $D_x \operatorname{sen} x = \cos x$?



Trate de graficar estas dos funciones en la misma ventana en su CAS o en su calculadora gráfica.

Teorema A

Las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ son derivables y,

$$D_x(\operatorname{sen} x) = \cos x \qquad D_x(\cos x) = -\operatorname{sen} x$$

EJEMPLO 1 Encuentre $D_x(3 \operatorname{sen} x - 2 \cos x)$.

SOLUCIÓN

$$D_x(3 \operatorname{sen} x - 2 \cos x) = 3D_x(\operatorname{sen} x) - 2D_x(\cos x)$$
$$= 3 \cos x + 2 \operatorname{sen} x$$

■

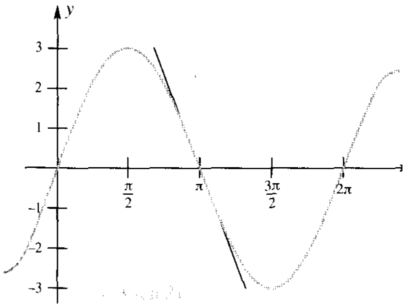


Figura 2

EJEMPLO 2 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = 3 \operatorname{sen} x$ en el punto $(\pi, 0)$. (Véase la figura 2.)

SOLUCIÓN La derivada es $\frac{dy}{dx} = 3 \cos x$, así que cuando $x = \pi$, la pendiente es $3 \cos \pi = -3$. Mediante la forma punto pendiente para la recta determinamos que una ecuación de la recta tangente es

$$y - 0 = -3(x - \pi)$$
$$y = -3x + 3\pi$$ ■

Las reglas del producto y del cociente son útiles al evaluar derivadas de funciones que incluyan a las funciones trigonométricas.

EJEMPLO 3 Determine $D_x(x^2 \operatorname{sen} x)$.

SOLUCIÓN Aquí se necesita la regla del producto.

$$D_x(x^2 \operatorname{sen} x) = x^2 D_x(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} x(D_x x^2) = x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x$$ ■

EJEMPLO 4 Determine $\frac{d}{dx}\left(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}\right)$.

SOLUCIÓN Para este problema es necesaria la regla del cociente.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}\right) &= \frac{\cos x\left(\frac{d}{dx}(1 + \operatorname{sen} x)\right) - (1 + \operatorname{sen} x)\left(\frac{d}{dx}\cos x\right)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 5 En el instante t segundos el centro de un corcho, que está flotando en el agua, es $y = 2 \operatorname{sen} t$ centímetros por arriba (o por debajo) del nivel del agua. ¿Cuál es la velocidad del corcho en $t = 0, \pi/2, \pi$?

SOLUCIÓN La velocidad es la derivada de la posición y $\frac{dy}{dt} = 2 \cos t$. Por lo tanto, cuando $t = 0, \frac{dy}{dt} = 2 \cos 0 = 2$, cuando $t = \pi/2, \frac{dy}{dt} = 2 \cos \frac{\pi}{2} = 0$, y cuando $t = \pi, \frac{dy}{dt} = 2 \cos \pi = -2$. ■

Como las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante están definidas en términos de las funciones seno y coseno, las derivadas de estas funciones pueden obtenerse con base en el teorema A mediante la aplicación de la regla del cociente. Los resultados se resumen en el teorema B; véanse los problemas del 5 al 8.

Teorema B

Para todos los puntos x en el dominio de la función,

$$D_x \tan x = \sec^2 x \qquad D_x \cot x = -\csc^2 x$$
$$D_x \sec x = \sec x \tan x \qquad D_x \csc x = -\csc x \cot x$$

EJEMPLO 6 Determine $D_x(x^n \tan x)$ para $n \geq 1$.

SOLUCIÓN Aplicamos la regla del producto junto con el teorema B.

$$\begin{aligned}D_x(x^n \tan x) &= x^n D_x(\tan x) + \tan x(D_x x^n) \\ &= x^n \sec^2 x + nx^{n-1} \tan x\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 7 Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = \tan x$ en el punto $(\pi/4, 1)$.

SOLUCIÓN La derivada de $y = \tan x$ es $\dfrac{dy}{dx} = \sec^2 x$. Cuando $x = \pi/4$, la derivada es igual a $\sec^2 \dfrac{\pi}{4} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2$. Así que la recta requerida tiene pendiente 2 y pasa por $(\pi/4, 1)$. Por lo tanto,

$$y - 1 = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = 2x - \frac{\pi}{2} + 1$$

■

EJEMPLO 8 Determine todos los puntos en la gráfica de $y = \operatorname{sen}^2 x$ donde la recta tangente es horizontal.

SOLUCIÓN La recta tangente es horizontal cuando la derivada es igual a cero. Para obtener la derivada de $\operatorname{sen}^2 x$, utilizamos la regla del producto.

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^2 x = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x \operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x \cos x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

El producto de sen x y cos x es igual a cero cuando sen x o cos x son iguales a cero; esto es, en $x = 0, \pm\dfrac{\pi}{2}, \pm\pi, \pm\dfrac{3\pi}{2}, \ldots$. ■

Revisión de conceptos

1. Por la definición, $D_x(\operatorname{sen} x) = \lim_{h\to 0}$ _____.

2. Para evaluar el límite en la proposición anterior, primero utilizamos la identidad de la suma de ángulos para la función seno y luego realizamos un poco de álgebra para obtener

$$D_x(\operatorname{sen} x) = (-\operatorname{sen} x)\left(\lim_{h\to 0}\frac{1 - \cos h}{h}\right) + (\cos x)\left(\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)$$

Los dos límites mostrados tienen los valores _____ y _____, respectivamente.

3. El resultado del cálculo en la proposición anterior es la importante fórmula de la derivada $D_x(\operatorname{sen} x) =$ _____. La correspondiente fórmula para la derivada $D_x(\cos x) =$ _____ se obtiene de manera análoga.

4. En $x = \pi/3$, $D_x(\operatorname{sen} x)$ tiene el valor _____. Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a $y = \operatorname{sen} x$ en $x = \pi/3$ es _____.

Conjunto de problemas 2.4

En los problemas del 1 al 18 encuentre $D_x y$.

1. $y = 2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x$

2. $y = \operatorname{sen}^2 x$

3. $y = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$

4. $y = 1 - \cos^2 x$

5. $y = \sec x = 1/\cos x$

6. $y = \csc x = 1/\operatorname{sen} x$

7. $y = \tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

8. $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

9. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x}$

10. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\tan x}$

11. $y = \operatorname{sen} x \cos x$

12. $y = \operatorname{sen} x \tan x$

13. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

14. $y = \dfrac{1 - \cos x}{x}$

15. $y = x^2 \cos x$

16. $y = \dfrac{x \cos x + \operatorname{sen} x}{x^2 + 1}$

17. $y = \tan^2 x$

18. $y = \sec^3 x$

$\boxed{C}$ **19.** Encuentre la ecuación de la recta tangente a $y = \cos x$ en $x = 1$.

20. Encuentre la ecuación de la recta tangente a $y = \cot x$ en $x = \dfrac{\pi}{4}$.

21. Utilice la identidad trigonométrica $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ junto con la regla del producto para determinar $D_x \operatorname{sen} 2x$.

22. Utilice la identidad trigonométrica $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ junto con la regla del producto para determinar $D_x \cos 2x$.

23. Una rueda de la fortuna de 30 pies de radio está girando en sentido contrario a las manecillas del reloj, a una velocidad angular de 2 radianes por segundo. ¿Qué tan rápido se eleva (verticalmente) un asiento en el borde de la rueda cuando está 15 pies por encima de la recta horizontal que pasa por el centro de la rueda? *Sugerencia:* use el resultado del problema 21.

24. Una rueda de la fortuna de 20 pies de radio está girando en sentido contrario a las manecillas del reloj, a una velocidad angular de 1 radián por segundo. Un asiento en el borde de la rueda está en $(20, 0)$ en $t = 0$.

(a) ¿Cuáles son sus coordenadas en $t = \pi/6$?

(b) ¿Qué tan rápido se está elevando (verticalmente) en $t = \pi/6$?

(c) ¿Qué tan rápido se está elevando (verticalmente) cuando lo hace a la velocidad máxima?

25. Encuentre la ecuación de la recta tangente a $y = \tan x$ en $x = 0$.

26. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $y = \tan^2 x$, donde la recta tangente es horizontal.

27. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $y = 9 \operatorname{sen} x \cos x$, donde la recta tangente es horizontal.

28. Sea $f(x) = x - \operatorname{sen} x$. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $y = f(x)$, donde la recta tangente es horizontal. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $y = f(x)$, donde la recta tangente tiene pendiente 2

29. Demuestre que las curvas $y = \sqrt{2} \operatorname{sen} x$ y $y = \sqrt{2} \cos x$ se intersecan en ángulos rectos sobre cierto punto, con $0 < x < \pi/2$.

30. A los t segundos, el centro de un corcho que se balancea está $3 \operatorname{sen} 2t$ centímetros arriba (o abajo) del nivel del agua. ¿Cuál es la velocidad del corcho en $t = 0, \pi/2, \pi$?

31. Utilice la definición de la derivada para demostrar que $D_x(\operatorname{sen} x^2) = 2x \cos x^2$.

32. Utilice la definición de la derivada para demostrar que $D_x(\operatorname{sen} 5x) = 5 \cos 5x$

GC *Los problemas 33 y 34 son ejercicios para computadora o calculadora gráfica.*

33. Sea $f(x) = x \operatorname{sen} x$.

(a) Dibuje las gráficas de $f(x)$ y de $f'(x)$ en $[\pi, 6\pi]$.

(b) ¿Cuántas soluciones tiene $f(x) = 0$ en $[\pi, 6\pi]$? ¿Cuántas soluciones tiene $f'(x) = 0$ en este intervalo?

(c) ¿En la siguiente conjetura, qué es incorrecto? Si f y f' son funciones continuas y derivables en $[a, b]$, si $f(a) = f(b) = 0$, y si $f(x) = 0$ tiene exactamente n soluciones en $[a, b]$, entonces $f'(x) = 0$ tiene exactamente $n - 1$ soluciones en $[a, b]$.

(d) Determine el valor máximo de $|f(x) - f'(x)|$ en $[\pi, 6\pi]$.

34. Sea $f(x) = \cos^3 x - 1.25 \cos^2 x + 0.225$. Determine $f'(x_0)$ en el punto x_0 en $[\pi/2, \pi]$ donde $f(x_0) = 0$.

Respuestas a la revisión de conceptos:
1. $[\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x]/h$ **2.** 0; 1
3. $\cos x; -\operatorname{sen} x$ **4.** $\frac{1}{2}$; $y - \sqrt{3}/2 = \frac{1}{2}(x - \pi/3)$

2.5
La regla de la cadena

Imagine que trata de encontrar la derivada de

$$F(x) = (2x^2 - 4x + 1)^{60}$$

Podríamos encontrar la derivada, pero primero tendríamos que multiplicar los 60 factores cuadráticos de $2x^2 - 4x + 1$ y después derivar el polinomio resultante. Y qué tal si trata de encontrar la derivada de

$$G(x) = \operatorname{sen} 3x$$

Podríamos ser capaces de utilizar algunas identidades trigonométricas para reducirla a algo que dependa de sen x y cos x y después usar las reglas de la sección anterior.

Por fortuna, existe un método mejor. Después de aprender la *regla de la cadena*, seremos capaces de escribir las respuestas

$$F'(x) = 60(2x^2 - 4x + 1)^{59}\,(4x - 4)$$

y

$$G'(x) = 3 \cos 3x$$

La regla de la cadena es tan importante que rara vez usted derivará alguna función sin utilizarla.

Derivada de una función compuesta Si David puede mecanografiar dos veces más rápido que María, y María puede mecanografiar tres veces más rápido que José, entonces David puede mecanografiar $2 \times 3 = 6$ veces más rápido que José.

Considere la función compuesta $y = f(g(x))$. Si hacemos $u = g(x)$, entonces podremos pensar en f como una función de u. Suponga que $f(u)$ cambia el doble de rápido que u, y $u = g(x)$ cambia tres veces más rápido que x. ¿Qué tan rápido está cambiando y? Los enunciados "$y = f(u)$ cambia el doble de rápido que u" y "$u = g(x)$ cambia tres veces más rápido que x" pueden volver a enunciarse como

$$\frac{dy}{du} = 2 \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx} = 3$$

Al igual que en el párrafo anterior, parece como si las tasas se multiplicaran; es decir, la tasa de cambio de y con respecto a x debe ser igual a la tasa de cambio de y con respecto a u por la tasa de cambio de u con respecto a x. En otras palabras,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

Esto en realidad es cierto, y haremos un bosquejo de la demostración al final de la sección. El resultado se denomina **regla de la cadena.**

Teorema A **Regla de la cadena**

Sean $y = f(u)$ y $u = g(x)$. Si g es derivable en x y f es derivable en $u = g(x)$, entonces la función compuesta $f \circ g$, definida por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, es derivable en x y

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Esto es,

$$D_x f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

o

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Puede recordar la regla de la cadena de esta manera: *la derivada de una función compuesta es la derivada de la función exterior evaluada en la función interna, por la derivada de la función interna.*

Aplicaciones de la regla de la cadena Empezamos con el ejemplo $(2x^2 - 4x + 1)^{60}$ introducido al inicio de esta sección.

EJEMPLO 1 Si $y = (2x^2 - 4x + 1)^{60}$, encuentre $D_x y$.

SOLUCIÓN Consideramos a y como la sexagésima potencia de una función de x; esto es

$$y = u^{60} \quad \text{y} \quad u = 2x^2 - 4x + 1$$

La función exterior es $f(u) = u^{60}$ y la función interna es $u = g(x) = 2x^2 - 4x + 1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} D_x y &= D_x f(g(x)) \\ &= f'(u)g'(x) \\ &= (60u^{59})(4x - 4) \\ &= 60(2x^2 - 4x + 1)^{59}(4x - 4) \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 Si $y = 1/(2x^5 - 7)^3$, encuentre $\frac{dy}{dx}$.

SOLUCIÓN Considérelo de esta manera.

$$y = \frac{1}{u^3} = u^{-3} \quad \text{y} \quad u = 2x^5 - 7$$

Así,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \\ &= (-3u^{-4})(10x^4) \\ &= \frac{-3}{u^4}\cdot 10x^4 \\ &= \frac{-30x^4}{(2x^5-7)^4} \end{aligned}$$

■

> **Primero el último**
>
> Aquí está una regla informal que puede ayudarle a utilizar las reglas de las derivadas.
>
> *El último paso en el cálculo corresponde al primer paso en la derivación.*
>
> Por ejemplo, el último paso al calcular $(2x+1)^3$, es elevar al cubo $2x+1$, de modo que primero aplicaría la regla de la cadena a la función cúbica. El último paso al calcular
>
> $$\frac{x^2-1}{x^2+1}$$
>
> es tomar el cociente, de modo que la primera regla que se utiliza en la derivación es la regla del cociente.

EJEMPLO 3 Encuentre $D_t\left(\frac{t^3-2t+1}{t^4+3}\right)^{13}$.

SOLUCIÓN El último paso en el cálculo de esta expresión sería elevar la expresión interna al exponente 13. Por lo tanto, iniciamos aplicando la regla de la cadena a la función $y = u^{13}$, donde $u = (t^3-2t+1)/(t^4+3)$. La regla de la cadena seguida de la regla del cociente da

$$\begin{aligned} D_t\left(\frac{t^3-2t+1}{t^4+3}\right)^{13} &= 13\left(\frac{t^3-2t+1}{t^4+3}\right)^{13-1} D_t\left(\frac{t^3-2t+1}{t^4+3}\right) \\ &= 13\left(\frac{t^3-2t+1}{t^4+3}\right)^{12}\frac{(t^4+3)(3t^2-2)-(t^3-2t+1)(4t^3)}{(t^4+3)^2} \\ &= 13\left(\frac{t^3-2t+1}{t^4+3}\right)^{12}\frac{-t^6+6t^4-4t^3+9t^2-6}{(t^4+3)^2} \end{aligned}$$

■

La regla de la cadena simplifica el cálculo de muchas derivadas que incluyen funciones trigonométricas. Aunque es posible derivar $y = \operatorname{sen} 2x$ mediante identidades trigonométricas (véase el problema 21 de la sección anterior), es mucho más sencillo utilizar la regla de la cadena.

EJEMPLO 4 Si $y = \operatorname{sen} 2x$, determine $\frac{dy}{dx}$.

SOLUCIÓN El último paso en el cálculo de esta expresión sería tomar el seno de la cantidad $2x$. Por lo tanto, utilizamos la regla de la cadena sobre la función $y = \operatorname{sen} u$, donde $u = 2x$.

$$\frac{dy}{dx} = (\cos 2x)\left(\frac{d}{dx}2x\right) = 2\cos 2x$$

■

EJEMPLO 5 Determine $F'(y)$, en donde $F(y) = y \operatorname{sen} y^2$

SOLUCIÓN El último paso en el cálculo de esta expresión sería multiplicar y y sen y^2, por lo que iniciamos con la aplicación de la regla del producto. Se necesita la regla de la cadena cuando derivamos sen y^2.

$$\begin{aligned} F'(y) &= yD_y[\operatorname{sen} y^2] + (\operatorname{sen} y^2)D_y(y) \\ &= y(\cos y^2)D_y(y^2) + (\operatorname{sen} y^2)(1) \\ &= 2y^2\cos y^2 + \operatorname{sen} y^2 \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6 Determine $D_x\left(\dfrac{x^2(1-x)^3}{1+x}\right)$.

SOLUCIÓN El último paso en el cálculo de esta expresión sería tomar el cociente. Así, se aplica primero la regla del cociente. Pero observe que cuando tomamos la derivada del numerador, debemos aplicar la regla del producto y luego la regla de la cadena.

$$\begin{aligned}
D_x\left(\frac{x^2(1-x)^3}{1+x}\right) &= \frac{(1+x)D_x(x^2(1-x)^3) - x^2(1-x)^3D_x(1+x)}{(1+x)^2}\\
&= \frac{(1+x)[x^2D_x(1-x)^3 + (1-x)^3D_x(x^2)] - x^2(1-x)^3(1)}{(1+x)^2}\\
&= \frac{(1+x)[x^2(3(1-x)^2(-1)) + (1-x)^3(2x)] - x^2(1-x)^3}{(1+x)^2}\\
&= \frac{(1+x)[-3x^2(1-x)^2 + 2x(1-x)^3] - x^2(1-x)^3}{(1+x)^2}\\
&= \frac{(1+x)(1-x)^2x(2-5x) - x^2(1-x)^3}{(1+x)^2}
\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 7 Determine $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{(2x-1)^3}$.

SOLUCIÓN

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{(2x-1)^3} = \frac{d}{dx}(2x-1)^{-3} = -3(2x-1)^{-3-1}\frac{d}{dx}(2x-1) = -\frac{6}{(2x-1)^4}$$ ■

En este último ejemplo fuimos capaces de evitar la regla del cociente. Si utiliza la regla del cociente, notará que la derivada del numerador es 0, lo cual simplifica el cálculo. (Debe comprobar que la regla del cociente da la misma respuesta anterior). Como regla general, si el numerador de una fracción es una constante, entonces no utilice la regla del cociente; en lugar de eso, escriba el cociente como el producto de una constante y la expresión en el denominador elevada a una potencia negativa; luego aplique la regla de la cadena.

Notación para la derivada

En esta sección hemos utilizado las diferentes notaciones para la derivada, a saber,

$$f'(x)$$

$$\frac{dy}{dx}$$

y

$$D_x f(x)$$

Ahora usted debe estar familiarizado con todas estas notaciones. Todas ellas se utilizarán en el resto del libro.

EJEMPLO 8 Exprese las siguientes derivadas en términos de la función $F(x)$. Suponga que F es derivable.

$$\text{(a) } D_x(F(x^3)) \quad \text{y} \quad \text{(b) } D_x[(F(x))^3]$$

SOLUCIÓN

(a) El último paso en el cálculo de esta expresión sería aplicar la función F. [Aquí, la función interna es $u = x^3$ y la función externa es $F(u)$]. Por lo tanto

$$D_x(F(x^3)) = F'(x^3)D_x(x^3) = 3x^2F'(x^3)$$

(b) Para esta expresión, primero evaluaríamos $F(x)$ y luego elevaríamos al cubo el resultado. [Aquí, la función interna es $u = F(x)$ y la función externa es u^3]. Así que primero aplicamos la regla de la potencia y luego la regla de la cadena.

$$D_x[(F(x))^3] = 3[F(x)]^2D_x(F(x)) = 3[F(x)]^2F'(x)$$ ■

Aplicación de la regla de la cadena más de una vez Algunas veces, cuando aplicamos la regla de la cadena a una función compuesta encontramos que la derivación de la función interna también requiere de la regla de la cadena. En casos como éste, basta con utilizar la regla de la cadena una segunda vez.

EJEMPLO 9 Encuentre $D_x \operatorname{sen}^3(4x)$.

SOLUCIÓN Recuerde que $\operatorname{sen}^3(4x) = [\operatorname{sen}(4x)]^3$, de modo que vemos esto como el cubo de una función de x. Así, al aplicar nuestra regla, "derivada de la función exterior evaluada en la función interior por la derivada de la función interna", tenemos

$$D_x \operatorname{sen}^3(4x) = D_x[\operatorname{sen}(4x)]^3 = 3[\operatorname{sen}(4x)]^{3-1}D_x[\operatorname{sen}(4x)]$$

Ahora aplicamos la regla de la cadena una vez más para la derivada de la función interna.

$$\begin{aligned} D_x \operatorname{sen}^3(4x) &= 3[\operatorname{sen}(4x)]^{3-1}D_x \operatorname{sen}(4x) \\ &= 3[\operatorname{sen}(4x)]^2 \cos(4x) D_x(4x) \\ &= 3[\operatorname{sen}(4x)]^2 \cos(4x)(4) \\ &= 12 \cos(4x) \operatorname{sen}^2(4x) \end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 10 Encuentre $D_x \operatorname{sen}[\cos(x^2)]$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} D_x \operatorname{sen}[\cos(x^2)] &= \cos[\cos(x^2)] \cdot [-\operatorname{sen}(x^2)] \cdot 2x \\ &= -2x \operatorname{sen}(x^2) \cos[\cos(x^2)] \end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 11 Suponga que las gráficas de $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son como se muestran en la figura 1. Utilice estas gráficas para aproximar (a) $(f - g)'(2)$ y (b) $(f \circ g)'(2)$.

SOLUCIÓN

(a) Por el teorema 2.3F, $(f - g)'(2) = f'(2) - g'(2)$. Con base en la figura 1, podemos determinar que $f'(2) \approx 1$ y $g'(2) \approx -\frac{1}{2}$. Por lo tanto,

$$(f - g)'(2) \approx 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

(b) Con base en la figura 1, podemos determinar que $f'(1) \approx \frac{1}{2}$. Por lo tanto, por la regla de la cadena

$$(f \circ g)'(2) = f'(g(2))g'(2) = f'(1)g'(2) \approx \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$ ■

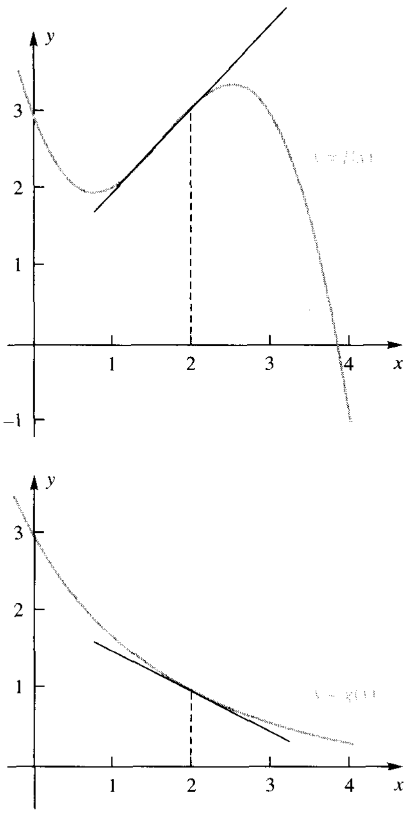


Figura 1

Una demostración parcial de la regla de la cadena

Ahora podemos dar un esbozo de la demostración de la regla de la cadena.

Demostración Supongamos que $y = f(u)$ y $u = g(x)$, que g es derivable en x y que f es derivable en $u = g(x)$. Cuando a x se le da un incremento Δx, existen incrementos correspondientes en u y y dados por

$$\begin{aligned} \Delta u &= g(x + \Delta x) - g(x) \\ \Delta y &= f(g(x + \Delta x)) - f(g(x)) \\ &= f(u + \Delta u) - f(u) \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \end{aligned}$$

Como g es derivable en x, es continua allí (véase el teorema 2.2A), y de este modo $\Delta x \to 0$ fuerza a $\Delta u \to 0$. De aquí que,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Esta demostración es muy directa, pero desafortunadamente contiene un error sutil. Existen funciones $u = g(x)$ con la propiedad de que $\Delta u = 0$ para algunos puntos en toda vecindad de x (la función constante $g(x) = k$ es un buen ejemplo). Esto significa que la división entre Δu en nuestro primer paso podría no ser legal. No hay una forma sencilla de dar la vuelta a esta dificultad, aunque la regla de la cadena es válida, incluso en este caso. Damos una demostración completa de la regla de la cadena en el apéndice (véase la sección A.2, teorema B). ■

Revisión de conceptos

1. Si $y = f(u)$, donde $u = g(t)$, entonces $D_t y = D_u y \cdot$ ______. En notación de funciones, $(f \circ g)'(t) =$ ______ ______.

2. Si $w = G(v)$, donde $v = H(s)$, entonces $D_s w =$ ______ $D_s v$. En notación de funciones $(G \circ H)'(s) =$ ______ ______.

3. $D_x \cos[(f(x))^2] = -\text{sen}($ ______ $) \cdot D_x($ ______ $)$.

4. Si $y = (2x + 1)^3 \,\text{sen}(x^2)$, entonces $D_x y = (2x + 1)^3 \cdot$ ______ $+ \,\text{sen}(x^2) \cdot$ ______.

Conjunto de problemas 2.5

En los problemas del 1 al 20 encuentre $D_x y$.

1. $y = (1 + x)^{15}$

2. $y = (7 + x)^5$

3. $y = (3 - 2x)^5$

4. $y = (4 + 2x^2)^7$

5. $y = (x^3 - 2x^2 + 3x + 1)^{11}$

6. $y = (x^2 - x + 1)^{-7}$

7. $y = \dfrac{1}{(x + 3)^5}$

8. $y = \dfrac{1}{(3x^2 + x - 3)^9}$

9. $y = \text{sen}(x^2 + x)$

10. $y = \cos(3x^2 - 2x)$

11. $y = \cos^3 x$

12. $y = \text{sen}^4(3x^2)$

13. $y = \left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)^3$

14. $y = \left(\dfrac{x - 2}{x - \pi}\right)^{-3}$

15. $y = \cos\left(\dfrac{3x^2}{x + 2}\right)$

16. $y = \cos^3\left(\dfrac{x^2}{1 - x}\right)$

17. $y = (3x - 2)^2(3 - x^2)^2$

18. $y = (2 - 3x^2)^4(x^7 + 3)^3$

19. $y = \dfrac{(x + 1)^2}{3x - 4}$

20. $y = \dfrac{2x - 3}{(x^2 + 4)^2}$

En los problemas del 21 al 28 encuentre la derivada que se indica.

21. y' donde $y = (x^2 + 4)^2$

22. y' donde $y = (x + \text{sen}\, x)^2$

23. $D_t\left(\dfrac{3t - 2}{t + 5}\right)^3$

24. $D_s\left(\dfrac{s^2 - 9}{s + 4}\right)$

25. $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{(3t - 2)^3}{t + 5}\right)$

26. $\dfrac{d}{d\theta}(\text{sen}^3 \theta)$

27. $\dfrac{dy}{dx}$, donde $y = \left(\dfrac{\text{sen}\, x}{\cos 2x}\right)^3$

28. $\dfrac{dy}{dt}$, donde $y = [\text{sen}\, t \tan(t^2 + 1)]$

En los problemas del 29 al 32 evalúe la derivada que se indica.

29. $f'(3)$, si $f(x) = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x + 2}\right)^3$

30. $G'(1)$ si $G(t) = (t^2 + 9)^3(t^2 - 2)^4$

C **31.** $F'(1)$ si $F(t) = \text{sen}(t^2 + 3t + 1)$

32. $g'\left(\frac{1}{2}\right)$ si $g(s) = \cos \pi s \,\text{sen}^2 \pi s$

En los problemas del 33 al 40 aplique la regla de la cadena más de una vez para encontrar la derivada que se indica.

33. $D_x[\text{sen}^4(x^2 + 3x)]$

34. $D_t[\cos^5(4t - 19)]$

35. $D_t[\text{sen}^3(\cos t)]$

36. $D_u\left[\cos^4\left(\dfrac{u + 1}{u - 1}\right)\right]$

37. $D_\theta[\cos^4(\text{sen}\, \theta^2)]$

38. $D_x[x \,\text{sen}^2(2x)]$

39. $\dfrac{d}{dx}\{\text{sen}[\cos(\text{sen}\, 2x)]\}$

40. $\dfrac{d}{dt}\{\cos^2[\cos(\cos t)]\}$

En los problemas 41 al 46 utilice las figuras 2 y 3 para aproximar las expresiones que se indican.

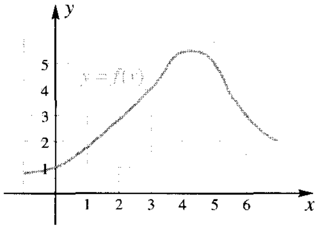


Figura 2

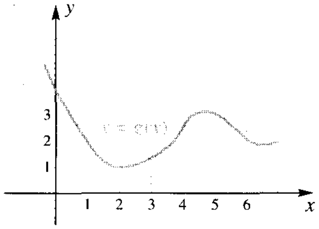


Figura 3

41. $(f + g)'(4)$

42. $(f - 2g)'(2)$

43. $(fg)'(2)$

44. $(f/g)'(2)$

45. $(f \circ g)'(6)$

46. $(g \circ f)'(3)$

En los problemas del 47 al 58 exprese la derivada que se indica en términos de la función $F(x)$. Suponga que F es derivable.

47. $D_x(F(2x))$

48. $D_x(F(x^2 + 1))$

49. $D_t((F(t))^{-2})$

50. $\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{(F(z))^2}\right)$

51. $\dfrac{d}{dz}(1 + (F(2z)))^2$

52. $\dfrac{d}{dy}\left(y^2 + \dfrac{1}{F(y^2)}\right)$

53. $\dfrac{d}{dx}F(\cos x)$

54. $\dfrac{d}{dx}\cos F(x)$

55. $D_x \tan F(2x)$

56. $\dfrac{d}{dx}g(\tan 2x)$

57. $D_x(F(x)\operatorname{sen}^2 F(x))$

58. $D_x \sec^3 F(x)$

59. Dado que $f(0) = 1$ y $f'(0) = 2$, determine $g'(0)$ en donde $g(x) = \cos f(x)$.

60. Dado que $F(0) = 2$ y $F'(0) = -1$, determine $G'(0)$ en donde $G(x) = \dfrac{x}{1 + \sec F(2x)}$.

61. Dado que $f(1) = 2, f'(1) = -1, g(1) = 0$ y $g'(1) = 1$, determine $F'(1)$, en donde $F(x) = f(x) \cos g(x)$.

62. Determine una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = 1 + x \operatorname{sen} 3x$ en $\left(\dfrac{\pi}{3}, 1\right)$. ¿En dónde esta recta corta al eje x?

63. Determine todos los puntos en la gráfica de $y = \operatorname{sen}^2 x$, donde la recta tangente tiene pendiente 1.

64. Encuentre la ecuación de la recta tangente a $y = (x^2 + 1)^3 (x^4 + 1)^2$ en $(1, 32)$.

65. Determine la ecuación de la recta tangente a $y = (x^2 + 1)^{-2}$ en $\left(1, \frac{1}{4}\right)$.

66. ¿En dónde cruza el eje x la recta tangente a $y = (2x + 1)^3$ en $(0, 1)$?

67. La recta tangente a $y = (x^2 + 1)^{-2}$ en $\left(1, \frac{1}{4}\right)$, ¿en dónde cruza el eje x?

68. Un punto P está moviéndose en el plano de modo que sus coordenadas después de t segundos son $(4 \cos 2t, 7 \operatorname{sen} 2t)$, medidas en pies.

(a) Demuestre que P está siguiendo una trayectoria elíptica. *Sugerencia:* demuestre que $(x/4)^2 + (y/7)^2 = 1$, que es una ecuación de una elipse.

(b) Obtenga una expresión para L, la distancia de P al origen en el instante t.

(c) ¿Qué tan rápido está cambiando la distancia entre P y el origen cuando $t = \pi/8$? Necesitará el hecho de que $D_u\left(\sqrt{u}\right) = 1/\left(2\sqrt{u}\right)$ (véase el ejemplo 4 de la sección 2.2).

69. Una rueda con centro en el origen y de radio 10 centímetros gira en sentido contrario a las manecillas del reloj, a una velocidad de 4 revoluciones por segundo. Un punto P en el borde está en $(10, 0)$ cuando $t = 0$.

(a) ¿Cuáles son las coordenadas de P después de t segundos?

(b) ¿A qué velocidad se está elevando (o descendiendo) P en el instante $t = 1$?

70. Considere el dispositivo rueda-pistón de la figura 4. La rueda tiene radio de 1 pie y gira en sentido contrario a las manecillas del reloj, a 2 radianes por segundo. La varilla conectada tiene 5 pies de longitud. El punto P está en $(1, 0)$ cuando $t = 0$

(a) Encuentre las coordenadas de P en el instante t.

(b) Encuentre la ordenada (coordenada y) de Q en el instante t (la abscisa siempre es cero).

(c) Determine la velocidad de Q en el instante t. Necesitará el hecho de que $D_u\left(\sqrt{u}\right) = 1/\left(2\sqrt{u}\right)$.

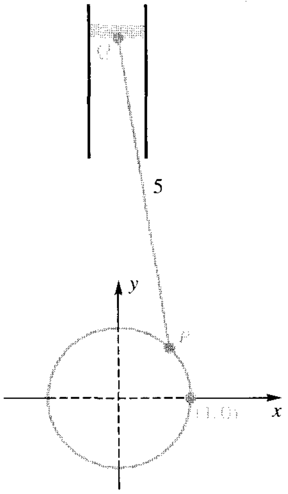


Figura 4

71. Haga el problema 70, suponiendo que la rueda está girando a 60 revoluciones por minuto y t se mide en segundos.

72. La carátula de un reloj común tiene un radio de 10 centímetros. Un extremo de una cuerda elástica se sujeta al borde en el 12 y el otro extremo a la punta del minutero, que es de 10 centímetros de longitud. ¿A qué velocidad se está estirando la cuerda a las 12:15 (suponiendo que el reloj no se retrasa debido a este estiramiento)?

C **73.** El horario y el minutero de un reloj son de 6 y 8 pulgadas de longitud, respectivamente. ¿Qué tan rápido se están separando las manecillas a las 12:20 (véase la figura 5)? *Sugerencia:* ley de los cosenos.

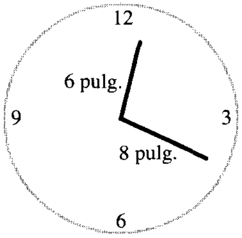


Figura 5

≈ GC **74.** Encuentre el tiempo aproximado entre las 12:00 y la 1:00 cuando la distancia s entre las puntas de las manecillas del reloj de la figura 5 está aumentando más rápidamente, esto es, cuando la derivada ds/dt es mayor.

75. Sea x_0 el valor positivo más pequeño de x en el que las curvas $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \operatorname{sen} 2x$ se intersecan. Determine x_0 y también el ángulo agudo en el que las dos curvas se intersecan en x_0 (véase el problema 40 de la sección 0.7).

76. Un triángulo isósceles está coronado por un semicírculo, como se muestra en la figura 6. Sea D el área del triángulo AOB y E, el área de la región sombreada. Determine una fórmula para D/E en términos de t y luego calcule

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{D}{E} \quad \text{y} \quad \lim_{t \to \pi} \frac{D}{E}$$

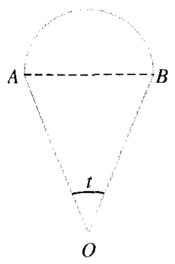


Figura 6

77. Demuestre que $D_x|x| = |x|/x$, $x \neq 0$. *Sugerencia:* Escriba $|x| = \sqrt{x^2}$ y utilice la regla de la cadena con $u = x^2$

78. Aplique el resultado del problema 77 para encontrar $D_x|x^2 - 1|$.

79. Aplique el resultado del problema 77 para encontrar $D_x|\operatorname{sen} x|$.

80. En el capítulo 6 estudiaremos una función L que satisface $L'(x) = 1/x$. Encuentre cada una de las siguientes derivadas.

(a) $D_x(L(x^2))$ (b) $D_x(L(\cos^4 x))$

81. Sea $f(0) = 0$ y $f'(0) = 2$. Encuentre la derivada de $f(f(f(f(x))))$ en $x = 0$

82. Suponga que f es una función derivable.

(a) Encuentre $\dfrac{d}{dx}f(f(x))$. (b) Encuentre $\dfrac{d}{dx}f(f(f(x)))$.

(c) Denótese con $f^{[n]}$ la función definida como sigue $f^{[1]} = f$ y $f^{[n]} = f \circ f^{[n-1]}$ para $n \geq 2$. Por lo que, $f^{[2]} = f \circ f$, $f^{[3]} = f \circ f \circ f$, y así sucesivamente. Con base en sus resultados de las partes (a) y (b), haga una conjetura considerando $\dfrac{d}{dx}f^{[n]}$. Demuestre su conjetura.

83. Proporcione una segunda demostración de la regla del cociente. Escriba

$$D_x\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = D_x\left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)$$

y utilice la regla del producto y la regla de la cadena.

84. Suponga que f es derivable y que existen números reales x_1 y x_2 tales que $f(x_1) = x_2$ y $f(x_2) = x_1$. Sea $g(x) = f(f(f(f(x))))$. Demuestre que $g'(x_1) = g'(x_2)$

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $D_t u$; $f'(g(t))g'(t)$ **2.** $D_v w$; $G'(H(s))H'(s)$ **3.** $(f(x))^2$; $(f(x))^2$ **4.** $2x\cos(x^2)$; $6(2x+1)^2$

2.6
Derivadas de orden superior

La operación de derivación toma una función f y produce una nueva función f'. Si ahora derivamos f', producimos otra función denotada por f'' (léase "f biprima") y denominada **segunda derivada** de f. A su vez, puede derivarse, y de ahí producir f''', que se denomina **tercera derivada** de f, y así sucesivamente. La **cuarta derivada** se denota con $f^{(4)}$, la **quinta derivada** se denota con $f^{(5)}$, etcétera.

Por ejemplo, si

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 8$$

entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 8x + 7 \\ f''(x) &= 12x - 8 \\ f'''(x) &= 12 \\ f^{(4)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

Como la derivada de la función cero es cero, la cuarta derivada y todas las *derivadas de orden superior* de f serán cero.

Hemos introducido tres notaciones para la derivada (ahora también llamada la *primera derivada*) de $y = f(x)$. Son

$$f'(x) \qquad D_x y \qquad \frac{dy}{dx}$$

denominadas, respectivamente, *notación prima*, *notación D* y *notación de Leibniz*. Hay una variación de la notación prima, y', que se utilizará en ocasiones. Todas estas notaciones tienen extensiones para derivadas de orden superior, como se muestra en la siguiente tabla. Observe especialmente que la notación de Leibniz, aunque complicada, le pareció más apropiada a Leibniz. Él pensó que es más natural escribir

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad \text{como} \quad \frac{d^2y}{dx^2}$$

La notación de Leibniz para la segunda derivada se lee *la segunda derivada de y respecto a x.*

Notaciones para las derivadas de $y = f(x)$

Derivada	f' Notación	y' Notación	D Notación	Notación de Leibniz
Primera	$f'(x)$	y'	$D_x y$	$\dfrac{dy}{dx}$
Segunda	$f''(x)$	y''	$D_x^2 y$	$\dfrac{d^2y}{dx^2}$
Tercera	$f'''(x)$	y'''	$D_x^3 y$	$\dfrac{d^3y}{dx^3}$
Cuarta	$f^{(4)}(x)$	$y^{(4)}$	$D_x^4 y$	$\dfrac{d^4y}{dx^4}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n-ésima	$f^{(n)}(x)$	$y^{(n)}$	$D_x^n y$	$\dfrac{d^ny}{dx^n}$

EJEMPLO 1 Si $y = \text{sen } 2x$, encuentre d^3y/dx^3, d^4y/dx^4 y $d^{12}y/dx^{12}$.

SOLUCIÓN

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cos 2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2^2 \text{ sen } 2x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -2^3 \cos 2x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 2^4 \text{ sen } 2x$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = 2^5 \cos 2x$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{12}y}{dx^{12}} = 2^{12} \text{ sen } 2x$$

■

Velocidad y aceleración En la sección 2.1 utilizamos la noción de velocidad instantánea para motivar la definición de la derivada. Revisemos esta noción por medio de un ejemplo. También, a partir de ahora, utilizaremos la sola palabra *velocidad* en lugar de la frase más larga *velocidad instantánea.*

EJEMPLO 2 Un objeto se mueve a lo largo de un eje coordenado, de modo que su posición s satisface $s = 2t^2 - 12t + 8$, donde s se mide en centímetros y t en segundos con $t \geq 0$. Determine la velocidad del objeto cuando $t = 1$ y cuando $t = 6$. ¿En qué momento la velocidad es cero? ¿Cuándo es positiva?

SOLUCIÓN Si utilizamos el símbolo $v(t)$ para la velocidad en el instante t, entonces

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 4t - 12$$

Así,

$$v(1) = 4(1) - 12 = -8 \text{ centímetros por segundo}$$

$$v(6) = 4(6) - 12 = 12 \text{ centímetros por segundo}$$

La velocidad es cero cuando $4t - 12 = 0$, esto es, cuando $t = 3$. La velocidad es positiva cuando $4t - 12 > 0$, o cuando $t > 3$. Todo esto se muestra de manera esquemática en la figura 1.

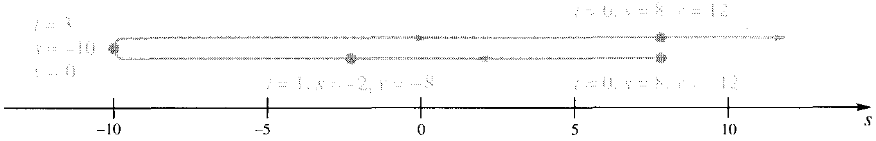


Figura 1

Por supuesto, el objeto está moviéndose a lo largo del eje s, no sobre la trayectoria señalada. Pero la trayectoria señalada muestra lo que le sucede al objeto. Entre $t = 0$ y $t = 3$ la velocidad es negativa; el objeto se mueve hacia la izquierda (regresando). En el instante $t = 3$ se ha "frenado" a una velocidad cero. Después inicia a moverse hacia la derecha conforme su velocidad se vuelve positiva. Así, velocidad negativa corresponde al movimiento en la dirección que disminuye s; velocidad positiva corresponde a moverse en la dirección que aumenta s. Un estudio riguroso de estos puntos se dará en el capítulo 3. ■

Hay una distinción técnica entre las palabras *velocidad* y *rapidez*. La velocidad tiene un signo asociado con ella; puede ser positiva o negativa. **Rapidez** se define como el valor absoluto de la velocidad. Por lo tanto, en el ejemplo anterior, la rapidez en $t = 1$ es $|-8| = 8$ centímetros por segundo. El medidor en la mayoría de los automóviles es un *rapidezómetro*, ya que siempre da valores no negativos (en la sección 11.5 se definirán formalmente velocidad y rapidez).

Ahora queremos dar una interpretación física a la segunda derivada d^2s/dt^2. Por supuesto, sólo es la primera derivada de la velocidad. Así, mide la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo, la cual tiene el nombre de **aceleración**. Si se denota por medio de a, entonces

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}}$$

Medición del tiempo

Si $t = 0$ corresponde al momento presente, entonces $t < 0$ corresponde al pasado, y $t > 0$ al futuro. En muchos problemas, será obvio que sólo estamos interesados con el futuro. Sin embargo, como el enunciado del ejemplo 3 no especifica esto, parece razonable permitir que t tenga tanto valores negativos como positivos.

En el ejemplo 2, $s = 2t^2 - 12t + 8$. Así,

$$v = \frac{ds}{dt} = 4t - 12$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = 4$$

Esto significa que la velocidad está aumentando a una razón constante de 4 centímetros por segundo cada segundo, que podemos escribir como 4 centímetros por segundo por segundo, o 4 cm/seg^2.

EJEMPLO 3 Un objeto se mueve a lo largo de un eje coordenado horizontal de tal manera que su posición en el instante t está especificada por

$$s = t^3 - 12t^2 + 36t - 30$$

Aquí s se mide en pies y t en segundos

(a) ¿Cuándo es cero la velocidad?
(b) ¿Cuándo es positiva la velocidad?
(c) ¿Cuándo se está moviendo el objeto hacia la izquierda (es decir, en la dirección negativa)?
(d) ¿Cuándo es positiva la aceleración?

SOLUCIÓN

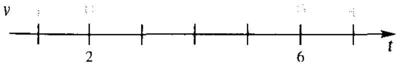


Figura 2

(a) $v = ds/dt = 3t^2 - 24t + 36 = 3(t - 2)(t - 6)$. Así, $v = 0$ en $t = 2$ y en $t = 6$.
(b) $v > 0$ cuando $(t - 2)(t - 6) > 0$. En la sección 0.2 aprendimos cómo resolver desigualdades cuadráticas. La solución es $\{t: t < 2 \text{ o } t > 6\}$ o en notación de intervalos, $(-\infty, 2) \cup (6, \infty)$; véase la figura 2.

(c) El objeto está moviéndose hacia la izquierda cuando $v < 0$; esto es, cuando $(t-2)(t-6) < 0$. Esta desigualdad tiene como solución el intervalo $(2, 6)$.

(d) $a = dv/dt = 6t - 24 = 6(t-4)$. Por lo tanto, $a > 0$ cuando $t > 4$. El movimiento del punto se muestra de manera esquemática en la figura 3.

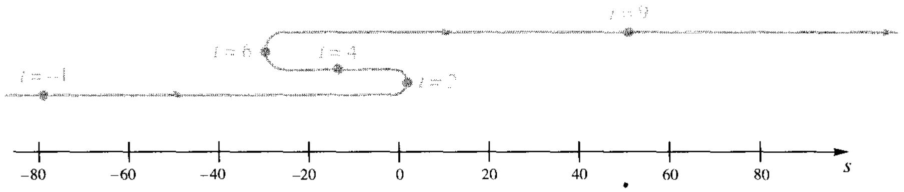


Figura 3

■

Problemas sobre un cuerpo que cae Si un objeto se lanza directamente hacia arriba (o hacia abajo) desde una altura inicial de s_0 pies, con una velocidad inicial v_0 pies por segundo y si s es su altura por arriba del piso en pies después de t segundos, entonces

$$s = -16t^2 + v_0 t + s_0$$

Esto supone que el experimento se lleva a cabo cerca del nivel del mar y que se desprecia la resistencia del aire. El diagrama en la figura 4 describe la situación que tenemos en mente. Obsérvese que velocidad positiva significa que el objeto está moviéndose hacia arriba.

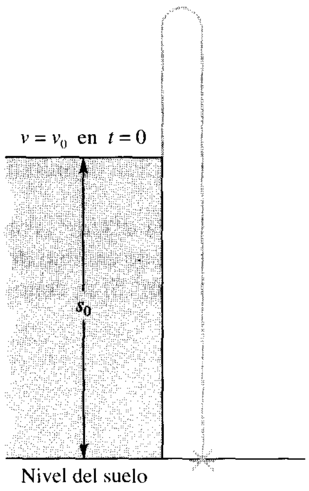


Figura 4

EJEMPLO 4 Desde lo alto de un edificio, de 160 pies de altura, se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 64 pies por segundo.

(a) ¿Cuándo alcanza la altura máxima?
(b) ¿Cuál es su altura máxima?
(c) ¿Cuándo llega al piso?
(d) ¿A qué velocidad llega al piso?
(e) ¿Cuál es su aceleración en $t = 2$?

SOLUCIÓN Suponga que $t = 0$ corresponde al instante cuando la pelota fue lanzada. Entonces $s_0 = 160$ y $v_0 = 64$ (v_0 es positiva, ya que la pelota se lanzó *hacia arriba*)). Así,

$$s = -16t^2 + 64t + 160$$

$$v = \frac{ds}{dt} = -32t + 64$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -32$$

(a) La pelota alcanzó su altura máxima en el instante en que su velocidad fue cero, esto es, cuando $-32t + 64 = 0$ o cuando $t = 2$ segundos

(b) En $t = 2$, $s = -16(2)^2 + 64(2) + 160 = 224$ pies.

(c) La pelota llega al piso cuando $s = 0$, esto es, cuando

$$-16t^2 + 64t + 160 = 0$$

Dividiendo entre -16 se obtiene

$$t^2 - 4t - 10 = 0$$

Entonces, la fórmula cuadrática da

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 40}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{14}}{2} = 2 \pm \sqrt{14}$$

Sólo la respuesta positiva tiene sentido. Así, la pelota llega al piso en $t = 2 + \sqrt{14} \approx 5.74$ segundos.

(d) En $t = 2 + \sqrt{14}$, $v = -32\left(2 + \sqrt{14}\right) + 64 \approx -119.73$. Así, la pelota llega al piso con una rapidez de 119.73 pies por segundo.

(e) La aceleración siempre es −32 pies por segundo por segundo. Ésta es la aceleración debida a la gravedad cerca del mar. ■

Revisión de conceptos

1. Si $y = f(x)$, entonces la tercera derivada de y con respecto a x puede denotarse por cualquiera de los siguientes cuatro símbolos: _____.

2. Si $s = f(t)$ denota la posición de una partícula en un eje coordenado en el instante t, entonces su velocidad está dada por _____, su rapidez está dada por _____, y su aceleración está dada por _____.

3. Si $s = f(t)$ denota la posición de un objeto en el instante t, entonces el objeto está moviéndose hacia la derecha si _____ .

4. Suponga que un objeto se lanza directamente hacia arriba de modo que su altura s en el instante t está dado por $s = f(t)$. El objeto alcanza su altura máxima cuando $ds/dt =$ _____, después del cual ds/dt _____.

Conjunto de problemas 2.6

En los problemas del 1 al 8 encuentre d^3y/dx^3.

1. $y = x^3 + 3x^2 + 6x$

2. $y = x^5 + x^4$

3. $y = (3x + 5)^3$

4. $y = (3 - 5x)^5$

5. $y = \operatorname{sen}(7x)$

6. $y = \operatorname{sen}(x^3)$

7. $y = \dfrac{1}{x - 1}$

8. $y = \dfrac{3x}{1 - x}$

En los problemas del 9 al 16 encuentre $f''(2)$.

9. $f(x) = x^2 + 1$

10. $f(x) = 5x^3 + 2x^2 + x$

11. $f(t) = \dfrac{2}{t}$

12. $f(u) = \dfrac{2u^2}{5 - u}$

13. $f(\theta) = (\cos \theta\pi)^{-2}$

14. $f(t) = t \operatorname{sen}(\pi/t)$

15. $f(s) = s(1 - s^2)^3$

16. $f(x) = \dfrac{(x + 1)^2}{x - 1}$

17. Sea $n! = n(n - 1)(n - 2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$. Por consiguiente, $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$ y $5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$. Damos a $n!$ el nombre de ***n factorial***. Demuestre que $D_x^n(x^n) = n!$

18. Encuentre una fórmula para

$$D_x^n(a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0)$$

19. Sin hacer cálculo alguno, encuentre cada derivada.

(a) $D_x^4(3x^3 + 2x - 19)$

(b) $D_x^{12}(100x^{11} - 79x^{10})$

(c) $D_x^{11}(x^2 - 3)^5$

20. Encuentre una fórmula para $D_x^n(1/x)$.

21. Si $f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x - 6$, encuentre el valor de f'' en cada cero de f', esto es, en cada punto c en donde $f'(c) = 0$

22. Suponga que $g(t) = at^2 + bt + c$ y $g(1) = 5$, $g'(1) = 3$ y $g''(1) = -4$. Encuentre a, b y c.

En los problemas del 23 al 28, un objeto se mueve a lo largo de un eje coordenado horizontal de acuerdo a la fórmula $s = f(t)$, donde s, la distancia dirigida medida desde el origen, está en pies y t está en segundos. En cada caso, responda las siguientes preguntas (véanse los ejemplos 2 y 3).

(a) ¿Cuáles son $v(t)$ y $a(t)$, la velocidad y la aceleración, en el instante t?

(b) ¿Cuándo está moviéndose el objeto hacia la derecha?

(c) ¿Cuándo está moviéndose hacia la izquierda?

(d) ¿Cuándo es negativa su aceleración?

(e) Dibuje un diagrama esquemático que muestre el movimiento del objeto.

23. $s = 12t - 2t^2$

24. $s = t^3 - 6t^2$

25. $s = t^3 - 9t^2 + 24t$

26. $s = 2t^3 - 6t + 5$

27. $s = t^2 + \dfrac{16}{t}, t > 0$

28. $s = t + \dfrac{4}{t}, t > 0$

29. Si $s = \frac{1}{2}t^4 - 5t^3 + 12t^2$, encuentre la velocidad del objeto en movimiento cuando su aceleración es cero.

30. Si $s = \frac{1}{10}(t^4 - 14t^3 + 60t^2)$, encuentre la velocidad del objeto en movimiento cuando su aceleración es cero.

31. Dos objetos se mueven a lo largo de un eje coordenado. Al final de t segundos sus distancias dirigidas desde el origen, en pies, están dadas por $s_1 = 4t - 3t^2$ y $s_2 = t^2 - 2t$, respectivamente.

(a) ¿Cuándo tienen la misma velocidad?

(b) ¿Cuándo tienen la misma rapidez?

(c) ¿Cuál es la altura máxima?

32. Las posiciones de dos objetos, P_1 y P_2, en un eje coordenado al final de t segundos, están dadas por $s_1 = 3t^3 - 12t^2 + 18t + 5$ y $s_2 = -t^3 + 9t^2 - 12t$, respectivamente. ¿Cuándo tienen la misma velocidad los dos objetos?

33. Un objeto que se lanza directamente hacia arriba está a una altura $s = -16t^2 + 48t + 256$ pies después de t segundos (véase el ejemplo 4).

(a) ¿Cuál es su velocidad inicial?

(b) ¿Cuándo alcanza su altura máxima?

(c) ¿Cuál es la altura máxima?

$\boxed{\text{C}}$(d) ¿Cuándo llega al suelo?

$\boxed{\text{C}}$(e) ¿Con qué rapidez llega al suelo?

34. Un objeto lanzado directamente hacia arriba desde el nivel del piso con una velocidad de 48 pies por segundo es $s = 48t - 16t^2$ pies de altura al final de t segundos.

(a) ¿Cuál es la máxima altura que alcanza?

(b) Al final de un segundo, ¿qué tan rápido se está moviendo el objeto y en qué dirección?

(c) ¿Cuánto tarda en regresar a su posición original?

$\boxed{\text{C}}$ **35.** Un proyectil se dispara directamente hacia arriba desde el suelo, con una velocidad inicial de v_0 pies por segundo. Su altura a los t segundos está dada por $5 = v_0t - 16t^2$ pies. ¿Cuál debe ser su velocidad inicial para que el proyectil alcance una altura máxima de 1 milla?

36. Se lanza un objeto directamente hacia abajo desde lo alto de un acantilado con una velocidad inicial de v_0 pies por segundo, cae $s = v_0t + 16t^2$ pies en t segundos. Si cae al océano en 3 segundos a una velocidad de 140 pies por segundo, ¿cuál es la altura del acantilado?

37. Un objeto se mueve a lo largo de un eje coordenado horizontal, de tal manera que su posición en el instante t está especificada por $s = t^3 - 3t^2 - 24t - 6$. Aquí, s se mide en centímetros y t, en segundos. ¿Cuándo está frenándose el objeto; es decir, cuándo su *rapidez* está disminuyendo?

38. Explique por qué un punto que se mueve a lo largo de una línea está frenándose cuando su velocidad y su aceleración tienen signos opuestos (véase el problema 37).

EXPL **39.** Leibniz obtuvo una fórmula general para $D_x^n(uv)$, donde u y v son funciones de x. Vea si usted puede encontrarla. *Sugerencia:* empiece por considerar los casos $n = 1, n = 2$ y $n = 3$.

40. Utilice la fórmula del problema 39 para encontrar $D_x^4(x^4 \operatorname{sen} x)$.

GC **41.** Sea $f(x) = x[\operatorname{sen} x - \cos(x/2)]$.

(a) Dibuje las gráficas de $f(x), f'(x), f''(x)$ y $f'''(x)$ en $[0, 6]$ utilizando los mismos ejes.

(b) Evalúe $f'''(2.13)$.

GC **42.** Repita el problema 41 para $f(x) = (x + 1)/(x^2 + 2)$.

Respuestas a la revisión de conceptos:
1. $f'''(x)$; $D_x^3 y$; d^3y/dx^3; y''' **2.** ds/dt; $|ds/dt|$; d^2s/dt^2
3. $f'(t) > 0$ **4.** 0; <0

2.7 Derivación implícita

En la ecuación

$$y^3 + 7y = x^3$$

no podemos despejar y en términos de x. Sin embargo, aún puede ser el caso de que exista exactamente una y correspondiente a cada x. Por ejemplo, podemos preguntar qué valores de y (si existe alguno) corresponden a $x = 2$. Para responder esta pregunta, debemos resolver

$$y^3 + 7y = 8$$

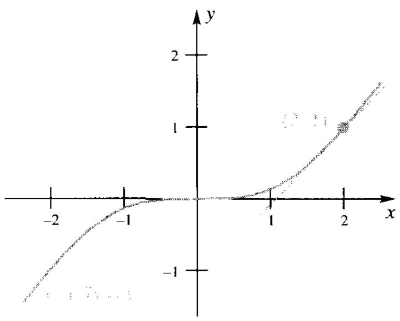


Figura 1

Desde luego, $y = 1$ es una solución, y resulta que $y = 1$ es la *única* solución real. Dado $x = 2$, la ecuación $y^3 + 7y = x^3$ determina un correspondiente valor de y. Decimos que la ecuación define a y como una función **implícita** de x. La gráfica de esta ecuación, que se muestra en la figura 1, por supuesto que se ve como la gráfica de una función derivable. El nuevo elemento es que no tenemos una ecuación de la forma $y = f(x)$. Con base en la gráfica, suponemos que y es alguna función desconocida de x. Si denotamos a esta función como $y(x)$, podemos escribir la ecuación como

$$[y(x)]^3 + 7y(x) = x^3$$

Aunque no tenemos una fórmula para $y(x)$, podemos, a pesar de eso, obtener una relación entre x, $y(x)$ y $y'(x)$, mediante la derivación, respecto a x, de ambos lados de la ecuación. Recordando aplicar la regla de la cadena, obtenemos

$$\frac{d}{dx}(y^3) + \frac{d}{dx}(7y) = \frac{d}{dx}x^3$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} + 7\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}(3y^2 + 7) = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{3y^2 + 7}$$

Obsérvese que nuestra expresión para dy/dx incluye tanto a x como a y, un hecho que con frecuencia es una molestia. Pero si sólo deseamos determinar la pendiente en un punto en donde conocemos ambas coordenadas, no existe dificultad. En $(2, 1)$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(2)^2}{3(1)^2 + 7} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

La pendiente es $\frac{6}{5}$.

El método que se acaba de ilustrar para determinar dy/dx sin despejar primero la y —de manera explícita de la ecuación dada— en términos de x se denomina **derivación implícita**. Pero, ¿el método es legítimo? ¿Da la respuesta correcta?

Un ejemplo que puede verificarse Para dar alguna evidencia de la validez del método, considérese el ejemplo siguiente, el cual puede resolverse de dos maneras.

EJEMPLO 1 Encuentre dy/dx, si $4x^2y - 3y = x^3 - 1$.

SOLUCIÓN

Método 1 Podemos despejar explícitamente la y de la ecuación dada como sigue:

$$\begin{aligned} y(4x^2 - 3) &= x^3 - 1 \\ y &= \frac{x^3 - 1}{4x^2 - 3} \end{aligned}$$

Así,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(4x^2 - 3)(3x^2) - (x^3 - 1)(8x)}{(4x^2 - 3)^2} = \frac{4x^4 - 9x^2 + 8x}{(4x^2 - 3)^2}$$

Método 2 Derivación implícita Igualamos las derivadas de los dos lados.

$$\frac{d}{dx}(4x^2y - 3y) = \frac{d}{dx}(x^3 - 1)$$

Después de utilizar la regla para el producto en el primer término, obtenemos,

$$\begin{aligned} 4x^2 \cdot \frac{dy}{dx} + y \cdot 8x - 3\frac{dy}{dx} &= 3x^2 \\ \frac{dy}{dx}(4x^2 - 3) &= 3x^2 - 8xy \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{3x^2 - 8xy}{4x^2 - 3} \end{aligned}$$

Estas dos respuestas se ven diferentes. Por un lado, la respuesta obtenida por el método 1 incluye sólo a x, mientras que la respuesta del método 2 incluye a x y a y. Sin embargo, recuerde que de la ecuación original podía despejarse a y en términos de x para obtener $y = (x^3 - 1)/(4x^2 - 3)$. Cuando sustituimos $y = (x^3 - 1)/(4x^2 - 3)$ en la expresión que se acaba de obtener para dy/dx, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{3x^2 - 8xy}{4x^2 - 3} = \frac{3x^2 - 8x\dfrac{x^3 - 1}{4x^2 - 3}}{4x^2 - 3} \\ &= \frac{12x^4 - 9x^2 - 8x^4 + 8x}{(4x^2 - 3)^2} = \frac{4x^4 - 9x^2 + 8x}{(4x^2 - 3)^2} \end{aligned}$$ ■

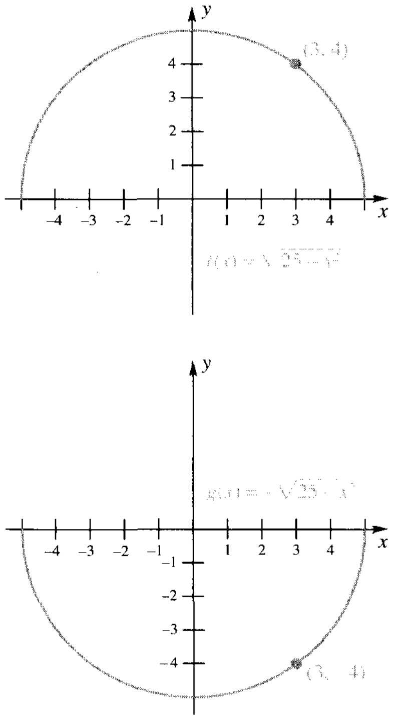


Figura 2

Algunas dificultades sutiles Si una ecuación en x y y determina una función $y = f(x)$ y si esta función es derivable, entonces el método de la derivación implícita obtendrá una expresión correcta para dy/dx. Pero obsérvese que hay dos grandes *si* en este enunciado.

Considere la ecuación

$$x^2 + y^2 = 25$$

que determina a las funciones $y = f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ y $y = g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$. Sus gráficas se muestran en la figura 2.

Felizmente, ambas funciones son derivables en $(-5, 5)$. Primero, considérese a f. Satisface

$$x^2 + [f(x)]^2 = 25$$

Cuando derivamos implícitamente y despejamos a $f'(x)$, obtenemos

$$2x + 2f(x)f'(x) = 0$$

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Un tratamiento similar de $g(x)$ produce

$$g'(x) = -\frac{x}{g(x)} = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Con fines prácticos, podemos obtener ambos resultados de manera simultánea por medio de la derivación implícita de $x^2 + y^2 = 25$. Ésta da

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = \begin{cases} \dfrac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} & \text{si } y = f(x) \\ \dfrac{-x}{-\sqrt{25 - x^2}} & \text{si } y = g(x) \end{cases}$$

Naturalmente, los resultados son idénticos a los que se obtuvieron antes.

Obsérvese que con frecuencia es suficiente saber que $dy/dx = -x/y$ para aplicar nuestros resultados. Supóngase que queremos conocer las pendientes de las rectas tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ cuando $x = 3$. Para $x = 3$, los correspondientes valores de y son 4 y -4. Las pendientes en (3, 4) y (3, -4), obtenidas por medio de la sustitución en $-x/y$, son $-\frac{3}{4}$ y $\frac{3}{4}$, respectivamente (véase la figura 2).

Para complicar el asunto, hacemos notar que

$$x^2 + y^2 = 25$$

determina muchas otras funciones. Por ejemplo, considere la función h definida por

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{25 - x^2} & \text{si } -5 \le x \le 3 \\ -\sqrt{25 - x^2} & \text{si } 3 < x \le 5 \end{cases}$$

También satisface $x^2 + y^2 = 25$, ya que $x^2 + [h(x)]^2 = 25$. Pero ni siquiera es continua en $x = 3$, de modo que en realidad no tiene derivada allí (véase la figura 3).

Aunque el tema de funciones implícitas conduce a preguntas técnicas difíciles (tratadas en cálculo avanzado), los problemas que estudiamos tienen soluciones directas.

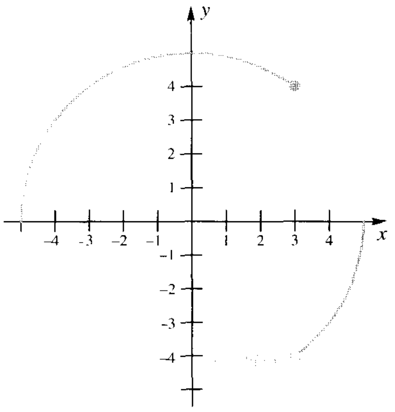


Figura 3

Más ejemplos En los siguientes ejemplos suponemos que la ecuación dada determina una o más funciones derivables, cuyas derivadas pueden obtenerse por medio de la derivación implícita. Obsérvese que en cada caso empezamos tomando la derivada, respecto de la variable apropiada, de cada lado de la ecuación. Después utilizamos la regla de la cadena conforme la necesitemos.

EJEMPLO 2 Encuentre dy/dx, si $x^2 + 5y^3 = x + 9$

SOLUCIÓN

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 5y^3) = \frac{d}{dx}(x + 9)$$

$$2x + 15y^2\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x}{15y^2}$$

■

EJEMPLO 3 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva

$$y^3 - xy^2 + \cos xy = 2$$

en el punto (0, 1).

SOLUCIÓN Por simplicidad, usamos la notación y' para dy/dx. Cuando derivamos ambos lados e igualamos los resultados, obtenemos

$$3y^2y' - x(2yy') - y^2 - (\operatorname{sen} xy)(xy' + y) = 0$$

$$y'(3y^2 - 2xy - x \operatorname{sen} xy) = y^2 + y \operatorname{sen} xy$$

$$y' = \frac{y^2 + y \operatorname{sen} xy}{3y^2 - 2xy - x \operatorname{sen} xy}$$

En $(0, 1)$, $y' = \frac{1}{3}$. Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente en $(0, 1)$ es

$$y - 1 = \tfrac{1}{3}(x - 0)$$

o

$$y = \tfrac{1}{3}x + 1$$

■

Otra vez la regla para la potencia Hemos aprendido que $D_x(x^n) = nx^{n-1}$, donde n es cualquier entero distinto de cero. Ahora extendemos esto para el caso en donde n es cualquier número racional.

Teorema A **Regla para la potencia**

Sea r cualquier número racional distinto de cero. Entonces, para $x > 0$,

$$D_x(x^r) = rx^{r-1}$$

Si r puede escribirse en su mínima expresión como $r = p/q$, donde q es impar, entonces $D_x(x^r) = rx^{r-1}$ para toda x.

Demostración Como r es racional, r puede escribirse como p/q, donde p y q son enteros con $q > 0$. Sea

$$y = x^r = x^{p/q}$$

Entonces

$$y^q = x^p$$

y, por la derivación implícita,

$$qy^{q-1}D_xy = px^{p-1}$$

Por consiguiente,

$$D_xy = \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{(x^{p/q})^{q-1}} = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{x^{p-p/q}}$$

$$= \frac{p}{q}x^{p-1-p+p/q} = \frac{p}{q}x^{p/q-1} = rx^{r-1}$$

Hemos obtenido el resultado deseado; pero para ser honestos, debemos señalar un error en nuestro argumento. En el paso de la derivación implícita supusimos que D_xy existe, esto es, que $y = x^{p/q}$ es derivable. Podemos llenar este hueco, pero como es un trabajo difícil, relegamos la demostración completa al apéndice (sección A.2, teorema C). ■

EJEMPLO 4 Si $y = 2x^{5/3} + \sqrt{x^2 + 1}$, encuentre D_xy.

SOLUCIÓN Mediante el teorema A y la regla de la cadena, tenemos

$$\begin{aligned} D_x y &= 2D_x x^{5/3} + D_x(x^2+1)^{1/2} \\ &= 2\cdot\frac{5}{3}x^{5/3-1} + \frac{1}{2}(x^2+1)^{1/2-1}\cdot(2x) \\ &= \frac{10}{3}x^{2/3} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$ ■

Revisión de conceptos

1. De la relación implícita $yx^3 - 3y = 9$ puede despejarse y resultando $y =$ _____.

2. La derivación implícita de $y^3 + x^3 = 2x$ con respecto a x da _____ $+ 3x^2 = 2$.

3. La derivación implícita de $xy^2 + y^3 - y = x^3$ respecto a x da _____ $=$ _____.

4. La regla para la potencia con exponentes racionales dice que $D_x(x^{p/q}) =$ _____. Esta regla, junto con la regla de la cadena, implica que $D_x[(x^2 - 5x)^{5/3}] =$ _____.

Conjunto de problemas 2.7

Suponiendo que en los problemas del 1 al 12 cada ecuación define una función derivable de x, encuentre $D_x y$ por medio de la derivación implícita.

1. $y^2 - x^2 = 1$
2. $9x^2 + 4y^2 = 36$
3. $xy = 1$
4. $x^2 + \alpha^2 y^2 = 4\alpha^2$, donde α es una constante.
5. $xy^2 = x - 8$
6. $x^2 + 2x^2y + 3xy = 0$
7. $4x^3 + 7xy^2 = 2y^3$
8. $x^2y = 1 + y^2x$
9. $\sqrt{5xy} + 2y = y^2 + xy^3$
10. $x\sqrt{y+1} = xy + 1$
11. $xy + \operatorname{sen}(xy) = 1$
12. $\cos(xy^2) = y^2 + x$

En los problemas del 13 al 18 encuentre la ecuación de la recta tangente en el punto que se indica (véase el ejemplo 3).

13. $x^3y + y^3x = 30$; $(1, 3)$
14. $x^2y^2 + 4xy = 12y$; $(2, 1)$
15. $\operatorname{sen}(xy) = y$; $(\pi/2, 1)$
16. $y + \cos(xy^2) + 3x^2 = 4$; $(1, 0)$
17. $x^{2/3} - y^{2/3} - 2y = 2$; $(1, -1)$
18. $\sqrt{y} + xy^2 = 5$; $(4, 1)$

En los problemas del 19 al 32 encuentre dy/dx

19. $y = 3x^{5/3} + \sqrt{x}$
20. $y = \sqrt[3]{x} - 2x^{7/2}$
21. $y = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$
22. $y = \sqrt[4]{2x+1}$
23. $y = \sqrt[4]{3x^2 - 4x}$
24. $y = (x^3 - 2x)^{1/3}$
25. $y = \dfrac{1}{(x^3 + 2x)^{2/3}}$
26. $y = (3x - 9)^{-5/3}$
27. $y = \sqrt{x^2 + \operatorname{sen} x}$
28. $y = \sqrt{x^2 \cos x}$
29. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 \operatorname{sen} x}}$
30. $y = \sqrt[4]{1 + \operatorname{sen} 5x}$
31. $y = \sqrt[4]{1 + \cos(x^2 + 2x)}$
32. $y = \sqrt{\tan^2 x + \operatorname{sen}^2 x}$

33. Si $s^2t + t^3 = 1$, encuentre ds/dt y dt/ds

34. Si $y = \operatorname{sen}(x^2) + 2x^3$, encuentre dy/dx.

35. Dibuje la gráfica de la circunferencia $x^2 + 4x + y^2 + 3 = 0$, y luego encuentre las ecuaciones de las dos rectas tangentes que pasan por el origen.

36. Determine la ecuación de la **recta normal** (recta perpendicular a la recta tangente) a la curva $8(x^2 + y^2)^2 = 100(x^2 - y^2)$ en $(3, 1)$.

37. Suponga que $xy + y^3 = 2$. Entonces, derivando implícitamente dos veces con respecto a x, por pasos se obtiene:

(a) $xy' + y + 3y^2y' = 0$;

(b) $xy'' + y' + y' + 3y^2y'' + 6y(y')^2 = 0$.

Despeje y' de (a) y sustituya en (b) y después despeje y''

38. Encuentre y'', si $x^3 - 4y^2 + 3 = 0$ (véase el problema 37).

39. Encuentre y'' en $(2, 1)$, si $2x^2y - 4y^3 = 4$ (véase el problema 37).

40. Utilice derivación implícita dos veces para encontrar y'' en $(3, 4)$, si $x^2 + y^2 = 25$

41. Demuestre que la recta normal a $x^3 + y^3 = 3xy$ en $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ pasa por el origen.

42. Demuestre que las hipérbolas $xy = 1$ y $x^2 - y^2 = 1$ se intersecan en ángulos rectos.

43. Demuestre que las gráficas de $2x^2 + y^2 = 6$ y $y^2 = 4x$ se intersecan en ángulos rectos.

44. Suponga que las curvas C_1 y C_2 se intersecan en (x_0, y_0) con pendientes m_1 y m_2, respectivamente, como se muestra en la figura 4. Entonces (véase el problema 40 de la sección 0.7) el ángulo positivo q de C_1 (es decir, desde la recta tangente a C_1 en (x_0, y_0)) a C_2 satisface

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}$$

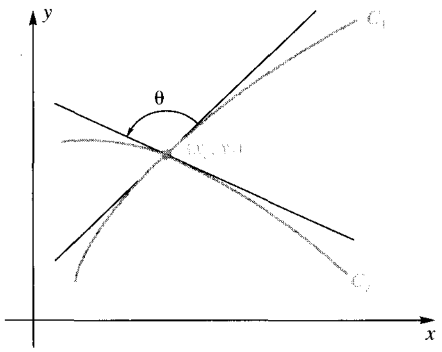


Figura 4

Encuentre los ángulos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ a la circunferencia $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ en los dos puntos de intersección.

45. Encuentre el ángulo de la recta $y = 2x$ a la curva $x^2 - xy + 2y^2 = 28$ en su punto de intersección en el primer cuadrante (véase el problema 44).

46. Una partícula de masa m se mueve a lo largo del eje x, de modo que su posición x y velocidad $v = dx/dt$ satisfacen

$$m(v^2 - v_0^2) = k(x_0^2 - x^2)$$

donde v_0, x_0 y k son constantes. Demuestre por medio de derivación implícita que

$$m\frac{dv}{dt} = -kx$$

siempre que $v \neq 0$.

47. La curva $x^2 - xy + y^2 = 16$ es una elipse con centro en el origen y con la recta $y = x$ como su eje mayor. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes en los dos puntos donde la elipse interseca al eje x.

48. Encuentre todos los puntos sobre la curva $x^2y - xy^2 = 2$ en donde la recta tangente es vertical, esto es, en donde $dx/dy = 0$.

≋ **49.** ¿A qué altura h debe estar el foco de la figura 5, si el punto $(1.25, 0)$ está en el borde de la región iluminada?

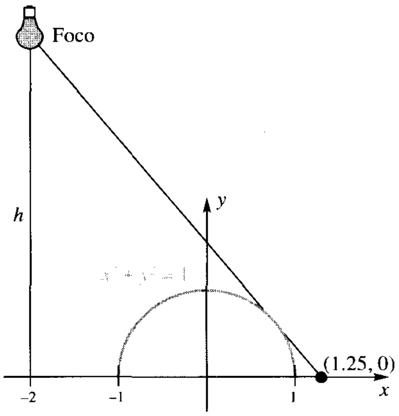


Figura 5

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $9/(x^3 - 3)$
2. $3y^2\frac{dy}{dx}$ **3.** $x \cdot 2y\frac{dy}{dx} + y^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 3x^2$
4. $\frac{p}{q}x^{p/q-1}$; $\frac{5}{3}(x^2 - 5x)^{2/3}(2x - 5)$

2.8 Razones de cambio relacionadas

Si una variable y depende del tiempo t, entonces su derivada dy/dt se denomina **razón de cambio con respecto al tiempo,** o sólo **razón de cambio**. Por supuesto, si y mide la distancia, entonces esta razón de cambio también se llama velocidad. Estamos interesados en una amplia variedad de razones de cambio: la razón a la que fluye agua al interior de un depósito, la tasa a la cual el área de un derrame de petróleo está creciendo, la razón a la cual el valor de una propiedad está aumentando, etcétera. Si y se da de manera explícita en términos de t, el problema es sencillo; sólo derivamos y luego evaluamos la derivada en el instante requerido.

Puede ser que, en lugar de conocer a y de manera explícita en términos de t, conozcamos una relación que relaciona a y y a otra variable x, y que también conozcamos algo acerca de dx/dt. Aún podemos ser capaces de encontrar dy/dt, ya que dy/dt y dx/dt son **razones de cambio relacionadas** (o razones afines). Por lo regular, esto requiere derivación implícita.

Dos ejemplos sencillos

En la preparación de un procedimiento sistemático para la resolución de problemas con tasas de cambio relacionadas, estudiamos dos ejemplos.

EJEMPLO 1 Se suelta un pequeño globo en un punto a 150 pies alejado de un observador, quien se encuentra en el nivel del piso. Si el globo se eleva en línea recta hacia arriba a una velocidad de 8 pies por segundo, ¿qué tan rápido está aumentando la distancia del observador al globo cuando éste se encuentra a 50 pies de altura?

SOLUCIÓN Sea t el número de segundos contados a partir de que se suelta el globo. Sea h la altura del globo y s su distancia al observador (véase la figura 1). Tanto h como s son variables que dependen de t; sin embargo, la base del triángulo (la distancia des-

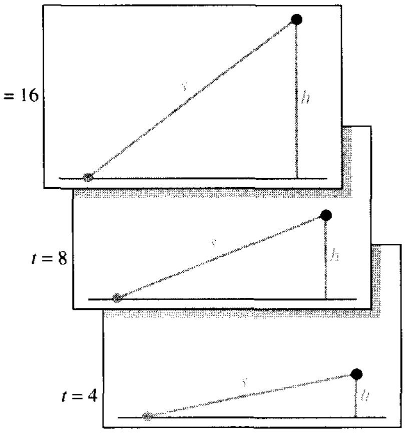


Figura 1

de el observador al punto de lanzamiento) permanece sin cambio conforme t aumenta. La figura 2 muestra las cantidades clave en un diagrama simple.

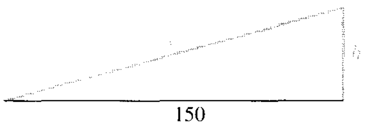


Figura 2

≈ Antes de avanzar, recordemos un tema estudiado antes en el libro, *estimación de la respuesta*. Observe que, al inicio, s casi no cambia ($ds/dt \approx 0$), pero eventualmente s cambia casi tan rápido como cambia h ($ds/dt \approx dh/dt = 8$). Una estimación de ds/dt cuando $h = 50$ podría ser alrededor de un tercio o un medio de dh/dt, o 3. Si obtenemos una respuesta alejada de este valor, sabremos que hemos cometido un error. Por ejemplo, respuesta tales como 17, o aun 7, obviamente son incorrectas.

Continuemos con la solución exacta. Para enfatizar, preguntamos y respondemos tres preguntas fundamentales.

(a) ¿Qué está dado? *Respuesta:* $dh/dt = 8$.

(b) ¿Qué queremos conocer? *Respuesta:* queremos conocer ds/dt en el instante en que $h = 50$

(c) ¿Cómo están relacionadas s y h? *Respuesta:* las variables s y h cambian con el tiempo (son funciones implícitas de t), pero siempre están relacionadas por medio de la ecuación pitagórica

$$. \; s^2 = h^2 + (150)^2$$

Si derivamos de manera implícita con respecto a t y utilizamos la regla de la cadena, obtenemos

$$2s\frac{ds}{dt} = 2h\frac{dh}{dt}$$

o

$$s\frac{ds}{dt} = h\frac{dh}{dt}$$

Esta relación se cumple para toda $t > 0$

Ahora, y *no antes de este momento*, pasamos al instante específico cuando $h = 50$. Con base en el Teorema de Pitágoras, vemos que, cuando $h = 50$

$$s = \sqrt{(50)^2 + (150)^2} = 50\sqrt{10}$$

Sustituyendo en $s(ds/dt) = h(dh/dt)$ se obtiene

$$50\sqrt{10}\frac{ds}{dt} = 50(8)$$

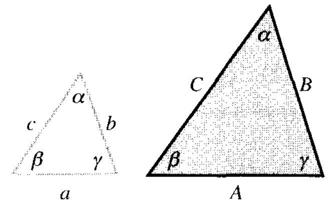
o

$$\frac{ds}{dt} = \frac{8}{\sqrt{10}} \approx 2.53$$

En el instante cuando $h = 50$, la distancia entre el globo y el observador está aumentando a una velocidad de 2.53 pies por segundo. ■

Triángulos semejantes

Dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son congruentes.



En geometría aprendimos que razones de lados correspondientes de triángulos semejantes son iguales. Por ejemplo,

$$\frac{b}{a} = \frac{B}{A}$$

Este hecho, utilizado en el ejemplo 2, con frecuencia se necesitará en el conjunto de problemas.

EJEMPLO 2 En un tanque cónico se vierte agua a una razón de 8 pies cúbicos por minuto. Si la altura del tanque es de 12 pies y el radio de su abertura circular es de 6 pies, ¿qué tan rápido se está elevando el nivel del agua cuando este líquido tiene una profundidad de 4 pies?

SOLUCIÓN Denótese la profundidad del agua con h y sea r el radio correspondiente de la superficie del agua (véase la figura 3).

Se nos *da* que el volumen, V, de agua en el tanque está aumentando a una razón de 8 pies cúbicos por minuto; esto es, $dV/dt = 8$. *Queremos saber* qué tan rápido está elevándose el agua (esto es, dh/dt) en el instante cuando $h = 4$

Necesitamos encontrar una ecuación que relacione a V y a h; después la derivaremos para obtener una relación entre dV/dt y dh/dt. La fórmula para el volumen de agua en el tanque $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, tiene una variable no deseada r; es indeseada porque no conocemos su razón dr/dt. No obstante, por medio de triángulos semejantes (véase el recuadro al margen), tenemos $r/h = 6/12$, o $r = h/2$. Sustituyendo esto en $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ da

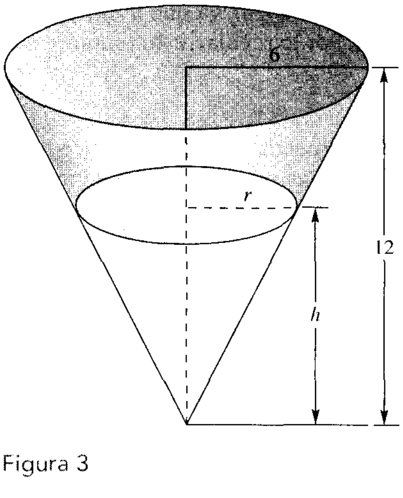


Figura 3

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{12}$$

Ahora derivamos de manera implícita; para ello, tenemos presente que tanto V como h dependen de t. Obtenemos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{3\pi h^2}{12}\frac{dh}{dt} = \frac{\pi h^2}{4}\frac{dh}{dt}$$

Ahora que tenemos una relación entre dV/dt y dh/dt, y no antes, consideramos la situación cuando $h = 4$. Sustituyendo $h = 4$ y $dV/dt = 8$, obtenemos

$$8 = \frac{\pi(4)^2}{4}\frac{dh}{dt}$$

a partir de la cual

$$\frac{dh}{dt} = \frac{2}{\pi} \approx 0.637$$

Cuando la profundidad del agua es de 4 pies, el nivel del agua está elevándose a 0.637 pies por minuto. ■

Si reflexiona por un momento en el ejemplo 2, usted se da cuenta de que el nivel del agua se elevará cada vez más despacio conforme el tiempo avance. Por ejemplo, cuando $h = 10$

$$8 = \frac{\pi(10)^2}{4}\frac{dh}{dt}$$

de modo que $dh/dt = 32/(100\pi) \approx 0.102$ pies por minuto.

Lo que estamos diciendo en realidad es que la aceleración d^2h/dt^2 es negativa. Podemos calcular una expresión para ella. En cualquier instante t,

$$8 = \frac{\pi h^2}{4}\frac{dh}{dt}$$

de modo que

$$\frac{32}{\pi} = h^2\frac{dh}{dt}$$

Si derivamos otra vez implícitamente, obtenemos

$$0 = h^2\frac{d^2h}{dt^2} + \frac{dh}{dt}\left(2h\frac{dh}{dt}\right)$$

de la cual

$$\frac{d^2h}{dt^2} = \frac{-2\left(\frac{dh}{dt}\right)^2}{h}$$

Ésta es claramente negativa.

Un procedimiento sistemático Los ejemplos 1 y 2 sugieren el siguiente método para resolver un problema de tasas relacionadas.

Paso 1: Denote mediante t el tiempo transcurrido. Dibuje un diagrama que sea válido para toda $t > 0$. Etiquete las cantidades cuyos valores no cambian conforme t aumenta con sus respectivos valores *constantes* dados. Asigne letras a las cantidades que varían con t y etiquete las secciones convenientes de la figura con estas variables.

Paso 2: Establezca lo que está dado acerca de las variables y qué información se requiere de ellas. Esta información estará en la forma de derivadas respecto a t.

Paso 3: Relacione las variables y escriba una ecuación que sea válida para todos los instantes $t > 0$, no sólo para alguno en particular.

Paso 4: Derive implícitamente, con respecto a t, la ecuación encontrada en el paso 3. La ecuación resultante, que tiene derivadas con respecto a t, es válida para toda $t > 0$

Paso 5: En este momento, y no antes, sustituya en la ecuación encontrada en el paso 4 todos los datos que son válidos *en el instante particular,* por el cual la respuesta al problema es necesaria. Despeje la derivada deseada.

EJEMPLO 3 Un aeroplano que vuela hacia el norte, a 640 millas por hora, pasa sobre cierta ciudad al mediodía. Un segundo aeroplano que va hacia el este, a 600 millas por hora, está directamente encima de la misma ciudad 15 minutos más tarde. Si los aeroplanos están volando a la misma altitud, ¿qué tan rápido se están separando a la 1:15 P. M.?

SOLUCIÓN

Paso 1: Denótese con t el número de horas después de las 12:15 P. M., con y a la distancia en millas recorridas por el aeroplano que se dirige al norte, después de las 12:15 P. M., x la distancia que ha volado, después de las 12:15 P. M., el aeroplano que lleva rumbo este y s la distancia entre los aeroplanos. Quince minutos después del mediodía, a las 12:15 P. M., el aeroplano que va hacia el norte habrá volado $\frac{640}{4} = 160$ millas, de modo que la distancia, en el instante t, de la ciudad al aeroplano que va al norte será $y + 160$. (Véase la figura 4.)

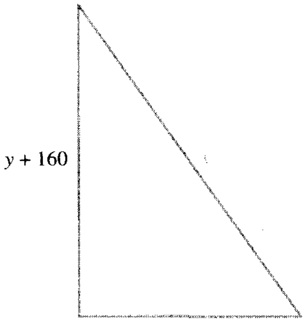


Figura 4

Paso 2: Se nos da que, para toda $t > 0$, $dy/dt = 640$ y que $dx/dt = 600$. Queremos conocer ds/dt en $t = 1$, esto es, a la 1:15 P. M.

Paso 3: Por el Teorema de Pitágoras,

$$s^2 = x^2 + (y + 160)^2$$

Paso 4: Al derivar implícitamente con respecto a t y mediante la regla de la cadena, tenemos

$$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2(y + 160)\frac{dy}{dt}$$

o

$$s\frac{ds}{dt} = x\frac{dx}{dt} + (y + 160)\frac{dy}{dt}$$

Paso 5: Para toda $t > 0$, $dx/dt = 600$ y $dy/dt = 640$, mientras que en el instante particular $t = 1$, $x = 600$, $y = 640$ y $s = \sqrt{(600)^2 + (640 + 160)^2} = 1000$. Cuando sustituimos estos datos en la ecuación del paso 4, obtenemos

$$1000\frac{ds}{dt} = (600)(600) + (640 + 160)(640)$$

de la cual

$$\frac{ds}{dt} = 872$$

A la 1:15 P. M., los aeroplanos están alejándose a 872 millas por hora

≈ Ahora veamos si nuestra respuesta tiene sentido. Otra vez, véase la figura 4. Claramente, s está aumentando más rápido que lo que aumentan x o y, de modo que ds/dt excede a 640. Por otra parte, seguramente s está aumentando más lentamente que la suma de x y y; es decir, $ds/dt < 600 + 640 = 1240$. Nuestra respuesta, $ds/dt = 872$, es razonable. ■

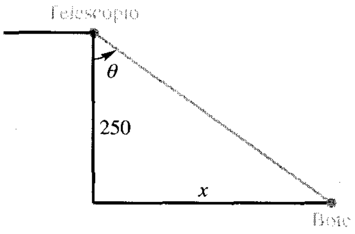


Figura 5

EJEMPLO 4 Una mujer que está ante un acantilado, con un telescopio observa cómo se aproxima un bote de motor a la playa que está directamente debajo de ella. Si el telescopio está a 250 pies por arriba del nivel del agua y si el bote se aproxima a 20 pies por segundo, ¿a qué velocidad está cambiando el ángulo del telescopio cuando el bote está a 250 pies de la playa?

SOLUCIÓN

Paso 1: Dibuje una figura (véase la figura 5) e introduzca variables x y θ, como se muestra.

Paso 2: Nos dan que $dx/dt = -20$; el signo es negativo porque x disminuye con el tiempo. Queremos conocer $d\theta/dt$ en el instante cuando $x = 250$

Paso 3: Por trigonometría

$$\tan\theta = \frac{x}{250}$$

Paso 4: Derivamos implícitamente usando el hecho de que $D_\theta \tan\theta = \sec^2\theta$ (teorema 2.4B). Obtenemos

$$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{250}\frac{dx}{dt}$$

Paso 5: En el instante cuando $x = 250$, θ es $\theta/4$ radianes y $\sec^2\theta = \sec^2(\pi/4) = 2$. Por lo tanto,

$$2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{250}(-20)$$

o

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{25} = -0.04$$

El ángulo está cambiando –0.04 radianes por segundo. El signo negativo muestra que θ está disminuyendo con el tiempo. ■

EJEMPLO 5 Conforme el Sol se pone detrás de un edificio de 120 pies de altura, la sombra del inmueble crece. ¿Qué tan rápido está creciendo la sombra (en pies por segundo) cuando los rayos del Sol forman un ángulo de 45° (o $\pi/4$ radianes).

SOLUCIÓN

Paso 1: Denótese con t al tiempo, en segundos, a partir de la medianoche. Sea x la longitud de la sombra en pies y sea θ el ángulo del rayo del Sol. Véase la figura 6.

Paso 2: Como la Tierra da un giro completo una vez cada 24 horas, es decir, 86,400 segundos, sabemos que $d\theta/dt = -2\pi/86{,}400$. (El signo negativo es necesario porque θ *disminuye* conforme el Sol se pone). Queremos conocer dx/dt cuando $\theta = \pi/4$.

Paso 3: La figura 6 indica que las cantidades x y θ satisfa cen $\cot\theta = x/120$, por lo que $x = 120\cot\theta$

Paso 4: Al derivar ambos lados de $x = 120\cot\theta$ con respecto a t se obtiene

$$\frac{dx}{dt} = 120(-\csc^2\theta)\frac{d\theta}{dt} = -120(\csc^2\theta)\left(-\frac{2\pi}{86{,}400}\right) = \frac{\pi}{360}\csc^2\theta$$

Paso 5: Cuando $\theta = \pi/4$, tenemos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{360}\csc^2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{360}(\sqrt{2})^2 = \frac{\pi}{180} \approx 0.0175\frac{\text{pies}}{\text{sec}}$$

Observe que conforme el Sol se pone, θ disminuye (ya que $d\theta/dt$ es negativa), mientras que la sombra x está aumentando (ya que dx/dt es positiva). ■

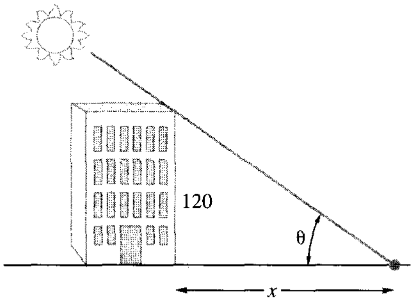


Figura 6

Un problema gráfico de razones relacionadas Con frecuencia, en una situación de la vida real no conocemos una fórmula para cierta función, sino que tenemos una gráfica determinada de manera empírica para ella. Aun así, podemos ser capaces de responder preguntas sobre razones de cambio.

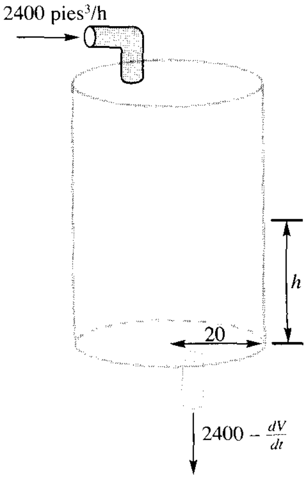


Figura 7

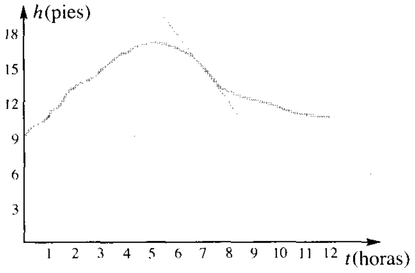


Figura 8

EJEMPLO 6 La ciudad de Webster monitorea la altura del agua en su tanque cilíndrico con un dispositivo de registro automático. El agua se bombea de manera constante al tanque a una velocidad de 2400 pies cúbicos por hora, como se muestra en la figura 7. Durante cierto periodo de 12 horas (empezando a la medianoche), el nivel del agua se elevó y descendió de acuerdo con la gráfica en la figura 8. Si el radio del tanque es de 20 pies, ¿a qué velocidad está utilizándose el agua a las 7:00 A. M.?

SOLUCIÓN Sean t el número de horas transcurridas después de la medianoche, h la altura del agua en el tanque en el instante t y V el volumen del agua en el tanque en el instante t (véase la figura 7). Entonces dV/dt es la razón de entrada menos la razón de salida, de modo que $2400 - dV/dt$ es la velocidad a la que el agua está utilizándose en cualquier instante t. Como la pendiente de la recta tangente en $t = 7$ es aproximadamente -3 (véase la figura 8), concluimos que $dh/dt \approx -3$ en ese instante.

Para un cilindro, $V = \pi r^2 h$, y de este modo

$$V = \pi(20)^2 h$$

de la cual

$$\frac{dV}{dt} = 400\pi \frac{dh}{dt}$$

En $t = 7$,

$$\frac{dV}{dt} \approx 400\pi(-3) \approx -3770$$

Por lo tanto, los residentes de la ciudad de Webster estaban utilizando el agua a una tasa de $2400 + 3770 = 6170$ pies cúbicos por hora a las 7:00 A. M. ■

Revisión de conceptos

1. Preguntar qué tan rápido está cambiando u con respecto al tiempo después de dos horas es equivalente a preguntar el valor de _____ en _____.

2. Un aeroplano con rapidez constante de 400 millas por hora voló directamente sobre un observador. La distancia entre el observador y el aeroplano aumentó a una velocidad creciente y eventualmente se aproxima a una tasa de _____.

3. Si dh/dt disminuye cuando el tiempo aumenta, entonces d^2h/dt^2 es _____.

4. Si está fluyendo agua al interior de un tanque esférico a una razón constante, entonces la altura del nivel del líquido crece a una tasa variable y positiva dh/dt, pero d^2h/dt^2 es _____ hasta que h llega a la mitad de la altura del tanque, después de lo cual d^2h/dt^2 se vuelve _____.

Conjunto de problemas 2.8

1. Cada arista de un cubo variable está aumentando a razón de 3 pulgadas por segundo. ¿Qué tan rápido está aumentando el volumen del cubo cuando una arista es de 12 pulgadas de longitud?

2. Suponga que una pompa de jabón mantiene su forma esférica conforme se expande, ¿qué tan rápido aumenta el radio cuando éste es de 3 pulgadas, si se sopla aire a la burbuja a una razón de 3 pulgadas cúbicas por segundo?

≈ 3. Un aeroplano que vuela horizontalmente a una altitud de una milla pasa directamente sobre un observador. Si la velocidad constante del aeroplano es de 400 millas por hora, ¿qué tan rápido aumenta su distancia respecto del observador 45 segundos más tarde? *Sugerencia:* observe que en 45 segundos $\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{60} = \frac{1}{80}\text{ hora}\right)$, el aeroplano ha recorrido 5 millas.

4. Un estudiante utiliza un popote para beber de un vaso cónico de papel, cuyo eje es vertical, a razón de 3 centímetros cúbicos por segundo. Si la altura del vaso es de 10 centímetros y el diámetro de su abertura es de 6 centímetros, ¿qué tan rápido está bajando el nivel del líquido cuando la profundidad del líquido es de 5 centímetros?

≈ 5. Un aeroplano que vuela hacia el oeste a 300 millas por hora pasa por arriba de la torre de control al mediodía, y un segundo aeroplano que vuela hacia el norte, a la misma altitud pero a 400 millas por hora, pasa por la torre una hora después. ¿Qué tan rápido está cambiando la distancia entre los aeroplanos a las 2:00 p. m.? *Sugerencia:* véase el ejemplo 3.

≈ 6. Una mujer en un muelle jala una cuerda atada a la proa de un pequeño bote. Si las manos de la mujer están 10 pies por encima del punto en donde la cuerda está sujeta al bote, y si ella está recobrando la cuerda a razón de 2 pies por segundo, ¿qué tan rápido se aproxima el bote al muelle cuando falta por recogerse 25 pies de cuerda?

≈ 7. Una escalera de 20 pies está recargada contra un edificio. Si la parte inferior de la escalera se desliza a lo largo del pavimento alejándose directamente del edificio a una velocidad de 1 pie por segundo, ¿qué tan rápido está descendiendo el extremo superior de la escalera, cuando el pie de la escalera está a 5 pies de la pared?

8. Supongamos que un derrame de petróleo se está limpiando por medio de bacterias esparcidas en él, las cuales lo consumen a una razón de 4 pies cúbicos por hora. El derrame de petróleo está modelado por la forma de un cilindro muy delgado cuya altura es el grosor de la capa de petróleo. Cuando el grosor de la capa es de 0.001 pie, el cilindro tiene 500 pies de diámetro. Si la altura disminuye 0.0005 pie por hora, ¿a qué razón cambia el área de la capa?

9. De un tubo sale arena a razón de 16 pies cúbicos por segundo. Si al caer la arena se forma un montón cónico en el piso, cuya altura siempre es $\frac{1}{4}$ del diámetro de la base, ¿qué tan rápido aumenta la altura cuando el montón es de 4 pies de altura? *Sugerencia:* refiérase a la figura 9 y utilice el hecho de que $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

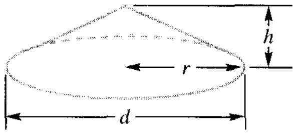


Figura 9

≈ **10.** Un niño está volando una cometa. Si la cometa está a 90 pies del nivel de la mano del niño y el viento sopla en dirección horizontal a 5 pies por segundo, ¿con que rapidez el niño suelta cordel, cuando ya ha soltado 150 pies de cordel? (Suponga que el cordel permanece en línea recta desde la mano hasta la cometa, en verdad una suposición poco realista).

11. Una alberca es de 40 pies de largo, 20 pies de ancho, 8 pies de profundidad en el extremo más hondo y 3 pies en el extremo menos profundo; el fondo es rectangular (véase la figura 10). Si la alberca se llena al bombear agua a una razón de 40 pies cúbicos por minuto, ¿con qué rapidez se eleva el nivel del agua cuando la profundidad es de 3 pies en el extremo más hondo?

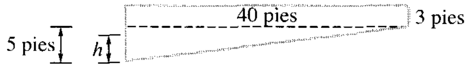


Figura 10

≈ **12.** Una partícula P se mueve a lo largo de la gráfica de $y = \sqrt{x^2 - 4}$, $x \geq 2$, de modo que la abscisa de P está aumentando a razón de 5 unidades por segundo. ¿Qué tan rápido está aumentando la ordenada (coordenada y) cuando $x = 3$?

13. Un disco metálico se dilata con el calor. Si su radio aumenta a razón de 0.02 pulgadas por segundo, ¿con qué rapidez aumenta el área de una de sus caras cuando su radio es de 8.1 pulgadas?

≈ **14.** Dos barcos parten desde el mismo puerto en una isla, uno va en dirección norte a 24 nudos (24 millas náuticas por hora) y el otro con rumbo este a 30 nudos. El barco con dirección norte salió a las 9:00 a. m. y el otro dejó el puerto a las 11:00 A. M. ¿Qué tan rápido aumenta la distancia entre ellos a las 2:00 P. M.? *Sugerencia:* sea $t = 0$ a las 11:00 A. M.

15. La luz de un faro, que se encuentra 1 kilómetro alejado de una playa recta, gira a 2 revoluciones por minuto. ¿Con qué rapidez se mueve el rayo de luz a lo largo de la playa cuando pasa por el punto que se encuentra a $\frac{1}{2}$ kilómetro del punto que está enfrente del faro?

C **16.** Una aficionada a la aviación observa un aeroplano que vuela a una altura constante de 4000 pies hacia un punto que se encuentra directamente sobre de ella. Ella observa que cuando el ángulo de elevación es $\frac{1}{2}$ radián, éste aumenta a una velocidad de $\frac{1}{10}$ radián por segundo. ¿Cuál es la velocidad del aeroplano?

17. Chris, que mide 6 pies de estatura, camina alejándose de un poste de luz, de 30 pies de altura, a una velocidad de 2 pies por segundo

(a) ¿A qué rapidez aumenta la longitud de su sombra cuando Chris está a 24 pies del poste? ¿A 30 pies?

(b) ¿A qué velocidad se mueve el extremo de la sombra?

(c) Para seguir el extremo de su sombra, ¿a qué velocidad angular debe levantar sus ojos Chris cuando su sombra es de 6 pies de largo?

18. El vértice del ángulo, θ, opuesto a la base de un triángulo isósceles, con lados iguales de longitud 100 centímetros, aumenta a razón de $\frac{1}{10}$ de radián por minuto. ¿Con qué rapidez aumenta el área del triángulo cuando el ángulo del vértice mide $\pi/6$ radianes? *Sugerencia:* $A = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} \theta$.

≈ **19.** Un largo paso a desnivel de una autopista pasa por encima de una vía de ferrocarril que está a 100 pies por debajo y forma un ángulo recto con él. Si un automóvil que viaja a 45 millas por hora (66 pies por segundo) está directamente por arriba de la parte delantera de un tren que va a 60 millas por hora (88 pies por segundo), ¿qué tan rápido se están separando 10 segundos después?

20. Se bombea agua a una razón constante de 2 litros por minuto (1 litro = 1000 centímetros cúbicos) a un tanque con forma de cono circular recto truncado. El tanque tiene una altura de 80 centímetros y los radios inferior y superior miden 20 y 40 centímetros, respectivamente (véase la figura 11). ¿A qué velocidad se eleva el nivel del agua cuando la profundidad del líquido es de 30 centímetros? *Nota:* el volumen, V, de un cono circular recto truncado de altura h y radios inferior y superior a y b es $V = \frac{1}{3}\pi h \cdot (a^2 + ab + b^2)$.

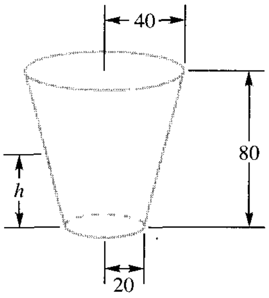


Figura 11

21. Del fondo de un depósito semiesférico, de radio 8 pies, está saliendo agua a razón de 2 pies cúbicos por hora. El depósito estaba lleno en cierto momento. ¿A qué velocidad cambia el nivel del agua cuando su altura es de 3 pies? *Nota:* el volumen de un casquete de altura h en un hemisferio de radio r es $\pi h^2[r - (h/3)]$. (Véase la figura 12).

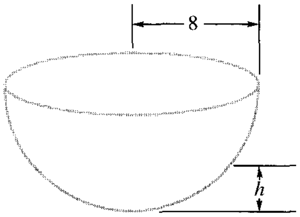


Figura 12

22. Las manecillas de un reloj son de 5 pulgadas (el minutero) y de 4 pulgadas (el horario). ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre los extremos de las manecillas a las 3:00?

23. Una bola de acero caerá $16t^2$ pies en t segundos. Dicha pelota se deja caer desde una altura de 64 pies a una distancia horizontal de 10 *pies de un poste de luz*, que tiene una altura de 48 pies. Cuando la bola llega al suelo, ¿con qué rapidez se está moviendo la sombra de la bola?

24. Resuelva otra vez el ejemplo 6; suponga que el tanque de agua es una esfera de radio de 20 pies. (Véase el problema 21 para el volumen de un casquete esférico).

25. Resuelva otra vez el ejemplo 6; suponga que el tanque de agua tiene forma de un hemisferio superior, con radio de 20 pies. (Véase el problema 21 para el volumen de un casquete esférico).

26. Con respecto al ejemplo 6. Desde la medianoche hasta el mediodía, ¿cuánta agua utilizó, en este periodo de 12 horas, la ciudad de Webster? *Sugerencia:* éste no es un problema de derivación.

≋ **27.** Una escalera de 18 pies descansa contra un muro vertical de 12 pies y su extremo superior sobresale del muro. El extremo inferior de la escalera se empuja a lo largo del piso y se aleja del muro a 2 pies por segundo.

(a) Encuentre la velocidad vertical del extremo superior de la escalera cuando ésta forma un ángulo de 60° con el piso.

(b) Encuentre la aceleración vertical en ese mismo instante.

28. Una bola esférica de acero permanece en el fondo del depósito del problema 21. Responda la pregunta planteada allí, si la bola tiene radio

(a) 6 pulgadas y (b) 2 pies.

(Suponga que la bola no afecta el flujo que sale del tanque).

29. Una bola de nieve se derrite a una razón proporcional al área de su superficie.

(a) Demuestre que su radio se contrae a una razón constante.

(b) Si en una hora de derrite a $\frac{8}{27}$ de su volumen original, ¿cuánto tardará en derretirse por completo?

30. Un cilindro circular recto con un pistón en un extremo se llena con gas. Su volumen cambia de manera continua a causa del pistón. Si la temperatura del gas se mantiene constante, entonces, por **la Ley de Boyle**, $PV = k$, donde P es la presión (libras por pulgada cuadrada), V es el volumen (pulgadas cúbicas) y k es una constante. La presión es controlada por medio de un dispositivo de registro en un periodo de 10 minutos. El resultado se muestra en la figura 13. De manera aproximada, ¿qué tan rápido estaba cambiando el volumen en $t = 6.5$, si el volumen en ese instante fue de 300 pulgadas cúbicas? (Véase el ejemplo 6.)

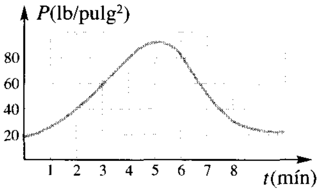


Figura 13

31. Una niña de 5 pies de estatura camina hacia un poste de luz, de 20 pies de altura, a una velocidad de 4 pies por segundo. Su hermano menor, de 3 pies de estatura, la sigue a una distancia constante de 4 pies, directamente atrás de ella (véase la figura 14).

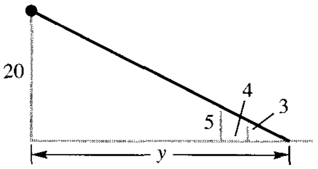


Figura 14

Determine a qué velocidad se mueve el extremo de la sombra, esto es, determine dy/dt. *Nota:* cuando la niña está lejos del poste, ella controla el extremo de la sombra, mientras que su hermano la controla cerca del poste.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** du/dt; $t = 2$ **2.** 400 mi/h **3.** negativa **4.** negativa; positiva

---

2.9
Diferenciales y aproximaciones

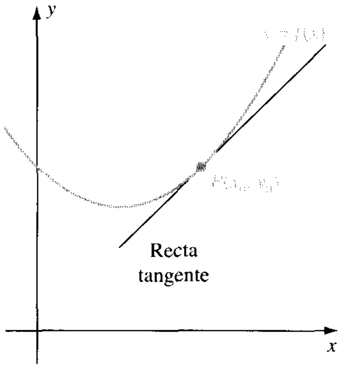


Figura 1

La notación de Leibniz dy/dx ha sido utilizada para la derivada de y respecto a x. La notación d/dx se ha utilizado como un operador para la derivada (de lo que sigue a d/dx) respecto a x. Así, d/dx y D_x son sinónimos. Hasta ahora hemos tratado a dy/dx (o d/dx) como un *solo* símbolo y no hemos tratado de dar significados separados a los símbolos dy y dx. En esta sección daremos significado a dy y a dx.

Sea f una función derivable. Para motivar nuestras definiciones, sea $P(x_0, y_0)$ un punto en la gráfica de $y = f(x)$ como se muestra en la figura 1. Ya que f es derivable,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Así, si Δx es pequeña, el cociente $[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)]/\Delta x$ será aproximadamente $f'(x_0)$, de modo que

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx \Delta x\, f'(x_0)$$

El lado izquierdo de esta expresión se denomina Δy; éste es el cambio *real* en y cuando x cambia de x_0 a $x_0 + \Delta x$. El lado derecho se denomina dy, y sirve como una aproximación para Δy. Como lo indica la figura 2, la cantidad dy es igual al cambio en la recta

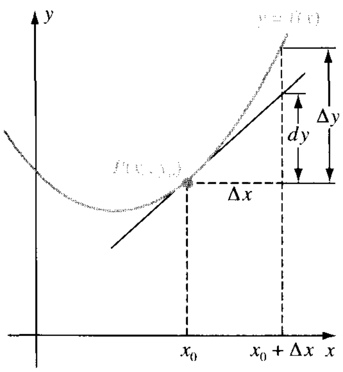


Figura 2

tangente a la curva en P cuando x cambia de x_0 a $x_0 + \Delta x$. Cuando Δx es pequeña, esperamos que dy será una buena aproximación para Δy, y será sólo una constante por Δx, por lo regular más fácil de calcular.

Definición de diferenciales A continuación están las definiciones formales de las diferenciales dx y dy.

Definición Diferenciales

Sea $y = f(x)$ una función derivable de la variable independiente x.

Δx es un incremento arbitrario en la variable independiente x.

dx, denominada la **diferencial de la variable independiente** x, es igual a Δx.

Δy Δy es el cambio real en la variable y cuando x cambia de x a $x + \Delta x$; esto es, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

dy, llamada la **diferencial de la variable dependiente** y, se define como $dy = f'(x)dx$.

EJEMPLO 1 Encuentre dy, si

(a) $y = x^3 - 3x + 1$ (b) $y = \sqrt{x^2 + 3x}$

(c) $y = \operatorname{sen}(x^4 - 3x^2 + 11)$

SOLUCIÓN Si sabemos cómo calcular derivadas, también sabemos cómo calcular diferenciales. Basta con calcular la derivada y multiplicarla por dx.

(a) $dy = (3x^2 - 3)\,dx$

(b) $dy = \frac{1}{2}(x^2 + 3x)^{-1/2}(2x + 3)\,dx = \dfrac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x}}dx$

(c) $dy = \cos(x^4 - 3x^2 + 11)\cdot(4x^3 - 6x)\,dx$ ■

Le pedimos que note dos cosas. Primera, como $dy = f'(x)dx$, la división de ambos lados entre dx da

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

y podemos, si lo deseamos, interpretar la derivada como un cociente de dos diferenciales.

Segunda, a cada regla de derivación existe una correspondiente regla de diferenciación, obtenida a partir de la primera "multiplicándola" por dx. Ilustramos las principales reglas en la tabla siguiente.

Distinción entre derivadas y diferenciales

Las derivadas y las diferenciales no son lo mismo. Cuando usted escribe $D_x y$ o dy/dx, está utilizando el símbolo de la derivada; cuando escribe dy, está denotando una diferencial. No sea flojo escribiendo dy cuando quiera referirse a una derivada. Si lo hace, lo llevará a una seria confusión.

Regla de derivación	Regla de diferenciación
1. $\dfrac{dk}{dx} = 0$	1. $dk = 0$
2. $\dfrac{d(ku)}{dx} = k\dfrac{du}{dx}$	2. $d(ku) = k\,du$
3. $\dfrac{d(u + v)}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$	3. $d(u + v) = du + dv$
4. $\dfrac{d(uv)}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$	4. $d(uv) = u\,dv + v\,du$
5. $\dfrac{d(u/v)}{dx} = \dfrac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2}$	5. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$
6. $\dfrac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$	6. $d(u^n) = nu^{n-1}\,du$

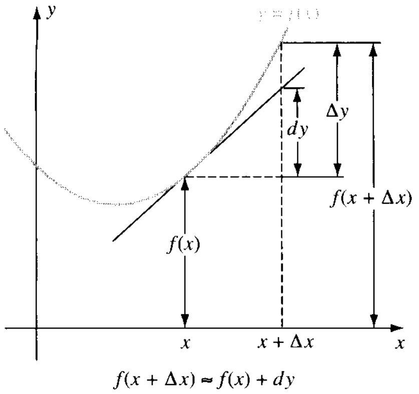


Figura 3

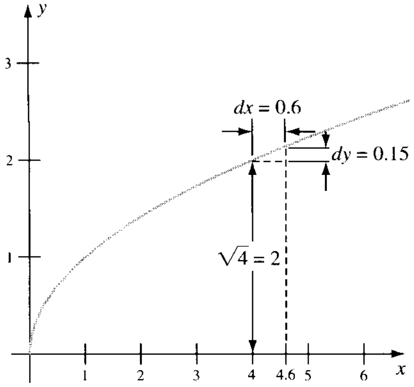


Figura 4

Aproximaciones Las diferenciales desempeñan varios papeles en este texto; pero por ahora su principal uso está en proporcionar aproximaciones. Esto ya lo sugerimos antes.

Suponga $y = f(x)$, como se muestra en la figura 3. Un incremento Δx produce un correspondiente incremento Δy en y, que puede aproximarse con dy. Así, $f(x + \Delta x)$ se aproxima por medio de

$$\boxed{f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\,\Delta x}$$

Ésta es la base para las soluciones de todos los ejemplos que siguen.

EJEMPLO 2 Suponga que necesita buenas aproximaciones para $\sqrt{4.6}$ y $\sqrt{8.2}$, pero que no sirve su calculadora. ¿Qué podría hacer?

SOLUCIÓN Considere la gráfica de $y = \sqrt{x}$ bosquejada en la figura 4. Cuando x cambia de 4 a 4.6, $\sqrt{x}$ cambia de $\sqrt{4} = 2$ a (aproximadamente) $\sqrt{4} + dy$. Ahora,

$$dy = \frac{1}{2}x^{-1/2}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

que, en $x = 4$ y $dx = 0.6$, tiene el valor

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{4}}(0.6) = \frac{0.6}{4} = 0.15$$

Por lo tanto,

$$\sqrt{4.6} \approx \sqrt{4} + dy = 2 + 0.15 = 2.15$$

De manera análoga, en $x = 9$ y $dx = -0.8$,

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{9}}(-0.8) = \frac{-0.8}{6} \approx -0.133$$

De aquí que,

$$\sqrt{8.2} \approx \sqrt{9} + dy \approx 3 - 0.133 = 2.867$$

Observe que, en este caso, tanto dx como dy fueron negativas.

Los valores aproximados 2.15 y 2.867 pueden compararse con los valores verdaderos (a cuatro decimales) de 2.1448 y 2.8636. ■

EJEMPLO 3 Utilice diferenciales para aproximar el aumento en el área de una pompa de jabón cuando su radio aumenta de 3 pulgadas a 3.025 pulgadas.

SOLUCIÓN El área de una pompa de jabón esférica está dada por $A = 4\pi r^2$. Podemos aproximar el cambio exacto, ΔA, por medio de la diferencial dA, donde

$$dA = 8\pi r\,dr$$

En $r = 3$ y $dr = \Delta r = 0.025$,

$$dA = 8\pi(3)(0.025) \approx 1.885 \text{ pulgadas cuadradas}$$ ■

Estimación de errores A continuación se presenta un problema común en la ciencia. Un investigador mide cierta variable x y tiene un valor x_0, con un posible error de tamaño $\pm\Delta x$. Después, el valor x_0 es utilizado para calcular un valor y_0, para y que depende de x. El valor de y_0 está contaminado por el error en x, pero, ¿qué tanto? El procedimiento estándar es estimar este error por medio de diferenciales.

EJEMPLO 4 La arista de un cubo se midió como 11.4 centímetros con un posible error de ±0.05 centímetros. Evalúe el volumen del cubo y proporcione una estimación para el posible error en este valor.

SOLUCIÓN El volumen V de un cubo de arista x es $V = x^3$. Por lo tanto, $dV = 3x^2dx$. Si $x = 11.4$ y $dx = 0.05$, entonces $V = (11.4)^3 \approx 1482$ y

$$\Delta V \approx dV = 3(11.4)^2(0.05) \approx 19$$

Por lo tanto, podríamos reportar el volumen del cubo como 1482 ±19 centímetros cúbicos. ■

La cantidad ΔV en el ejemplo 4 se denomina **error absoluto.** Otra medida del error es el **error relativo**, que se obtiene dividiendo el error absoluto entre el volumen total. Podemos aproximar el error relativo $\Delta V/V$ por dV/V. En el ejemplo 4, el error relativo es

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} \approx \frac{19}{1482} \approx 0.0128$$

Con frecuencia, el error relativo se expresa en términos de porcentaje. Así, decimos que para el cubo del ejemplo 4 el error relativo es aproximadamente 1.28%.

EJEMPLO 5 La Ley de Poiseuille para el flujo de la sangre dice que el volumen que fluye por una arteria es proporcional a la cuarta potencia del radio, esto es, $V = kR^4$. ¿En cuánto debe aumentarse el radio para aumentar el flujo de la sangre en 50%?

SOLUCIÓN La diferencial satisface $dV = 4kR^3\,dR$. El cambio relativo en el volumen es

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4kR^3\,dR}{kR^4} = 4\frac{dR}{R}$$

así que para 50% de cambio en el volumen,

$$0.5 \approx \frac{dV}{V} = 4\frac{dR}{R}$$

El cambio relativo en R debe ser

$$\frac{\Delta R}{R} \approx \frac{dR}{R} \approx \frac{0.5}{4} = 0.125$$

Por lo tanto, sólo 12.5% de aumento en el radio de una arteria aumentará el flujo de la sangre en alrededor de 50%. ■

Aproximación lineal Si f es diferenciable en a, entonces de la forma punto-pendiente de la recta, la recta tangente a f en $(a, f(a))$ está dada por $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. La función

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

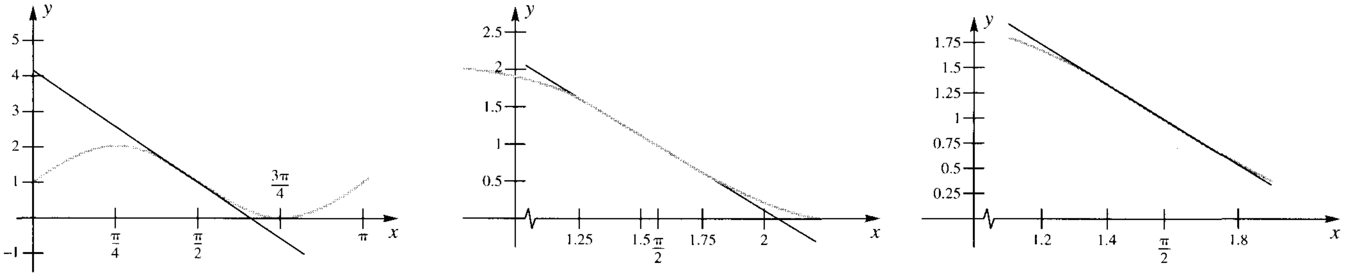
se denomina **aproximación lineal** a la función f en a, y con frecuencia es una muy buena aproximación para f cuando x es cercana a a.

EJEMPLO 6 Encuentre y dibuje la aproximación lineal a $f(x) = 1 + \operatorname{sen}(2x)$ en $x = \pi/2$

SOLUCIÓN: La derivada de f es $f'(x) = 2\cos(2x)$, de modo que la aproximación lineal es

$$\begin{aligned} L(x) &= f(\pi/2) + f'(\pi/2)(x - \pi/2) \\ &= (1 + \operatorname{sen}\pi) + (2\cos\pi)(x - \pi/2) \\ &= 1 - 2(x - \pi/2) = (1 + \pi) - 2x \end{aligned}$$

La figura 5a muestra la gráfica de la función f y la gráfica de la aproximación lineal L en el intervalo $[0, \pi]$. Podemos ver que la aproximación es buena cerca de $\pi/2$, pero la aproximación no es buena cuando se aleja de $\pi/2$. Las figuras 5b y 5c también muestran las gráficas de las funciones L y f en intervalos cada vez más pequeños. Para valores de x cercanos a $\pi/2$, vemos que la aproximación lineal es muy parecida a la función f. ■



(a) (b) (c)

Figura 5

Revisión de conceptos

1. Sea $y = f(x)$. La diferencial de y en términos de dx está definida por medio de dy_____.

2. Considere la curva $y = f(x)$ y suponga que a x se le da un incremento Δx. El cambio correspondiente en y sobre la curva está denotado por _____, mientras que el correspondiente cambio en y sobre la recta tangente está denotado por _____.

3. Podemos esperar que dy sea una buena aproximación a Δy, siempre que _____.

4. Sobre la curva $y = \sqrt{x}$, debemos esperar que dy sea cercana a Δy, pero siempre _____ que Δy. Sobre la curva $y = x^2, x \geq 0$, debemos esperar que dy sea _____ que Δy.

Conjunto de problemas 2.9

En los problemas del 1 al 8 encuentre dy.

1. $y = x^2 + x - 3$ **2.** $y = 7x^3 + 3x^2 + 1$

3. $y = (2x + 3)^{-4}$ **4.** $y = (3x^2 + x + 1)^{-2}$

5. $y = (\operatorname{sen} x + \cos x)^3$ **6.** $y = (\tan x + 1)^3$

7. $y = (7x^2 + 3x - 1)^{-3/2}$ **8.** $y = \left(x^{10} + \sqrt{\operatorname{sen} 2x}\right)^2$

9. Si $s = \sqrt{(t^2 - \cot t + 2)^3}$, encuentre ds.

10. Sea $y = f(x) = x^3$. Encuentre el valor de dy en cada caso.
(a) $x = 0.5, dx = 1$ (b) $x = -1, dx = 0.75$

11. Para la función definida en el problema 10, con cuidado haga un dibujo de la gráfica de f para $-1.5 \leq x \leq 1.5$ y las tangentes a la curva en $x = 0.5$ y $x = -1$; en este dibujo marque dy y dx para cada uno de los conjuntos de datos dados en las partes (a) y (b).

12. Sea $y = 1/x$. Encuentre el valor de dy en cada caso.
(a) $x = 1, dx = 0.5$ (b) $x = -2, dx = 0.75$

13. Para la función definida en el problema 12, con cuidado haga un dibujo (como en el problema 11), para la parte (a) $0 < x \leq 3$ y para la parte (b) $-3 \leq x < 0$.

$\boxed{C}$ **14.** Para los datos del problema 10 encuentre los cambios reales en y, es decir, Δy.

$\boxed{C}$ **15.** Para los datos del problema 12, encuentre los cambios reales en y, es decir, Δy.

16. Si $y = x^2 - 3$, encuentre los valores de Δy y dy en cada caso.
(a) $x = 2$ y $dx = \Delta x = 0.5$
$\boxed{C}$ (b) $x = 3$ y $dx = \Delta x = -0.12$

17. Si $y = x^4 + 2x$, encuentre los valores de Δy y dy en cada caso.
(a) $x = 2$ y $dx = \Delta x = 1$
$\boxed{C}$ (b) $x = 2$ y $dx = \Delta x = 0.005$.

En los problemas del 18 al 20 utilice diferenciales para aproximar los números dados (véase el ejemplo 2). Compárelos con los valores obtenidos con una calculadora

18. $\sqrt{402}$ **19.** $\sqrt{35.9}$

20. $\sqrt[3]{26.91}$

$\boxed{C}$ **21.** Aproxime el volumen del material en un cascarón esférico con radio interno de 5 centímetros y radio externo de 5.125 centímetros (véase el ejemplo 3).

$\boxed{C}$ **22.** Las seis caras de una caja cúbica metálica tienen un grosor de 0.25 pulgadas y el volumen del interior de la caja es de 40 pulgadas cúbicas. Utilice diferenciales para aproximar el volumen de metal empleado para fabricar la caja.

23. El diámetro exterior de un cascarón esférico delgado es de 12 pies. Si el cascarón tiene un grosor de 0.3 pulgadas, utilice diferenciales para aproximar el volumen de la región interior.

24. El interior de un tanque cilíndrico abierto es de 12 pies de diámetro y de 8 pies de profundidad. El fondo es de cobre y los lados son de acero. Utilice diferenciales para encontrar, de manera aproximada, cuántos galones de pintura a prueba de agua es necesaria para aplicar un capa de 0.05 pulgadas a la parte de acero del interior del tanque (1 galón $\approx$ 231 pulgadas cúbicas).

25. Suponga que el ecuador es un círculo cuyo radio es de aproximadamente 4000 millas, ¿en cuánto excedería al ecuador un círculo concéntrico y coplanar a él, si cada punto en él estuviese 2 pies alejado del ecuador? Utilice diferenciales.

26. El periodo de un péndulo simple, de longitud L pies, está dado por $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ segundos. Supongamos que g, la aceleración debida a la gravedad en (o muy cerca de) la superficie de la Tierra, es de 32 pies por segundo por segundo. Si el péndulo es el de un reloj que se mantiene sincronizado cuando $L = 4$ pies, ¿cuánto tiempo se adelantará el reloj en 24 horas, si la longitud del péndulo se disminuye a 3.97 pies?

27. El diámetro de una esfera se mide y es de 20 ± 0.1 centímetros. Calcule el volumen y estime el error absoluto y el error relativo (véase el ejemplo 4).

28. Un rodillo cilíndrico tiene exactamente 12 pulgadas de largo y su diámetro se estima en 6 ± 0.005 pulgadas. Calcule su volumen con una estimación para el error absoluto y para el error relativo.

$\boxed{C}$ **29.** El ángulo θ entre los dos lados iguales de un triángulo isósceles mide 0.53 ± 0.005 radianes. Los dos lados iguales miden exactamente 151 centímetros de largo. Calcule la longitud del tercer lado con una estimación para los errores absoluto y relativo.

$\boxed{C}$ **30.** Calcule el área del triángulo del problema 29 con una estimación para los errores absoluto y relativo. *Sugerencia:* $A = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} \theta$.

31. Puede demostrarse que si $|d^2y/dx^2| \le M$ en un intervalo cerrado con c y $c + \Delta x$ como puntos extremos, entonces

$$|\Delta y - dy| \le \tfrac{1}{2}M(\Delta x)^2$$

Utilizando diferenciales, encuentre el cambio en $y = 3x^2 - 2x + 11$, cuando x aumenta de 2 a 2.001 y luego proporcione una cota para el error que ha cometido por usar diferenciales.

32. Suponga que f es una función que satisface $f(1) = 10$ y $f'(1.02) = 12$. Utilice esta información para aproximar $f(1.02)$.

33. Suponga que f es una función que satisface $f(3) = 8$ y $f'(3.05) = \frac{1}{4}$. Utilice esta información para aproximar $f(3.05)$.

34. Una copa cónica, de 10 centímetros de altura y 8 centímetros de ancho en la parte superior, se llena con agua hasta una profundidad de 9 centímetros. Un cubo de hielo de 3 centímetros de lado está a punto de dejarse caer en la copa. Utilice diferenciales para decidir si se derramará la copa.

35. Un tanque tiene forma cilíndrica con extremos semiesféricos. Si la parte cilíndrica tiene una longitud de 100 centímetros de largo y un diámetro exterior de 20 centímetros, ¿aproximadamente cuánta pintura se requerirá para cubrir el exterior del tanque con una capa de 1 milímetro de espesor?

$\boxed{C}$ **36.** La teoría especial de la relatividad de Einstein dice que la masa m está relacionada con la velocidad v por medio de la fórmula

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_0\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

Aquí, m_0 es la masa en reposo y c es la velocidad de la luz. Utilice diferenciales para determinar el aumento porcentual en la masa de un objeto cuando su velocidad aumenta de $0.9c$ a $0.92c$.

En los problemas del 37 al 44 determine la aproximación lineal a las funciones dadas en los puntos especificados. Dibuje la función y la aproximación lineal en el intervalo que se indica.

37. $f(x) = x^2$ en $a = 2$, $[0, 3]$

38. $g(x) = x^2 \cos x$ en $a = \pi/2$, $[0, \pi]$

39. $h(x) = \operatorname{sen} x$ en $a = 0$, $[-\pi, \pi]$

40. $F(x) = 3x + 4$ en $a = 3$, $[0, 6]$

41. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ en $a = 0$, $[-1, 1]$

42. $g(x) = x/(1 - x^2)$ en $a = \frac{1}{2}$, $[0, 1)$

43. $h(x) = x \sec x$ en $a = 0$, $(-\pi/2, \pi/2)$

44. $G(x) = x + \operatorname{sen} 2x$, en $a = \pi/2$, $[0, \pi]$

45. Determine la aproximación lineal para $f(x) = mx + b$ en una a arbitraria. ¿Cuál es la relación entre $f(x)$ y $L(x)$?

46. Demuestre que para toda $a > 0$ la aproximación lineal $L(x)$ de la función $f(x) = \sqrt{x}$ en a satisface $f(x) \le L(x)$ para toda $x > 0$.

47. Demuestre que para cada a la aproximación lineal $L(x)$ para la función $f(x) = x^2$ en a satisface $L(x) \le f(x)$ para toda x.

$\boxed{\text{EXPL}}$ **48.** Determine una aproximación lineal a $f(x) = (1 + x)^\alpha$ en $x = 0$, en donde α es cualquier número. Para distintos valores de α, grafique $f(x)$ y su aproximación lineal $L(x)$. ¿Para qué valores de α la aproximación siempre sobreestima a $f(x)$? ¿Para qué valores de α la aproximación lineal siempre subestima a $f(x)$?

$\boxed{\text{EXPL}}$ **49.** Suponga que f es diferenciable. Si utilizamos la aproximación $f(x + h) \approx f(x) + f'(x)h$, el error es $\varepsilon(h) = f(x + h) - f(x) - f'(x)h$. Demuestre que

(a) $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ y (b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\varepsilon(h)}{h} = 0$.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $f'(x)dx$ **2.** $\Delta y, dy$ **3.** Δx es pequeña **4.** más grande; más pequeña

---

2.10 Repaso del capítulo

Examen de conceptos

Responda con verdadero o falso a cada una de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

1. La recta tangente a la curva en un punto no puede cruzar a la curva en ese punto.

2. La recta tangente puede tocar a la curva en un solo punto.

3. La pendiente de la recta tangente a la curva $y = x^4$ es diferente en cada punto de la curva.

4. La pendiente de la recta tangente a la curva $y = \cos x$ es diferente en cada punto de la curva.

5. Es posible que la velocidad de un objeto esté aumentando, mientras que su rapidez esté disminuyendo.

6. Es posible que la rapidez de un objeto esté aumentando, mientras que su velocidad esté disminuyendo.

7. Si la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ es horizontal en $x = c$, entonces $f'(c) = 0$

8. Si $f'(x) = g'(x)$ para toda x, entonces $f(x) = g(x)$ para toda x.

9. Si $g(x) = x$, entonces $f'(g(x)) = D_x f(g(x))$.

10. Si $y = \pi^5$, entonces $D_x y = 5\pi^4$.

11. Si $f'(c)$ existe, entonces f es continua en c.

12. La gráfica de $y = \sqrt[3]{x}$ tiene una recta tangente en $x = 0$, aunque $D_x y$ no existe en ese punto.

13. La derivada de un producto siempre es el producto de las derivadas.

14. Si la aceleración de un objeto es negativa, entonces su velocidad está disminuyendo.

15. Si x^3 es un factor de la función derivable $f(x)$, entonces x^2 es un factor de su derivada.

16. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^3$ en $(1, 1)$ es $y - 1 = 3x^2(x - 1)$.

17. Si $y = f(x)g(x)$, entonces $D_x^2 y = f(x)g''(x) + g(x)f''(x)$.

18. Si $y = (x^3 + x)^8$, entonces $D_x^{25} y = 0$.

19. La derivada de un polinomio es un polinomio.

20. La derivada de una función racional es una función racional.

21. Si $f'(c) = g'(c) = 0$ y $h(x) = f(x)g(x)$, entonces $h'(c) = 0$.

22. La expresión

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\operatorname{sen} x - 1}{x - \pi/2}$$

es la derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$, en $x = \pi/2$.

23. El operador D^2 es lineal.

24. Si $h(x) = f(g(x))$, donde f y g son derivables, entonces $g'(c) = 0$ implica que $h'(c) = 0$.

25. Si $f'(2) = g'(2) = g(2) = 2$, entonces $(f \circ g)'(2) = 4$.

26. Si f es derivable y creciente, y además si $dx = \Delta x > 0$, entonces $\Delta y > dy$

27. Si el radio de una esfera está aumentando a razón de 3 pies por segundo, entonces su volumen está creciendo 27 pies cúbicos por segundo.

28. Si el radio de un círculo aumenta 4 pies por segundo, entonces su circunferencia aumenta 8π pies por segundo.

29. $D_x^{n+4}(\operatorname{sen} x) = D_x^n(\operatorname{sen} x)$ para todo entero positivo n.

30. $D_x^{n+3}(\cos x) = -D_x^n(\operatorname{sen} x)$ para todo entero positivo n.

31. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{3x} = \frac{1}{3}$.

32. Si $s = 5t^3 + 6t - 300$ proporciona la posición de un objeto, en el instante t, en un eje coordenado horizontal, entonces ese objeto siempre se está moviendo hacia la derecha (la dirección en que aumenta s).

33. Si se está bombeando aire a un globo esférico de hule a una velocidad constante de 3 pulgadas cúbicas por segundo, entonces el radio aumentará, pero a una razón cada vez menor.

34. Si se bombea agua a un tanque esférico de radio fijo, a una tasa constante de 3 galones por segundo, la altura del agua en el tanque aumentará más rápidamente cuando el tanque esté próximo a ser llenado.

35. Si se cometió un error Δr al medir el radio de una esfera, el correspondiente error en el volumen calculado será aproximadamente $S \cdot \Delta r$, donde S es el área de la superficie de la esfera.

36. Si $y = x^5$, entonces $dy \geq 0$.

37. La aproximación lineal para la función definida por $f(x) = \cos x$ en $x = 0$ tiene pendiente positiva.

Problemas de examen

1. Utilice $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} [f(x + h) - f(x)]/h$ para encontrar la derivada de cada una de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = 3x^3$ (b) $f(x) = 2x^5 + 3x$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{3x}$ (d) $f(x) = \dfrac{1}{3x^2 + 2}$

(e) $f(x) = \sqrt{3x}$ (f) $f(x) = \operatorname{sen} 3x$

(g) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ (h) $f(x) = \cos \pi x$

2. Utilice $g'(x) = \lim\limits_{t \to x} \dfrac{g(t) - g(x)}{t - x}$ para encontrar $g'(x)$ en cada caso.

(a) $g(x) = 2x^2$ (b) $g(x) = x^3 + x$

(c) $g(x) = \dfrac{1}{x}$ (d) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

(e) $g(x) = \sqrt{x}$ (f) $g(x) = \operatorname{sen} \pi x$

(g) $g(x) = \sqrt{x^3 + C}$ (h) $g(x) = \cos 2x$

3. El límite dado es una derivada, pero ¿de qué función y en cuál punto?

(a) $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{3(1 + h) - 3}{h}$ (b) $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{4(2 + h)^3 - 4(2)^3}{h}$

(c) $\displaystyle \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(1 + \Delta x)^3} - 1}{\Delta x}$ (d) $\displaystyle \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi + \Delta x)}{\Delta x}$

(e) $\displaystyle \lim_{t \to x} \frac{4/t - 4/x}{t - x}$ (f) $\displaystyle \lim_{t \to x} \frac{\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} 3t}{t - x}$

(g) $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{\tan(\pi/4 + h) - 1}{h}$ (h) $\displaystyle \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{5 + h}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \frac{1}{h}$

4. Utilice la gráfica de $s = f(t)$ de la figura 1 para aproximar cada una de las siguientes.

(a) $f'(2)$ (b) $f'(6)$

(c) v_{prom} en $[3, 7]$ (d) $\dfrac{d}{dt} f(t^2)$ en $t = 2$

(e) $\dfrac{d}{dt} [f^2(t)]$ en $t = 2$ (f) $\dfrac{d}{dt}(f(f(t)))$ en $t = 2$

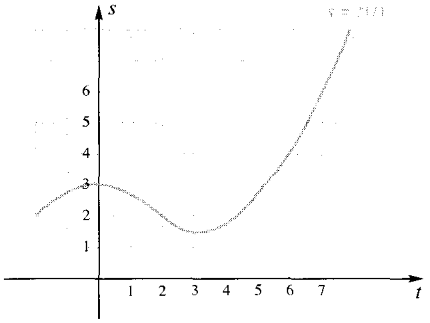


Figura 1

En los problemas del 5 al 29 encuentre la derivada que se indica por medio de las reglas que hemos desarrollado.

5. $D_x(3x^5)$

6. $D_x(x^3 - 3x^2 + x^{-2})$

7. $D_z(z^3 + 4z^2 + 2z)$

8. $D_x\left(\dfrac{3x - 5}{x^2 + 1}\right)$

9. $D_t\left(\dfrac{4t - 5}{6t^2 + 2t}\right)$

10. $D_x^2(3x + 2)^{2/3}$

11. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{4x^2 - 2}{x^3 + x}\right)$

12. $D_t\left(t\sqrt{2t + 6}\right)$

13. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}\right)$

14. $\dfrac{d}{dx}\sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x^3 - x}}$

15. $D_\theta^2(\operatorname{sen} \theta + \cos^3 \theta)$

16. $\dfrac{d}{dt}[\operatorname{sen}(t^2) - \operatorname{sen}^2(t)]$

17. $D_\theta(\operatorname{sen}(\theta^2))$

18. $\dfrac{d}{dx}(\cos^3 5x)$

19. $\frac{d}{d\theta}[\text{sen}^2(\text{sen}(\pi\theta))]$

20. $\frac{d}{dt}[\text{sen}^2(\cos 4t)]$

21. $D_\theta \tan 3\theta$

22. $\frac{d}{dx}\left(\frac{\text{sen}\, 3x}{\cos 5x^2}\right)$

23. $f'(2)$ si $f(x) = (x^2 - 1)^2(3x^3 - 4x)$

24. $g''(0)$ si $g(x) = \text{sen}\, 3x + \text{sen}^2\, 3x$

25. $\frac{d}{dx}\left(\frac{\cot x}{\sec x^2}\right)$

26. $D_t\left(\frac{4t \,\text{sen}\, t}{\cos t - \text{sen}\, t}\right)$

27. $f'(2)$ si $f(x) = (x - 1)^3(\text{sen}\, \pi x - x)^2$

28. $h''(0)$ si $h(t) = (\text{sen}\, 2t + \cos 3t)^5$

29. $g'''(1)$ si $g(r) = \cos^3 5r$

En los problemas del 30 al 33 suponga que todas las funciones dadas son derivables y encuentre la derivada que se indica.

30. $f'(t)$ si $f(t) = h(g(t)) + g^2(t)$

31. $G''(x)$ si $G(x) = F(r(x) + s(x)) + s(x)$

32. Si $F(x) = Q(R(x))$, $R(x) = \cos x$, y $Q(R) = R^3$, encuentre $F'(x)$.

33. Si $F(z) = r(s(z))$, $r(x) = \text{sen}\, 3x$, y $s(t) = 3t^3$, encuentre $F'(z)$.

34. Encuentre las coordenadas del punto en la curva $y = (x - 2)^2$ donde exista una recta tangente que sea perpendicular a la recta $2x - y + 2 = 0$

35. Un globo esférico se expande debido al calor del Sol. Encuentre la tasa de cambio del volumen del globo con respecto a su radio cuando el radio es de 5 metros.

36 Si el volumen del globo del problema 35 está aumentando a una razón constante de 10 metros cúbicos por hora, ¿a qué velocidad aumenta su radio cuando éste es de 5 metros?

37. Un abrevadero de 12 pies de largo tiene una sección transversal en forma de triángulo isósceles (con base en la parte superior) de 4 pies de profundidad y 6 pies de ancho. Si el abrevadero se está llenando con agua a una razón de 9 pies cúbicos por minuto, ¿a qué velocidad está elevándose el nivel del agua cuando el agua tiene 3 pies de profundidad?

38. Desde el suelo, un objeto se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 128 pies por segundo. Su altura s al final de t segundos es aproximadamente $s = 128t - 16t^2$ pies.

(a) ¿Cuándo alcanza su altura máxima y cuál es esa altura?

(b) ¿Cuándo llega al suelo y con qué velocidad?

39. Un objeto se mueve sobre un eje coordenado horizontal. Su distancia dirigida, s, desde el origen al final de t segundos es $s = t^3 - 6t^2 + 9t$ pies.

(a) ¿Cuando se está moviendo el objeto hacia la izquierda?

(b) ¿Cuál es su aceleración cuando su velocidad es cero?

(c) ¿Cuándo es positiva su aceleración?

40. En cada caso encuentre $D_x^{20}y$.

(a) $y = x^{19} + x^{12} + x^5 + 10$ (b) $y = x^{20} + x^{19} + x^{18}$

(c) $y = 7x^{21} + 3x^{20}$ (d) $y = \text{sen}\, x + \cos x$

(e) $y = \text{sen}\, 2x$ (f) $y = \frac{1}{x}$

41. En cada caso, encuentre dy/dx.

(a) $(x - 1)^2 + y^2 = 5$ (b) $xy^2 + yx^2 = 1$

(c) $x^3 + y^3 = x^3y^3$ (d) $x\,\text{sen}(xy) = x^2 + 1$

(e) $x \tan(xy) = 2$

42. Demuestre que las tangentes a las curvas $y^2 = 4x^3$ y $2x^2 + 3y^2 = 14$ en $(1, 2)$ son perpendiculares entre sí. *Sugerencia:* use derivación implícita.

43. Sea $y = \text{sen}(\pi x) + x^2$. Si x cambia de 2 a 2.01, ¿cuánto cambia y aproximadamente?

44. Sea $xy^2 + 2y(x + 2)^2 + 2 = 0$.

(a) Si x cambia de -2.00 a -2.01 y $y > 0$, ¿cuánto cambia y aproximadamente?

(b) Si x cambia de -2.00 a -2.01 y $y < 0$, ¿cuánto cambia y aproximadamente?

45. Suponga que $f(2) = 3, f'(2) = 4, f''(2) = -1, g(2) = 2$ y $g'(2) = 5$. Encuentre cada valor..

(a) $\frac{d}{dx}[f^2(x) + g^3(x)]$ en $x = 2$

(b) $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]$ en $x = 2$

(c) $\frac{d}{dx}[f(g(x))]$ en $x = 2$ (d) $D_x^2[f^2(x)]$ en $x = 2$

≈ **46.** Una escalera de 13 pies está apoyada contra un muro vertical. Si la parte inferior de la escalera se jala alejándola del muro a una velocidad constante de 2 pies por segundo, ¿a qué velocidad desciende, en el muro, la parte superior de la escalera cuando se encuentra 5 pies por encima del nivel del suelo?

≈ **47.** Un aeroplano se eleva, formando un ángulo de 15° con la horizontal. ¿A qué velocidad está ganando altura si su velocidad es de 400 millas por hora?

48. Dado que $D_x|x| = \frac{|x|}{x}$, $x \neq 0$, encuentre una fórmula para

(a) $D_x(|x|^2)$ (b) $D_x^2|x|$

(c) $D_x^3|x|$ (d) $D_x^2(|x|^2)$

49. Dado que $D_t|t| = \frac{|t|}{t}$, $t \neq 0$, encuentre una fórmula para

(a) $D_\theta|\text{sen}\, \theta|$ (b) $D_\theta|\cos \theta|$

50. Encuentre la aproximación lineal para las siguientes funciones en los puntos dados..

(a) $\sqrt{x + 1}$ en $a = 3$ (b) $x \cos x$ at $a = 1$

PROBLEMAS DE REPASO E INTRODUCCIÓN

En los problemas del 1 al 6 resuelva las desigualdades dadas. (Véase la sección 0.2.)

1. $(x-2)(x-3)<0$

2. $x^2-x-6>0$

3. $x(x-1)(x-2)\leq 0$

4. $x^3+3x^2+2x\geq 0$

5. $\dfrac{x(x-2)}{x^2-4}\geq 0$

6. $\dfrac{x^2-9}{x^2+2}>0$

En los problemas del 7 al 14 determine la derivada $f'(x)$ de la función dada.

7. $f(x)=(2x+1)^4$

8. $f(x)=\operatorname{sen}\pi x$

9. $f(x)=(x^2-1)\cos 2x$

10. $f(x)=\dfrac{\sec x}{x}$

11. $f(x)=\tan^2 3x$

12. $f(x)=\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}$

13. $f(x)=\operatorname{sen}\sqrt{x}$

14. $f(x)=\sqrt{\operatorname{sen} 2x}$

15. Determine todos los puntos en la gráfica de $y=\tan^2 x$, en donde la recta tangente es horizontal.

16. Determine todos los puntos en la gráfica de $y=x+\operatorname{sen} x$, en donde la recta tangente es horizontal.

17. Determine todos los puntos en la gráfica de $y=x+\operatorname{sen} x$, donde la recta tangente es paralela a la recta $y=2+x$.

18. Una caja rectangular se fabrica a partir de una pieza de cartón de 24 pulgadas de largo y 9 pulgadas de ancho; para ello, se cortan cuadrados iguales a partir de las cuatro esquinas y los lados se doblan hacia arriba, como en la figura 1. Si x es la longitud del lado de uno de los cuadrados que se cortan, ¿cuál es el volumen de la caja resultante?

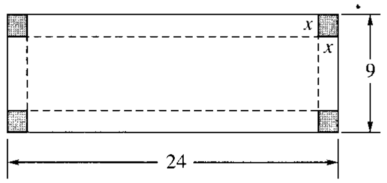


Figura 1

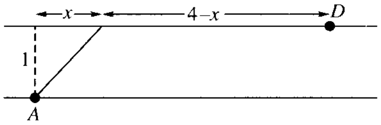


Figura 2

19. Andy quiere cruzar un río que tiene un ancho de 1 kilómetro a fin de alcanzar un punto 4 kilómetros río abajo. (Véase la figura 2.) Él puede nadar a 4 kilómetros por hora y correr a 10 kilómetros por hora. Suponiendo que él inicia nadando y que lo hace hacia un punto a x kilómetros río abajo del punto A de donde parte, ¿cuánto tardará en llegar a su destino D?

20. Sea $f(x)=x-\cos x$.

(a) ¿La ecuación $x-\cos x=0$ tiene una solución entre $x=0$ y $x=\pi$? ¿Cómo lo sabe?

(b) Determine la ecuación de la recta tangente en $x=\pi/2$.

(c) La recta tangente de la parte (b), ¿en dónde interseca al eje x?

21. Determine una función cuya derivada sea

(a) $2x$ (b) $\operatorname{sen} x$ (c) x^2+x+1

22. Sume 1 a cada respuesta del problema 21. ¿Estas funciones también son soluciones para el problema 21? Explique.

CAPÍTULO 3 Aplicaciones de la derivada

3.1 Máximos y mínimos
3.2 Monotonía y concavidad
3.3 Extremos locales y extremos en intervalos abiertos
3.4 Problemas prácticos
3.5 Graficación de funciones mediante cálculo
3.6 El teorema del valor medio para derivadas
3.7 Solución numérica de ecuaciones
3.8 Antiderivadas
3.9 Introducción a ecuaciones diferenciales
3.10 Repaso del capítulo

3.1

Máximos y mínimos

Con frecuencia en la vida, nos enfrentamos con el problema de encontrar la *mejor* manera de hacer algo. Por ejemplo, un granjero necesita elegir la mezcla de cultivos que sea la más apropiada para producir la mayor ganancia. Un médico desea seleccionar la menor dosis de una droga que curará cierta enfermedad. A un fabricante le gustaría minimizar el costo de distribución de sus productos. Algunas veces, un problema de este tipo puede formularse de modo que implique maximizar o minimizar una función en un conjunto específico. Si es así, los métodos de cálculo proporcionan una herramienta poderosa para resolver el problema.

Entonces suponga que se nos da una función $f(x)$ y un dominio S como en la figura 1. Ahora planteamos tres preguntas:

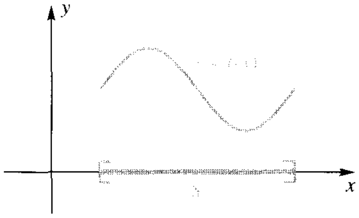


Figura 1

1. ¿$f(x)$ tiene un valor máximo o un valor mínimo en S?
2. Si tiene un valor máximo o un valor mínimo, ¿dónde se alcanzan?
3. Si existen, ¿cuáles son los valores máximo y mínimo?

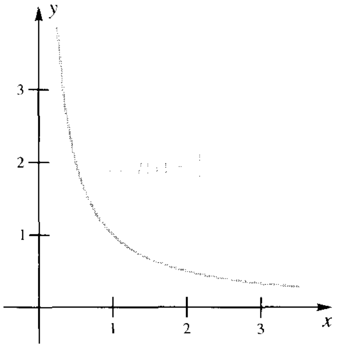
Dar respuesta a estas tres interrogantes es el principal objetivo de esta sección. Empezamos por introducir un vocabulario preciso.

Definición

Suponga que S, el dominio de f, contiene el punto c. Decimos que:

(i) $f(c)$ es el **valor máximo** de f en S, si $f(c) \geq f(x)$ para toda x en S;
(ii) $f(c)$ es el **valor mínimo** de f en S, si $f(c) \leq f(x)$ para toda x en S;
(iii) $f(c)$ es el **valor extremo** de f en S, si es un valor máximo o un valor mínimo;
(iv) la función que queremos maximizar o minimizar es la **función objetivo.**

La cuestión de la existencia *¿f tiene un valor máximo (o mínimo) en S?* La respuesta depende, sobre todo, del conjunto S. Considere $f(x) = 1/x$ en $S = (0, \infty)$; no tiene valor máximo ni mínimo (véase la figura 2). Por otra parte, la misma función en $S = [1, 3]$ tiene el valor máximo de $f(1) = 1$ y el valor mínimo de $f(3) = \frac{1}{3}$. En $S = (1, 3]$, f no tiene valor máximo y el valor mínimo es $f(3) = \frac{1}{3}$.



En $(0, \infty)$, no hay máximo ni mínimo
En $[1, 3]$, máximo = 1, mínimo = $\frac{1}{3}$
En $(1, 3]$, no hay máximo, mínimo = $\frac{1}{3}$

Figura 2

La respuesta también depende del tipo de función. Considere la función discontinua g (véase la figura 3) definida por

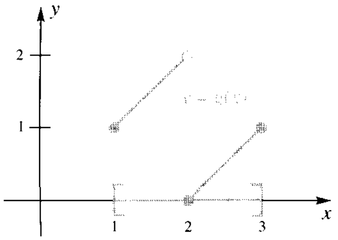
$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ x - 2 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

En $S = [1, 3]$, g no tiene valor máximo (se acerca arbitrariamente a 2, pero nunca lo alcanza). Sin embargo, g tiene el valor mínimo $g(2) = 0$.

Existe un teorema preciso que responde la pregunta de existencia para muchos problemas que se presentan en la práctica. Aunque intuitivamente es obvio, una demostración rigurosa es muy difícil, la dejamos para textos más avanzados de cálculo.

Teorema A **Teorema de existencia de máximo y mínimo**

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un valor máximo y un valor mínimo en ese intervalo.



No hay máximo, mínimo = 0

Figura 3

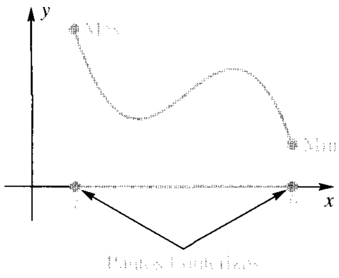


Figura 4

Observe las palabras clave en el teorema A; se requiere que f sea *continua* y que el conjunto S sea un *intervalo cerrado*.

¿En dónde se presentan los valores extremos? Por lo común, la función objetivo tendrá un intervalo I como su dominio. Pero este intervalo puede ser de cualquiera de los nueve tipos estudiados en la sección 0.2. Algunos de ellos contienen sus puntos finales (puntos fronterizos); algunos no. Por ejemplo, $I = [a, b]$ contiene ambos puntos fronterizos; $[a, b)$ sólo contiene su punto fronterizos izquierdo; (a, b) no contiene ninguno de sus puntos fronterizos (véase la figura 4).

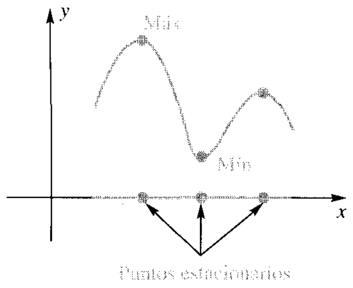


Figura 5

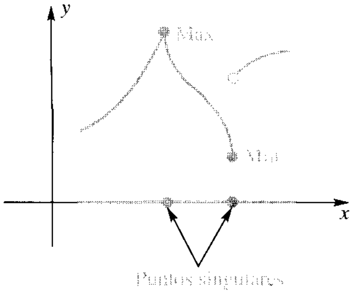


Figura 6

Si c es un punto en el que $f'(c) = 0$, lo llamamos **punto estacionario**. El nombre proviene del hecho de que un punto estacionario de la gráfica se coloca en una trayectoria horizontal, puesto que la recta tangente es horizontal. A menudo, los valores extremos aparecen en los puntos estacionarios (véase la figura 5).

Por último, si c es un punto interior de I, en donde f' no existe, decimos que c es un **punto singular**. Es un punto en donde la gráfica de f tiene una esquina, una tangente vertical, quizás un salto, o cerca del cual la gráfica oscila de manera abrupta. Los valores extremos pueden aparecer en puntos singulares (véase la figura 6), aunque en problemas prácticos esto es muy raro.

Estas tres clases de puntos (fronterizos, estacionarios y singulares) son los puntos clave en la teoría de máximos y mínimos. Cualquier punto de uno de estos tres tipos, en el dominio de una función f, se denomina **punto crítico** de f.

EJEMPLO 1 Encuentre los puntos críticos de $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ en $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$.

SOLUCIÓN Los puntos fronterizos son $-\frac{1}{2}$ y 2. Para determinar los puntos estacionarios, resolvemos $f'(x) = -6x^2 + 6x = 0$, para x, obteniendo 0 y 1. No existen puntos singulares. Por lo tanto, los puntos críticos son $-\frac{1}{2}$, 0, 1, y 2. ■

Teorema B **Teorema de los puntos críticos**

Sea f definida en un intervalo I que contiene al punto c. Si $f(c)$ es un valor extremo, entonces c debe ser un punto crítico; es decir, c es alguno de los siguientes:

(i) un punto fronterizo de I;
(ii) un punto estacionario de f; es decir, un punto en donde $f'(c) = 0$; o
(iii) un punto singular de f; esto es, un punto en donde $f'(c)$ no existe.

Demostración Primero considere el caso en donde $f(c)$ es el valor máximo de f en I y suponga que c no es un punto fronterizo ni un punto singular. Debemos demostrar que c es un punto estacionario.

Ahora, como $f(c)$ es el valor máximo, $f(x) \leq f(c)$ para toda x en I; esto es,

$$f(x) - f(c) \leq 0$$

Por consiguiente, si $x < c$, de modo que $x - c < 0$, entonces

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \tag{1}$$

mientras que si $x > c$, entonces

$$(2) \qquad \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \le 0$$

Pero $f'(c)$ existe porque c no es un punto singular. En consecuencia, cuando hacemos $x \to c^-$ en (1) y $x \to c^+$ en (2), obtenemos, respectivamente, $f'(c) \ge 0$ y $f'(c) \le 0$. Concluimos que $f'(c) = 0$, como se quería.

El caso en donde $f(c)$ es el valor mínimo se maneja de forma análoga. ■

En la demostración que se acaba de dar, utilizamos el hecho de que la desigualdad $\le$ se preserva bajo la operación de tomar límites.

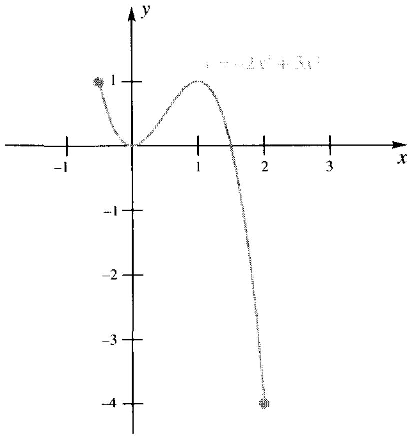


Figura 7

Terminología
Observe la manera en que los términos se utilizan en el ejemplo 3. El máximo es 1, que es igual a $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ y $f(1)$. Decimos que el máximo se alcanza en $-\frac{1}{2}$ y en 1. De manera análoga, el mínimo es –4, que se alcanza en 2.

¿Cuáles son los valores extremos? En vista de los teoremas A y B, ahora podemos establecer un procedimiento muy sencillo para determinar los valores máximo y mínimo de una función continua f en un *intervalo cerrado I*.

Paso 1: Encuentre los puntos críticos de f en I.

Paso 2: Evalúe f en cada uno de estos puntos críticos. El mayor de estos valores es el valor máximo; el más pequeño es el valor mínimo.

EJEMPLO 2 Determine los valores máximo y mínimo de $f(x) = x^3$ en $[-2, 2]$.

SOLUCIÓN La derivada de $f'(x) = 3x^2$, que está definida en $(-2, 2)$ y es cero sólo en $x = 0$. Por lo tanto, los puntos críticos son $x = 0$ y los puntos fronterizos $x = -2$ y $x = 2$. Al evaluar f en los puntos críticos se obtiene $f(-2) = -8$, $f(0) = 0$ y $f(2) = 8$. Por lo tanto, el valor máximo de f es 8 (que se alcanza en $x = 2$) y el mínimo es -8 (que se alcanza en $x = -2$). ■

Observe que en el ejemplo 2, $f'(0) = 0$, pero f no alcanza un mínimo o un máximo en $x = 0$. Esto no contradice al teorema B. Éste no dice que si c es un punto crítico, entonces $f(c)$ es un mínimo o un máximo; dice que si $f(c)$ es un mínimo o un máximo, entonces c es un punto crítico.

EJEMPLO 3 Encuentre los valores máximo y mínimo de

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2$$

en $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 1 identificamos $-\frac{1}{2}$, 0, 1, y 2 como los puntos críticos. Ahora $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, y $f(2) = -4$. Así, el valor máximo es 1 (que se alcanza en $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 1$), y el valor mínimo es -4 (que se alcanza en $x = 2$). La gráfica de f se muestra en la figura 7. ■

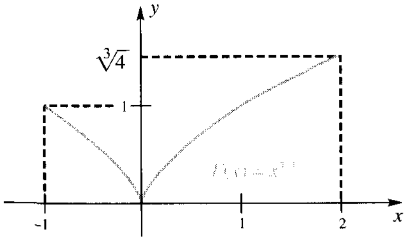


Figura 8

EJEMPLO 4 La función $F(x) = x^{2/3}$ es continua en todas partes. Encuentre sus valores máximo y mínimo en $[-1, 2]$.

SOLUCIÓN $F'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$, nunca es cero. Sin embargo, $F'(0)$ no existe, de modo que 0 es un punto crítico, así como los puntos fronterizos -1 y 2. Ahora, $F(-1) = 1$, $F(0) = 0$ y $F(2) = \sqrt[3]{4} \approx 1.59$. Por consiguiente, el valor máximo es $\sqrt[3]{4}$; el valor mínimo es 0. La gráfica se muestra en la figura 8. ■

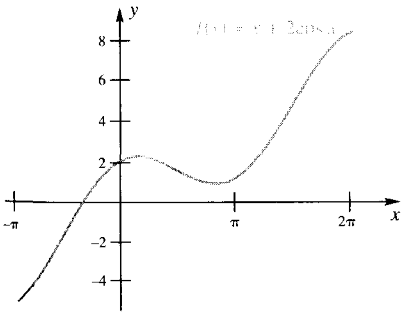


Figura 9

EJEMPLO 5 Determine los valores máximo y mínimo de $f(x) = x + 2\cos x$ en $[-\pi, 2\pi]$.

SOLUCIÓN La figura 9 muestra una gráfica de $y = f(x)$. La derivada es $f'(x) = 1 - 2$ sen x, que está definida en $(-\pi, 2\pi)$ y es cero cuando sen $x = 1/2$. Los únicos valores de x en el intervalo $[-\pi, 2\pi]$ que satisfacen sen $x = 1/2$ son $x = \pi/6$ y $x = 5\pi/6$. Estos dos números, junto con los puntos fronterizos $-\pi$ y 2π, son los puntos críticos. Ahora, evalúe f en cada punto crítico:

$$f(-\pi) = -2 - \pi \approx -5.14 \qquad f(\pi/6) = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} \approx 2.26$$

$$f(5\pi/6) = -\sqrt{3} + \frac{5\pi}{6} \approx 0.89 \qquad f(2\pi) = 2 + 2\pi \approx 8.28$$

Por lo tanto, $-2 - \pi$ es el mínimo (que se alcanza en $x = -\pi$) y el máximo es $2 + 2\pi$ (que se alcanza en $x = 2\pi$). ■

Revisión de conceptos

1. Una función ________ en un intervalo ________ siempre tendrá un valor máximo y un valor mínimo en ese intervalo.

2. El término valor ________ denota un valor máximo o uno mínimo.

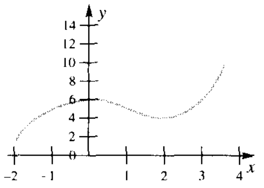
3. Una función puede alcanzar un valor extremo sólo en un punto crítico. Los puntos críticos son de tres tipos: ________, ________ y ________.

4. Un punto estacionario para f es un número c tal que ________; un punto singular para f es un número c tal que ________.

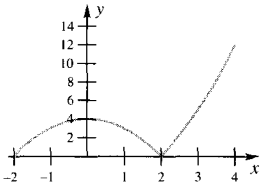
Conjunto de problemas 3.1

En los problemas del 1 al 4 determine todos los puntos críticos y encuentre el mínimo y el máximo de la función. Cada función tiene dominio $[-2, 4]$.

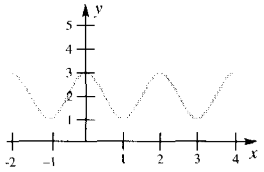
1.



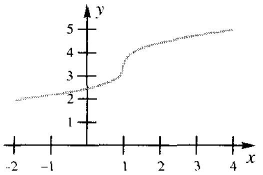
2.



3.



4.



En los problemas del 5 al 26 identifique los puntos críticos y encuentre los valores máximo y mínimo en el intervalo dado.

5. $f(x) = x^2 + 4x + 4; I = [-4, 0]$

6. $h(x) = x^2 + x; I = [-2, 2]$

7. $\Psi(x) = x^2 + 3x; I = [-2, 1]$

8. $G(x) = \frac{1}{5}(2x^3 + 3x^2 - 12x); I = [-3, 3]$

9. $f(x) = x^3 - 3x + 1; I = \left(-\frac{3}{2}, 3\right)$ *Sugerencia:* dibuje la gráfica.

10. $f(x) = x^3 - 3x + 1; I = \left[-\frac{3}{2}, 3\right]$

11. $h(r) = \dfrac{1}{r}; I = [-1, 3]$

12. $g(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}; I = [-3, 1]$

13. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2; I = [-2, 2]$

14. $f(x) = x^5 - \dfrac{25}{3}x^3 + 20x - 1; I = [-3, 2]$

15. $g(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}; I = (-\infty, \infty)$ *Sugerencia:* dibuje la gráfica.

16. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}; I = [-1, 4]$

17. $r(\theta) = \operatorname{sen} \theta; I = \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{6}\right]$

18. $s(t) = \operatorname{sen} t - \cos t; I = [0, \pi]$

19. $a(x) = |x - 1|; I = [0, 3]$

20. $f(s) = |3s - 2|; I = [-1, 4]$

21. $g(x) = \sqrt[3]{x}; I = [-1, 27]$

22. $s(t) = t^{2/5}; I = [-1, 32]$

23. $H(t) = \cos t; I = [0, 8\pi]$

24. $g(x) = x - 2 \operatorname{sen} x; I = [-2\pi, 2\pi]$

25. $g(\theta) = \theta^2 \sec \theta; I = \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$

26. $h(t) = \dfrac{t^{5/3}}{2 + t}; I = [-1, 8]$

GC **27.** Para cada función identifique los puntos críticos y encuentre los valores extremos en $[-1, 5]$.

(a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + x + 2$ (b) $g(x) = |f(x)|$

GC **28.** Para cada función identifique los puntos críticos y encuentre los valores extremos en $[-1, 5]$.

(a) $f(x) = \cos x + x \operatorname{sen} x + 2$ (b) $g(x) = |f(x)|$

En los problemas del 29 al 36 haga un bosquejo de la gráfica de una función con las propiedades que se dan.

29. f es diferenciable, tiene dominio $[0, 6]$, alcanza un máximo de 6 (cuando $x = 3$) y un mínimo de 0 (cuando $x = 0$). Además, $x = 5$ es un punto estacionario.

30. f es diferenciable, tiene dominio $[0, 6]$, alcanza un máximo de 4 (cuando $x = 6$) y un mínimo de -2 (cuando $x = 1$). Además, $x = 2, 3, 4, 5$ son puntos estacionarios.

31. f es continua, pero no necesariamente diferenciable, tiene dominio $[0, 6]$, alcanza un máximo de 6 (cuando $x = 5$) y un mínimo de 2 (cuando $x = 3$). Además, $x = 1$ y $x = 5$ son los únicos puntos estacionarios.

32. f es continua, pero no necesariamente diferenciable, tiene dominio $[0, 6]$, alcanza un máximo de 4 (cuando $x = 4$) y un mínimo de 2 (cuando $x = 2$). Además, f no tiene puntos estacionarios.

33. f es diferenciable, tiene dominio $[0, 6]$, alcanza un máximo de 4 (que se obtiene en dos valores diferentes de x, ninguno de los cuales es un punto fronterizo) y un mínimo de 1 (que se alcanza en tres valores diferentes de x, exactamente uno de los cuales es un punto fronterizo).

34. f es continua, pero no necesariamente diferenciable, tiene dominio $[0, 6]$, alcanza un máximo de 6 (cuando $x = 0$) y un mínimo de 0 (cuando $x = 6$). Además, f tiene dos puntos estacionarios y dos puntos singulares en $(0, 6)$.

35. f tiene dominio en $[0, 6]$, pero no necesariamente es continua, y f no alcanza un máximo.

36. f tiene dominio en $[0, 6]$, pero no necesariamente es continua, y f no alcanza ni máximo ni mínimo.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** continua; cerrado **2.** extremo **3.** puntos fronterizo; puntos estacionarios; puntos singulares **4.** $f'(c) = 0; f'(c)$ no existe.

3.2
Monotonía y concavidad

Considere la gráfica en la figura 1. Nadie se sorprendería cuando decimos que f es decreciente a la izquierda de c y creciente a la derecha de c. Pero, para asegurar que coincidimos en la terminología, damos definiciones precisas.

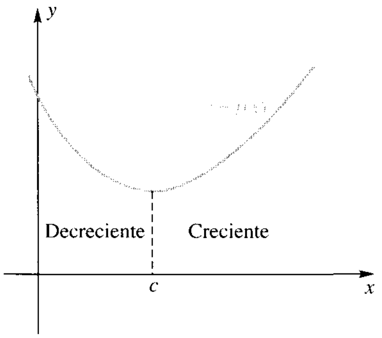


Figura 1

Definición

Sea f definida en un intervalo I (abierto, cerrado o ninguno de los dos). Decimos que:

(i) f es **creciente** en I si, para toda pareja de números x_1 y x_2 en I,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

(ii) f es **decreciente** en I si, para toda pareja de números x_1 y x_2 en I,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

(iii) f es **estrictamente monótona** en I, si es creciente en I o es decreciente en I.

¿Cómo decidiremos en dónde es creciente una función? Alguien podría sugerir que dibujemos su gráfica y la veamos. Pero, por lo regular, una gráfica se dibuja al trazar algunos puntos y conectarlos mediante una curva suave. ¿Quién puede asegurar que la gráfica no oscila entre los puntos trazados? Incluso, los sistemas de álgebra computacional y las calculadoras gráficas lo hacen conectando puntos. Necesitamos un procedimiento mejor.

La primera derivada y monotonía Recuerde que la primera derivada $f'(x)$ nos da la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto x. Por lo tanto, si $f'(x) > 0$ entonces la recta tangente asciende hacia la derecha, lo cual sugiere que f es creciente. (Véase la figura 2.) De manera análoga, si $f'(x) < 0$, la recta tangente desciende hacia la derecha, lo cual sugiere que f es decreciente. También podemos observar esto en términos de movimiento a lo largo de una línea. Suponga que un objeto está en la posición $s(t)$ en el instante t y que su velocidad siempre es positiva, esto es, $s'(t) = ds/dt > 0$. Entonces, parece razonable que el objeto continúe moviéndose a la derecha mientras la derivada siga siendo positiva. En otras palabras, $s(t)$ será una función *creciente* de t. Estas observaciones no demuestran el teorema A, pero hacen creíble el resultado. Posponemos una demostración rigurosa hasta la sección 3.6.

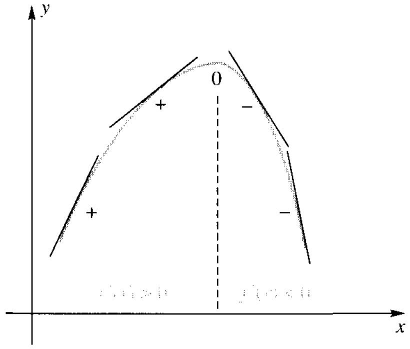


Figura 2

Teorema A **Teorema de monotonía**

Sea f continua en el intervalo I y derivable en todo punto interior de I.

(i) Si $f'(x) > 0$ para toda x interior a I, entonces f es creciente en I.
(ii) Si $f'(x) < 0$ para toda x interior a I, entonces f es decreciente en I.

Por lo regular, este teorema nos permite determinar con precisión en dónde una función derivable es creciente y en dónde es decreciente. Es cuestión de resolver dos desigualdades.

EJEMPLO 1 Si $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$, encuentre en dónde f es creciente y en dónde es decreciente.

SOLUCIÓN Empezamos por encontrar la derivada de f,

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x + 1)(x - 2)$$

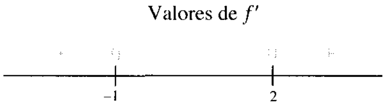


Figura 3

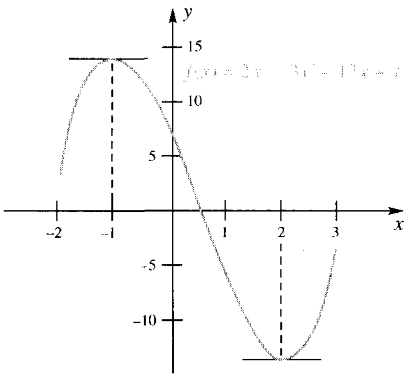


Figura 4

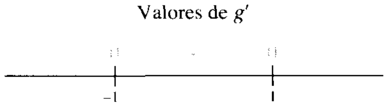


Figura 5

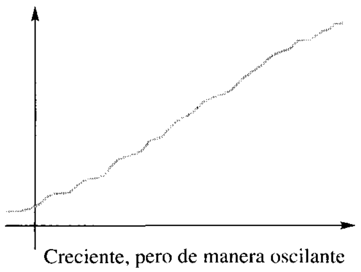

Creciente, pero de manera oscilante

Figura 6

Necesitamos determinar en dónde

$$(x+1)(x-2) > 0$$

y también en dónde

$$(x+1)(x-2) < 0$$

Este problema fue estudiado con mayor detalle en la sección 0.2, que vale la pena revisar ahora. Los puntos de separación son −1 y 2; éstos dividen al eje x en tres intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$ y $(2, \infty)$. Al utilizar los puntos de prueba −2, 0 y 3, concluimos que $f'(x) > 0$ en el primero y en el último de estos intervalos y que $f'(x) < 0$ en el intervalo de en medio (véase la figura 3). Así, por el teorema A, f es creciente en $(-\infty, -1]$ y en $[2, \infty)$, es decreciente en $[-1, 2]$. Observe que el teorema nos permite incluir los puntos fronterizos de estos intervalos, aunque $f'(x) = 0$ en esos puntos. La gráfica de f se muestra en la figura 4. ■

EJEMPLO 2 Determine en dónde $g(x) = x/(1 + x^2)$ es creciente y en dónde es decreciente.

SOLUCIÓN

$$g'(x) = \frac{(1 + x^2) - x(2x)}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{(1 - x)(1 + x)}{(1 + x^2)^2}$$

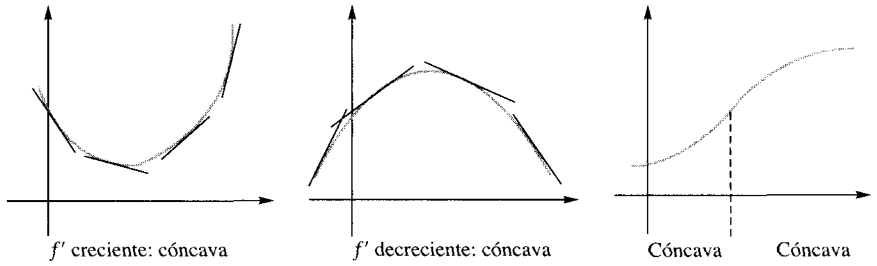
Como el denominador siempre es positivo, $g'(x)$ tiene el mismo signo que el numerador $(1 - x)(1 + x)$. Los puntos de separación, −1 y 1, determinan los tres intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, \infty)$. Cuando los probamos, encontramos que $g'(x) < 0$ en el primero y en el último de estos intervalos y que $g'(x) > 0$ en el intervalo de en medio (véase la figura 5). Con base en el teorema A, concluimos que g es decreciente en $(-\infty, -1]$ y en $[1, \infty)$ y que es creciente en $[-1, 1]$. Posponemos la graficación de g para más adelante; pero si quiere ver la gráfica, vaya a la figura 11 y al ejemplo 4. ■

La segunda derivada y concavidad Una función puede crecer y también tener una gráfica que oscila mucho (véase la figura 6). Para analizar oscilaciones, necesitamos estudiar cómo gira la recta tangente cuando nos movemos de izquierda a derecha a lo largo de la gráfica. Si la recta tangente gira constantemente en sentido contrario a las manecillas del reloj, decimos que la gráfica es *cóncava hacia arriba* (o simplemente cóncava); si la tangente gira en el mismo sentido que las manecillas del reloj, la gráfica es *cóncava hacia abajo* (o *convexa*). Ambas definiciones se formulan mejor en términos de funciones y sus derivadas.

Definición

Sea f derivable en un intervalo abierto I. Decimos que f (al igual que su gráfica) es **cóncava hacia arriba (cóncava)** en I, si f' es creciente en I; y decimos que f es **cóncava hacia abajo (convexa)** en I, si f' es decreciente en I.

Los diagramas en la figura 7 ayudarán a aclarar estas nociones. Obsérvese que una curva que es cóncava *hacia arriba* tiene forma parecida a una *copa*.


f' creciente: cóncava hacia arriba

f' decreciente: cóncava hacia abajo

Cóncava hacia arriba

Cóncava hacia abajo

Figura 7

Condiciones en los teoremas A y B

Las condiciones que consideran a las derivadas en los teoremas A y B son suficientes para garantizar las conclusiones que se establecen. Sin embargo, estas condiciones no son necesarias. Es posible que una función sea creciente en algún intervalo, aunque la derivada no siempre sea positiva en ese intervalo. Si consideramos la función $f(x) = x^3$ en el intervalo $[-4, 4]$, notamos que es creciente pero su derivada no siempre es positiva en ese intervalo ($f'(0) = 0$). La función $g(x) = x^4$ es cóncava hacia arriba en el intervalo $[-4, 4]$, pero la segunda derivada, $g''(x) = 12x^2$, no siempre es positiva en ese intervalo.

En vista del teorema A, tenemos un criterio sencillo para decidir en dónde una curva es cóncava (hacia arriba) y en dónde es cóncava hacia abajo (convexa). Basta con tener en mente que la segunda derivada de f es la primera derivada de f'. Por lo que, f' es creciente si f'' es positiva; es decreciente si f'' es negativa.

Teorema B **Teorema de concavidad**

Sea f dos veces derivable en el intervalo abierto I.

(i) Si $f''(x) > 0$ para toda x en I, entonces f es cóncava (hacia arriba) en I.

(ii) Si $f'' < 0$ para toda x en I, entonces f es cóncava hacia abajo (convexa) en I.

Para la mayoría de las funciones, este teorema reduce el problema de determinar concavidad al problema de resolver desigualdades. En esto somos expertos.

EJEMPLO 3 ¿En dónde $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo?

SOLUCIÓN

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$$

$$f''(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$$

Al resolver las desigualdades $(x + 1)(x - 3) > 0$ y su opuesta, $(x + 1)(x - 3) < 0$, concluimos que f es creciente en $(-\infty, -1]$ y $[3, \infty)$ y decreciente en $[-1, 3]$ (véase la figura 8). De manera análoga, al resolver $2(x - 1) > 0$ y $2(x - 1) < 0$ se muestra que f es cóncava hacia arriba en $(1, \infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty, 1)$. La gráfica de f se muestra en la figura 9. ■

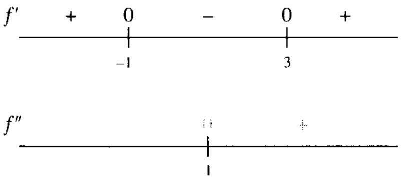


Figura 8

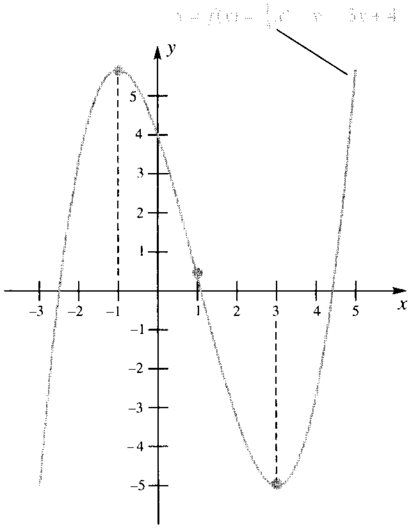


Figura 9

EJEMPLO 4 ¿En dónde $g(x) = x/(1 + x^2)$ es cóncava hacia arriba y en dónde es cóncava hacia abajo?

SOLUCIÓN Comenzamos nuestro estudio de esta función en el ejemplo 2. Allí, aprendimos que g es decreciente en $(-\infty, -1]$ y $[1, \infty)$ y creciente en $[-1, 1]$. Para analizar la concavidad, calculamos g''.

$$g'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$$

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{(1 + x^2)^2(-2x) - (1 - x^2)(2)(1 + x^2)(2x)}{(1 + x^2)^4} \\ &= \frac{(1 + x^2)[(1 + x^2)(-2x) - (1 - x^2)(4x)]}{(1 + x^2)^4} \\ &= \frac{2x^3 - 6x}{(1 + x^2)^3} \\ &= \frac{2x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3} \end{aligned}$$

Como el denominador siempre es positivo, sólo necesitamos resolver $x(x^2 - 3) > 0$ y su opuesta. Los puntos de separación son $-\sqrt{3}$, 0 y $\sqrt{3}$. Estos tres puntos de separación determinan cuatro intervalos. Después de probarlos (véase la figura 10), concluimos que g es cóncava hacia arriba en $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$ y en $\left(\sqrt{3}, \infty\right)$ y que es cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$ y en $\left(0, \sqrt{3}\right)$.

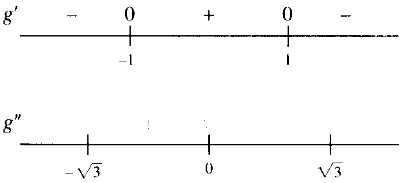


Figura 10

Para bosquejar la gráfica de g, hacemos uso de toda la información obtenida hasta el momento, más el hecho de que g es una función impar cuya gráfica es simétrica respecto al origen (véase la figura 11).

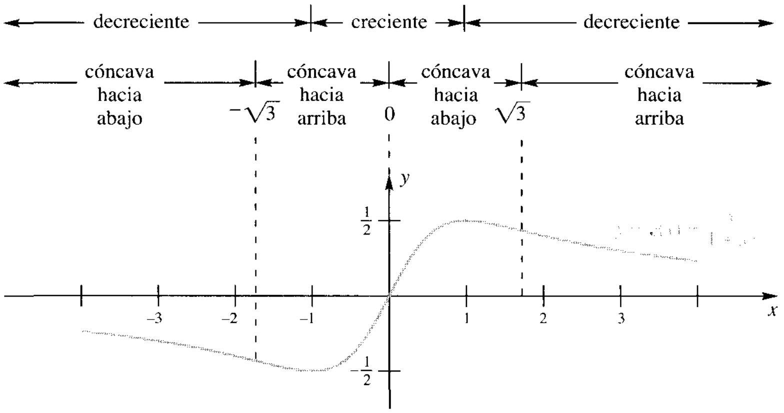


Figura 11

■

EJEMPLO 5 Suponga que se vierte agua en un depósito cónico, como se muestra en la figura 12, a una razón constante de $\frac{1}{2}$ pulgada cúbica por segundo. Determine la altura h como función del tiempo t y dibuje $h(t)$ desde el instante $t = 0$ hasta el momento en que el depósito está lleno.

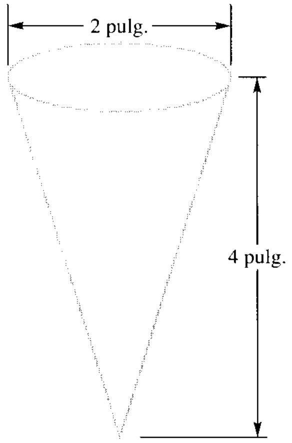


Figura 12

SOLUCIÓN Antes de que resolvamos este problema, reflexionemos en cómo se verá la gráfica. Al principio, la altura aumentará con rapidez, ya que se necesita muy poca agua para llenar la parte inferior del cono. Conforme se va llenando el depósito, la altura aumentará menos rápido. ¿Qué sugieren estos enunciados con respecto a la función $h(t)$, su derivada $h'(t)$ y su segunda derivada $h''(t)$? Como el agua se vierte de manera constante, la altura siempre aumentará, de modo que $h'(t)$ será positiva. La altura aumentará más lentamente conforme se eleva el nivel. Por consiguiente, la función $h'(t)$ está disminuyendo, de modo que $h''(t)$ es negativa. Por lo tanto, la gráfica de $h(t)$ es creciente —ya que $h'(t)$ es positiva— y cóncava hacia abajo —pues $h''(t)$ es negativa.

Ahora, una vez que tenemos una idea intuitiva sobre cómo debe verse la gráfica (creciente y cóncava hacia abajo), resuelva este problema de manera analítica. El volumen de un cono circular recto es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, donde V, r y h son funciones del tiempo. Las funciones h y r están relacionadas; observe los triángulos semejantes en la figura 13. Al utilizar las propiedades de triángulos semejantes tenemos

$$\frac{r}{h} = \frac{1}{4}$$

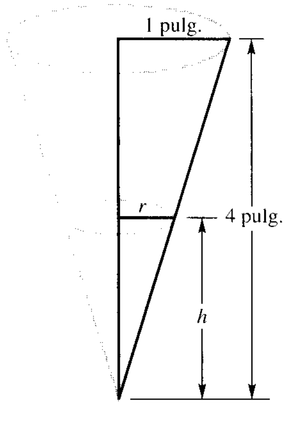


Figura 13

Así, $r = h/4$. Por esto, el volumen del agua dentro del cono es

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{4}\right)^2 h = \frac{\pi}{48}h^3$$

Por otro lado, como el agua está fluyendo al interior del contenedor a una razón de $\frac{1}{2}$ pulgada cúbica por segundo, el volumen en el instante t es $V = \frac{1}{2}t$, donde t se mide en segundos. Al igualar estas dos expresiones para V se obtiene

$$\frac{1}{2}t = \frac{\pi}{48}h^3$$

Cuando $h = 4$, tenemos $t = \frac{2\pi}{48}4^3 = \frac{8}{3}\pi \approx 8.4$; así, toma alrededor de 8.4 segundos para que se llene el depósito. Ahora se despeja h en la ecuación anterior que relaciona h y t para obtener

$$h(t) = \sqrt[3]{\frac{24}{\pi}t}$$

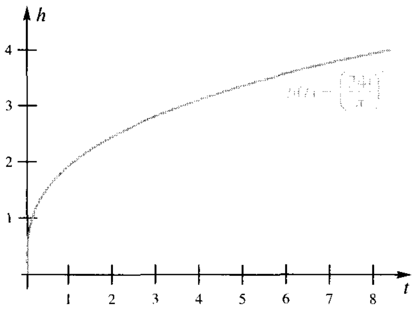


Figura 14

La primera y segunda derivadas de h son

$$h'(t) = D_t \sqrt[3]{\frac{24}{\pi}t} = \frac{8}{\pi}\left(\frac{24}{\pi}t\right)^{-2/3} = \frac{2}{\sqrt[3]{9\pi t^2}}$$

que es positiva, y

$$h''(t) = D_t \frac{2}{\sqrt[3]{9\pi t^2}} = -\frac{4}{3\sqrt[3]{9\pi t^5}}$$

que es negativa. La gráfica de $h(t)$ se muestra en la figura 14. Como se esperaba, la gráfica de h es creciente y cóncava hacia abajo. ■

EJEMPLO 6 Una agencia de noticias reportó en mayo de 2004 que el desempleo en Asia oriental estaba aumentando en forma continua a una tasa creciente. Por otra parte, el precio del alimento estaba aumentando, pero a una tasa más lenta que antes. Interprete estos enunciados en términos de funciones crecientes/decrecientes y concavidad.

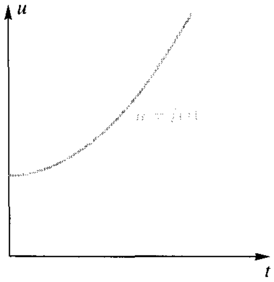


Figura 15

SOLUCIÓN Sea $u = f(t)$ el número de personas desempleadas en el instante t. Aunque en realidad u salta en cantidades enteras, seguiremos una práctica estándar al representar a u por medio de una curva suave, como en la figura 15. Decir que el desempleo está aumentando es decir que $du/dt > 0$. Decir que está aumentando a una tasa creciente es decir que la función du/dt está *creciendo*; pero esto significa que la derivada de du/dt debe ser positiva. Por lo tanto, $d^2u/dt^2 > 0$. En la figura 15, observe que la pendiente de la recta tangente aumenta conforme t aumenta. El desempleo es creciente y cóncavo hacia arriba.

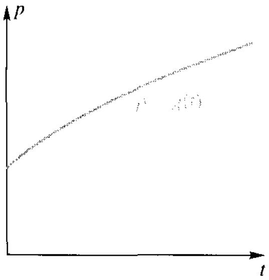


Figura 16

De forma similar, si $p = g(t)$ representa el precio del alimento (por ejemplo, el costo común de comestibles diarios para una persona) en el instante t, entonces dp/dt es positiva pero *decreciente*. Por lo tanto, la derivada de dp/dt es negativa, por lo que $d^2p/dt^2 < 0$. En la figura 16, observe que la pendiente de la recta tangente disminuye conforme t aumenta. El precio del alimento está aumentando, pero es cóncavo hacia abajo. ■

Puntos de inflexión

Sea f continua en c. Llamamos a $(c, f(c))$ un **punto de inflexión** de la gráfica de f, si f es cóncava hacia arriba a un lado de c y cóncava hacia abajo del otro lado de c. La gráfica en la figura 17 indica varias posibilidades.

Terminología
Mientras que el mínimo o el máximo de una función es un *número*, un punto de inflexión siempre es una *pareja ordenada* $(c, f(c))$.

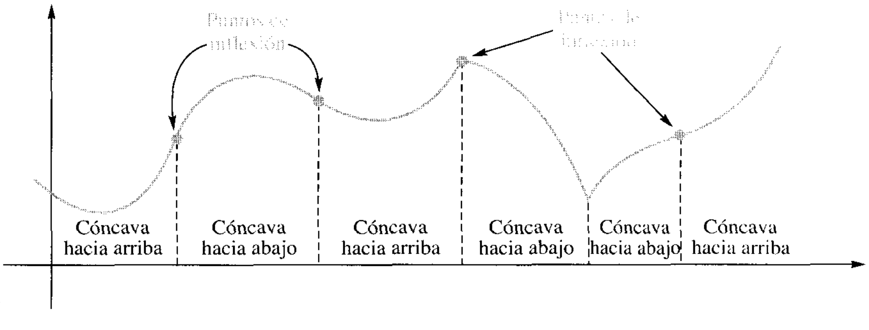


Figura 17

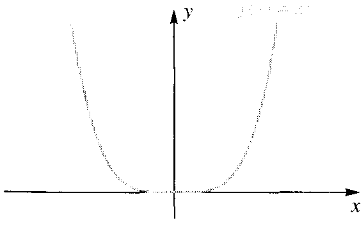


Figura 18

Como usted podría suponer, los *puntos en donde $f''(x) = 0$ o donde $f''(x)$ no existe son candidatos a puntos de inflexión*. Utilizamos la palabra *candidato* de manera deliberada. Al igual que un candidato a un cargo político puede fracasar en una elección, también, por ejemplo, un punto en donde $f''(x) = 0$ puede fracasar en ser un punto de inflexión. Considere $f(x) = x^4$, que tiene la gráfica mostrada en la figura 18. Es cierto que $f''(0) = 0$, pero el origen no es un punto de inflexión. Por lo tanto, para buscar los puntos de inflexión empezamos por identificar los puntos en donde $f''(x) = 0$ (y en donde $f''(x)$ no existe). Después verificamos para ver si en realidad son puntos de inflexión.

Regresemos a la gráfica del ejemplo 4. Verá que tiene tres puntos de inflexión. Éstos son $\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}/4\right)$, $(0, 0)$ y $\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}/4\right)$.

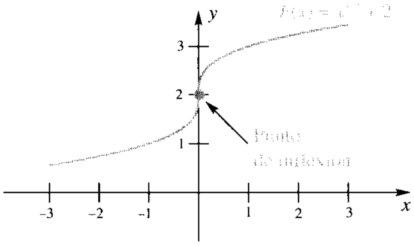


Figura 19

EJEMPLO 7 Encuentre todos los puntos de inflexión de $F(x) = x^{1/3} + 2$.

SOLUCIÓN

$$F'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}, \qquad F''(x) = \frac{-2}{9x^{5/3}}$$

La segunda derivada, $F''(x)$, nunca es cero; sin embargo, no existe en $x = 0$. El punto $(0, 2)$ es un punto de inflexión, ya que $F''(x) > 0$ para $x < 0$ y $F''(x) < 0$ para $x > 0$. La gráfica se bosqueja en la figura 19. ■

Revisión de conceptos

1. Si $f'(x) > 0$ en todas partes, entonces f es ________ en todas partes; si $f''(x) > 0$ en todas partes, entonces f es ________ en todas partes.

2. Si ________ y ________ en un intervalo abierto I, entonces f es creciente y cóncava hacia abajo en I.

3. Un punto en la gráfica de una función continua, en donde la concavidad cambia se denomina ________.

4. Al tratar de localizar los puntos de inflexión para la gráfica de una función f debemos buscar números c, en donde ________ o bien ________.

Conjunto de problemas 3.2

En los problemas del 1 al 10 utilice el teorema de monotonía para encontrar en dónde la función dada es creciente y en dónde es decreciente.

1. $f(x) = 3x + 3$ **2.** $g(x) = (x + 1)(x - 2)$

3. $h(t) = t^2 + 2t - 3$ **4.** $f(x) = x^3 - 1$

5. $G(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ **6.** $f(t) = t^3 + 3t^2 - 12$

7. $h(z) = \dfrac{z^4}{4} - \dfrac{4z^3}{6}$ **8.** $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2}$

9. $H(t) = \operatorname{sen} t, 0 \leq t \leq 2\pi$

10. $R(\theta) = \cos^2 \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

En los problemas del 11 al 18 utilice el teorema de la concavidad para determinar en dónde la función dada es cóncava hacia arriba y en dónde es cóncava hacia abajo. También encuentre todos los puntos de inflexión.

11. $f(x) = (x - 1)^2$ **12.** $G(w) = w^2 - 1$

13. $T(t) = 3t^3 - 18t$ **14.** $f(z) = z^2 - \dfrac{1}{z^2}$

15. $q(x) = x^4 - 6x^3 - 24x^2 + 3x + 1$

16. $f(x) = x^4 + 8x^3 - 2$ **17.** $F(x) = 2x^2 + \cos^2 x$

18. $G(x) = 24x^2 + 12 \operatorname{sen}^2 x$

En los problemas del 19 al 28 determine en dónde la gráfica de la función dada es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo. Después dibuje la gráfica (véase el ejemplo 4).

19. $f(x) = x^3 - 12x + 1$

20. $g(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 12$

21. $g(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2$ **22.** $F(x) = x^6 - 3x^4$

23. $G(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$ **24.** $H(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

25. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$ en $[0, \pi]$ **26.** $g(x) = x\sqrt{x - 2}$

27. $f(x) = x^{2/3}(1 - x)$ **28.** $g(x) = 8x^{1/3} + x^{4/3}$

En los problemas del 29 al 34 dibuje la gráfica de una función continua f en [0, 6] que satisface todas las condiciones que se establecen.

29. $f(0) = 1; f(6) = 3$; creciente y cóncava hacia abajo en $(0, 6)$.

30. $f(0) = 8; f(6) = -2$, decreciente en el intervalo $(0, 6)$; punto de inflexión en la pareja ordenada $(2, 3)$, cóncava hacia arriba en el intervalo $(2, 6)$.

31. $f(0) = 3; f(3) = 0; f(6) = 4$;

$f'(x) < 0$ en $(0, 3)$; $f'(x) > 0$ en $(3, 6)$;

$f''(x) > 0$ en $(0, 5)$; $f''(x) < 0$ en $(5, 6)$

32. $f(0) = 3; f(2) = 2; f(6) = 0$;

$f'(x) < 0$ en $(0, 2) \cup (2, 6)$; $f'(2) = 0$;

$f''(x) < 0$ en $(0, 1) \cup (2, 6)$; $f''(x) > 0$ en $(1, 2)$

33. $f(0) = f(4) = 1; f(2) = 2; f(6) = 0$;

$f'(x) > 0$ en $(0, 2)$; $f'(x) < 0$ en $(2, 4) \cup (4, 6)$;

$f'(2) = f'(4) = 0$; $f''(x) > 0$ en $(0, 1) \cup (3, 4)$;

$f''(x) < 0$ en $(1, 3) \cup (4, 6)$

34. $f(0) = f(3) = 3; f(2) = 4; f(4) = 2; f(6) = 0$;

$f'(x) > 0$ en $(0, 2)$; $f'(x) < 0$ en $(2, 4) \cup (4, 5)$;

$f'(2) = f'(4) = 0$; $f'(x) = -1$ en $(5, 6)$;

$f''(x) < 0$ en $(0, 3) \cup (4, 5)$; $f''(x) > 0$ en $(3, 4)$

35. Demuestre que una función cuadrática no tiene puntos de inflexión.

36. Demuestre que una función cúbica tiene exactamente un punto de inflexión.

37. Demuestre que, si $f'(x)$ existe y es continua en un intervalo I y si $f'(x) \neq 0$ en todos los puntos interiores de I, entonces f es creciente en todo el intervalo I o es decreciente en todo el intervalo I. *Sugerencia:* use el teorema del valor intermedio para demostrar que no pueden existir dos puntos x_1 y x_2 de I en donde f' tiene signos opuestos.

38. Suponga que f es una función cuya derivada es $f'(x) = (x^2 - x + 1)/(x^2 + 1)$. Utilice el problema 37 para demostrar que f es creciente en todas partes.

39. Utilice el teorema de monotonía para demostrar cada proposición, si $0 < x < y$.

(a) $x^2 < y^2$ (b) $\sqrt{x} < \sqrt{y}$ (c) $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

40. ¿Qué condiciones sobre a, b y c harán que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ siempre sea creciente?

41. Determine a y b de modo que $f(x) = a\sqrt{x} + b/\sqrt{x}$ tenga a $(4, 13)$ como un punto de inflexión.

42. Suponga que la función cúbica $f(x)$ tiene tres ceros reales, r_1, r_2 y r_3. Demuestre que su punto de inflexión tiene abscisa $(r_1 + r_2 + r_3)/3$. *Sugerencia:* $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$.

43. Suponga que $f'(x) > 0$ y $g'(x) > 0$ para toda x. ¿Qué otras condiciones sencillas (si existen) se necesitan para garantizar que:

(a) $f(x) + g(x)$ sea creciente para toda x;

(b) $f(x) \cdot g(x)$ sea creciente para toda x;

(c) $f(g(x))$ sea creciente para toda x?

44. Suponga que $f''(x) > 0$ y $g''(x) > 0$ para toda x. ¿Qué otras condiciones sencillas (si las hay) se necesitan para garantizar que:

(a) $f(x) + g(x)$ sea cóncava hacia arriba para toda x;

(b) $f(x) \cdot g(x)$ sea cóncava hacia arriba para toda x;

(c) $f(g(x))$ sea cóncava hacia arriba para toda x?

GC *Utilice una calculadora gráfica o una computadora para resolver los problemas del 45 al 48.*

45. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos(x/2)$ en el intervalo $I = (-2, 7)$.

(a) Dibuje la gráfica de f en I.

(b) Utilice esta gráfica para estimar en donde $f'(x) < 0$ en I.

(c) Utilice esta gráfica para estimar en donde $f''(x) < 0$ en I.

(d) Dibuje la gráfica de f' para confirmar su respuesta a la parte (b).

(e) Dibuje la gráfica de f'' para confirmar su respuesta a la parte (c).

46. Repita el problema 45 para $f(x) = x\cos^2(x/3)$ en $(0, 10)$.

47. Sea $f'(x) = x^3 - 5x^2 + 2$ en $I = [-2, 4]$. En el intervalo I, ¿en dónde es creciente f?

48. Sea $f''(x) = x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 4$ en $I = [-2, 3]$. En el intervalo I, ¿en dónde es cóncava hacia abajo f?

49. Traduzca cada uno de los siguientes enunciados al lenguaje de derivadas de distancia con respecto al tiempo. Para cada parte, haga un bosquejo de una gráfica de la posición del automóvil, s, contra el tiempo, t, e indique la concavidad.

(a) La velocidad del automóvil es proporcional a la distancia que ha recorrido.

(b) El automóvil está aumentando su velocidad.

(c) Yo no dije que el automóvil estaba deteniéndose, dije que su tasa de aumento de velocidad estaba disminuyendo.

(d) La velocidad del automóvil está aumentando 10 millas por hora cada minuto.

(e) El automóvil está deteniéndose muy lentamente hasta detenerse.

(f) El automóvil siempre recorre la misma distancia en intervalos iguales de tiempo.

50. Traduzca cada uno de los siguientes enunciados al lenguaje de derivadas, haga un bosquejo de la función apropiada e indique la concavidad.

(a) Se está evaporando agua del tanque a una tasa constante.

(b) Se vierte agua al interior del tanque a una razón de 3 galones por minuto, pero también sale $\frac{1}{2}$ galón por minuto.

(c) Como el agua se vierte al tanque cónico a una tasa constante, el nivel del agua se eleva a una tasa cada vez más lenta.

(d) La inflación se mantuvo estable este año, pero se espera que se eleve cada vez más rápido el año entrante.

(e) En la actualidad el precio del petróleo está bajando, pero se espera que esta tendencia sea lenta y luego se revierta en 2 años.

(f) La temperatura de David está subiendo, pero parece que la penicilina está surtiendo efecto.

51. Traduzca cada uno de los siguientes enunciados al lenguaje matemático, haga un bosquejo de la función apropiada e indique la concavidad.

(a) El costo de un automóvil continúa en aumento y a una tasa cada vez más rápida.

(b) Durante los últimos dos años, Estados Unidos ha continuado la reducción de su consumo de petróleo, pero a una tasa cada vez más lenta.

(c) La población mundial continúa creciendo, pero a una tasa cada vez más lenta.

(d) El ángulo que la torre inclinada de Pisa forma con la vertical aumenta rápidamente.

(e) Las utilidades de la compañía Upper Midwest crecen despacio.

(f) La compañía XYZ ha perdido dinero, pero pronto esta situación se revertirá.

52. Traduzca cada enunciado de la siguiente columna de un periódico en un enunciado sobre derivadas.

(a) En Estados Unidos, la razón R de deuda gubernamental al ingreso nacional permaneció sin cambio, alrededor de 28% hasta 1981, pero

(b) entonces comenzó a aumentar de manera cada vez más abrupta hasta llegar a 36% durante 1983.

53. Se vierte café en el vaso mostrado en la figura 20 a razón de 2 pulgadas cúbicas por segundo. El diámetro superior es de 3.5 pulgadas, el diámetro inferior es de 3 pulgadas y la altura del vaso es de 5 pulgadas. Este vaso se llena con casi 23 onzas. Determine la altura h del café como función del tiempo t y dibuje la gráfica de $h(t)$ desde el instante $t = 0$ hasta el momento en que el vaso esté lleno.

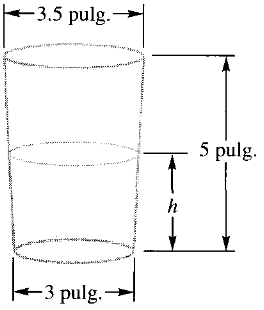


Figura 20

54. Se bombea agua a un tanque cilíndrico, a una razón constante de 5 galones por minuto, como se muestra en la figura 21. El tanque tiene 3 pies de diámetro y 9.5 pies de largo. El volumen del tanque es $\pi r^2 l = \pi \times 1.5^2 \times 9.5 \approx 67.152$ pies cúbicos $\approx$ 500 galones. Sin hacer cálculos, bosqueje una gráfica de la altura del agua como función del tiempo t (véase el ejemplo 6). ¿En dónde h es cóncava hacia arriba y en dónde es cóncava hacia abajo?

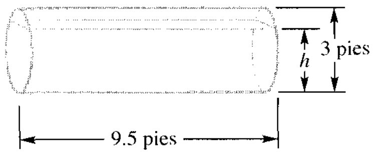


Figura 21

55. Se vierte un líquido al contenedor que se muestra en la figura 22 a razón de 3 pulgadas cúbicas por segundo. Al contenedor le caben 24 pulgadas cúbicas. Bosqueje una gráfica de la altura h del líquido como una función del tiempo t. En su gráfica, ponga atención especial a la concavidad de h.

56. Un tonel de 20 galones, como el mostrado en la figura 23, tiene una fuga y sale agua a razón constante de 0.1 galones por día. Dibuje una gráfica de la altura h del agua como función del tiempo t; suponga que el tonel está lleno en el instante $t = 0$. En su gráfica, ponga atención especial a la concavidad de h.

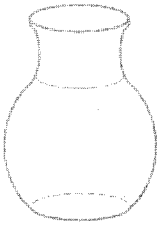


Figura 22

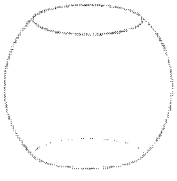


Figura 23

57. Con base en cada una de las tablas siguientes, qué puede deducir acerca de la forma de un recipiente en el que se da la medida del volumen del agua como una función de la profundidad.

(a)

Profundidad	1	2	3	4	5	6
Volumen	4	8	11	14	20	28

(b)

Profundidad	1	2	3	4	5	6
Volumen	4	9	12	14	20	28

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** creciente; cóncava hacia arriba **2.** $f'(x) > 0, f''(x) < 0$ **3.** un punto de inflexión **4.** $f''(c) = 0; f''(c)$ no existe.

3.3
Extremos locales y extremos en intervalos abiertos

Recordemos de la sección 3.1 que el valor máximo (si existe) de una función f en un conjunto S es el valor más grande que f alcanza en el conjunto S. A veces se le conoce como **valor máximo global**, o *valor máximo absoluto* de f. Por lo tanto, para la función f con dominio $S = [a, b]$ cuya gráfica se bosqueja en la figura 1, $f(a)$ es el valor máximo global. Pero, ¿qué es $f(c)$? Quizá no sea el rey del país, pero al menos es el jefe de su propia localidad. Le llamamos **valor máximo local**, o *valor máximo relativo*. Por supuesto, un valor máximo global automáticamente es un valor máximo local. La figura 2 ilustra varias posibilidades. Observe que el valor máximo global (si existe) es el mayor de los valores máximos locales. De manera análoga, el valor mínimo global es el más pequeño de los valores mínimos locales.

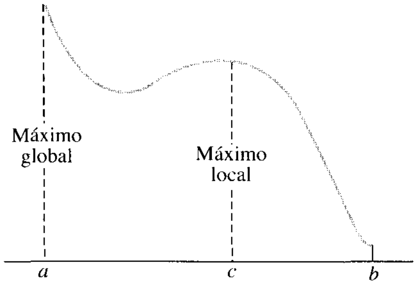


Figura 1

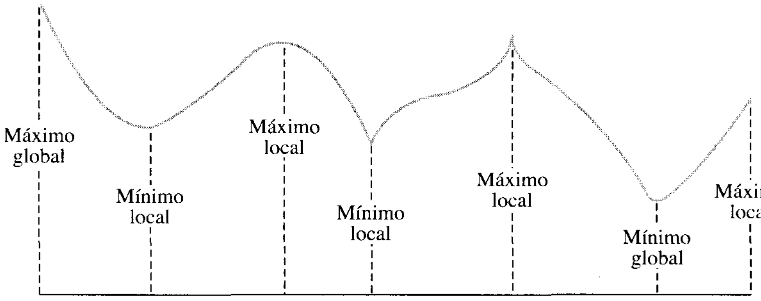


Figura 2

Aquí está la definición formal de máximos y mínimos locales. Recuerde que el símbolo $\cap$ denota la intersección (parte común) de dos conjuntos.

Definición

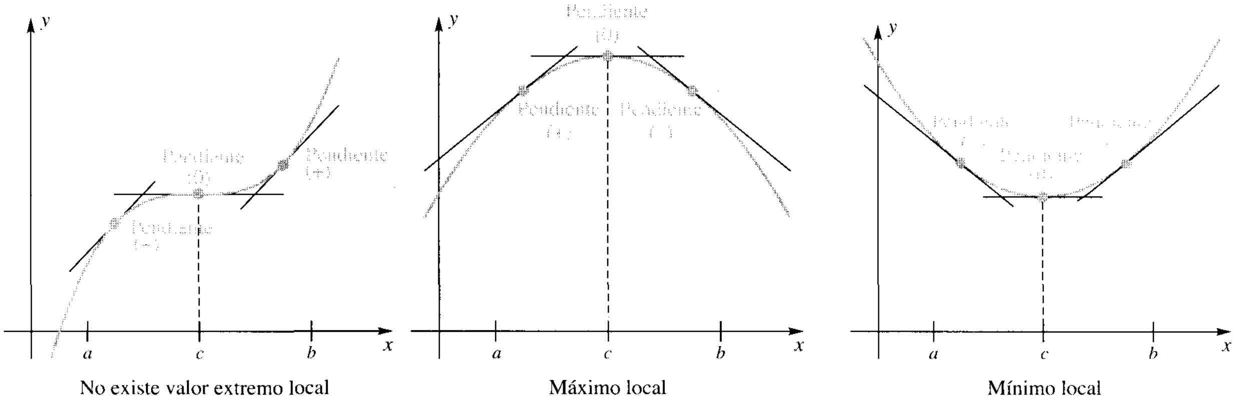
Sea S el dominio de f que contiene al punto c. Decimos que:

(i) $f(c)$ es un **valor máximo local** de f, si existe un intervalo (a, b) que contiene a c, tal que $f(c)$ es el valor máximo de f en $(a, b) \cap S$;

(ii) $f(c)$ es un **valor mínimo local** de f, si existe un intervalo (a, b) que contiene a c, tal que $f(c)$ es el valor mínimo de f en $(a, b) \cap S$;

(iii) $f(c)$ es un **valor extremo local** de f, si es un valor máximo local o un valor mínimo local.

¿En dónde se presentan los valores extremos locales? El teorema del punto crítico (teorema 3.1B) se cumple si se reemplaza la frase *valor extremo* por *valor extremo local*; la demostración es esencialmente la misma. Así, los puntos críticos (puntos fronterizos, estacionarios y singulares) son los candidatos a ser puntos en donde pueden presentarse extremos locales. Decimos *candidatos* porque no aseguramos que deba tenerse un extremo local en cada punto crítico. La gráfica de la izquierda en la figura 3 aclara esto. Sin embargo, si la derivada es positiva en un lado del punto crítico y negativa en el otro (y si la función es continua), entonces tenemos un extremo local, como se muestra en las gráficas de en medio y a la derecha de la figura 3.



No existe valor extremo local — Máximo local — Mínimo local

Figura 3

Teorema A **Prueba (criterio) de la primera derivada**

Sea f continua en un intervalo abierto (a, b) que contiene un punto crítico c.

(i) Si $f'(x) > 0$ para toda x en (a, c) y $f'(x) < 0$ para toda x en (c, b), entonces $f(c)$ es un valor máximo local de f.

(ii) Si $f'(x) < 0$ para toda x en (a, c) y $f'(x) > 0$ para toda x en (c, b), entonces $f(c)$ es un valor mínimo local de f.

(iii) Si $f'(x)$ tiene el mismo signo en ambos lados de c, entonces $f(c)$ no es un valor extremo de f.

Demostración de (i) Como $f'(x) > 0$ para toda x en (a, c), por el teorema de monotonía, f es creciente en $(a, c]$. Además, como $f'(x) < 0$ para toda x en (c, b), f es decreciente en $[c, b)$. Por lo tanto, $f(x) < f(c)$ para toda x en (a, b), excepto por supuesto en $x = c$. Concluimos que $f(c)$ es un máximo local.

Las demostraciones de (ii) y (iii) son semejantes. ■

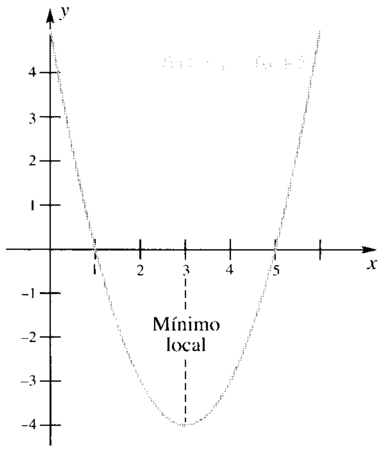


Figura 4

EJEMPLO 1 Encuentre los valores extremos locales de la función $f(x) = x^2 - 6x + 5$ en $(-\infty, \infty)$.

SOLUCIÓN La función polinomial f es continua en todas partes y su derivada, $f'(x) = 2x - 6$, existe para toda x. Así, el único punto crítico para f es la solución única de $f'(x) = 0$; esto es, $x = 3$.

Como $f'(x) = 2(x - 3) < 0$ para $x < 3$, f es decreciente en $(-\infty, 3]$, y como $2(x - 3) > 0$ para $x > 3$, f es creciente en $[3, \infty)$. Por lo tanto, por la prueba de la primera derivada, $f(3) = -4$ es un valor mínimo local de f. Como 3 es el único punto crítico, no existen otros valores extremos. La gráfica de f se muestra en la figura 4. Observe que, en este caso, $f(3)$ es en realidad el valor mínimo (global). ■

EJEMPLO 2 Encuentre los valores extremos locales de $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ en $(-\infty, \infty)$.

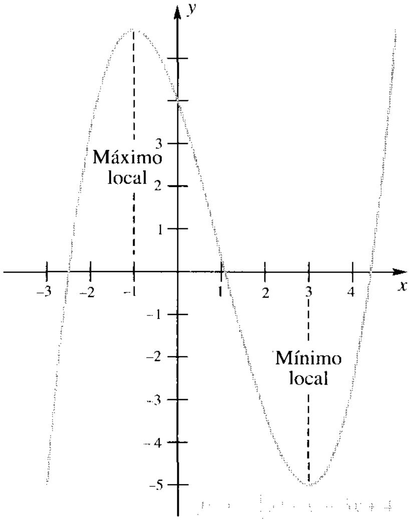


Figura 5

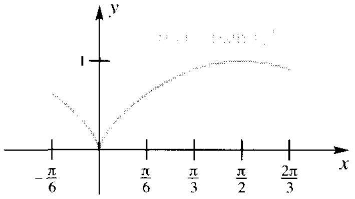


Figura 6

SOLUCIÓN Como $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$, los únicos puntos críticos de f son -1 y 3. Cuando usamos los puntos de prueba -2, 0 y 4, sabemos que $(x + 1)(x - 3) > 0$ en $(-\infty, -1)$ y $(3, \infty)$ y $(x + 1)(x - 3) < 0$ en $(-1, 3)$. Por la prueba de la primera derivada, concluimos que $f(-1) = \frac{17}{3}$ es un valor máximo local y que $f(3) = -5$ es un valor mínimo local (véase la figura 5). ■

EJEMPLO 3 Encuentre los valores extremos de $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{2/3}$ en $(-\pi/6, 2\pi/3)$.

SOLUCIÓN

$$f'(x) = \frac{2 \cos x}{3(\operatorname{sen} x)^{1/3}}, \qquad x \neq 0$$

Los puntos 0 y $\pi/2$ son puntos críticos, ya que $f'(0)$ no existe y $f'(\pi/2) = 0$. Ahora, $f'(x) < 0$ en $(-\pi/6, 0)$ y en $(\pi/2, 2\pi/3)$, mientras que $f'(x) > 0$ en $(0, \pi/2)$. Por la prueba de la primera derivada concluimos que $f(0) = 0$ es un valor mínimo local y que $f(\pi/2) = 1$ es un valor máximo local. La gráfica de f se muestra en la figura 6. ■

Prueba (criterio) de la segunda derivada Existe otra prueba para máximos y mínimos locales que, a veces, es más fácil de aplicar que la prueba de la primera derivada. Incluye la evaluación de la segunda derivada en los puntos estacionarios. No se aplica a los puntos singulares.

Teorema B **Prueba (criterio) de la segunda derivada**

Supóngase que f' y f'' existen en todo punto de un intervalo abierto (a, b) que contiene a c y supóngase que $f'(c) = 0$.

(i) Si $f''(c) < 0$, $f(c)$ es un valor máximo local de f.

(ii) Si $f''(c) > 0$, $f(c)$ es un valor mínimo local de f.

Demostración de (i) Es una tentación decir que, como $f''(c) < 0$, f es cóncava hacia abajo cerca de c para asegurar que esto demuestra (i). Sin embargo, para asegurar que f es cóncava hacia abajo en una vecindad de c, necesitamos que $f''(x) < 0$ en esa vecindad (no sólo en c) y nada en nuestra hipótesis garantiza esto. Debemos ser un poco más cuidadosos. Por definición e hipótesis,

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - 0}{x - c} < 0$$

de modo que podemos concluir que existe un intervalo (posiblemente pequeño) (α, β) alrededor de c, en donde

$$\frac{f'(x)}{x - c} < 0, \qquad x \neq c$$

Pero esta desigualdad implica que $f'(x) > 0$ para $\alpha < x < c$ y $f'(x) < 0$ para $c < x < \beta$. Por lo tanto, por la prueba de la primera derivada, $f(c)$ es un valor máximo local.

La demostración de (ii) es semejante. ■

EJEMPLO 4 Para $f(x) = x^2 - 6x + 5$, utilice la prueba de la segunda derivada para identificar extremos locales.

SOLUCIÓN Ésta es la función del ejemplo 1. Observe que

$$f'(x) = 2x - 6 = 2(x - 3)$$
$$f''(x) = 2$$

Así, $f'(3) = 0$ y $f''(3) > 0$. En consecuencia, por la prueba de la segunda derivada, $f(3)$ es un valor mínimo local. ■

EJEMPLO 5 Para $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$, utilice la prueba de la segunda derivada para identificar los extremos locales.

SOLUCIÓN Ésta es la función del ejemplo 2.

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$$
$$f''(x) = 2x - 2$$

Los puntos críticos son -1 y 3 ($f'(-1) = f'(3) = 0$). Como $f''(-1) = -4$ y $f''(3) = 4$. Por la prueba de la segunda derivada concluimos que $f(-1)$ es un valor máximo local y que $f(3)$ es un valor mínimo local. ■

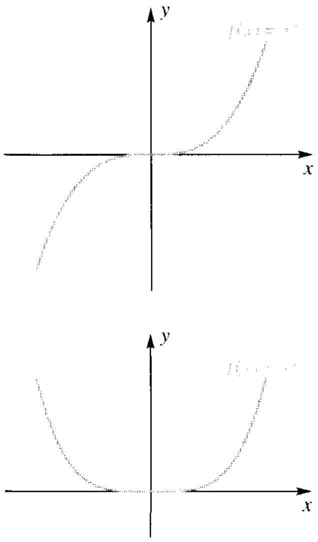


Figura 7

Por desgracia, la prueba de la segunda derivada en ocasiones falla, ya que $f''(x)$ puede ser cero en un punto estacionario. Para $f(x) = x^3$ y $f(x) = x^4$, $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 0$ (véase la figura 7). La primera no tiene un valor máximo o mínimo local en cero; la segunda tiene un mínimo local ahí. Esto muestra que si $f''(x) = 0$ en un punto estacionario, no podemos sacar una conclusión acerca de máximos o mínimos sin más información.

Extremos en intervalos abiertos Con frecuencia, los problemas que estudiamos en esta sección y en la sección 3.1 suponen que el conjunto en el que queremos maximizar o minimizar una función fue un intervalo *cerrado*. Sin embargo, los intervalos que surgen en la práctica no siempre son cerrados; en ocasiones son abiertos o, incluso, abierto por un extremo y cerrado por el otro. Todavía podemos manejar estos problemas, si aplicamos correctamente la teoría desarrollada en esta sección. Tenga presente que máximo (mínimo) sin un adjetivo calificativo significa máximo (mínimo) global.

EJEMPLO 6 Determine (si existen) los valores máximo y mínimo de $f(x) = x^4 - 4x$ en $(-\infty, \infty)$.

SOLUCIÓN

$$f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1) = 4(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

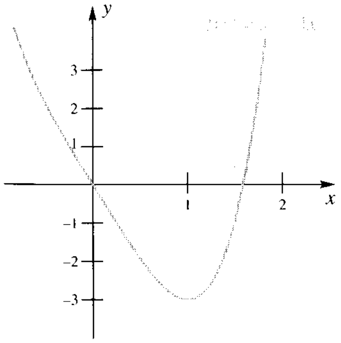


Figura 8

Como $x^2 + x + 1 = 0$ no tiene soluciones reales (fórmula cuadrática), sólo existe un punto crítico, $x = 1$. Para $x < 1, f'(x) < 0$, mientras que para $x > 1, f'(x) > 0$. Concluimos que $f(1) = -3$ es un valor mínimo local de f; y como f es decreciente a la izquierda de 1 y decreciente a la derecha de 1, en realidad debe ser el valor mínimo de f.

Los hechos que se acaban de establecer implican que f no puede tener un valor máximo. La gráfica de f se muestra en la figura 8. ■

EJEMPLO 7 Determine (si existen) los valores máximo y mínimo de

$$G(p) = \frac{1}{p(1 - p)}$$

en $(0, 1)$.

SOLUCIÓN

$$G'(p) = \frac{d}{dp}[p(1 - p)]^{-1} = \frac{2p - 1}{p^2(1 - p)^2}$$

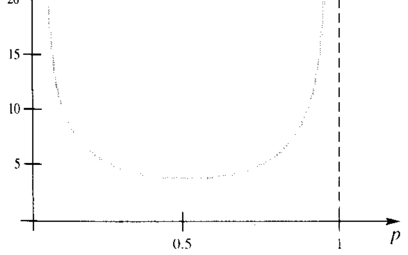


Figura 9

El único punto crítico es $p = 1/2$. Para cada valor de p en el intervalo $(0, 1)$ el denominador es positivo; por lo tanto, el numerador determina el signo. Si p está en el intervalo $(0, 1/2)$, entonces el numerador es negativo; de aquí que $G'(p) < 0$. De forma análoga, si p está en el intervalo $(1/2, 1)$, $G'(p) > 0$. Por lo tanto, con base en la prueba de la primera derivada, $G(1/2) = 4$ es un mínimo local. Como no hay puntos fronterizos o puntos singulares por verificar, $G(1/2)$ es un mínimo global. No hay máximo. La gráfica de $y = G(p)$ se muestra en la figura 9. ■

Revisión de conceptos

1. Si f es continua en c, $f'(x) > 0$ cerca de c a su lado izquierdo, y $f'(x) < 0$ cerca de c a su lado derecho, entonces $f(c)$ es un valor ________ local para f.

2. Si $f'(x) = (x+2)(x-1)$, entonces $f(-2)$ es un valor ________ local para f, y $f(1)$ es un valor ________ local para f.

3. Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, esperamos encontrar un valor ________ local para f en c.

4. Si $f(x) = x^3$, entonces $f(0)$ no es ________ ni ________, aunque $f''(0) =$ ________.

Conjunto de problemas 3.3

En los problemas del 1 al 10 identifique los puntos críticos. Después utilice (a) la prueba de la primera derivada y (si es posible) (b) la prueba de la segunda derivada para decidir cuáles de los puntos críticos dan un máximo local y cuáles dan un mínimo local.

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4$

2. $f(x) = x^3 - 12x + \pi$

3. $f(\theta) = \operatorname{sen} 2\theta, 0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$

4. $f(x) = \frac{1}{2}x + \operatorname{sen} x, 0 < x < 2\pi$

5. $\Psi(\theta) = \operatorname{sen}^2 \theta, -\pi/2 < \theta < \pi/2$

6. $r(z) = z^4 + 4$

7. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

8. $g(z) = \dfrac{z^2}{1 + z^2}$

9. $h(y) = y^2 - \dfrac{1}{y}$

10. $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x^2 + 1}$

En los problemas del 11 al 20 encuentre los puntos críticos y utilice la prueba que elija para decidir cuáles puntos críticos dan un valor máximo local y cuáles dan un valor mínimo local. ¿Cuáles son estos valores máximos y mínimos locales?

11. $f(x) = x^3 - 3x$

12. $g(x) = x^4 + x^2 + 3$

13. $H(x) = x^4 - 2x^3$

14. $f(x) = (x - 2)^5$

15. $g(t) = \pi - (t - 2)^{2/3}$

16. $r(s) = 3s + s^{2/5}$

17. $f(t) = t - \dfrac{1}{t}, t \neq 0$

18. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + 4}}$

19. $\Lambda(\theta) = \dfrac{\cos \theta}{1 + \operatorname{sen} \theta}, 0 < \theta < 2\pi$

20. $g(\theta) = |\operatorname{sen} \theta|, 0 < \theta < 2\pi$

En los problemas del 21 al 30 determine, si es posible, los valores máximo y mínimo (globales) de la función dada en el intervalo que se indica.

21. $f(x) = \operatorname{sen}^2 2x$ en $[0, 2]$

22. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 4}$ en $[0, \infty)$

23. $g(x) = \dfrac{x^2}{x^3 + 32}$ en $[0, \infty)$

24. $h(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4}$ en $[0, \infty)$

25. $F(x) = 6\sqrt{x} - 4x$ en $[0, 4]$

26. $F(x) = 6\sqrt{x} - 4x$ en $[0, \infty)$

27. $f(x) = \dfrac{64}{\operatorname{sen} x} + \dfrac{27}{\cos x}$ en $(0, \pi/2)$

28. $g(x) = x^2 + \dfrac{16x^2}{(8 - x)^2}$ en $(8, \infty)$

29. $H(x) = |x^2 - 1|$ en $[-2, 2]$

30. $h(t) = \operatorname{sen} t^2$ en $[0, \pi]$

En los problemas del 31 al 36 se da la primera derivada, f'. Encuentre todos los valores de x que hacen que la función f (a) tenga un mínimo local y (b) un máximo local.

31. $f'(x) = x^3(1 - x)^2$

32. $f'(x) = -(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$

33. $f'(x) = (x - 1)^2(x - 2)^2(x - 3)(x - 4)$

34. $f'(x) = (x - 1)^2(x - 2)^2(x - 3)^2(x - 4)^2$

35. $f'(x) = (x - A)^2(x - B)^2, A \neq B$

36. $f'(x) = x(x - A)(x - B), 0 < A < B$

En los problemas del 37 al 42 bosqueje una gráfica de una función con las propiedades dadas. Si es imposible graficar tal función, entonces indique esto y justifique su respuesta.

37. f es diferenciable, tiene dominio $[0, 6]$ y dos máximos locales y dos mínimos locales en $(0, 6)$.

38. f es diferenciable, tiene dominio $[0, 6]$, así como tres máximos locales y dos mínimos locales en $(0, 6)$.

39. f es continua, pero no es necesariamente diferenciable, tiene dominio $[0, 6]$ y un mínimo local y un máximo local en $(0, 6)$.

40. f es continua, pero no es necesariamente diferenciable, tiene dominio $[0, 6]$, así como un mínimo local, y no tiene máximo local en $(0, 6)$.

41. f tiene dominio $[0, 6]$, pero no es necesariamente continua; tiene tres máximos locales y carece de mínimo local en $(0, 6)$.

42. f tiene dominio $[0, 6]$, pero no es necesariamente continua; tiene dos máximos locales y no tiene mínimo local en $(0, 6)$.

43. Considere $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, con $A > 0$. Demuestre que $f(x) \geq 0$ para toda x si y sólo si $B^2 - 4AC \leq 0$.

44. Considere $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, con $A > 0$. Demuestre que f tiene un máximo local y un mínimo local si y sólo si $B^2 - 3AC > 0$.

45. ¿Qué conclusiones puede sacar respecto a f, con base en la información de que $f'(c) = f''(c) = 0$ y $f'''(c) > 0$?

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** máximo **2.** máximo; mínimo **3.** máximo **4.** máximo local; mínimo local; 0.

3.4
Problemas prácticos

Con base en los ejemplos y la teoría desarrollada en las primeras tres secciones de este capítulo, sugerimos el siguiente método paso a paso que puede aplicarse a muchos problemas prácticos de optimización. No lo siga ciegamente; con frecuencia, el sentido común sugiere un enfoque alterno o la omisión de algunos pasos.

Paso 1: Haga un dibujo del problema y asigne variables idóneas para las cantidades importantes.

Paso 2: Escriba una fórmula para la función objetivo Q que se maximizará o minimizará, en términos de las variables del paso 1.

Paso 3: Utilice las condiciones del problema para eliminar todas, excepto una de estas variables, y por consiguiente expresar a Q como una función de una sola variable.

Paso 4: Encuentre los puntos críticos (fronterizos, estacionarios, singulares).

Paso 5: Sustituya los valores críticos en la función objetivo o bien utilice la teoría de la última sección (es decir, los criterios de la primera o segunda derivada) para determinar el máximo o el mínimo.

Use siempre su intuición para obtener alguna idea de cuál debe ser la solución del problema. Para muchos problemas físicos puede tener una estimación aproximada del valor óptimo antes de que comience a realizar los detalles.

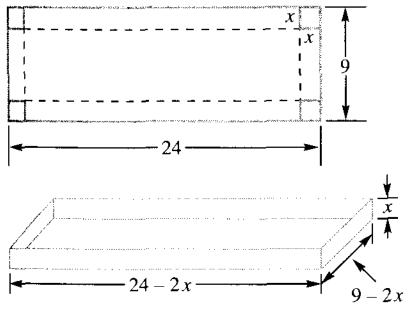


Figura 1

EJEMPLO 1 Una caja rectangular se fabrica con una pieza de cartón de 24 pulgadas de largo por 9 de ancho, de la cual se cortan cuadrados idénticos a partir de las cuatro esquinas y se doblan los lados hacia arriba, como se muestra en la figura 1. Determine las dimensiones de la caja de volumen máximo. ¿Cuál es este volumen?

SOLUCIÓN Sea x el ancho del cuadrado que se cortará y V el volumen de la caja resultante. Entonces

$$V = x(9 - 2x)(24 - 2x) = 216x - 66x^2 + 4x^3$$

Ahora, x no puede ser menor que 0 ni mayor que 4.5. Por lo tanto, nuestro problema es maximizar V en $[0, 4.5]$. Los puntos estacionarios se determinan haciendo dV/dx igual a 0 y resolviendo la ecuación resultante:

$$\frac{dV}{dx} = 216 - 132x + 12x^2 = 12(18 - 11x + x^2) = 12(9 - x)(2 - x) = 0$$

Esto da $x = 2$ o $x = 9$, pero 9 no está en el intervalo $[0, 4.5]$. Vemos que sólo existen tres puntos críticos, 0, 2 y 4.5. En los puntos fronterizos 0 y 4.5, $V = 0$; en 2, $V = 200$. Concluimos que la caja tiene un volumen máximo de 200 pulgadas cúbicas, si $x = 2$, esto es, si la caja es de 20 pulgadas de largo, 5 de ancho y 2 de profundidad. ■

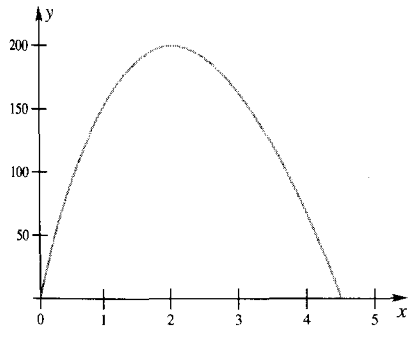


Figura 2

A menudo es útil graficar la función objetivo. Dibujar funciones puede hacerse con facilidad con una calculadora gráfica o un CAS (del inglés computer algebra sistem: sistema de álgebra computacional). La figura 2 muestra una gráfica de la función $V(x) = 216x - 66x^2 + 4x^3$. Cuando $x = 0$, $V(x)$ es igual a cero. En el contexto de los dobleces de la caja, esto significa que cuando el ancho de las esquinas recortadas es cero no hay que doblar hacia arriba, de modo que el volumen es cero. También, cuando $x = 4.5$, el pedazo de cartón se dobla a la mitad, de modo que no tiene base; esta caja también tendrá volumen cero. Por lo tanto, $V(0) = 0$ y $V(4.5) = 0$. El mayor volumen debe alcanzarse para algún valor de x entre 0 y 4.5. La gráfica sugiere que el volumen máximo es cuando x es alrededor de 2; por medio de cálculo, podemos determinar que el valor *exacto* de x que maximiza el volumen de la caja es $x = 2$.

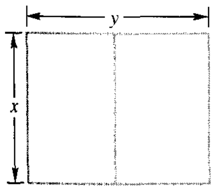


Figura 3

EJEMPLO 2 Un granjero tiene 100 metros de cerca de alambre con la cual planea construir dos corrales adyacentes, como se muestra en la figura 3. ¿Cuáles son las dimensiones que encierran el área máxima?

SOLUCIÓN Sea x el ancho y y el largo del área total encerrada, ambas en metros. Como hay 100 metros de cerca, $3x + 2y = 100$; es decir,

$$y = 50 - \tfrac{3}{2}x$$

El área total A está dada por

$$A = xy = 50x - \tfrac{3}{2}x^2$$

Como debe haber tres lados de longitud x, vemos que $0 \leq x \leq \frac{100}{3}$. Así, nuestro problema es maximizar A en $\left[0, \frac{100}{3}\right]$. Ahora

$$\frac{dA}{dx} = 50 - 3x$$

Cuando igualamos $50 - 3x$ a cero y resolvemos, obtenemos $x = \frac{50}{3}$ como un punto estacionario. Así, existen tres puntos críticos: $0, \frac{50}{3}$, y $\frac{100}{3}$. Los dos puntos fronterizos 0 y $\frac{100}{3}$ dan $A = 0$, mientras que $x = \frac{50}{3}$ da $A \approx 416.67$. Las dimensiones deseadas son $x = \frac{50}{3} \approx 16.67$ metros y $y = 50 - \frac{3}{2}\left(\frac{50}{3}\right) = 25$ metros.

≈ ¿Es razonable esta respuesta? Sí. Esperaríamos utilizar más de la cerca dada en la dirección y que en la dirección x, ya que en la primera se está cercando dos veces, mientras que en la segunda está cercándose tres. ■

EJEMPLO 3 Encuentre las dimensiones del cilindro circular recto de volumen máximo que puede inscribirse en un cono circular recto dado.

SOLUCIÓN Sea a la altura y b el radio de la base del cono dado (ambas constantes). Denótese por h, r y V la altura, el radio y el volumen, respectivamente, de un cilindro inscrito (véase la figura 4).

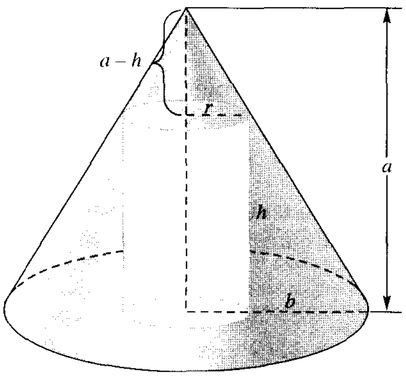


Figura 4

≈ Antes de proceder, apliquemos un poco de intuición. Si el radio del cilindro fuese cercano al radio de la base del cono, entonces el volumen del cilindro sería cercano a cero. Ahora, imagine cilindros inscritos cuya altura aumenta, pero su radio disminuye. Al principio, los volúmenes aumentarían a partir de cero, pero después disminuirían hacia cero cuando la altura de los cilindros fuese cercana a la altura del cono. De manera intuitiva, el volumen debe ser máximo para algún cilindro. Puesto que en la fórmula del volumen el radio se eleva al cuadrado, cuenta más que la altura y esperaríamos $r > h$ en el máximo.

El volumen del cilindro inscrito es

$$V = \pi r^2 h$$

Por semejanza de triángulos

$$\frac{a - h}{r} = \frac{a}{b}$$

que da

$$h = a - \frac{a}{b}r$$

Cuando sustituimos esta expresión para h en la fórmula para V, obtenemos

$$V = \pi r^2\left(a - \frac{a}{b}r\right) = \pi a r^2 - \pi\frac{a}{b}r^3$$

Queremos maximizar V para r en el intervalo $[0, b]$. Ahora,

$$\frac{dV}{dr} = 2\pi a r - 3\pi\frac{a}{b}r^2 = \pi a r\left(2 - \frac{3}{b}r\right)$$

Esto produce los puntos estacionarios $r = 0$ y $r = 2b/3$, dándonos a considerar tres puntos críticos en $[0, b]$: $0, 2b/3$ y b. Como se esperaba, $r = 0$ y $r = b$ dan un volumen de cero. Así, $r = 2b/3$ tiene que dar el volumen máximo. Cuando sustituimos este valor para

Álgebra y geometría

Siempre que le sea posible, trate de ver el problema desde los dos puntos de vista, geométrico y algebraico. El ejemplo 3 es un buen ejemplo mediante el cual esta clase de enfoque se presta para tener una idea del problema.

r en la ecuación que relaciona r con h, encontramos que $h = a/3$. En otras palabras, el cilindro inscrito que tiene mayor volumen es cuando su radio es dos tercios del radio de la base del cono y su altura es un tercio de la altura del cono. ■

EJEMPLO 4 Suponga que un pez nada río arriba con velocidad relativa al agua v y que la corriente del río tiene velocidad $-v_c$ (el signo negativo indica que la velocidad de la corriente es en dirección opuesta a la del pez). La energía empleada en recorrer una distancia d a contracorriente es directamente proporcional al tiempo requerido para recorrer la distancia d y el cubo de la velocidad. ¿Qué velocidad v minimiza la energía empleada en nadar esta distancia?

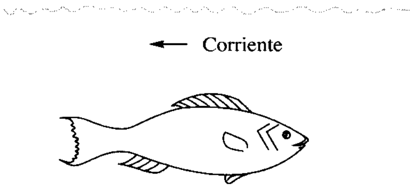


Figura 5

SOLUCIÓN La figura 5 ilustra la situación. Como la velocidad del pez a contracorriente es $v - v_c$, tenemos $d = (v - v_c)t$, donde t es el tiempo requerido. Así, $t = d/(v - v_c)$. Por lo tanto, para un valor fijo de v, la energía requerida para que el pez recorra la distancia d es

$$E(v) = k\frac{d}{v - v_c}v^3 = kd\frac{v^3}{v - v_c}$$

El dominio para la función E es el intervalo abierto (v_c, ∞). Para determinar el valor de v que minimiza la energía requerida hacemos $E'(v) = 0$ y despejamos a v:

$$E'(v) = kd\frac{(v - v_c)3v^2 - v^3(1)}{(v - v_c)^2} = \frac{kd}{(v - v_c)^2}v^2(2v - 3v_c) = 0$$

El único punto crítico en el intervalo (v_c, ∞) se determina resolviendo $2v - 3v_c = 0$, que lleva a $v = \frac{3}{2}v_c$. El intervalo es abierto, por lo que no existen puntos fronterizos que verificar. El signo de $E'(v)$ depende por completo de la expresión $2v - 3v_c$, ya que las otras expresiones son positivas. Si $v < \frac{3}{2}v_c$, entonces $2v - 3v_c < 0$, por lo que E es decreciente a la izquierda de $\frac{3}{2}v_c$. Si $v > \frac{3}{2}v_c$, entonces $2v - 3v_c > 0$, por lo que E es creciente a la derecha de $\frac{3}{2}v_c$. Por lo tanto, con base en la prueba de la primera derivada, $v = \frac{3}{2}v_c$ produce un mínimo local. Ya que éste es el único punto crítico en el intervalo (v_c, ∞), esto debe dar un mínimo global. Por lo tanto, la velocidad que minimiza la energía empleada es una y media veces la rapidez de la corriente. ■

EJEMPLO 5 Un pasillo de 6 pies de ancho da vuelta en ángulo recto. ¿Cuál es la longitud de la varilla delgada más larga que puede transportarse alrededor de la esquina, suponiendo que la varilla no puede doblarse?

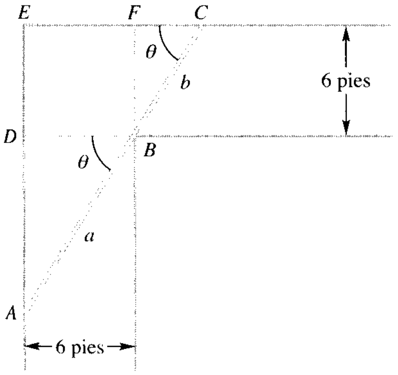


Figura 6

SOLUCIÓN La varilla tocará apenas la esquina interna de la vuelta y las paredes exteriores del pasillo. Como se sugiere en la figura 6, sean a y b las longitudes de los segmentos AB y BC, y sea θ la medida de los ángulos $\angle DBA$ y $\angle FCB$. Considere los dos triángulos rectángulos semejantes $\triangle ADB$ y $\triangle BFC$; éstos tienen hipotenusas a y b, respectivamente. Un poco de trigonometría aplicada a estos ángulos da

$$a = \frac{6}{\cos\theta} = 6\sec\theta \qquad \text{y} \qquad b = \frac{6}{\operatorname{sen}\theta} = 6\csc\theta$$

Observe que el ángulo θ determina la posición de la varilla. Así que la longitud total de la varilla en la figura 6 es

$$L(\theta) = a + b = 6\sec\theta + 6\csc\theta$$

El dominio para θ es el intervalo abierto $(0, \pi/2)$. La derivada de L es

$$\begin{aligned} L'(\theta) &= 6\sec\theta\tan\theta - 6\csc\theta\cot\theta \\ &= 6\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\right) \\ &= 6\frac{\operatorname{sen}^3\theta - \cos^3\theta}{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta} \end{aligned}$$

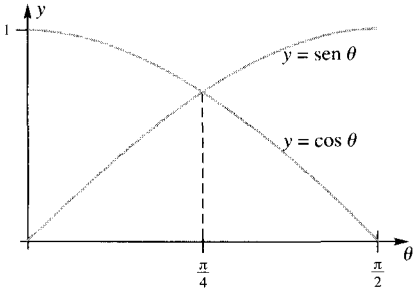


Figura 7

Por lo tanto $L'(\theta) = 0$ siempre que $\operatorname{sen}^3\theta - \cos^3\theta = 0$. Esto lleva a $\operatorname{sen}\theta = \cos\theta$. El único ángulo en $(0, \pi/2)$ para el que $\operatorname{sen}\theta = \cos\theta$ es el ángulo $\pi/4$ (véase la figura 7). Nuevamente aplicamos la prueba de la primera derivada. Si $0 < \theta < \pi/4$, entonces $\operatorname{sen}\theta < \cos\theta$ (otra vez véase la figura 7), de modo que $\operatorname{sen}^3\theta - \cos^3\theta < 0$. Por lo tanto, $L(\theta)$ es decreciente en $(0, \pi/4)$. Si $\pi/4 < \theta < \pi/2$, entonces $\operatorname{sen}\theta > \cos\theta$, por lo que $\operatorname{sen}^3\theta - \cos^3\theta > 0$. Así, $L(\theta)$ es creciente en $(\pi/4, \pi/2)$. Con base en el criterio de la prueba de la primera derivada, $\theta = \pi/4$ produce un mínimo. No obstante, el problema pregunta por la varilla *más larga* que puede dar la vuelta alrededor de la esquina. Como lo indica la figura 8, en realidad determinamos la varilla *más corta* que satisface las condiciones de la figura 6; en otras palabras, determinamos la varilla más corta que no da vuelta alrededor de la esquina. Por lo tanto, la varilla más larga que puede dar la vuelta alrededor de la esquina es $L(\pi/4) = 6\sec\pi/4 + 6\csc\pi/4 = 12\sqrt{2} \approx 16.97$ pies. ■

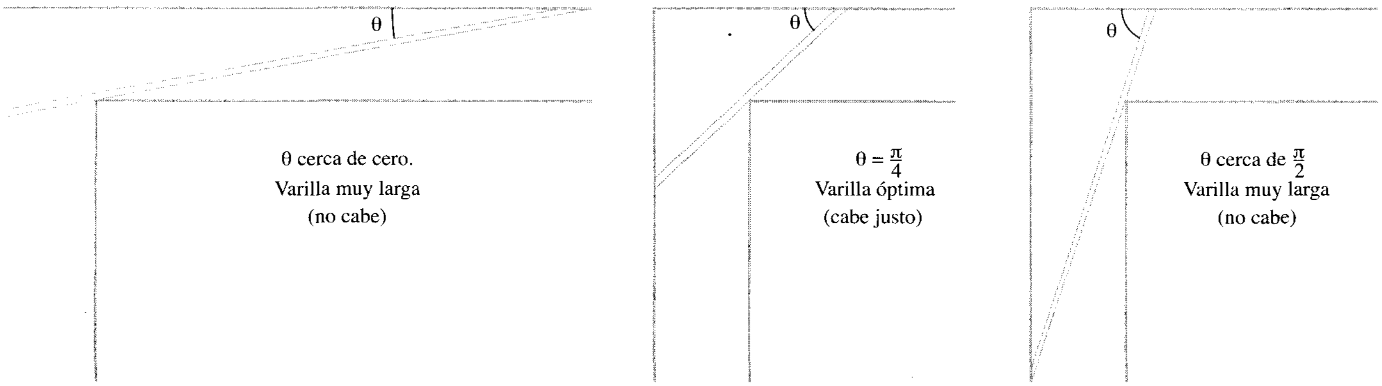


Figura 8

Mínimos cuadrados (opcional)

Existen varios fenómenos físicos, económicos, y sociales en los que una variable es proporcional a otra. Por ejemplo, la segunda Ley de Newton establece que la fuerza F sobre un objeto de masa m es proporcional a su aceleración a ($F = ma$). La Ley de Hooke dice que la fuerza que se ejerce sobre un resorte es proporcional a la distancia que éste se alarga ($F = kx$). (La Ley de Hooke a veces se da como $F = -kx$, con el signo menos indicando que la fuerza está en la dirección contraria al alargamiento. Por ahora, ignoraremos el signo de la fuerza). Los costos de fabricación son proporcionales al número de unidades producidas. El número de accidentes automovilísticos es proporcional al volumen del tránsito. Éstos son *modelos* y en un experimento, en rara ocasión, encontramos que los datos observados se ajustan al modelo de manera exacta.

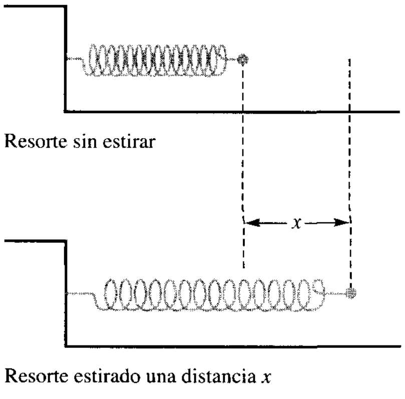


Figura 9

Distancia alargada, x (metros)	Fuerza y ejercida por el resorte (newtons)
0.005	8
0.010	17
0.015	22
0.020	32
0.025	36

Figura 10

Suponga que observamos la fuerza ejercida por un resorte cuando se alarga x centímetros (véase la figura 9). Por ejemplo, cuando alargamos el resorte 0.5 centímetros (0.005 metros), observamos una fuerza de 8 newtons, cuando lo alargamos 1.0 centímetro, observamos una fuerza de 17 newtons, y así sucesivamente. La figura 10 muestra observaciones adicionales y la figura 11 muestra una gráfica de los pares ordenados (x_i, y_i), donde x_i es la distancia que se estira y y_i es la fuerza que se ejerce sobre el resorte. Una gráfica como ésta, de los pares ordenados, se denomina **gráfica de dispersión o diagrama de dispersión.**

Generalizamos el problema en uno donde se nos dan n puntos, $(x_1, y_1), (x_2, y_2),\ldots, (x_n, y_n)$. Nuestro objetivo es encontrar una recta que pase por el origen y que se *ajuste mejor* a estos puntos. Antes de continuar, debemos introducir la notación sigma (Σ).

El símbolo $\sum_{i=1}^{n} a_i$ representa la suma de los números $a_1, a_2,\ldots, a_n$. Por ejemplo,

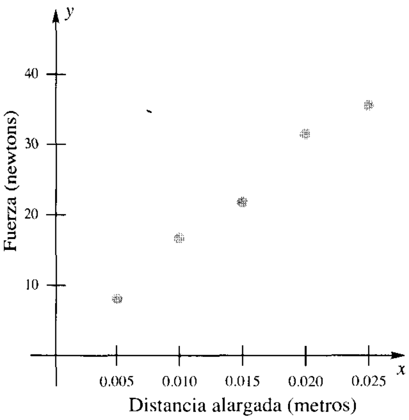


Figura 11

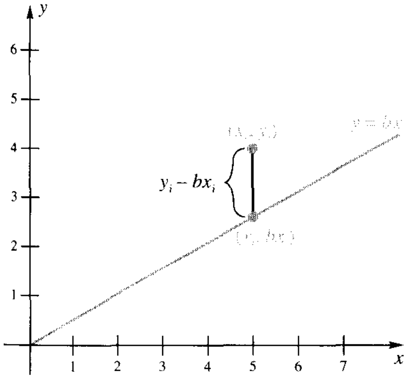


Figura 12

$$\sum_{i=1}^{3} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

En el segundo caso, primero multiplicamos x_i y y_i y después sumamos.

Para encontrar la recta que se ajuste mejor a estos puntos, debemos especificar cómo mediremos el ajuste. Nuestra recta que *mejor se ajusta*, y que pasa por el origen, se define como aquella que minimiza la suma del cuadrado de las distancias verticales entre (x_i, y_i) y la recta $y = bx$. Si (x_i, y_i) es un punto del conjunto de datos, entonces (x_i, bx_i) es el punto sobre la recta $y = bx$ que se encuentra directamente arriba o abajo de (x_i, y_i). Por lo tanto, la distancia vertical entre (x_i, y_i) y (x_i, bx_i) es $y_i - bx_i$. (Véase la figura 12). Así, la distancia al cuadrado es $(y_i - bx_i)^2$. El problema es encontrar el valor de b que minimiza la suma de los cuadrados de estas diferencias. Si definimos

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - bx_i)^2$$

entonces debemos encontrar el valor de b que *minimiza* S. Éste es un problema de minimización, como los que se encontraron antes. Sin embargo, tenga en mente que las parejas ordenadas (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ están *fijos*; en este problema la variable es b.

Procedemos como antes a encontrar dS/db, igualando el resultado a cero y resolviendo para b. Como la derivada es un operador lineal, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{dS}{db} &= \frac{d}{db}\sum_{i=1}^{n}(y_i - bx_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{d}{db}(y_i - bx_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}2(y_i - bx_i)\left(\frac{d}{db}(y_i - bx_i)\right) \\ &= -2\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i - bx_i)\end{aligned}$$

Al igualar este resultado a cero y al resolver se obtiene

$$\begin{aligned}0 &= -2\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i - bx_i) \\ 0 &= \sum_{i=1}^{n}x_i y_i - b\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \\ b &= \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\end{aligned}$$

Para ver que esto da un valor mínimo para S observamos que

$$\frac{d^2S}{db^2} = 2\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

que siempre es positiva. No hay puntos fronterizos que verificar. Así, por el criterio de la segunda derivada, concluimos que la recta $y = bx$, con $b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_1^2$, es la recta que mejor ajusta, en el sentido de minimizar S. La recta $y = bx$ se denomina **recta de mínimos cuadrados que pasa por el origen**.

EJEMPLO 6 Encuentre la recta de mínimos cuadrados que pasa por el origen para los datos del resorte en la figura 10.

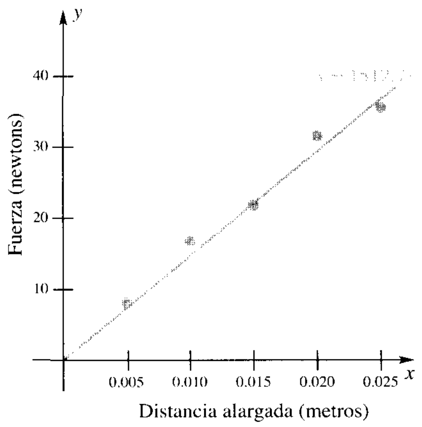


Figura 13

SOLUCIÓN

$$b = \frac{0.005 \cdot 8 + 0.010 \cdot 17 + 0.015 \cdot 22 + 0.020 \cdot 32 + 0.025 \cdot 36}{0.005^2 + 0.010^2 + 0.015^2 + 0.020^2 + 0.025^2}$$

$$\approx 1512.7$$

Por lo tanto, la recta de mínimos cuadrados que pasa por el origen es $y = 1512.7x$ y se muestra en la figura 13. Por consiguiente, la estimación de la constante del resorte es $k = 1512.7$ ■

Para la mayor parte de los problemas de ajuste de rectas, no es razonable suponer que la recta pase por el origen. Una suposición más razonable es que y esté relacionada con x por medio de $y = a + bx$. Sin embargo, en este caso la suma de cuadrados es una función de a y b, por lo que nos enfrentamos con el problema de minimizar una función de dos variables, un problema que abordaremos en el capítulo 12.

Aplicaciones a la economía (opcional) Considere una empresa común, la compañía ABC. Por simplicidad, suponga que ABC produce y comercia un solo producto; podrían ser aparatos de televisión, baterías para automóviles o barras de jabón. Si vende x unidades del producto en un periodo fijo (por ejemplo, un año), podría cobrar un **precio**, $p(x)$, por cada unidad. En otras palabras, $p(x)$ es el precio requerido para atraer una demanda de x unidades. El **ingreso total** que ABC puede esperar está dado por $R(x) = xp(x)$, el número de unidades por el precio unitario.

Para producir y vender x unidades, ABC tendrá un costo total, $C(x)$. Por lo regular, es la suma de un **costo fijo** (material de oficina, impuestos a la propiedad, etcétera) más un **costo variable** que depende del número de unidades producidas.

El concepto clave para la compañía es la **utilidad (ganancia) total**, $P(x)$. Sólo es la diferencia entre el ingreso y el costo; es decir,

$$P(x) = R(x) - C(x) = xp(x) - C(x)$$

Ordinariamente, una compañía busca maximizar su ganancia total.

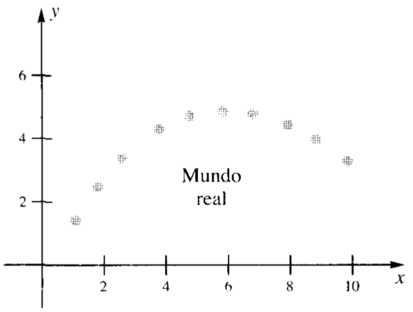


Figura 14

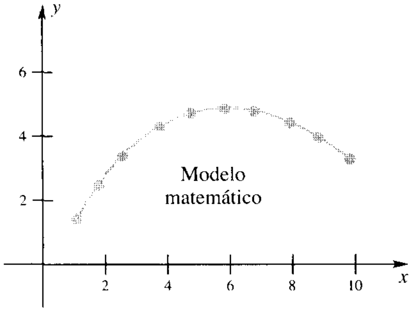


Figura 15

Existe una característica que tiende a distinguir los problemas en economía de los correspondientes a las ciencias físicas. En la mayoría de los casos, los productos de ABC serán unidades discretas (usted no puede fabricar o vender 8.23 aparatos de televisión o π baterías para automóvil). Así, por lo general las funciones $R(x)$, $C(x)$ y $P(x)$ sólo están definidas para $x = 0, 1, 2, \ldots$ y, en consecuencia, sus gráficas consisten en puntos discretos (véase la figura 14). Para hacer que las herramientas de cálculo estén disponibles, conectamos estos puntos por medio de una curva suave (véase la figura 15), con lo cual pretendemos que R, C y P sean funciones derivables. Esto ilustra un aspecto de *la modelación matemática* que casi siempre es necesario, en especial en economía. Para modelar problemas del mundo real, debemos hacer suposiciones que lo simplifiquen. Esto significa que las respuestas que obtengamos son sólo aproximaciones de las respuestas que buscamos; ésta es una de las razones por las que la economía es algo menos que una ciencia perfecta. Un conocido estadístico una vez dijo: *ningún modelo es exacto, pero muchos son útiles.*

Un problema relacionado para un economista es cómo obtener fórmulas para las funciones $C(x)$ y $p(x)$. En un caso sencillo, $C(x)$ podría tener la forma

$$C(x) = 10{,}000 + 50x$$

Si es así, \$10,000 es el **costo fijo** y \$50x es el **costo variable**, sobre la base de que hay un costo directo de \$50 por cada unidad producida. Tal vez una situación más común sea

$$C_1(x) = 10{,}000 + 45x + 100\sqrt{x}$$

Ambas funciones de costo se muestran en la figura 16.

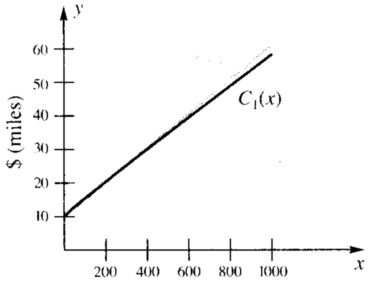


Figura 16

La función de costo $C(x)$ indica que el costo de fabricación de una unidad adicional es el mismo, sin importar cuántas unidades se hayan fabricado. Por otra parte, la función de costo $C_1(x)$ indica que el costo de fabricación de unidades adicionales aumenta, pero a una tasa decreciente. Por lo tanto, $c_1(x)$ permite lo que los economistas denominan economías de escala.

La selección de funciones adecuadas para modelar costo y precio no es una tarea sencilla. A veces, pueden inferirse de las hipótesis básicas. En otros casos, un estudio cuidadoso de la historia de la compañía sugerirá opciones razonables. Algunas veces, simplemente debemos hacer conjeturas inteligentes.

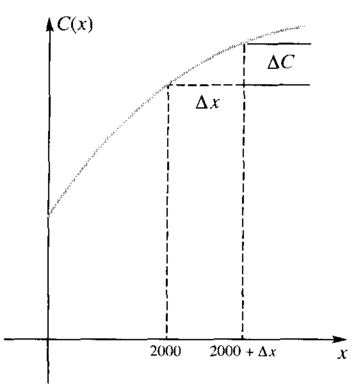


Figura 17

Uso de la palabra marginal Suponga que la empresa ABC conoce su función de costo $C(x)$ y que tiene planeado, tentativamente, producir 2000 unidades este año. Nos gustaría determinar el costo adicional por unidad, si ABC aumenta un poco su producción. Por ejemplo, ¿sería menor que el ingreso adicional por unidad? Si es así, tendría un buen sentido económico aumentar la producción.

Si la función de costo es la que se muestra en la figura 17, nos estaríamos preguntando por el valor de $\Delta C/\Delta x$ cuando $\Delta x = 1$. Pero esperamos que esto estará muy cerca del valor de

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

cuando $x = 2000$. Este límite se denomina **costo marginal**. Los matemáticos reconocemos esto como dC/dx, la derivada de C con respecto a x.

De una manera similar, definimos **precio marginal** como dp/dx, **ingreso marginal** como dR/dx y **utilidad marginal** como dP/dx.

Ahora ilustramos cómo resolver una amplia variedad de problemas económicos.

Vocabulario de economía

Ya que la economía tiende a ser un estudio de fenómenos discretos, su profesor de economía puede definir el costo marginal en x como el costo de producir una unidad adicional; esto es, como

$$C(x + 1) - C(x)$$

En el modelo matemático, este número será muy cercano en valor a dC/dx, y puesto que el último es un concepto principal en cálculo, elegimos tomarlo como la definición de costo marginal. Se tienen enunciados similares para ingreso marginal y utilidad marginal.

EJEMPLO 7 *Suponga que* $C(x) = 8300 + 3.25x + 40\sqrt[3]{x}$ *dólares.* Encuentre el costo promedio por unidad y el costo marginal; después evalúelos cuando $x = 1000$.

SOLUCIÓN

$$\text{Costo promedio:} \quad \frac{C(x)}{x} = \frac{8300 + 3.25x + 40x^{1/3}}{x}$$

$$\text{Utilidad marginal:} \quad \frac{dC}{dx} = 3.25 + \frac{40}{3}x^{-2/3}$$

En $x = 1000$, éstos tiene los valores 11.95 y 3.38, respectivamente. Esto significa que producir las primeras 1000 unidades cuesta \$11.95 cada una, en promedio; producir un ejemplar adicional, después de 1000, sólo cuesta alrededor de \$3.38. ■

EJEMPLO 8 En la fabricación y venta de x unidades de cierto bien de consumo, las funciones de precio p y de costo C (en dólares) están dadas por

$$p(x) = 5.00 - 0.002x$$

$$C(x) = 3.00 + 1.10x$$

Encuentre las expresiones para el ingreso, el costo y la utilidad marginales. Determine el nivel de producción que producirá la máxima utilidad total.

SOLUCIÓN

$$R(x) = xp(x) = 5.00x - 0.002x^2$$

$$P(x) = R(x) - C(x) = -3.00 + 3.90x - 0.002x^2$$

Así, tenemos las derivadas siguientes:

$$\text{Ingreso marginal:} \quad \frac{dR}{dx} = 5 - 0.004x$$

$$\text{Costo marginal:} \quad \frac{dC}{dx} = 1.1$$

$$\text{Utilidad marginal:} \quad \frac{dP}{dx} = \frac{dR}{dx} - \frac{dC}{dx} = 3.9 - 0.004x$$

Para maximizar la utilidad hacemos $dP/dx = 0$ y resolvemos. Esto da $x = 975$ como el único punto crítico a considerar. Éste proporciona un máximo, como puede verificarse por medio del criterio de la primera derivada. La utilidad máxima es $P(975) = \$1898.25$. ■

Observe que en $x = 975$ tanto el ingreso como el costo marginales son \$1.10. En general, una compañía debe esperar el nivel de utilidad máxima cuando el costo de producir una unidad adicional es igual al ingreso proveniente de esa unidad.

Revisión de conceptos

1. Si un rectángulo de área 100 tiene largo x y ancho y, entonces los valores admisibles para x son ______.

2. El perímetro P del rectángulo de la pregunta 1 expresado en términos (sólo) de x está dado por $P =$ ______.

3. La recta de mínimos cuadrados que pasa por el origen minimiza $S = \sum_{i=1}^{n}(\_\_\_\_\_)^2$

4. En economía, $\frac{dR}{dx}$ se denomina ______ y $\frac{dC}{dx}$ se denomina ______.

Conjunto de problemas 3.4

1. Encuentre dos números cuyo producto sea -16 y cuya suma de sus cuadrados sea mínima.

2. ¿Para qué número la raíz cuadrada principal excede en la mayor cantidad posible a ocho veces el número?

3. ¿Para qué número la raíz cuarta principal excede en la mayor cantidad posible al doble del número?

4. Encuentre dos números cuyo producto sea -12 y la suma de sus cuadrados sea mínima.

5. Encuentre los puntos sobre la parábola $y = x^2$ que estén más cerca al punto $(0, 5)$. *Sugerencia:* minimice el cuadrado de la distancia entre (x, y) y $(0, 5)$.

6. Encuentre los puntos sobre la parábola $x = 2y^2$ que estén más cerca al punto $(10, 0)$. *Sugerencia:* minimice el cuadrado de la distancia entre (x, y) y $(10, 0)$.

7. ¿Qué número excede a su cuadrado en la mayor cantidad? Comience por convencerse de que este número está en el intervalo $[0, 1]$.

8. Muestre que para un rectángulo de perímetro dado K, aquel de área máxima es un cuadrado.

9. Determine el volumen de la mayor caja abierta que pueda fabricarse con una pieza de cartón de 24 pulgadas cuadradas, recortando cuadrados iguales a partir de las esquinas y doblando hacia arriba los lados (véase el ejemplo 1).

≈ **10.** Un granjero tiene 80 pies de malla de alambre con la cual planea encerrar un corral rectangular a un lado de su establo de 100 pies de largo, como se muestra en la figura 18 (el lado a lo largo del establo no necesita valla). ¿Cuáles son las dimensiones del corral que tiene área máxima?

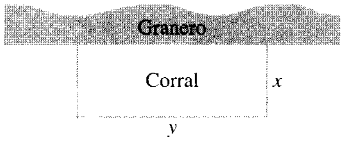


Figura 18

≈ **11.** El granjero del problema 10 decide hacer tres corrales idénticos con sus 80 pies de malla de alambre, como se muestra en la figura 19. ¿Qué dimensiones del área total encerrada hacen el área de los corrales tan grande como sea posible?

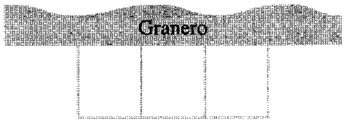


Figura 19

12. Suponga que el granjero del problema 10 tiene 180 pies de cerca de alambre y quiere que el corral quede contiguo a todo el lado del establo de 100 pies, como se muestra en la figura 20. ¿Cuáles deben ser las dimensiones para tener área máxima? Observe que en este caso $0 \le x \le 40$.

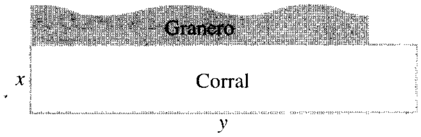


Figura 20

13. Un granjero desea cercar dos corrales rectangulares idénticos, cada uno con un área de 900 pies cuadrados, como se muestra en la figura 21. ¿Cuáles son los valores de x y y, de modo que se requiera la menor cantidad de valla?

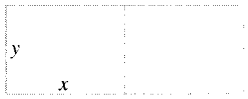


Figura 21

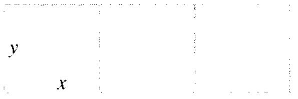


Figura 22

14. Un granjero desea cercar tres corrales rectangulares adyacentes idénticos (véase la figura 22), cada uno con un área de 300 pies cuadrados. ¿Cuáles deben ser el ancho y el largo de cada corral, de modo que se ocupe la menor cantidad de valla?

15. En el problema 14, suponga que la cerca exterior de los corrales requiere una valla más firme que cuesta \$3 por pie, pero que las dos particiones internas necesitan una cerca que cuesta sólo \$2 por pie. ¿Qué dimensiones de x y y producirán el costo más económico para los corrales?

16. Resuelva el problema 14, suponiendo que el área de cada corral es de 900 pies cuadrados. Estudie la solución de éste y del problema 14; además, haga una conjetura acerca de la razón x/y en todos los problemas de este tipo. Demuestre su conjetura.

17. Determine los puntos P y Q en la curva $y=x^2/4, 0 \leq x \leq 2\sqrt{3}$, que están más cerca y más lejos del punto (0, 4). *Sugerencia:* el álgebra es más sencilla si considera el cuadrado de la distancia requerida en lugar de la distancia misma.

18. Un cono circular recto será inscrito en otro cono circular recto de volumen dado, con los mismos ejes y con el vértice del cono interior tocando la base del cono exterior. ¿Cuál debe ser la razón entre sus alturas para que el cono inscrito tenga volumen máximo?

≈ **19.** Una pequeña isla está a 2 millas del punto más cercano, P, de una playa rectilínea de un gran lago. Si una mujer en la isla puede remar en una lancha a 3 millas por hora y caminar 4 millas por hora, ¿en dónde debe desembarcar en el bote para llegar, en el menor tiempo, a un pueblo que está a 10 millas, medidas sobre la playa, del punto P?

≈ **20.** En el problema 19 suponga que, cuando llegue a la playa, la mujer será recogida por un automóvil que promedia 50 millas por hora. Entonces, ¿en dónde debe desembarcar?

≈ **21.** En el problema 19, suponga que la mujer utiliza una lancha de motor, que viaja a 20 millas por hora. Entonces, ¿en dónde debe desembarcar?

22. Una central eléctrica está situada en una ribera de un río rectilíneo que tiene w pies de ancho. Una fábrica está situada en la ribera opuesta del río, L pies río abajo del punto A, que está enfrente a la central eléctrica. ¿Cuál es la ruta más económica para conectar un cable de la central a la fábrica, si cuesta a dólares por pie tender el cable bajo el agua y b dólares por pie en tierra $(a > b)$?

23. A las 7:00 a. m., un barco estaba a 60 millas al este de un segundo barco. Si el primer barco navega hacia el oeste a 20 millas por hora y el segundo navega con rumbo sureste a 30 millas por hora, ¿cuándo estarán más cerca uno del otro?

24. Encuentre la ecuación de la recta que es tangente a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en el primer cuadrante y que forma con los ejes de coordenadas el triángulo con menor área posible (a y b son constantes positivas).

25. Encuentre el volumen máximo que puede tener un cilindro circular recto, si está inscrito en una esfera de radio r.

26. Demuestre que el rectángulo con perímetro máximo que puede inscribirse en un círculo es un cuadrado.

27. ¿Cuáles son las dimensiones de un cilindro circular recto, con mayor área de superficie, que puede inscribirse en una esfera de radio r?

28. La iluminación en un punto es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del punto a la fuente luminosa y directamente proporcional a la intensidad de la fuente. Si dos fuentes luminosas están separadas s pies y sus intensidades son I_1 e I_2, respectivamente, ¿en qué punto entre ellas la suma de sus iluminaciones será mínima?

29. Un alambre de 100 centímetros de largo se corta en dos pedazos; uno se dobla para formar un cuadrado y el otro se dobla para formar un triángulo equilátero. ¿En dónde debe hacerse el corte si (a) la suma de las dos áreas debe ser mínima; (b) máxima? (Cabe la posibilidad de no cortar).

30. Una caja cerrada en forma de paralelepípedo rectangular con base cuadrada tiene un volumen dado. Si el material utilizado para el fondo cuesta 20% más por pulgada cuadrada que el material para los lados y el material de la tapa cuesta 50% más por pulgada cuadrada que cada lado, encuentre las proporciones más económicas para la caja.

31. Un observatorio debe tener la forma de un cilindro circular recto, coronado por un domo semiesférico. Si el domo semiesférico cuesta el doble por pie cuadrado que las paredes cilíndricas, ¿cuáles son las proporciones más económicas para un volumen dado?

32. Una masa conectada a un resorte se mueve a lo largo del eje x, de modo que su abscisa en el instante t es

$$x = \operatorname{sen} 2t + \sqrt{3}\cos 2t$$

¿Cuál es la mayor distancia del origen que alcanza la masa?

33. Una jardinera tendrá la forma de un sector circular (una región en forma de rebanada de pastel) de radio r y ángulo en el vértice de θ. Encuentre r y θ, si su área, A, es constante y el perímetro es mínimo.

34. Una barda de h pies de altura corre paralela a un edificio alto y a w pies de él (véase la figura 23). Encuentre la longitud de la escalera más corta que llegue del suelo hasta la pared del edificio, pasando por encima de la barda.

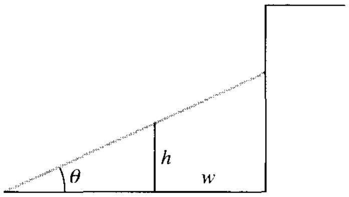


Figura 23

35. Un rectángulo tiene dos vértices sobre el eje x y los otros dos en la parábola $y = 12 - x^2$, con $y \geq 0$ (véase la figura 24). ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de este tipo con área máxima?

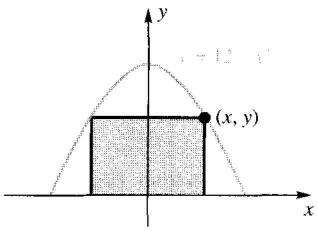


Figura 24

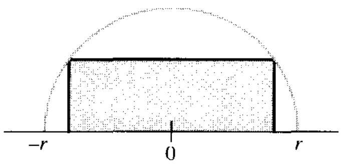


Figura 25

36. Un rectángulo se inscribirá en un semicírculo de radio r, como se muestra en la figura 25. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo, si su área debe maximizarse?

37. De todos los cilindros circulares rectos con un área de superficie dada, determine aquel con el volumen máximo. *Observación:* los extremos de los cilindros son cerrados.

38. Determine las dimensiones del rectángulo con mayor área que puede inscribirse en la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

39. De todos los rectángulos con una diagonal dada, determine aquel con el área máxima.

40. Un humidificador utiliza un disco giratorio de radio r que está sumergido parcialmente en el agua. La mayor evaporación ocurre cuando la región húmeda expuesta (mostrada como la región superior sombreada en la figura 26) se maximiza. Demuestre que esto sucede cuando h (la distancia del centro al agua) es igual a $r/\sqrt{1 + \pi^2}$.

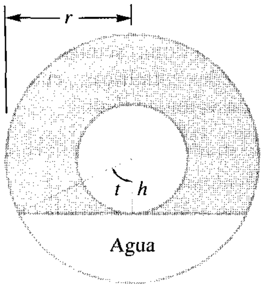


Figura 26

41. Un canalón metálico para el agua de lluvia tiene lados de 3 pulgadas y un fondo horizontal de 3 pulgadas, los lados forman ángulos iguales θ con el fondo (véase la figura 27). ¿Cuál debe ser θ para maximizar la capacidad de desalojo de agua del canalón? *Nota:* $0 \leq \theta \leq \theta/2$.

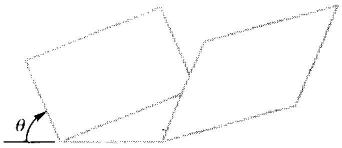


Figura 27

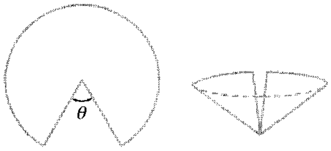


Figura 28

42. Se fabricará un gran depósito cónico con una pieza metálica circular con radio de 10 metros, cortando un sector con ángulo θ y luego soldando los lados rectos de la pieza restante (véase la figura 28). Encuentre θ, de modo que el cono resultante tenga el mayor volumen posible.

43. Con una hoja rectangular de cartón, que mide 5 por 8 pies, se confeccionará una caja con tapa. Esto se realiza cortando las regiones sombreadas de la figura 29 y luego doblando por las líneas discontinuas. ¿Cuáles son las dimensiones x, y y z que maximizan el volumen?

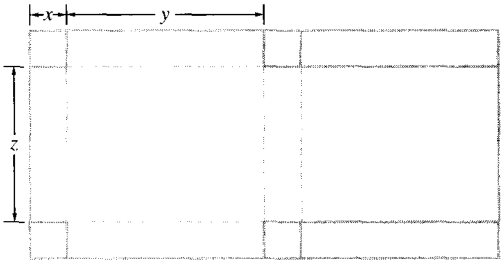


Figura 29

44. Tengo suficiente plata pura como para cubrir un área de 1 metro cuadrado de superficie. Planeo cubrir una esfera y un cubo. ¿Qué dimensiones deben tener si el volumen total de los sólidos plateados debe ser máximo? ¿Y mínimo? (Se permite la posibilidad de que se utilice toda la plata en un sólido).

45. Una esquina de una tira angosta de papel se dobla de manera que toca exactamente el lado opuesto, como se muestra en la figura 30. Con las partes marcadas como se indica, determine x para:

(a) maximizar el área del triángulo A;

(b) minimizar el área del triángulo B;

(c) minimizar la longitud z.

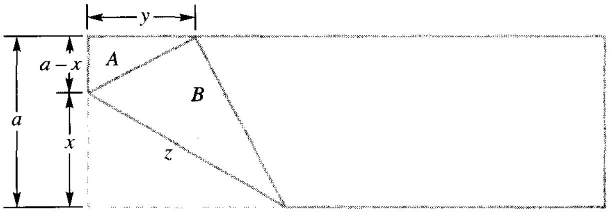


Figura 30

46. Determine θ de modo que el área de la cruz simétrica, que se muestra en la figura 31, se maximice. Después encuentre el área máxima.

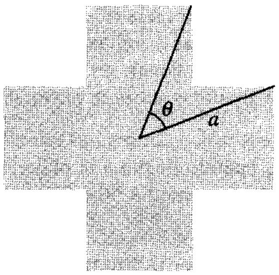


Figura 31

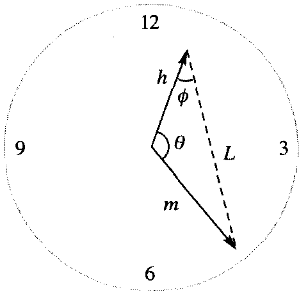


Figura 32

CAS **47.** Un reloj tiene horario y minutero de longitudes h y m, respectivamente, con $h \leq m$. Queremos estudiar este reloj entre las 12:00 y las 12:30. Sean θ, ϕ y L, como se muestran en la figura 32, y observe que θ aumenta a una razón constante. Por la ley de los cosenos, $L = L(\theta) = (h^2 + m^2 - 2hm \cos \theta)^{-1/2}$ y de este modo

$$L'(\theta) = hm(h^2 + m^2 - 2hm \cos \theta)^{-1/2} \operatorname{sen} \theta$$

(a) Para $h = 3$ y $m = 5$, determine L', L y ϕ en el instante en que L' es máxima.

(b) Vuelva a resolver la parte (a) cuando $h = 5$ y $m = 13$.

(c) Con base en las partes (a) y (b) haga conjeturas con respecto a los valores de L', L y ϕ al instante en que las puntas de las manecillas se separan más rápido.

(d) Intente demostrar sus conjeturas.

≈ C **48.** Un objeto que se arroja desde el borde de un acantilado de 100 pies, sigue la trayectoria dada por $y = -\frac{x^2}{10} + x + 100$.Un observador se encuentra parado a 2 pies del fondo del acantilado.

(a) Encuentre la posición del objeto cuando está más cerca del observador.

(b) Encuentre la posición del objeto cuando está más lejos del observador.

≈ CAS **49.** La posición de la Tierra en el Sistema Solar, en el instante t, medido en años, puede describirse de forma aproximada por medio de $P(93 \cos(2\text{p}t), 93 \operatorname{sen}(2\text{p}t))$, en donde el Sol está en el origen y las distancias se miden en millones de millas. Suponga que un asteroide tiene posición $Q(60 \cos[2\pi(1.51t - 1)], 120 \operatorname{sen}[2\pi(1.51t - 1)])$. En el periodo [0, 20] (es decir, en los siguientes 20 años), ¿cuándo estará más cerca el asteroide de la Tierra? ¿Qué tan cerca estará?

50. Un folleto publicitario debe tener 50 pulgadas cuadradas para el espacio impreso con márgenes, superior e inferior, de 2 pulgadas cada uno, y cada margen lateral de una pulgada. ¿Qué dimensiones del folleto requerirán el menor papel?

≈ **51.** Un extremo de una escalera de 27 pies descansa en el piso y el otro está apoyado en la parte superior de una pared de 8 pies. Cuando el extremo inferior se empuja por el piso hacia la pared, la parte superior sobresale de la pared. Encuentre la máxima distancia horizontal que sobresale el extremo superior de la escalera.

[C] **52.** Se produce latón en rollos largos de una hoja delgada. Para controlar la calidad, los inspectores seleccionan al azar una pieza de la hoja, miden su área y enumeran las imperfecciones en la superficie de esa pieza. El área varía de pieza a pieza. La siguiente tabla proporciona los datos del área (en pies cuadrados) de la pieza seleccionada y el número de imperfecciones encontradas en su superficie.

Pieza	Área en pies cuadrados	Número de imperfecciones en la superficie
1	1.0	3
2	4.0	12
3	3.6	9
4	1.5	5
5	3.0	8

(a) Haga un diagrama de dispersión con el área en el eje horizontal y el número de imperfecciones en el eje vertical.

(b) ¿Le parece que una recta que pasa por el origen sería un buen modelo para estos datos? Explique.

(c) Encuentre la ecuación de la recta de mínimos cuadrados que pasa por el origen.

(d) Utilice el resultado de la parte (c) para predecir cuántas imperfecciones en la superficie tendría una hoja con área de 2.00 pies cuadrados.

[C] **53.** Suponga que cada orden del cliente tomada por la compañía XYZ requiere de exactamente 5 horas de trabajo para el papeleo; este intervalo de tiempo es *fijo* y no varía de lote a lote. Entonces, el número de horas requeridas y para fabricar y vender un lote de tamaño x sería:

$$y = (\text{número de horas para producir un lote de tamaño } x) + 5$$

En la siguiente tabla se dan algunos datos de los estantes de la compañía XYZ.

Orden	Tamaño de lote, x	Total de horas de trabajo
1	11	38
2	16	52
3	8	29
4	7	25
5	10	38

(a) A partir de la descripción del problema, la recta de mínimos cuadrados tiene 5 como su intersección con el eje y. Encuentre una fórmula para el valor de la pendiente b que minimiza la suma de los cuadrados

$$S = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (5 + bx_i)]^2$$

(b) Utilice esta fórmula para estimar la pendiente b.

(c) Utilice su recta de mínimos cuadrados para predecir el número total de horas de trabajo para producir un lote que consiste en 15 libreros.

54. Los costos fijos mensuales de operar una planta que fabrica ciertos artículos es de \$7000, mientras que el costo de fabricación de cada unidad es de \$100. Escriba una expresión para $C(x)$, el costo total de producir x artículos en un mes.

55. El fabricante de los artículos del problema anterior estima que pueden venderse 100 unidades por mes, si el precio unitario es de \$250 y que las ventas aumentan en 10 unidades por cada disminución de \$5 en el precio. Escriba una expresión para el precio $p(n)$ y el ingreso $R(n)$, si se venden n unidades en un mes, $n \geq 100$.

56. Utilice la información en los problemas 54 y 55 para escribir una expresión para la utilidad total mensual $P(n)$, $n \geq 100$.

57. Dibuje la gráfica de $P(n)$ del problema 56 y con base en ella estime el valor de n que maximiza P. Encuentre exactamente n por medio de los métodos de cálculo.

[C] **58.** El costo total de producir y vender x unidades mensuales de cierto artículo es $C(x) = 100 + 3.002x - 0.0001x^2$. Si el nivel de producción es de 1600 unidades mensuales, encuentre el costo promedio, $C(x)/x$, de cada unidad y el costo marginal.

59. El costo total de producir y vender, por semana, n unidades de cierto bien de consumo es $C(n) = 1000 + n^2/1200$. Encuentre el costo promedio, $C(n)/n$, de cada unidad y el costo marginal de un nivel de producción de 800 unidades semanales.

60. El costo total de producir y vender $100x$ unidades a la semana de un bien en particular es

$$C(x) = 1000 + 33x - 9x^2 + x^3$$

Encuentre (a) el nivel de producción en el que el costo marginal es mínimo, y (b) el costo marginal mínimo.

61. Una función de precio, p, está definida por

$$p(x) = 20 + 4x - \frac{x^2}{3}$$

donde $x \geq 0$ es el número de unidades.

(a) Encuentre la función de ingreso total y la función de ingreso marginal.

(b) ¿En qué intervalo es creciente el ingreso total?

(c) ¿Para qué número x el ingreso marginal es máximo?

[C] **62.** Para la función de precio definida por

$$p(x) = (182 - x/36)^{1/2}$$

encuentre el número de unidades x_1 que hace que sea máximo el ingreso total y establezca el máximo ingreso posible. ¿Cuál es el ingreso marginal cuando se vende el número óptimo de unidades, x_1?

63. Para la función de precio dada por

$$p(x) = 800/(x + 3) - 3$$

encuentre el número de unidades x_1 que hacen máximo el ingreso total, y establezca el máximo ingreso posible. ¿Cuál es el ingreso marginal cuando se vende el número óptimo de unidades, x_1?

64. Por el día de la independencia, una compañía de viajes por río ofrece una excursión a una organización fraternal, bajo el entendido de que será para 400 paseantes, por lo menos. El precio de cada boleto será de \$12.00 y la compañía acepta hacer un descuento de \$0.20 por cada 10 pasajeros que excedan a 400. Escriba una expresión para la función del precio $p(x)$ y encuentre el número x_1 de pasajeros que hacen máximo el ingreso total.

65. La compañía XYZ fabrica sillas de mimbre. Con sus actuales máquinas, tiene una producción anual máxima de 500 unidades. Si fabrica x sillas, puede establecer un precio de $p(x) = 200 - 0.15x$ dólares para cada una y tendrá un costo total por año de $C(x) = 5000 + 6x - 0.002x^2$ dólares. La compañía tiene la oportunidad de comprar una máquina nueva por \$4000, con lo que aumentaría su producción en 250 sillas anuales. Por lo tanto, la función de costo para valores de x entre 500 y 750 es $C(x) = 9000 + 6x - 0.002x^2$. Con base en su análisis de la utilidad para el año siguiente, responda las siguientes preguntas.

(a) ¿La compañía debe comprar la máquina adicional?

(b) ¿Cuál debe ser el nivel de producción?

66. Repita el problema 65, suponiendo que la máquina adicional cuesta \$3000.

C **67.** La compañía ZEE fabrica ciertos objetos, los cuales se venden a un precio de $p(x) = 10 - 0.001x$ dólares, donde x es el número producido cada mes. Su costo mensual total es $C(x) = 200 + 4x - 0.01x^2$. En el máximo de producción puede fabricar 300 unidades. ¿Cuál es su utilidad mensual máxima y qué nivel de producción proporciona esta utilidad?

C **68.** Si la compañía del problema 67 amplía sus instalaciones de modo que puede producir hasta 450 unidades mensuales, su función de costo mensual toma la forma $C(x) = 800 + 3x - 0.01x^2$ para $300 < x \leq 450$. Determine el nivel de producción que maximiza la utilidad mensual y efectúe un cálculo de ésta. Haga un bosquejo de la gráfica de la función de utilidad mensual, $P(x)$ en $0 \leq x \leq 450$.

EXPL **69.** La media aritmética de los números a y b es $(a + b)/2$, y la media geométrica de dos números positivos, a y b, es $\sqrt{ab}$. Suponga que $a > 0$ y $b > 0$.

(a) Elevando ambos lados al cuadrado y simplificando, demuestre que se cumple $\sqrt{ab} \leq (a + b)/2$.

(b) Utilice cálculo para demostrar que $\sqrt{ab} \leq (a + b)/2$. *Sugerencia:* considere a fija. Eleve ambos lados de la desigualdad al cuadrado y divida entre b. Defina la función $F(b) = (a + b)^2/4b$. Demuestre que F tiene su mínimo en a.

(c) La media geométrica de tres números positivos, a, b y c, es $(abc)^{1/3}$. Demuestre que se cumple la desigualdad análoga:

$$(abc)^{1/3} \leq \frac{a + b + c}{3}$$

Sugerencia: considere a y c fijas y defina $F(b) = (a + b + c)^3/27b$. Demuestre que F tiene un mínimo en $b = (a + c)/2$ y que este mínimo es $[(a + b)/2]^2$. Luego utilice el resultado de la parte (b).

EXPL **70.** Demuestre que de todas las cajas de tres dimensiones con un área de superficie dada, el cubo tiene el volumen máximo. *Sugerencia:* el área de la superficie es $S = 2(lw + lh + hw)$ y el volumen es $V = lwh$. Sea $a = lw$, $b = lh$ y $c = wh$. Utilice el problema anterior para demostrar que $(V^2)^{1/3} \leq S/6$. ¿Cuándo se satisface como igualdad?

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $0 < x < \infty$ **2.** $2x + 200/x$ **3.** $y_i - bx_i$ **4.** ingreso marginal; costo marginal.

3.5
Graficación de funciones mediante cálculo

En la sección 0.4, nuestro tratamiento de graficación fue elemental. Propusimos trazar suficientes puntos, de modo que las características esenciales de la gráfica fuesen claras. Mencionamos que las simetrías de la gráfica podrían reducir el esfuerzo necesario. Sugerimos que uno debe estar alerta a posibles asíntotas. Pero si la ecuación a graficar es complicada o si queremos una gráfica precisa, las técnicas de esa sección no son adecuadas.

El cálculo proporciona una herramienta poderosa para analizar la estructura fina de una gráfica, en especial para identificar los puntos en donde cambian las características de la gráfica. Podemos localizar puntos máximos locales, puntos mínimos locales y puntos de inflexión; podemos determinar, con precisión, en dónde la gráfica es creciente o en dónde es cóncava hacia arriba. La inclusión de todas estas ideas en nuestro procedimiento para graficar es el programa de esta sección.

Funciones polinomiales Un polinomio de grado 1 o 2 es fácil de graficar a mano; uno de grado 50 sería casi imposible. Si el grado es de tamaño modesto, como 3 o 6, podemos utilizar las herramientas de cálculo con gran ventaja.

EJEMPLO 1 Haga la gráfica de $f(x) = \dfrac{3x^5 - 20x^3}{32}$.

SOLUCIÓN Como $f(-x) = -f(x)$, f es una función impar y, por lo tanto, su gráfica es simétrica con respecto al origen. Haciendo $f(x) = 0$, encontramos que las intersecciones con el eje x son 0 y $\pm\sqrt{20/3} \approx \pm 2.6$. Podemos llegar hasta aquí sin cálculo.

Cuando derivamos f, obtenemos

$$f'(x) = \frac{15x^4 - 60x^2}{32} = \frac{15x^2(x - 2)(x + 2)}{32}$$

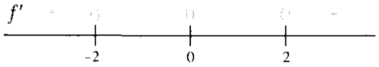


Figura 1

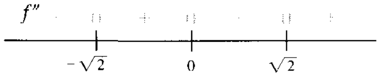


Figura 2

Así, los puntos críticos son −2, 0 y 2; rápidamente descubrimos que (véase la figura 1) $f'(x) > 0$ en $(-\infty, -2)$ y en $(2, \infty)$, y que $f'(x) < 0$ en $(-2, 0)$ y en $(0, 2)$. Estos hechos nos dicen en dónde f es creciente y en dónde es decreciente; también confirman que $f(-2) = 2$ es un valor máximo local y que $f(2) = -2$ es un valor mínimo local.

Al derivar nuevamente, obtenemos

$$f''(x) = \frac{60x^3 - 120x}{32} = \frac{15x\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)}{8}$$

Mediante un estudio del signo de $f''(x)$ (véase la figura 2) deducimos que f es cóncava hacia arriba en $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$ y en $\left(\sqrt{2}, \infty\right)$, y cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right)$ y en $\left(0, \sqrt{2}\right)$. Por lo tanto, existen tres puntos de inflexión: $\left(-\sqrt{2}, 7\sqrt{2}/8\right) \approx (-1.4, 1.2)$, $(0, 0)$ y $\left(\sqrt{2}, -7\sqrt{2}/8\right) \approx (1.4, -1.2)$.

Gran parte de esta información está reunida en la parte superior de la figura 3 que usamos para dibujar la gráfica que está abajo de ella.

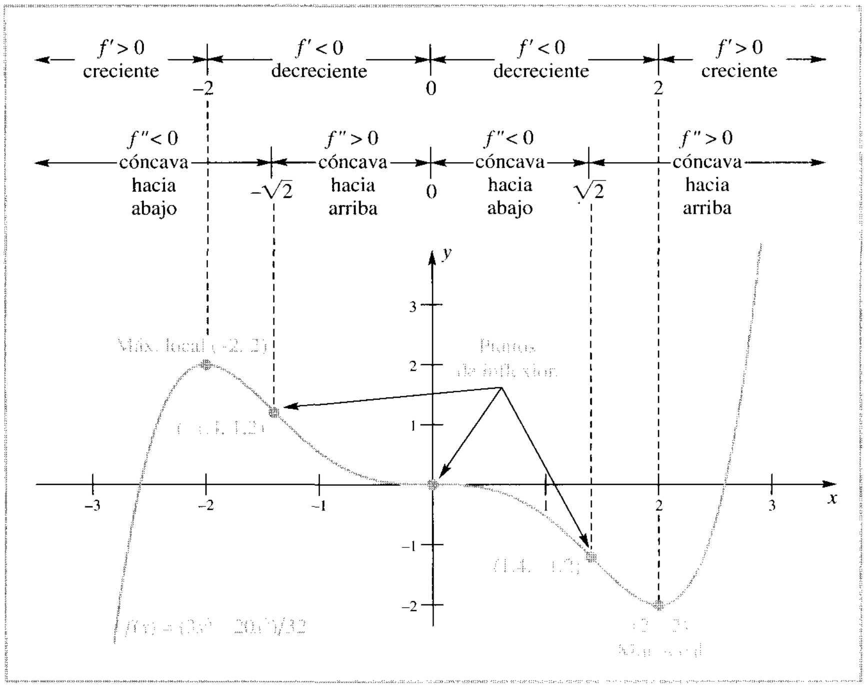


Figura 3 ■

Funciones racionales Una función racional, que es el cociente de dos funciones polinomiales, es considerablemente más complicada de graficar que un polinomio. En particular, podemos esperar un comportamiento difícil cerca de donde el denominador se haga cero.

EJEMPLO 2 Dibuje la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$.

SOLUCIÓN Esta función no es par ni impar, así que no tiene ninguna de las simetrías comunes. No hay intersecciones con el eje x, ya que las soluciones de $x^2 - 2x + 4 = 0$ no son números reales. La intersección con el eje y es −2. Anticipamos una asíntota vertical en $x = 2$. De hecho,

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = \infty$$

Al derivar dos veces se obtiene

$$f'(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2} \quad \text{y} \quad f''(x) = \frac{8}{(x-2)^3}$$

Por lo tanto, los puntos estacionarios son $x = 0$ y $x = 4$.

Así, $f'(x) > 0$ en $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$ y $f'(x) < 0$ en $(0, 2) \cup (2, 4)$. (Recuerde que $f'(x)$ no existe cuando $x = 2$). También, $f''(x) > 0$ en $(2, \infty)$ y $f''(x) < 0$ en $(-\infty, 2)$. Como $f''(x)$ nunca es cero, no hay puntos de inflexión. Por otra parte, $f(0) = -2$ y $f(4) = 6$ dan los valores máximo y mínimo locales, respectivamente.

Es una buena idea verificar el comportamiento de $f(x)$ para $|x|$ grande. Como

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = x + \frac{4}{x - 2}$$

la gráfica de $y = f(x)$ se acerca cada vez más a la recta $y = x$ cuando $|x|$ se hace cada vez más grande. Llamamos a la recta $y = x$ **asíntota oblicua** para la gráfica de f (véase el problema 49 de la sección 1.5).

Con toda esta información, somos capaces de trazar una gráfica bastante precisa (véase la figura 4).

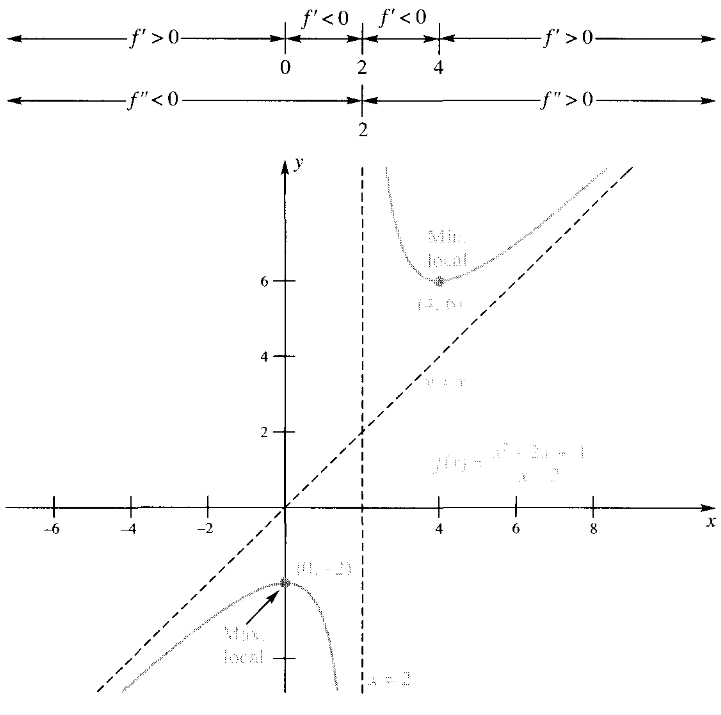


Figura 4

■

Funciones en las que aparecen raíces Existe una variedad infinita de funciones que implican raíces. Aquí está un ejemplo.

EJEMPLO 3 Analice la función

$$F(x) = \frac{\sqrt{x}(x-5)^2}{4}$$

y dibuje su gráfica.

SOLUCIÓN El dominio de F es $[0,\infty)$ y el rango es $[0,\infty)$, de modo que la gráfica de F está confinada al primer cuadrante y la parte positiva de los ejes de coordenadas. Las intersecciones con el eje x son 0 y 5; y la intersección con el eje y es 0. De

$$F'(x) = \frac{5(x-1)(x-5)}{8\sqrt{x}}, \qquad x > 0$$

encontramos los puntos estacionarios 1 y 5. Como $F'(x) > 0$ en $(0, 1)$ y $(5,\infty)$, mientras que $F'(x) < 0$ en $(1, 5)$, concluimos que $F(1) = 4$ es un valor máximo local y $F(5) = 0$ es un valor mínimo local.

Hasta aquí, todo va viento en popa. Pero al calcular la segunda derivada obtenemos

$$F''(x) = \frac{5(3x^2 - 6x - 5)}{16x^{3/2}}, \qquad x > 0$$

que es muy complicada. Sin embargo, $3x^2 - 6x - 5 = 0$ tiene una solución en $(0,\infty)$, a saber, $1 + 2\sqrt{6}/3 \approx 2.6$.

Utilizando los puntos de prueba 1 y 3 concluimos que $f''(x) < 0$ en $(0, 1 + 2\sqrt{6}/3$ y $f''(x) > 0$ en $(1 + 2\sqrt{6}/3, \infty)$. Entonces, se deduce que el punto $\left(1 + 2\sqrt{6}/3, F(1 + 2\sqrt{6}/3)\right)$, es un punto de inflexión.

Cuando x crece, $F(x)$ crece sin cota y mucho más rápido que cualquier función lineal; no hay asíntotas. La gráfica se dibuja en la figura 5. ■

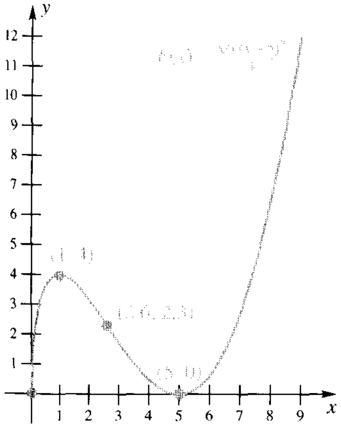


Figura 5

Resumen del método Al graficar funciones no hay sustituto para el sentido común. Sin embargo, el procedimiento siguiente será útil en la mayoría de los casos.

Paso 1: Haga un análisis antes de utilizar cálculo.

(a) Verifique el *dominio* y el *rango* de la función para ver si existen regiones en el plano que están excluidas.

(b) Verifique la *simetría* con respecto al eje y y al origen. (¿La función es par o impar?)

(c) Encuentre las *intersecciones con los ejes de coordenadas.*

Paso 2: Análisis con cálculo.

(a) Utilice la primera derivada para encontrar los puntos críticos y determinar en dónde la gráfica es *creciente* y en dónde es *decreciente.*

(b) Verifique los puntos críticos para saber si son *máximos* o *mínimos locales.*

(c) Utilice la segunda derivada para determinar en dónde la gráfica es *cóncava hacia arriba* y en dónde es *cóncava hacia abajo*, y para localizar *puntos de inflexión.*

(d) Encuentre las *asíntotas.*

Paso 3: Dibuje algunos puntos (incluya todos los puntos críticos y los puntos de inflexión).

Paso 4: Haga un bosquejo de la gráfica.

EJEMPLO 4 Haga un bosquejo de las gráficas de $f(x) = x^{1/3}$ y $g(x) = x^{2/3}$ y de sus derivadas.

SOLUCIÓN El dominio de ambas funciones es $(-\infty,\infty)$. (Recuerde que la raíz cúbica existe para todo número real). El rango para $f(x)$ es $(-\infty,\infty)$, ya que cada número real es la raíz cúbica de algún otro número. Al escribir $g(x)$ como $g(x) = x^{2/3} = (x^{1/3})^2$, vemos que $g(x)$ debe ser no negativa; su rango es $[0,\infty)$. Como $f(-x) = (-x)^{1/3} = -x^{1/3} = -f(x)$, vemos que f es una función impar. De forma análoga, como $g(-x) = (-x)^{2/3} = ((-x)^2)^{1/3} = (x^2)^{1/3} = g(x)$, vemos que g es una función par. Las primeras derivadas son

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3x^{2/3}}$$

y

$$g'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}$$

y las segundas derivadas son

$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3} = -\frac{2}{9x^{5/3}}$$

y

$$g''(x) = -\frac{2}{9}x^{-4/3} = -\frac{2}{9x^{4/3}}$$

Para ambas funciones el único punto crítico, en este caso un punto en donde la derivada no existe, es $x = 0$

Observe que $f'(x) > 0$ para toda x, excepto $x = 0$. Por lo tanto, f es creciente en $(-\infty, 0]$ y también en $[0, \infty)$; pero como f es continua en $(-\infty, \infty)$, podemos concluir que f siempre es creciente. En consecuencia, f no tiene máximo ni mínimo locales. Como $f''(x)$ es positiva cuando x es negativa y negativa cuando x es positiva (e indefinida cuando $x = 0$), concluimos que f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia abajo en $(0, \infty)$ El punto $(0, 0)$ es un punto de inflexión porque es en donde la concavidad cambia.

Ahora considere $g(x)$. Observe que $g'(x)$ es negativa cuando x es negativa y positiva cuando x es positiva. Como g es decreciente en $(-\infty, 0]$ y creciente en $[0, \infty)$, $g(0) = 0$ es un mínimo local. También observe que $g''(x)$ es negativa siempre que $x \neq 0$. Por lo tanto, g es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia abajo en $(0, \infty)$, así que $(0, 0)$ no es un punto de inflexión. Las gráficas de $f(x)$, $f'(x)$, $g(x)$ y $g'(x)$ se muestran en las figuras 6 y 7. ■

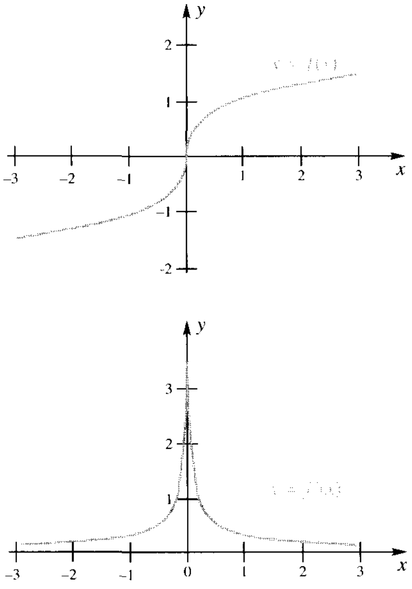


Figura 6

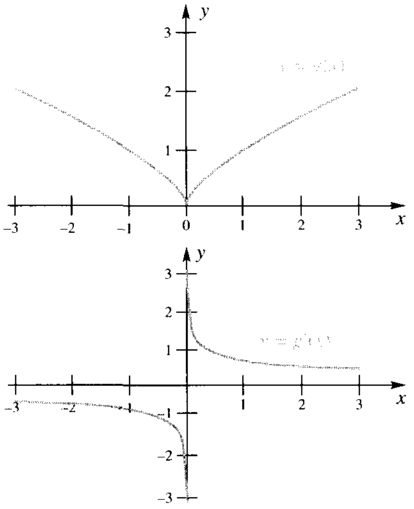


Figura 7

Observe que en el ejemplo anterior ambas funciones tienen un punto crítico, $x = 0$, en donde la derivada no está definida. Sin embargo, las gráficas de las funciones son fundamentalmente diferentes. La gráfica de $y = f(x)$ tiene una recta tangente en todos los puntos, pero es vertical cuando $x = 0$. (Si la recta tangente es vertical, entonces la derivada no existe en ese punto). La gráfica de $y = g(x)$ tiene un punto esquina, denominada **pico**, en $x = 0$.

Uso de la gráfica de la derivada para graficar una función El solo hecho de conocer la derivada de la función puede decirnos mucho acerca de la función misma y cuál es la apariencia de su gráfica.

EJEMPLO 5 La figura 8 muestra una gráfica de $y = f'(x)$. Determine todos los extremos locales y puntos de inflexión de f en el intervalo $[-1, 3]$. Dado que $f(1) = 0$, haga un bosquejo de la gráfica de $y = f(x)$

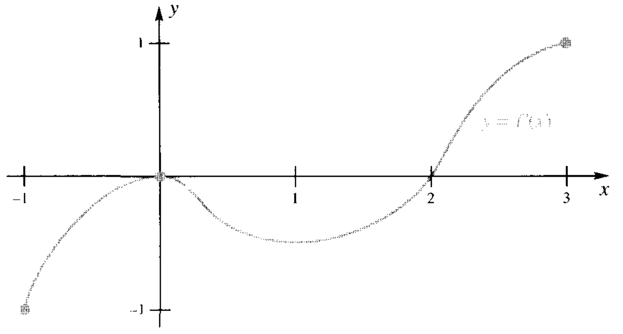


Figura 8

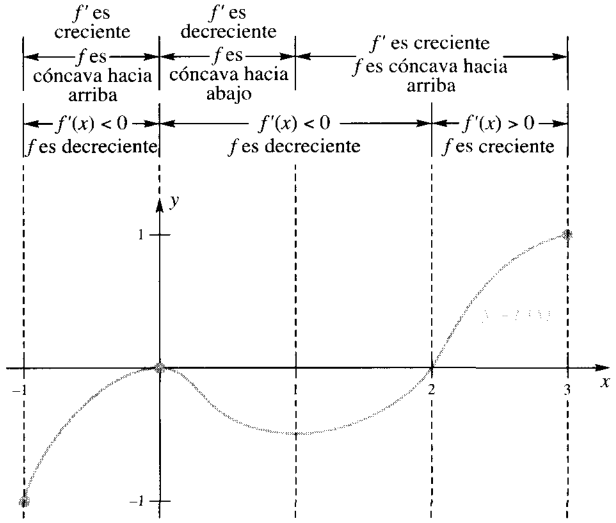


Figura 9

SOLUCIÓN La derivada es negativa en los intervalos $(-1, 0)$ y $(0, 2)$ y positiva en el intervalo $(2, 3)$. Por lo tanto, f es decreciente en $[-1, 0]$ y en $[0, 2]$, por lo que hay un máximo local en el punto fronterizo izquierdo $x = -1$. Como $f'(x)$ es positivo en $(2, 3)$, f es creciente en $[2, 3]$, por lo que existe un máximo local en el punto fronterizo derecho $x = 3$. Ya que f es decreciente en $[-1, 2]$ y creciente en $[2, 3]$, existe un mínimo local en $x = 2$. La figura 9 resume esta información.

$f(-1)$	Máximo local
$f(2)$	Mínimo local
$f(3)$	Máximo local
$(0, f(0))$	Punto de inflexión
$(1, f(1))$	Punto de inflexión

Los puntos de inflexión para f se producen cuando la concavidad de f cambia. Como f' es creciente en $(-1, 0)$ y en $(1, 3)$, f es cóncava hacia arriba en $(-1, 0)$ y en $(1, 3)$. Ya que f' es decreciente en $(0, 1)$, f es cóncava hacia abajo en $(0, 1)$. Así que, f cambia de concavidad en $x = 0$ y $x = 1$. Por lo tanto, los puntos de inflexión son $(0, f(0))$ y $(1, f(1))$

La información anterior, junto con el hecho de que $f(1) = 0$, puede usarse para trazar la gráfica de $y = f(x)$. (Este dibujo no puede ser demasiado preciso ya que aún tenemos información limitada acerca de f). En la figura 10 se muestra un bosquejo.

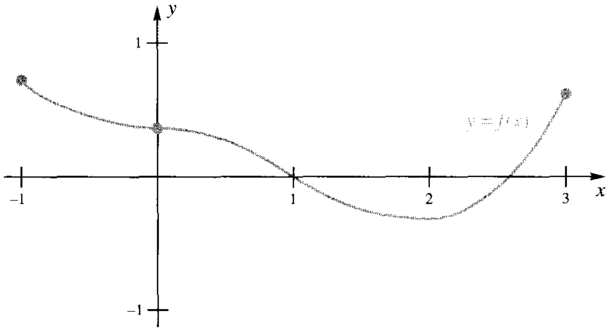


Figura 10 ■

Revisión de conceptos

1. La gráfica de f es simétrica respecto al eje y si $f(-x) =$ _____ para toda x; la gráfica es simétrica con respecto al origen si $f(-x) =$ _____ para toda x.

2. Si $f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$ para toda x en un intervalo I, entonces la gráfica de f es _____ y _____ en I.

3. La gráfica de $f(x) = x^3/[(x+1)(x-2)(x-3)]$ tiene como asíntotas verticales las rectas _____ y como asíntota horizontal la recta _____.

4. Llamamos a $f(x) = 3x^5 - 2x^2 + 6$ una función _____ y llamamos a $g(x) = (3x^5 - 2x^2 + 6)/(x^2 - 4)$ una función _____.

Conjunto de problemas 3.5

En los problemas del 1 al 27 haga un análisis como el sugerido en el resumen anterior y después elabore un bosquejo de la gráfica.

1. $f(x) = x^3 - 3x + 5$ **2.** $f(x) = 2x^3 - 3x - 10$

3. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3$

4. $f(x) = (x - 1)^3$ **5.** $G(x) = (x - 1)^4$

6. $H(t) = t^2(t^2 - 1)$

7. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 10$

8. $F(s) = \dfrac{4s^4 - 8s^2 - 12}{3}$

9. $g(x) = \dfrac{x}{x + 1}$ **10.** $g(s) = \dfrac{(s - \pi)^2}{s}$

11. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$ **12.** $\Lambda(\theta) = \dfrac{\theta^2}{\theta^2 + 1}$

13. $h(x) = \dfrac{x}{x - 1}$ **14.** $P(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

15. $f(x) = \dfrac{(x - 1)(x - 3)}{(x + 1)(x - 2)}$ **16.** $w(z) = \dfrac{z^2 + 1}{z}$

17. $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 1}$

18. $f(x) = |x|^3$ *Sugerencia:* $\dfrac{d}{dx}|x| = \dfrac{x}{|x|}$

19. $R(z) = z|z|$ **20.** $H(q) = q^2|q|$

21. $g(x) = \dfrac{|x| + x}{2}(3x + 2)$

22. $h(x) = \dfrac{|x| - x}{2}(x^2 - x + 6)$

23. $f(x) = |\text{sen}\, x|$ **24.** $f(x) = \sqrt{\text{sen}\, x}$

25. $h(t) = \cos^2 t$ **26.** $g(t) = \tan^2 t$

C **27.** $f(x) = \dfrac{5.235x^3 - 1.245x^2}{7.126x - 3.141}$

28. Bosqueje la gráfica de una función f que tenga las siguientes propiedades:

(a) f es continua en todas partes; (b) $f(0) = 0, f(1) = 2$;

(c) f es una función par; (d) $f'(x) > 0$ para $x > 0$;

(e) $f''(x) > 0$ para $x > 0$.

29. Trace la gráfica de una función f que tenga las siguientes propiedades:

(a) f es continua en todas partes; (b) $f(2) = -3, f(6) = 1$;

(c) $f'(2) = 0, f'(x) > 0$ para $x \neq 2, f'(6) = 3$;

(d) $f''(6) = 0, f''(x) > 0$ para $2 < x < 6, f''(x) < 0$ para $x > 6$;

30. Bosqueje la gráfica de una función g que tenga las siguientes propiedades:

(a) g es *suave* en todas partes (continua y con primera derivada continua);

(b) $g(0) = 0$; (c) $g'(x) < 0$ para toda x;

(d) $g''(x) < 0$ para $x < 0$ y $g''(x) > 0$ para $x > 0$

31. Haga la gráfica de una función f que tenga las siguientes propiedades:

(a) f es continua en todas partes;

(b) $f(-3) = 1$;

(c) $f'(x) < 0$ para $x < -3, f'(x) > 0$ para $x > -3, f''(x) < 0$ para $x \neq 3$.

32. Elabore la gráfica de una función f que tenga las siguientes propiedades:

(a) f es continua en todas partes;

(b) $f(-4) = -3, f(0) = 0, f(3) = 2$;

(c) $f'(-4) = 0, f'(3) = 0, f'(x) > 0$ para $x < -4, f'(x) > 0$ para $-4 < x < 3, f'(x) < 0$ para $x > 3$;

(d) $f''(-4) = 0, f''(0) = 0, f''(x) < 0$ para $x < -4, f''(x) > 0$ para $-4 < x < 0, f''(x) < 0$ para $x > 0$.

33. Bosqueje la gráfica de una función f que

(a) tenga primera derivada continua;

(b) sea descendente y cóncava hacia arriba para $x < 3$

(c) tenga un extremo en el punto $(3, 1)$;

(d) sea ascendente y cóncava hacia arriba para $3 < x < 5$;

(e) tenga un punto de inflexión en $(5, 4)$;

(f) sea ascendente y cóncava hacia abajo para $5 < x < 6$;

(g) tenga un extremo en $(6, 7)$;

(h) sea descendente y cóncava hacia abajo para $x > 6$.

GC *Las aproximaciones lineales proporcionan una buena aproximación, en particular cerca de los puntos de inflexión. Mediante una calculadora gráfica uno puede investigar con facilidad tal comportamiento en los problemas del 34 al 36.*

34. Grafique $y = \operatorname{sen} x$ y su aproximación lineal $L(x) = x$ en el punto de inflexión $x = 0$.

35. Grafique $y = \cos x$ y su aproximación lineal $L(x) = -x + \pi/2$ en $x = \pi/2$.

36. Encuentre la aproximación lineal a la curva $y = (x - 1)^5 + 3$ en su punto de inflexión. Grafique tanto la función como su aproximación lineal en la vecindad del punto de inflexión.

37. Suponga que $f'(x) = (x - 2)(x - 3)(x - 4)$ y $f(2) = 2$. Haga una gráfica de $y = f(x)$.

38. Suponga que $f'(x) = (x - 3)(x - 2)^2(x - 1)$ y $f(2) = 0$. Bosqueje una gráfica de $f(x)$.

39. Suponga que $h'(x) = x^2(x - 1)^2(x - 2)$ y $h(0) = 0$. Elabore una gráfica de $y = h(x)$.

40. Considere una curva cuadrática general $y = ax^2 + bx + c$. Demuestre que tal curva no tiene puntos de inflexión.

41. Demuestre que la curva $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ en donde $a \neq 0$, tiene exactamente un punto de inflexión.

42. Considere una curva general de cuarto grado $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, donde $a \neq 0$. ¿Cuál es el número máximo de puntos de inflexión que tal curva puede tener?

EXPL CAS *En los problemas del 43 al 47 la gráfica de $y = f(x)$ depende de un parámetro c. Mediante un CAS investigue cómo dependen los puntos extremos y los puntos de inflexión del valor de c. Identifique los valores extremos de c en los cuales cambia la forma básica de las curvas.*

43. $f(x) = x^2\sqrt{x^2 - c^2}$ **44.** $f(x) = \dfrac{cx}{4 + (cx)^2}$

45. $f(x) = \dfrac{1}{(cx^2 - 4)^2 + cx^2}$ **46.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4x + c}$

47. $f(x) = c + \operatorname{sen} cx$

48. Con base en la información de que $f'(c) = f''(c) = 0$ y $f'''(c) > 0$, ¿qué conclusiones puede obtener acerca de f?

49. Sea $g(x)$ una función que tiene dos derivadas y satisface las siguientes propiedades:

(a) $g(1) = 1$;

(b) $g'(x) > 0$, para toda $x \neq 1$;

(c) g es cóncava hacia abajo para toda $x < 1$ y cóncava para arriba para toda $x > 1$;

(d) $f(x) = g(x^4)$.

Haga un bosquejo de una posible gráfica de $f(x)$ y justifique su respuesta.

50. Suponga que $H(x)$ tiene tres derivadas continuas, y sea tal que $H(1) = H'(1) = H''(1) = 0$, pero $H'''(1) \neq 0$. ¿Tiene $H(x)$ un máximo relativo, mínimo relativo o un punto de inflexión en $x = 1$? Justifique su respuesta.

51. En cada caso, ¿es posible para una función F con dos derivadas continuas satisfacer todas las propiedades siguientes? Si es así, grafique tal función. En caso contrario, justifique su respuesta.

(a) $F'(x) > 0, F''(x) > 0$, mientras que $F(x) < 0$ para toda x.

(b) $F''(x) < 0$, mientras $F(x) > 0$.

(c) $F''(x) < 0$, mientras $F'(x) > 0$.

GC **52.** Utilice una calculadora gráfica o un CAS para trazar las gráficas de cada una de las funciones siguientes en los intervalos que se indican. Determine las coordenadas de los extremos globales y de los puntos de inflexión, si existen. Usted debe ser capaz de dar respuestas que tengan al menos una precisión de un decimal. Restrinja la ventana del eje y a $-5 \leq y \leq 5$.

(a) $f(x) = x^2 \tan x; \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

(b) $f(x) = x^3 \tan x; \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

(c) $f(x) = 2x + \operatorname{sen} x; [-\pi, \pi]$

(d) $f(x) = x - \dfrac{\operatorname{sen} x}{2}; [-\pi, \pi]$

GC **53.** Cada una de las siguientes funciones es periódica. Utilice una calculadora gráfica o un CAS para hacer las gráficas de cada una de las siguientes funciones en un periodo completo con el centro en el intervalo ubicado en el origen. Determine las coordenadas, si las hay, de los extremos globales y los puntos de inflexión. Debe ser capaz de dar las respuestas que tengan una precisión de al menos un decimal.

(a) $f(x) = 2\operatorname{sen} x + \cos^2 x$
(b) $f(x) = 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$
(c) $f(x) = \cos 2x - 2\cos x$
(d) $f(x) = \operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x$
(e) $f(x) = \operatorname{sen} 2x - \cos 3x$

54. Sea f una función continua con $f(-3) = f(0) = 2$. Si la gráfica de $y = f'(x)$ es como se muestra en la figura 6, bosqueje una posible gráfica para $y = f(x)$.

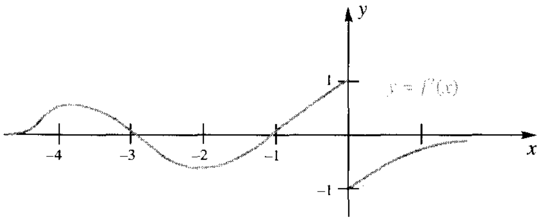


Figura 11

55. Sea f una función continua y suponga que la gráfica de f' es la que se muestra en la figura 12. Bosqueje una posible gráfica para f y responda las siguientes preguntas.

(a) ¿En dónde es creciente f? ¿En dónde es decreciente?
(b) ¿En dónde es cóncava hacia arriba? ¿En dónde es cóncava hacia abajo?
(c) ¿En dónde f alcanza un máximo local? ¿Y un mínimo local?
(d) ¿En dónde están los puntos de inflexión para f?

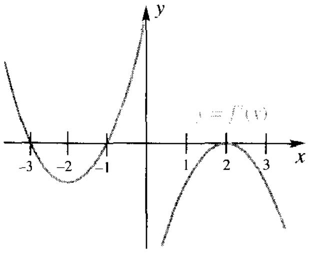


Figura 12

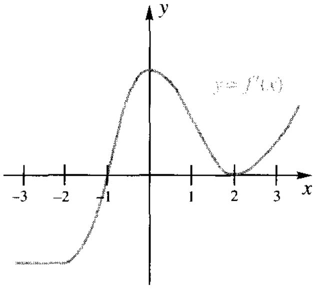


Figura 13

56. Repita el problema 55 para la figura 13.

57. Sea f una función continua con $f(0) = f(2) = 0$. Si la gráfica de $y = f'(x)$ es como la que se muestra en la figura 7, bosqueje una posible gráfica para $y = f(x)$.

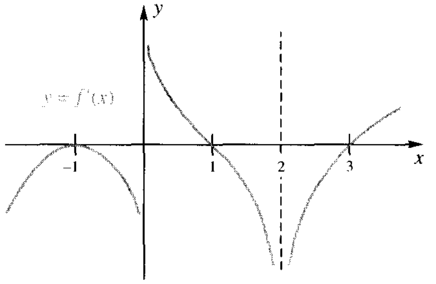


Figura 14

58. Suponga que $f'(x) = (x-3)(x-1)^2(x+2)$ y $f(1) = 2$. Haga un bosquejo de una posible gráfica de f.

GC **59.** Utilice una calculadora gráfica o un CAS para dibujar la gráfica de cada una de las siguientes funciones en $[-1, 7]$. Determine las coordenadas, si existen, de los extremos globales y puntos de inflexión. Usted debe ser capaz de dar respuestas con una precisión de al menos un decimal.

(a) $f(x) = x\sqrt{x^2 - 6x + 40}$
(b) $f(x) = \sqrt{|x|}(x^2 - 6x + 40)$
(c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 40}/(x - 2)$
(d) $f(x) = \operatorname{sen}[(x^2 - 6x + 40)/6]$

GC **60.** Repita el problema 59 para las funciones siguientes.

(a) $f(x) = x^3 - 8x^2 + 5x + 4$
(b) $f(x) = |x^3 - 8x^2 + 5x + 4|$
(c) $f(x) = (x^3 - 8x^2 + 5x + 4)/(x - 1)$
(d) $f(x) = (x^3 - 8x^2 + 5x + 4)/(x^3 + 1)$

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $f(x)$; $-f(x)$ **2.** decreciente; cóncava hacia arriba **3.** $x = -1, x = 2, x = 3$; $y = 1$ **4.** polinomial; racional.

3.6 El teorema del valor medio para derivadas

En lenguaje geométrico, el teorema del valor medio es fácil de formular y entender. Dice que si la gráfica de una función continua tiene una recta tangente, que no sea vertical, en cada punto entre A y B, entonces existe al menos un punto C en la gráfica entre A y B en el cual la recta tangente es paralela a la recta secante AB. En la figura 1 existe exactamente un punto C; en la figura 2 existen varios. Primero formulamos el teorema en el lenguaje de funciones y después lo demostramos.

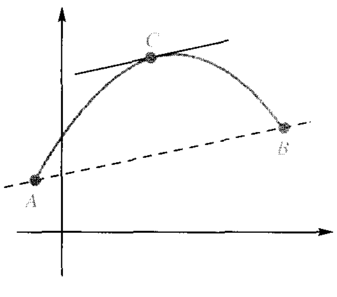


Figura 1

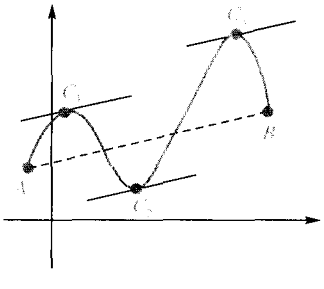


Figura 2

Teorema A **Teorema del valor medio para derivadas**

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en su interior (a, b), entonces existe al menos un número c en (a, b) donde

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

o, de manera equivalente, donde

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

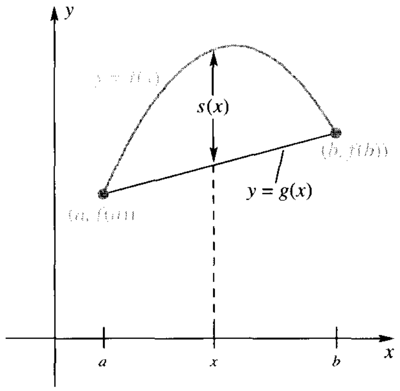


Figura 3

Demostración Nuestra demostración se apoya en un análisis cuidadoso de la función $s(x) = f(x) - g(x)$, introducida en la figura 3. Aquí, $y = g(x)$ es la ecuación de la recta que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Como la recta tiene pendiente $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ y pasa por $(a, f(a))$, la ecuación en la forma punto pendiente es

$$g(x) - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Esto, a su vez, da una fórmula para $s(x)$:

$$s(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Observe de inmediato que $s(b) = s(a) = 0$ y que, para x en (a, b),

$$s'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La clave de una demostración

La clave de esta demostración es que c es el valor en el cual $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ y $s'(c) = 0$. Muchas demostraciones tienen una o dos ideas clave; si usted entiende la clave, comprenderá la demostración.

Ahora hacemos una observación crucial. Si supiésemos que hay un número c en (a, b) que satisface $s'(c) = 0$, estaría todo hecho. Pues entonces la última ecuación diría que

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

que es equivalente a la conclusión del teorema.

Para ver que $s'(c) = 0$ para alguna c en (a, b), razónese como sigue. Es claro que s es continua en $[a, b]$, ya que es la diferencia de dos funciones continuas. Así, por el teorema de existencia de máximo y mínimo (teorema 3.1A), s debe alcanzar tanto el valor máximo como el mínimo en $[a, b]$. Si ambos valores se presentan en cero, entonces $s(x)$ es idénticamente cero en $[a, b]$, y en consecuencia $s'(x) = 0$ para toda x en (a, b), mucho más de lo que necesitamos.

Si el valor máximo —o el valor mínimo— es diferente de cero, entonces ese valor se alcanza en un punto interior c, ya que $s(a) = s(b) = 0$. Ahora, s tiene derivada en cada punto de (a, b), de modo que, por el teorema del punto crítico (teorema 3.1B), $s'(c) = 0$. Esto es todo lo que necesitábamos saber. ■

Ilustración del teorema

EJEMPLO 1 Encuentre el número c garantizado por el teorema del valor medio para $f(x) = 2\sqrt{x}$ en $[1, 4]$.

SOLUCIÓN

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

y

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{4 - 2}{3} = \frac{2}{3}$$

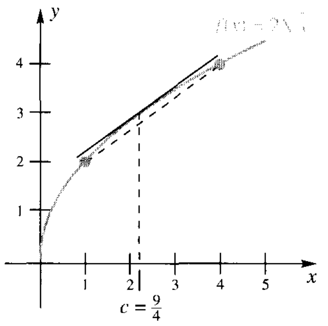


Figura 4

Así, debemos resolver

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{2}{3}$$

La única solución es $c = \frac{9}{4}$ (véase la figura 4). ■

EJEMPLO 2 Sea $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ en $[-1, 2]$. Encuentre todos los números c que satisfagan la conclusión del teorema del valor medio.

SOLUCIÓN La figura 5 muestra una gráfica de la función f. Con base en esta gráfica, parece que existen dos números c_1 y c_2 con la propiedad que se pide. Ahora encontramos

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

y

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{3 - 0}{3} = 1$$

Por lo tanto, debemos resolver

$$3c^2 - 2c - 1 = 1$$

o, de manera equivalente,

$$3c^2 - 2c - 2 = 0$$

Por la fórmula cuadrática, existen dos soluciones $\left(2 \pm \sqrt{4 + 24}\right)/6$, que corresponden a $c_1 \approx -0.55$ y $c_2 \approx 1.22$. Ambos números están en el intervalo $(-1, 2)$. ■

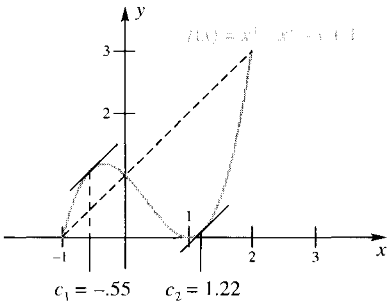


Figura 5

EJEMPLO 3 Sea $f(x) = x^{2/3}$ en $[-8, 27]$. Demuestre que no se cumple la conclusión del teorema del valor medio y explique por qué.

SOLUCIÓN

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}, \qquad x \neq 0$$

y

$$\frac{f(27) - f(-8)}{27 - (-8)} = \frac{9 - 4}{35} = \frac{1}{7}$$

Debemos resolver

$$\frac{2}{3}c^{-1/3} = \frac{1}{7}$$

lo cual da

$$c = \left(\frac{14}{3}\right)^3 \approx 102$$

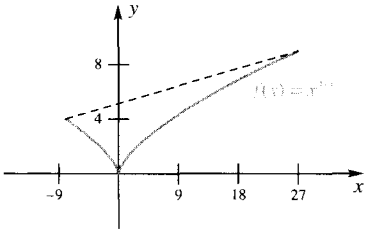


Figura 6

Pero $c = 102$ no pertenece al intervalo $(-8, 27)$ como se requiere. Y como lo sugiere la gráfica de $y = f(x)$ (véase la figura 6), $f'(0)$ no existe, de modo que el problema es que $f(x)$ no es derivable en todo el intervalo $(-8, 27)$. ■

Si la función $s(t)$ representa la posición de un objeto en el instante t, entonces el teorema del valor medio establece que en cualquier intervalo de tiempo existe algún instante para el que la velocidad instantánea es igual a la velocidad promedio.

EJEMPLO 4 Suponga que un objeto tiene una función de posición $s(t) = t^2 - t - 2$. Determine la velocidad promedio sobre el intervalo $[3, 6]$ y encuentre el instante en que la velocidad instantánea es igual a la velocidad promedio.

SOLUCIÓN La velocidad promedio en el intervalo $[3, 6]$ es igual a $(s(6) - s(3))/(6 - 3) = 8$. La velocidad instantánea es $s'(t) = 2t - 1$. Para determinar el punto en donde la velocidad promedio es igual a la velocidad instantánea, igualamos $8 = 2t - 1$, y despejamos t para obtener $t = 9/2$. ■

Uso del teorema En la sección 3.2 prometimos una demostración rigurosa del teorema de monotonía (teorema 3.2A). Éste es el teorema que relaciona el signo de la derivada de una función con el hecho de que la función sea creciente o decreciente.

Demostración del teorema de monotonía Supongamos que f es continua en I y que $f'(x) > 0$ en cada punto x interior de I. Considere cualesquiera dos puntos x_1 y x_2 de I, con $x_1 < x_2$. Por el teorema del valor medio aplicado al intervalo $[x_1, x_2]$, existe un número c en (x_1, x_2) que satisface

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Como $f'(c) > 0$, vemos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$; es decir, $f(x_2) > f(x_1)$. Esto es lo que queremos decir cuando aseguramos que f es creciente en I.

El caso en el que $f'(x) < 0$ en I se maneja de manera análoga. ■

Nuestro siguiente teorema se usará de manera repetida en el capítulo siguiente. En palabras, dice que *dos funciones con la misma derivada difieren en una constante*, posiblemente la constante cero (véase la figura 7).

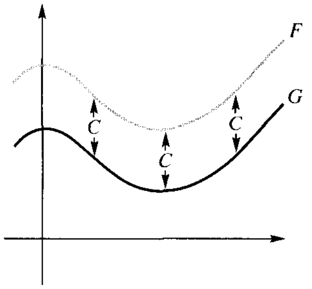


Figura 7

Teorema B

Si $F'(x) = G'(x)$ para toda x en (a, b), entonces existe una constante C, tal que

$$F(x) = G(x) + C$$

para toda x en (a, b).

Geometría y álgebra

Como en la mayoría de los temas de este texto, usted debe intentar ver las cosas desde un punto de vista algebraico y otro geométrico. De manera geométrica, el teorema B dice que si F y G tienen la misma derivada, entonces la gráfica de G es una traslación vertical de la gráfica de F.

Demostración Sea $H(x) = F(x) - G(x)$. Entonces

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$$

para toda x en (a, b). Selecciónese x_1 como algún punto (fijo) en (a, b) y sea x cualquier otro punto allí. La función H satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo cerrado con puntos fronterizos x_1 y x. Así que existe un número c entre x_1 y x, tal que

$$H(x) - H(x_1) = H'(c)(x - x_1)$$

Pero, por hipótesis $H'(c) = 0$. Por lo tanto, $H(x) - H(x_1) = 0$, o de manera equivalente $H(x) = H(x_1)$ para toda x en (a, b). Como $H(x) = F(x) - G(x)$, concluimos que $F(x) - G(x) = H(x_1)$. Ahora sea $C = H(x_1)$, y tenemos la conclusión $F(x) = G(x) + C$. ■

Revisión de conceptos

1. El teorema del valor medio para derivadas dice que si f es _______ en $[a, b]$ y derivable en _______ entonces existe un punto c en (a, b) tal que _______.

2. La función $f(x) = |\text{sen } x|$ satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 1]$, pero no en el intervalo $[-1, 1]$ porque _______.

3. Si dos funciones F y G tienen la misma derivada en el intervalo (a, b), entonces existe una constante C tal que _______.

4. Como $D_x(x^4) = 4x^3$, se sigue que toda función F que satisface $F'(x) = 4x^3$ tiene la forma $F(x) =$ _______.

Conjunto de problemas 3.6

En cada uno de los problemas del 1 al 21 se define una función y se da un intervalo cerrado. Decida si el teorema del valor medio se aplica a la función dada en el intervalo que se da. Si es así, encuentre todos los posibles valores de c; si no, establezca la razón. En cada problema bosqueje la gráfica de la función dada en el intervalo dado.

1. $f(x) = |x|; [1, 2]$ **2.** $g(x) = |x|; [-2, 2]$

3. $f(x) = x^2 + x; [-2, 2]$ **4.** $g(x) = (x + 1)^3; [-1, 1]$

5. $H(s) = s^2 + 3s - 1; [-3, 1]$

6. $F(x) = \dfrac{x^3}{3}; [-2, 2]$

7. $f(z) = \frac{1}{3}(z^3 + z - 4); [-1, 2]$

8. $F(t) = \dfrac{1}{t - 1}; [0, 2]$ **9.** $h(x) = \dfrac{x}{x - 3}; [0, 2]$

10. $f(x) = \dfrac{x - 4}{x - 3}; [0, 4]$ **11.** $h(t) = t^{2/3}; [0, 2]$

12. $h(t) = t^{2/3}; [-2, 2]$ **13.** $g(x) = x^{5/3}; [0, 1]$

14. $g(x) = x^{5/3}; [-1, 1]$ **15.** $S(\theta) = \operatorname{sen} \theta; [-\pi, \pi]$

16. $C(\theta) = \csc \theta; [-\pi, \pi]$ **17.** $T(\theta) = \tan \theta; [0, \pi]$

18. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}; \left[-1, \frac{1}{2}\right]$ **19.** $f(x) = x + \dfrac{1}{x}; [1, 2]$

20. $f(x) = [\![x]\!]; [1, 2]$ **21.** $f(x) = x + |x|; [-2, 1]$

22. **(Teorema de Rolle)** *Si f es continua en [a, b] y derivable en (a, b) y si f(a) = f(b), entonces existe al menos un número c en (a, b), tal que f′(c) = 0.* Demuestre que el Teorema de Rolle, es sólo un caso especial del teorema del valor medio. [Michel Rolle (1652–1719) fue un matemático francés].

23. Para la función graficada en la figura 8 encuentre (de manera aproximada) todos los puntos c que satisfacen la conclusión del teorema del valor medio para el intervalo $[0, 8]$.

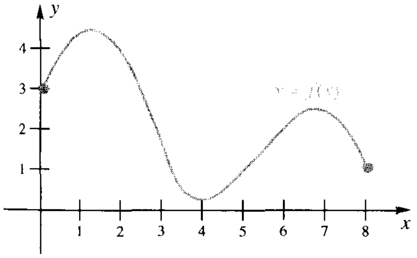


Figura 8

24. Demuestre que si f es la función cuadrática definida por $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$, entonces el número c del teorema del valor medio siempre es el punto medio del intervalo dado $[a, b]$

25. Demuestre que si f es continua en (a, b) y si $f'(x)$ existe y satisface $f'(x) > 0$, excepto en un punto x_0 en (a, b), entonces f es creciente en (a, b). *Sugerencia:* considere f, por separado, en cada uno de los intervalos $(a, x_0]$ y $[x_0, b)$.

26. Utilice el problema 25 para demostrar que cada una de las siguientes funciones son crecientes en $(-\infty, \infty)$.

(a) $f(x) = x^3$ (b) $f(x) = x^5$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$

27. Utilice el teorema del valor medio para demostrar que $s = 1/t$ decrece en cualquier intervalo donde esté definida.

28. Utilice el teorema del valor medio para demostrar que $s = 1/t^2$ decrece en cualquier intervalo a la derecha del origen.

29. Demuestre que si $F'(x) = 0$ para toda x en (a, b), entonces existe una constante C tal que $F(x) = C$ para toda x en (a, b). *Sugerencia:* sea $G(x) = 0$ y aplique el teorema B.

30. Suponga que usted sabe que $\cos(0) = 1, \operatorname{sen}(0) = 0, D_x \cos x = -\operatorname{sen} x$ y $D_x \operatorname{sen} x = \cos x$, pero no sabe nada más acerca de las funciones seno y coseno. Demuestre que $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$. *Sugerencia:* sea $F(x) = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x$ y utilice el problema 29.

31. Demuestre que si $F'(x) = D$ para toda x en (a, b), entonces existe una constante C tal que $F(x) = Dx + C$ para toda x en (a, b). *Sugerencia:* sea $G(x) = Dx$ y aplique el teorema B.

32. Suponga que $F'(x) = 5$ y $F(0) = 4$. Encuentre una fórmula para $F(x)$. *Sugerencia:* véase el problema 31.

33. Demuestre: sea f continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos y si $f'(x) \neq 0$ para toda x en (a, b), entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene una y sólo una solución entre a y b. *Sugerencia:* use los teoremas del valor medio y de Rolle (véase el problema 22).

34. Demuestre que $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 1 = 0$ tiene exactamente una solución en cada uno de los intervalos $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(4, 5)$. *Sugerencia:* aplique el problema 33.

35. Suponga que f tiene derivada en el intervalo I. Demuestre que entre distintos ceros sucesivos de f' sólo puede haber a lo más un cero de f. *Sugerencia:* trate de demostrar por contradicción y utilice el Teorema de Rolle (problema 22).

36. Sea g continua en $[a, b]$ y suponga que $g''(x)$ existe para toda x en (a, b). Demuestre que si existen tres valores de x en $[a, b]$ para los cuales $g(x) = 0$, entonces existe al menos un valor de x en (a, b) tal que $g''(x) = 0$.

37. Sea $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$. Utilizando el problema 36, demuestre que existe a lo más un valor en el intervalo $[0, 4]$ donde $f''(x) = 0$ y dos valores en el mismo intervalo donde $f'(x) = 0$.

38. Demuestre que si $|f'(x)| \leq M$ para toda x en (a, b) y si x_1 y x_2 son cualesquiera dos puntos en (a, b) entonces

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq M|x_2 - x_1|$$

Nota: se dice que una función que satisface la desigualdad anterior satisface una *condición de Lipschitz* con constante M. [Rudolph Lipschitz (1832–1903) fue un matemático alemán].

39. Demuestre que $f(x) = \operatorname{sen} 2x$ satisface una condición de Lipschitz con constante 2 en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Véase el problema 38.

40. Se dice que una función f es **no decreciente** en un intervalo I, si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ para x_1 y x_2 en I. De manera análoga, f es **no creciente** en I, si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ para x_1 y x_2 en I.

(a) Bosqueje la gráfica de una función no decreciente, pero no creciente.

(b) Haga la gráfica de una función no creciente, pero no decreciente.

41. Demuestre que si f es continua en I y si $f'(x)$ existe y satisface $f'(x) \geq 0$ en el interior de I, entonces f es no decreciente en I. De manera análoga, si $f'(x) \leq 0$, entonces f es no creciente en I.

42. Demuestre que $f(x) \geq 0$ y $f'(x) \geq 0$ en I, entonces f^2 es no decreciente en I.

43. Demuestre que si $g'(x) \leq h'(x)$ para toda x en (a, b) entonces

$$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_2) - g(x_1) \leq h(x_2) - h(x_1)$$

para toda x_1 y x_2 en (a, b). *Sugerencia:* aplique el problema 41 con $f(x) = h(x) - g(x)$.

44. Utilice el teorema del valor medio para demostrar que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x}\right) = 0$$

45. Utilice el teorema del valor medio para demostrar que

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|$$

46. Suponga que, en una carrera, el caballo A y el caballo B inician en el mismo punto y terminan empatados. Demuestre que sus velocidades fueron idénticas en algún instante de la carrera.

47. En el problema 46, suponga que los dos caballos cruzaron la meta juntos a la misma velocidad. Demuestre que tuvieron la misma aceleración en algún instante.

48. Utilice el teorema del valor medio para demostrar que la gráfica de una función cóncava hacia arriba, f, siempre está por arriba de su recta tangente; esto es, demuestre que

$$f(x) > f(c) + f'(c)(x - c), \qquad x \neq c$$

49. Demuestre que si $|f(y) - f(x)| \leq M(y - x)^2$ para toda x y y, entonces f es una función constante.

50. Proporcione un ejemplo de una función f que sea continua en $[0, 1]$, derivable en $(0, 1)$ y *no* derivable en $[0, 1]$ y que tenga una recta tangente en cada punto de $[0, 1]$.

51. John recorre 112 millas en 2 horas y asegura que nunca excedió la velocidad de 55 millas por hora. Utilice el teorema del valor medio para refutar la afirmación de John. *Sugerencia*: sea $f(t)$ la distancia recorrida en el tiempo t.

52. Un automóvil está parado en una caseta de peaje. Dieciocho minutos después, en un punto a 20 millas más adelante, cronometra 60 millas por hora. Bosqueje una gráfica posible de v contra t. Trace una posible gráfica de la distancia recorrida s contra t. Utilice el teorema del valor medio para demostrar que el automóvil excedió la velocidad límite de 60 millas por hora en algún momento luego que dejó la caseta de peaje, pero antes de que cronometrara 60 millas por hora.

53. Un automóvil está parado en una caseta de peaje. Veinte minutos después, en un punto a 20 millas de la caseta, dicho vehículo cronometró 60 millas por hora. Explique por qué el automóvil debe haber excedido 60 millas por hora en algún momento después de dejar la caseta, pero antes de que cronometrara 60 millas por hora.

54. Demuestre que si la función de posición de un objeto está dada por $s(t) = at^2 + bt + c$, entonces la velocidad promedio en el intervalo $[A, B]$ es igual a la velocidad instantánea en el punto medio de $[A, B]$.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** continua; (a, b); $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ **2.** $f'(0)$ no existe **3.** $F(x) = G(x) + C$ **4.** $x^4 + C$

3.7 Solución numérica de ecuaciones

En matemáticas y ciencias, con frecuencia debemos hallar las raíces (o soluciones) de una ecuación $f(x) = 0$. Si $f(x)$ es un polinomio lineal o cuadrático, existen fórmulas bien conocidas para escribir las soluciones exactas. Pero para otras ecuaciones algebraicas y ciertamente para ecuaciones que incluyen funciones trascendentes, es raro contar con fórmulas para las soluciones exactas. En tales casos, ¿qué puede hacerse?

Existe un método general para resolver problemas, conocido por todas las personas ingeniosas. Dada una taza de té, agregamos azúcar un poco más cada vez hasta que sabe bien. Dado un tapón demasiado grande para un agujero, lo rebajamos hasta ajustarlo. Cambiamos la solución un poco cada vez, a fin de mejorar la precisión hasta que estamos satisfechos. A esto, los matemáticos le llaman *método de aproximaciones sucesivas* o *método de iteraciones*.

En esta sección presentamos tres de tales métodos para resolver ecuaciones: el de bisección, el de Newton y el de punto fijo. Los tres están diseñados para aproximar raíces reales de $f(x) = 0$ y requiere de muchos cálculos. Necesitará tener a la mano su calculadora.

El método de bisección En el ejemplo 7 de la sección 1.6 vimos cómo utilizar el teorema del valor intermedio para aproximar una solución de $f(x) = 0$, por medio de bisecar de manera sucesiva un intervalo que, se sabe, tiene una solución. Este método de bisección tiene dos grandes virtudes: simplicidad y confiabilidad. También tiene un vicio importante, la gran cantidad de pasos necesarios para alcanzar la precisión deseada (también conocido como lentitud de convergencia).

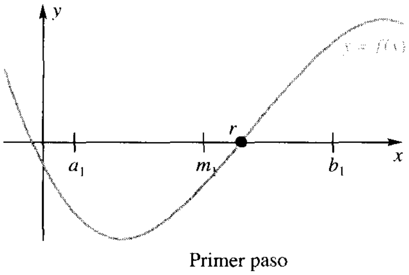


Figura 1

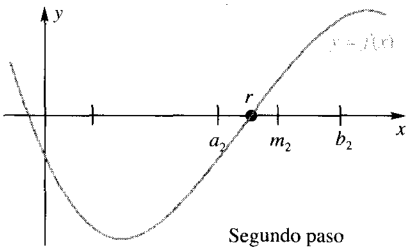


Figura 2

Ponga en marcha el proceso y bosqueje la gráfica de f, que se supone es una función continua (véase la figura 1). Una raíz real de $f(x) = 0$ es un punto (técnicamente, la abscisa de un punto) en donde la gráfica cruza el eje x. Como primer paso para localizar este punto, ubique dos puntos, $a_1 < b_1$, en los que esté seguro de que f tiene signos opuestos; si f tiene signos opuestos en a_1 y b_1, entonces el producto $f(a_1) \cdot f(b_1)$ será negativo. (Trate de elegir a_1 y b_1 en lados opuestos de su mejor estimación de r). El teorema del valor intermedio garantiza la existencia de una raíz entre a_1 y b_1. Ahora evalúe f en el punto medio $m_1 = (a_1 + b_1)/2$ de $[a_1, b_1]$. El número m_1 es nuestra primera aproximación para r.

Entonces $f(m_1) = 0$, en cuyo caso hemos terminado, o $f(m_1)$ difiere en signo de $f(a_1)$ o $f(b_1)$. Denote uno de los subintervalos $[a_1, m_1]$ o $[m_1, b_1]$ en el que cambia el signo por medio del símbolo $[a_2, b_2]$, y evalúe f en su punto medio $m_2 = (a_2 + b_2)/2$ (véase la figura 2). El número m_2 es nuestra segunda aproximación a r.

Repita el proceso y determine de este modo una sucesión de aproximaciones m_1, $m_2, m_3, \ldots$, y subintervalos $[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3], \ldots$, de modo que cada subintervalo contenga a la raíz r y cada uno tenga la mitad de la longitud de su predecesor. Deténgase cuando r quede determinada en la precisión deseada; esto es, cuando $(b_n - a_n)/2$ sea menor que el error permitido, que denotaremos por E.

Algoritmo **Método de bisección**

Sea $f(x)$ una función continua, y sean a_1, b_1 números que satisfacen $a_1 < b_1$ y $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$. Suponga que E denota la cota deseada para el error $|r - m_n|$. Repita los pasos del 1 al 5 para $n = 1, 2, \ldots$ hasta que $h_n < E$:

1. Calcule $m_n = (a_n + b_n)/2$.
2. Calcule $f(m_n)$ y si $f(m_n) = 0$, entonces DETÉNGASE.
3. Calcule $h_n = (b_n - a_n)/2$
4. Si $f(a_n) \cdot f(m_n) < 0$, entonces haga $a_{n+1} = a_n$ y $b_{n+1} = m_n$.
5. Si $f(a_n) \cdot f(m_n) > 0$, entonces haga $a_{n+1} = m_n$ y $b_{n+1} = b_n$.

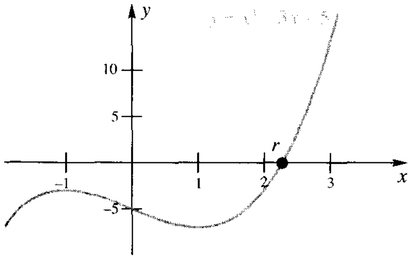


Figura 3

EJEMPLO 1 Determine la raíz real de $f(x) = x^3 - 3x - 5 = 0$ con una precisión de 0.0000001.

SOLUCIÓN Primero bosquejamos la gráfica de $y = x^3 - 3x - 5$ (figura 3) y, observando que cruza el eje x entre 2 y 3, comenzamos con $a_1 = 2$ y $b_1 = 3$.

Paso 1: $m_1 = (a_1 + b_1)/2 = (2 + 3)/2 = 2.5$

Paso 2: $f(m_1) = f(2.5) = 2.5^3 - 3 \cdot 2.5 - 5 = 3.125$

Paso 3: $h_1 = (b_1 - a_1)/2 = (3 - 2)/2 = 0.5$

Paso 4: Como

$$f(a_1) \cdot f(m_1) = f(2)f(2.5) = (-3)(3.125) = -9.375 < 0$$

hacemos $a_2 = a_1 = 2$ y $b_2 = m_1 = 2.5$.

Paso 5: La condición $f(a_n) \cdot f(m_n) > 0$ es falsa.

Ahora incrementamos n de modo que tenga el valor 2 y repetimos estos pasos. Podemos continuar este proceso para obtener las entradas de la siguiente tabla:

n	h_n	m_n	$f(m_n)$
1	0.5	2.5	3.125
2	0.25	2.25	−0.359
3	0.125	2.375	1.271
4	0.0625	2.3125	0.429
5	0.03125	2.28125	0.02811
6	0.015625	2.265625	−0.16729
7	0.0078125	2.2734375	−0.07001
8	0.0039063	2.2773438	−0.02106
9	0.0019531	2.2792969	0.00350
10	0.0009766	2.2783203	−0.00878
11	0.0004883	2.2788086	−0.00264
12	0.0002441	2.2790528	0.00043
13	0.0001221	2.2789307	−0.00111
14	0.0000610	2.2789918	−0.00034
15	0.0000305	2.2790224	0.00005
16	0.0000153	2.2790071	−0.00015
17	0.0000076	2.2790148	−0.00005
18	0.0000038	2.2790187	−0.000001
19	0.0000019	2.2790207	0.000024
20	0.0000010	2.2790197	0.000011
21	0.0000005	2.2790192	0.000005
22	0.0000002	2.2790189	0.0000014
23	0.0000001	2.2790187	−0.0000011
24	0.0000001	2.2790188	0.0000001

Concluimos que $r = 2.2790188$ con un error de 0.0000001 cuando mucho. ■

El ejemplo 1 ilustra la desventaja del método de bisección. Las aproximaciones $m_1, m_2, m_3, \ldots$, convergen muy lentamente a la raíz r. Pero convergen; esto es, $\lim_{n\to\infty} m_n = r$. El método funciona, y tenemos en el paso n una buena cota para el error $E_n = r - m_n$, a saber, $|E_n| \le h_n$.

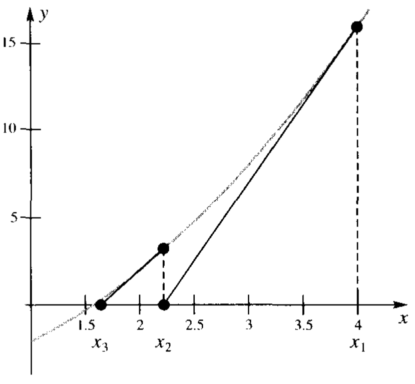


Figura 4

Método de Newton Sigamos considerando el problema de resolver la ecuación $f(x) = 0$ para una raíz r. Suponga que f es derivable, de modo que la gráfica de $y = f(x)$ tenga una recta tangente en cada punto. Si podemos encontrar una primera aproximación x_1 para r, ya sea a través de la gráfica o por cualquier otro medio (véase la figura 4), entonces una mejor aproximación x_2 tendría que estar en la intersección de la tangente en $(x_1, f(x_1))$ con el eje x. Entonces, utilizando x_2 como una aproximación, podemos determinar una mejor aproximación x_3, y así sucesivamente.

El proceso puede mecanizarse de modo que sea fácil hacerlo en una calculadora. La ecuación de la recta tangente en $(x_1, f(x_1))$ es

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

y x_2, su intercepción con el eje x, se encuentra haciendo $y = 0$ y despejando a x. El resultado es

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Más en lo general, tenemos el algoritmo siguiente, también denominado *fórmula recursiva* o *esquema de iteración*.

Algoritmo Método de Newton

Sea $f(x)$ una función derivable y sea x_1 una aproximación inicial a la raíz r de $f(x) = 0$. Sea E una cota para el error $|r - x_n|$.

Repita el paso siguiente para $n = 1, 2, \ldots$, hasta que $|x_{n+1} - x_n| < E$:

1. $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

EJEMPLO 2 Utilice el método de Newton para determinar la raíz real r de $f(x) = x^3 - 3x - 5 = 0$ con siete decimales de precisión.

SOLUCIÓN Ésta es la misma ecuación que se consideró en el ejemplo 1. Utilicemos $x_1 = 2.5$ como la primera aproximación a r, como lo hicimos antes. Como $f(x) = x^3 - 3x - 5$ y $f'(x) = 3x^2 - 3$, el algoritmo es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n - 5}{3x_n^2 - 3} = \frac{2x_n^3 + 5}{3x_n^2 - 3}$$

Obtenemos la siguiente tabla.

n	x_n
1	2.5
2	2.30
3	2.2793
4	2.2790188
5	2.2790188

Después de sólo cuatro pasos obtenemos una repetición de los primeros 8 dígitos. Sentimos confianza en reportar que $r \approx 2.2790188$, con quizá un poco de duda acerca del último dígito. ■

Algoritmos

Los algoritmos han formado parte de las matemáticas desde que las personas aprendieron a hacer las divisiones; pero son las ciencias de la computación las que han dado al pensamiento algorítmico su popularidad actual. ¿Qué es un algoritmo? Donald Knuth, decano de los científicos de la computación, responde:

"Un algoritmo es una secuencia de reglas definidas con precisión, que indican la forma de producir una información de salida específica a partir de una información de entrada dada, en un número finito de pasos".

¿Y qué son las ciencias de la computación? De acuerdo con Knuth:

"Son el estudio de los algoritmos".

EJEMPLO 3 Utilice el método de Newton para determinar la raíz real positiva r de $f(x) = 2 - x + \operatorname{sen} x = 0$.

SOLUCIÓN La gráfica de $y = 2 - x + \operatorname{sen} x$ se muestra en la figura 5. Utilizaremos el valor inicial $x_1 = 2$. Como $f'(x) = -1 + \cos x$, la iteración se convierte en

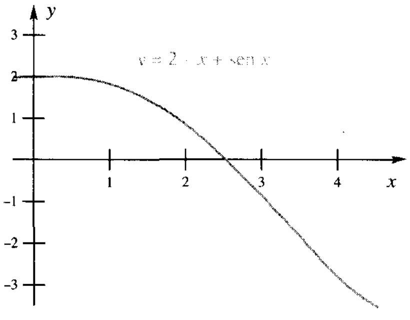


Figura 5

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2 - x_n + \operatorname{sen} x_n}{-1 + \cos x_n}$$

que conduce a la siguiente tabla:

n	x_n
1	2.0
2	2.6420926
3	2.5552335
4	2.5541961
5	2.5541960
6	2.5541960

Al cabo de sólo cinco pasos, obtenemos una repetición de los siete decimales. Concluimos que $r \approx 2.5541960$. ■

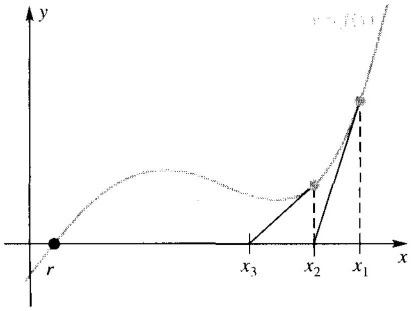


Figura 6

El método de Newton crea una *sucesión* aproximaciones sucesivas a la raíz. (En la sección 1.5 mencionamos brevemente las sucesiones). Con frecuencia, el método de Newton produce una sucesión $\{x_n]$ que converge a la raíz de $f(x) = 0$, esto es $\lim_{n\to\infty} x_n = r$. Sin embargo, éste no siempre es el caso. La figura 6 ilustra lo que puede ir mal (también véase el problema 22). Para la función de la figura 6, la dificultad es que x_1 no está lo suficientemente cerca de r como para iniciar un proceso convergente. Otras dificultades surgen si $f'(x)$ es cero o no está definida en o cerca de r. Cuando el método de Newton falla en producir aproximaciones que convergen a la solución, entonces usted puede reintentar dicho método con un punto inicial diferente o utilizar otro, como el método de bisección.

El algoritmo de punto fijo El algoritmo de punto fijo es sencillo y directo, pero con frecuencia funciona.

Suponga que una ecuación puede escribirse en la forma $x = g(x)$. Resolver esta ecuación es determinar un número r que no es alterado por la función g. A tal número lo denominamos un **punto fijo** de g. Para determinar este número, proponemos el siguiente algoritmo. Haga una primera estimación x_1. Luego haga $x_2 = g(x_1)$, $x_3 = g(x_2)$, y así sucesivamente. Si tenemos suerte, x_n convergerá a la raíz r cuando $n \to \infty$.

Algoritmo **Algoritmo de punto fijo**

Sea $g(x)$ una función continua, y sea x_1 una aproximación inicial a la raíz r de $x = g(x)$. Denotemos con E una cota para el error $|r - x_n|$.

Repita el siguiente paso para $n = 1, 2, \ldots$, hasta que $|x_{n+1} - x_n| < E$.

1. $x_{n+1} = g(x_n)$

EJEMPLO 4 Utilice el algoritmo de punto fijo para aproximar la solución de $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x+1} = 0$.

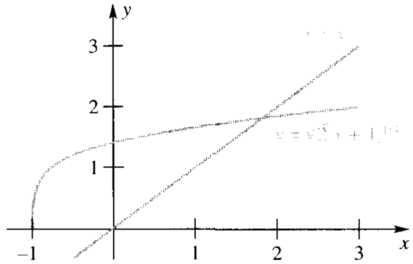


Figura 7

SOLUCIÓN Escribimos $x^2 = 2\sqrt{x+1}$, que conduce a $x = \pm\left(2\sqrt{x+1}\right)^{1/2}$. Como sabemos que la solución es positiva, tomamos la raíz cuadrada positiva y escribimos la iteración como

$$x_{n+1} = \left(2\sqrt{x_n + 1}\right)^{1/2} = \sqrt{2}\,(x_n + 1)^{1/4}$$

La figura 7 sugiere que el punto de intersección de las curvas $y = x$ y $y = \sqrt{2}\left(x + 1\right)^{1/4}$ ocurre entre 1 y 2, quizá más cerca de 2, por lo que tomamos $x_1 = 2$ como nuestro punto de inicio. Esto lleva a la siguiente tabla. La solución es aproximadamente 1.8350867.

n	x_n	n	x_n
1	2.0	7	1.8350896
2	1.8612097	8	1.8350871
3	1.8392994	9	1.8350868
4	1.8357680	10	1.8350867
5	1.8351969	11	1.8350867
6	1.8351045	12	1.8350867

■

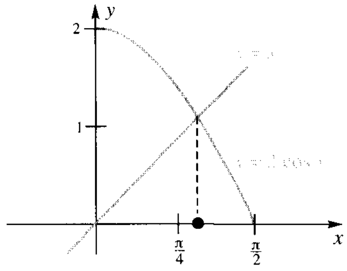


Figura 8

EJEMPLO 5 Resuelva $x = 2\cos x$ por medio del algoritmo de punto fijo.

SOLUCIÓN Primero observe que al resolver esta ecuación es equivalente a resolver el par de ecuaciones $y = x$ y $y = 2\cos x$. Así, para obtener nuestro valor inicial graficamos estas dos ecuaciones (véase la figura 8) y observe que las dos curvas se cortan en aproximadamente $x = 1$. Al tomar $x_1 = 1$ y aplicar el algoritmo $x_{n+1} = 2\cos x_n$, obtenemos el resultado en la siguiente tabla.

n	x_n	n	x_n
1	1	6	1.4394614
2	1.0806046	7	0.2619155
3	0.9415902	8	1.9317916
4	1.1770062	9	−0.7064109
5	0.7673820	10	1.5213931

Es claro que el proceso es inestable, aunque nuestra estimación inicial está muy cerca de la raíz real.

Intentemos con otro enfoque. Reescribimos la ecuación $x = 2\cos x$ como $x = (x + 2\cos x)/2$ y utilizamos el algoritmo

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 2\cos x_n}{2}$$

Este proceso produce una sucesión convergente que se muestra en la siguiente tabla. (La oscilación en el último dígito se debe probablemente a errores de redondeo).

n	x_n	n	x_n	n	x_n
1	1	7	1.0298054	13	1.0298665
2	1.0403023	8	1.0298883	14	1.0298666
3	1.0261107	9	1.0298588	15	1.0298665
4	1.0312046	10	1.0298693	16	1.0298666
5	1.0293881	11	1.0298655		
6	1.0300374	12	1.0298668		

■

Ahora planteamos una pregunta obvia. ¿Por qué el segundo algoritmo condujo a una sucesión convergente, mientras que el primero no? Que funcione o no el algoritmo de punto fijo depende de dos factores. Uno es la formulación de la ecuación $x = g(x)$. El ejemplo 5 demuestra que una ecuación como $x = 2\cos x$ puede reescribirse en una forma que da una sucesión diferente de aproximaciones. En el ejemplo 5, la reformulación fue $x = (x + 2\cos x)/2$. En general, puede haber muchas formas de escribir la ecuación y el truco es encontrar una que funcione. Otro factor que afecta si el algoritmo de punto fijo converge es la cercanía del punto inicial x_1 a la raíz r. Como sugerimos para el método de Newton, si falla el algoritmo de punto fijo con un punto inicial, puede intentar con otro.

Revisión de conceptos

1. Las virtudes del método de bisección son su simplicidad y confiabilidad; su vicio es su _______.

2. Si f es continua en $[a, b]$, y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces hay una _______ de $f(x) = 0$ entre a y b. Esto se deduce del teorema _______.

3. El método de bisección, el método de Newton y el algoritmo de punto fijo son ejemplos de _______; esto es, proporcionan una sucesión finita de pasos que, si se siguen, producirán una raíz de una ecuación con una precisión deseada.

4. Un punto x que satisface $g(x) = x$ se denomina un _______ de g.

Conjunto de problemas 3.7

🄲 *En los problemas del 1 al 4 utilice el método de bisección para aproximar la raíz real de la ecuación dada en el intervalo que se indica. Cada respuesta debe ser precisa a dos decimales.*

1. $x^3 + 2x - 6 = 0; [1, 2]$ **2.** $x^4 + 5x^3 + 1 = 0; [-1, 0]$

3. $2\cos x - \operatorname{sen} x = 0; [1, 2]$

4. $x - 2 + 2\cos x = 0; [1, 2]$

🄲 *En los problemas del 5 al 14 utilice el método de Newton para aproximar la raíz indicada de la ecuación que se da, con una precisión de cinco decimales. Comience por bosquejar una gráfica.*

5. La mayor raíz de $x^3 + 6x^2 + 9x + 1 = 0$

6. La raíz real de $7x^3 + x - 5 = 0$

7. La raíz más grande de $x - 2 + 2\cos x = 0$ (véase el problema 4)

8. La raíz positiva más pequeña de $2\cos x - \operatorname{sen} x = 0$ (véase el problema 3)

9. La raíz de $\cos x = 2x$

10. La raíz de $2x - \operatorname{sen} x = 1$

11. Todas las raíces reales de $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 8 = 0$

12. Todas las raíces reales de $x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 24x - 8 = 0$

13. La raíz positiva de $2x^2 - \operatorname{sen} x = 0$

14. La raíz positiva más pequeña de $2\cot x = x$

C **15.** Utilice el método de Newton para calcular $\sqrt[3]{6}$ con cinco decimales de precisión. *Sugerencia*: resuelva $x^3 - 6 = 0$

C **16.** Utilice el método de Newton para calcular $\sqrt[4]{47}$ con cinco decimales de precisión.

GC *En los problemas del 17 al 20 aproxime los valores de x que proporcionan valores máximo y mínimo de la función en los intervalos que se indican.*

17. $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x; [-1, 1]$

18. $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^4 + 1}; [-4, 4]$

19. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}; [\pi, 3\pi]$

20. $f(x) = x^2 \operatorname{sen}\dfrac{x}{2}; [0, 4\pi]$

C **21.** La ecuación de Kepler $x = m + E \operatorname{sen} x$ es importante en astronomía. Utilice el algoritmo de punto fijo para resolver esta ecuación para x cuando $m = 0.8$ y $E = 0.2$.

22. Bosqueje la gráfica de $y = x^{1/3}$. Es obvio que su única intercepción con el eje x es cero. Convénzase de que el método de Newton no converge. Explique por qué falla.

23. En las compras a plazos, a uno le gustaría encontrar la tasa real de interés (tasa efectiva), pero por desgracia esto incluye resolver una ecuación complicada. Si hoy uno compra un artículo cuyo valor es $\$P$ y acuerda pagarlo con pagos de $\$R$ al final de cada mes durante k meses, entonces

$$P = \frac{R}{i}\left[1 - \frac{1}{(1 + i)^k}\right]$$

donde i es la tasa de interés mensual. Tom compró un automóvil usado por \$2000 y acordó pagarlo con abonos de \$100 al final de cada uno de los siguientes 24 meses.

(a) Demuestre que i satisface la ecuación

$$20i(1 + i)^{24} - (1 + i)^{24} + 1 = 0$$

(b) Demuestre que el método de Newton para esta ecuación se reduce a

$$i_{n+1} = i_n - \left[\frac{20i_n^2 + 19i_n - 1 + (1 + i_n)^{-23}}{500i_n - 4}\right]$$

C (c) Determine i, con una precisión de cinco decimales, iniciando con $i = 0.012$ y luego proporcione la tasa anual como un porcentaje ($r = 1200i$).

24. Al aplicar el método de Newton para resolver $f(x) = 0$, por lo común, uno puede decir si la sucesión converge simplemente al observar los números $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Pero, incluso cuando converge, digamos en $\bar{x}$, ¿podemos estar seguros de que $\bar{x}$ es una solución? Demuestre que la respuesta es sí, siempre que f y f' sean continuas en $\bar{x}$ y $f'(\bar{x}) \neq 0$.

C *En los problemas del 25 al 28 utilice el algoritmo de punto fijo con x_1, como se indica, para resolver las ecuaciones con cinco decimales de precisión.*

25. $x = \dfrac{3}{2}\cos x; x_1 = 1$

26. $x = 2 - \operatorname{sen} x; x_1 = 2$

27. $x = \sqrt{2.7 + x}; x_1 = 1$

28. $x = \sqrt{3.2 + x}; x_1 = 47$

GC **29.** Considere la ecuación $x = 2(x - x^2) = g(x)$.

(a) Bosqueje la gráfica de $y = x$ y $y = g(x)$; utilice el mismo sistema de coordenadas y con ello ubique de manera aproximada la raíz positiva de $x = g(x)$.

(b) Intente resolver la ecuación por medio del algoritmo de punto fijo iniciando con $x_1 = 0.7$.

(c) Resuelva la ecuación de forma algebraica.

GC **30.** Siga las instrucciones del problema 29 para $x = 5(x - x^2) = g(x)$.

C **31.** Considere $x = \sqrt{1 + x}$.

(a) Aplique el algoritmo de punto fijo iniciando con $x_1 = 0$ para determinar x_2, x_3, x_4 y x_5.

(b) Resuelva de forma algebraica para x en $x = \sqrt{1 + x}$.

(c) Evalúe $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}$.

C **32.** Considere $x = \sqrt{5 + x}$.

(a) Aplique el algoritmo de punto fijo iniciando con $x_1 = 0$ para determinar x_2, x_3, x_4 y x_5.

(b) De forma algebraica resuelva para x en $x = \sqrt{5 + x}$.

(c) Evalúe $\sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5 + \cdots}}}$.

C **33.** Considere $x = 1 + \dfrac{1}{x}$.

(a) Aplique el algoritmo de punto fijo iniciando con $x_1 = 1$ para determinar x_2, x_3, x_4 y x_5.

(b) Resuelva de forma algebraica para x en $x = 1 + \dfrac{1}{x}$.

(c) Evalúe la expresión siguiente. (Una expresión como ésta se denomina **fracción continua**).

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$$

EXPL **34.** Considere la ecuación $x = x - f(x)/f'(x)$ y suponga que $f'(x) \neq 0$ en un intervalo $[a, b]$.

(a) Demuestre que si r está en $[a, b]$, entonces r es una raíz de la ecuación $x = x - f(x)/f'(x)$, si y sólo si $f(r) = 0$.

(b) Demuestre que el método de Newton es un caso especial del algoritmo de punto fijo, en el que $g'(r) = 0$.

35. Experimente con el algoritmo

$$x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$$

utilizando diferentes valores de a.

(a) Establezca una conjetura acerca de lo que calcula este algoritmo.

(b) Pruebe su conjetura.

$\boxed{\text{C}}$ *Después de derivar y hacer el resultado igual a cero, muchos problemas prácticos de máximos y mínimos conducen a una ecuación que no puede resolverse de manera exacta. Para los problemas siguientes, utilice un método numérico para aproximar la solución al problema.*

36. Un rectángulo tiene dos vértices en el eje x y los otros dos en la curva $y = \cos x$, con $-\pi/2 < x < \pi/2$. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de este tipo con área máxima? (Véase la figura 24 de la sección 3.4).

37. Dos pasillos convergen en ángulo recto, como se muestra en la figura 6 de la sección 3.4, excepto que los anchos de los pasillos son de 8.6 y 6.2 pies. ¿Cuál es la longitud de la varilla delgada más larga que puede transportarse alrededor de la esquina?

38. Un pasillo de 8 pies de ancho da vuelta como se muestra en la figura 9. ¿Cuál es la longitud de la varilla delgada más larga que puede transportarse alrededor de la esquina?

39. Un objeto lanzado desde el borde de un acantilado de 42 pies sigue una trayectoria dada por $y = -\dfrac{2x^2}{25} + x + 42$. (Véase la figura 10.) Un observador está parado a 3 pies de la base del acantilado.

(a) Determine la posición del objeto cuando está más cerca del observador.

(b) Determine la posición del objeto cuando está más alejado del observador.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** lentitud de convergencia **2.** raíz: del valor intermedio **3.** algoritmos **4.** punto fijo

---

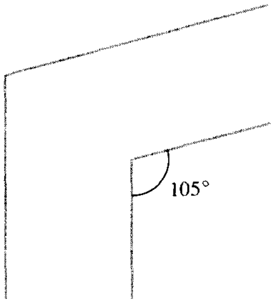


Figura 9

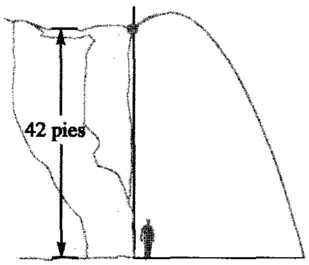


Figura 10

3.8 Antiderivadas

La mayoría de las operaciones matemáticas con que trabajamos vienen en pares de inversas: suma y resta, multiplicación y división, y exponenciación y extracción de raíces. En cada caso, la segunda operación deshace la primera y viceversa. Una razón para nuestro interés en las operaciones inversas es su utilidad en la resolución de ecuaciones. Por ejemplo, la resolución de $x^3 = 8$ implica el uso de extraer raíces. En este capítulo y en el anterior hemos estudiado derivación. Si queremos resolver ecuaciones que incluyan derivadas necesitaremos su inversa, denominada *antiderivación* o *integración*.

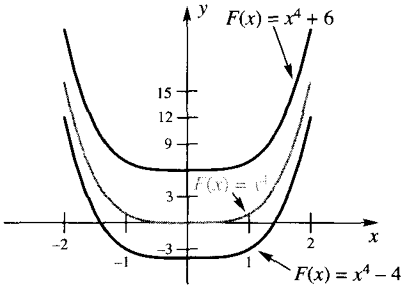
Definición

Llamamos a F una **antiderivada** de f en el intervalo I si $D_xF(x) = f(x)$ en I; esto es, si $F'(x) = f(x)$ para toda x en I.

En nuestra definición utilizamos *una* antiderivada, en lugar de *la* antiderivada. Pronto verá por qué.

EJEMPLO 1 Encuentre una antiderivada de la función $f(x) = 4x^3$ en $(-\infty, \infty)$.

SOLUCIÓN Buscamos una función F que satisfaga $F'(x) = 4x^3$ para toda x real. De nuestra experiencia con derivación, sabemos que $F(x) = x^4$ es una de tales funciones. ■



En cada caso
$F'(x) = 4x^3$

Figura 1

Un momento de reflexión sugerirá otras soluciones para el ejemplo 1. La función $F(x) = x^4 + 6$ también satisface $F'(x) = 4x^3$; también es una antiderivada de $f(x) = 4x^3$. De hecho, $F(x) = x^4 + C$, donde C es cualquier constante, es una antiderivada de $4x^3$ en $(-\infty, \infty)$ (véase la figura 1).

Ahora planteamos una pregunta importante. ¿Toda derivada de $f(x) = 4x^3$ es de la forma $F(x) = x^4 + C$? La respuesta es sí. Esto se deduce del teorema 3.6B, el cual establece que si dos funciones tienen la misma derivada, deben diferir en una constante.

Ésta es nuestra conclusión: si una función f tiene una antiderivada, tendrá una familia de ellas, y cada miembro de esta familia puede obtenerse de uno de ellos mediante la suma de una constante adecuada. A esta familia de funciones le llamamos la **antiderivada general** de f. Después de acostumbrarnos a esta noción, con frecuencia omitiremos el adjetivo *general*.

EJEMPLO 2 Encuentre la antiderivada general de $f(x) = x^2$ en $(-\infty, \infty)$.

SOLUCIÓN La función $F(x) = x^3$ no funcionará porque su derivada es $3x^2$. Pero esto sugiere $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, la cual satisface $F'(x) = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 = x^2$. Sin embargo, la antiderivada general es $\frac{1}{3}x^3 + C$. ■

Notación para las antiderivadas Como utilizamos el símbolo D_x para la operación de tomar la derivada, sería natural utilizar A_x para la operación de encontrar la antiderivada. Así,

$$A_x(x^2) = \tfrac{1}{3}x^3 + C$$

Ésta es la notación empleada por varios autores y, de hecho, fue usada en ediciones anteriores de este texto. No obstante, la notación original de Leibniz continúa gozando de una popularidad aplastante y, por lo tanto, decidimos seguirla. En lugar de A_x, Leibniz utilizó el símbolo $\int \ldots dx$. Él escribió

$$\int x^2\,dx = \tfrac{1}{3}x^3 + C$$

y

$$\int 4x^3\,dx = x^4 + C$$

Leibniz eligió utilizar la s alargada, $\int$, y la dx por razones que no serán evidentes sino hasta el capítulo siguiente. Por el momento, basta con considerar a $\int \ldots dx$ como indicación de la antiderivada con respecto a x, al igual que D_x indica la derivada con respecto a x. Observe que

$$D_x \int f(x)\,dx = f(x) \quad \text{y} \quad \int D_x f(x)\,dx = f(x) + C$$

Teorema A Regla para la potencia

Si r es cualquier número racional, excepto -1, entonces

$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$$

Demostración La derivada del lado derecho es

$$D_x\left[\frac{x^{r+1}}{r+1} + C\right] = \frac{1}{r+1}(r+1)x^r = x^r \qquad ■$$

Demostración de reglas para antiderivadas

Para establecer cualquier resultado de la forma

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

todo lo que tenemos que hacer es demostrar que

$$D_x[F(x) + C] = f(x)$$

Hacemos dos comentarios con relación al teorema A. Primero, el teorema incluye al caso $r = 0$; es decir,

$$\boxed{\int 1\,dx = x + C}$$

Segundo, puesto que no se especificó ningún intervalo, la conclusión se entiende que será válida sólo en intervalos en los que x^r esté definida. En particular, debemos excluir cualquier intervalo que contenga al origen si $r < 0$.

Siguiendo a Leibniz, a veces usaremos el término **integral indefinida** en lugar de antiderivada. Antiderivar también es **integrar.** En el símbolo $\int f(x)\,dx$, $\int$ se denomina **signo de integral** y $f(x)$ se llama **integrando**. Así, integramos el integrando y de este modo evaluamos la integral indefinida. Tal vez Leibniz utilizó el adjetivo *indefinida* para sugerir que la integral indefinida siempre incluye una constante arbitraria.

EJEMPLO 3 Encuentre la antiderivada general de $f(x) = x^{4/3}$.

SOLUCIÓN

$$\int x^{4/3}\,dx = \frac{x^{7/3}}{\frac{7}{3}} + C = \tfrac{3}{7}x^{7/3} + C \qquad \blacksquare$$

Observe que *para integrar una potencia de x aumentamos el exponente en 1 y dividimos entre el nuevo exponente.*

Las fórmulas de antiderivadas para las funciones seno y coseno se deducen directamente de la derivada.

Teorema B

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \quad \text{y} \quad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

Demostración Simplemente observe que $D_x(-\cos x + C) = \operatorname{sen} x$ y $D_x(\operatorname{sen} x + C) = \cos x$. ■

La integral indefinida es lineal

Recuerde del capítulo 2 que D_x es un operador lineal. Esto significa dos cosas.

1. $D_x[kf(x)] = kD_xf(x)$
2. $D_x[f(x) + g(x)] = D_xf(x) + D_xg(x)$

De estas dos propiedades se deduce una tercera, de manera automática.

3. $D_x[f(x) - g(x)] = D_xf(x) - D_xg(x)$

Resulta que $\int \ldots dx$ también tiene estas propiedades de un operador lineal.

Teorema C **La integral indefinida es un operador lineal**

Suponga que f y g tienen antiderivadas (integrales indefinidas) y sea k una constante. Entonces:

(i) $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx;$

(ii) $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx;$

(iii) $\int [f(x) - g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx.$

Demostración Para demostrar (i) y (ii) basta con derivar el lado derecho y observar que obtenemos el integrando del lado izquierdo.

$$D_x\left[k\int f(x)\,dx\right] = kD_x\int f(x)\,dx = kf(x)$$

$$\begin{aligned} D_x\left[\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right] &= D_x\int f(x)\,dx + D_x\int g(x)\,dx \\ &= f(x) + g(x) \end{aligned}$$

La propiedad (iii) se deduce de (i) y (ii). ■

EJEMPLO 4 Mediante la linealidad de $\int$, evalúe

(a) $\int (3x^2 + 4x)\,dx$ (b) $\int (u^{3/2} - 3u + 14)\,du$ (c) $\int \left(1/t^2 + \sqrt{t}\right) dt$

SOLUCIÓN

(a)
$$\begin{aligned}\int (3x^2 + 4x)\,dx &= \int 3x^2\,dx + \int 4x\,dx \\ &= 3\int x^2\,dx + 4\int x\,dx \\ &= 3\left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) + 4\left(\frac{x^2}{2} + C_2\right) \\ &= x^3 + 2x^2 + (3C_1 + 4C_2) \\ &= x^3 + 2x^2 + C\end{aligned}$$

Aparecieron dos constantes arbitrarias C_1 y C_2, pero se combinaron en una constante, C, una práctica que seguiremos de manera consistente.

(b) Observe el uso de la variable u en lugar de x. Esto está bien mientras que el correspondiente símbolo de la diferencial sea *du;* entonces, tenemos un cambio completo en la notación

$$\begin{aligned}\int (u^{3/2} - 3u + 14)\,du &= \int u^{3/2}\,du - 3\int u\,du + 14\int 1\,du \\ &= \tfrac{2}{5}u^{5/2} - \tfrac{3}{2}u^2 + 14u + C\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\int \left(\frac{1}{t^2} + \sqrt{t}\right) dt &= \int (t^{-2} + t^{1/2})\,dt = \int t^{-2}\,dt + \int t^{1/2}\,dt \\ &= \frac{t^{-1}}{-1} + \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{t} + \frac{2}{3}t^{3/2} + C\end{aligned}$$ ■

Regla generalizada de la potencia Recuérdese la regla de la cadena como se aplicó a una potencia de una función. Si $u = g(x)$ es una función derivable y r es un número racional ($r \neq -1$), entonces

$$D_x\left[\frac{u^{r+1}}{r+1}\right] = u^r \cdot D_x u$$

o, en notación de funciones,

$$D_x\left(\frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1}\right) = [g(x)]^r \cdot g'(x)$$

De esto obtenemos una regla importante para integrales indefinidas.

Teorema D **Regla generalizada de la potencia**

Sean g una función derivable y r un número racional diferente de -1. Entonces

$$\int [g(x)]^r g'(x)\,dx = \frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1} + C$$

Para aplicar el teorema D, debemos ser capaces de reconocer las funciones g y g' en el integrando.

EJEMPLO 5 Evalúe

(a) $\int (x^4 + 3x)^{30}(4x^3 + 3)\,dx$ (b) $\int \operatorname{sen}^{10} x \cos x\,dx$

SOLUCIÓN

(a) Sea $g(x) = x^4 + 3x$; entonces $g'(x) = 4x^3 + 3$. Así, por el teorema D

$$\int (x^4 + 3x)^{30}(4x^3 + 3)\,dx = \int [g(x)]^{30} g'(x)\,dx = \frac{[g(x)]^{31}}{31} + C$$
$$= \frac{(x^4 + 3x)^{31}}{31} + C$$

(b) Sea $g(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $g'(x) = \cos x$. Por lo tanto,

$$\int \operatorname{sen}^{10} x \cos x\,dx = \int [g(x)]^{10} g'(x)\,dx = \frac{[g(x)]^{11}}{11} + C$$
$$= \frac{\operatorname{sen}^{11} x}{11} + C$$

■

El ejemplo 5 muestra por qué Leibniz usó la diferencial dx en su notación $\int \ldots dx$. Si hacemos $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)dx$. Por consiguiente, la conclusión del teorema D es

$$\int u^r\,du = \frac{u^{r+1}}{r+1} + C, \qquad r \neq -1$$

que es la regla común para la potencia con u como variable. Así, la regla generalizada para la potencia es sólo la regla común para la potencia aplicada a funciones. Pero, al aplicarla, siempre debemos estar seguros de que tenemos du para ir con u^r. Los siguientes ejemplos ilustran lo que queremos decir.

EJEMPLO 6 Evalúe

(a) $\int (x^3 + 6x)^5(6x^2 + 12)\,dx$ (b) $\int (x^2 + 4)^{10} x\,dx$

SOLUCIÓN

(a) Sea $u = x^3 + 6x$; entonces $du = (3x^2 + 6)dx$. Así, $(6x^2 + 12)dx = 2(3x^2 + 6)dx = 2du$, y en consecuencia

$$\int (x^3 + 6x)^5(6x^2 + 12)\,dx = \int u^5\, 2\,du$$
$$= 2\int u^5\,du$$
$$= 2\left[\frac{u^6}{6} + C\right]$$
$$= \frac{u^6}{3} + 2C$$
$$= \frac{(x^3 + 6x)^6}{3} + K$$

Deben notarse dos cosas con respecto a nuestra solución. Primero, el hecho de que $(6x^2 + 12)dx$ es $2du$ en lugar de du no causa problema; por la linealidad de la integral, el factor 2 pudo colocarse al frente del signo de la integral. Segundo, terminamos con una constante arbitraria $2C$. También ésta es una constante arbitraria; llamémosle K.

(b) Sea $u = x^2 + 4$; entonces $du = 2xdx$. Así,

$$\begin{aligned}\int (x^2 + 4)^{10} x\,dx &= \int (x^2 + 4)^{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x\,dx \\ &= \frac{1}{2} \int u^{10}\,du \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{11}}{11} + C\right) \\ &= \frac{(x^2 + 4)^{11}}{22} + K\end{aligned}$$

■

Revisión de conceptos

1. La regla de la potencia para derivadas dice que $d(x^r)/dx =$ ________. La regla de la potencia para integrales dice que $\int x^r\,dx =$ ______.

2. La regla generalizada de la potencia para derivadas dice que $d[f(x)]^r/dx =$ ________. La regla generalizada de la potencia para integrales dice que $\int$ _____ $dx = [f(x)]^{r+1}/(r + 1) + C, r \neq -1$.

3. $\int (x^4 + 3x^2 + 1)^8(4x^3 + 6x)\,dx =$ _____.

4. Con base en la linealidad, $\int [c_1 f(x) + c_2 g(x)]\,dx =$ _____.

Conjunto de problemas 3.8

Encuentre la antiderivada general F(x) + C para cada una de las siguientes funciones.

1. $f(x) = 5$
2. $f(x) = x - 4$
3. $f(x) = x^2 + \pi$
4. $f(x) = 3x^2 + \sqrt{3}$
5. $f(x) = x^{5/4}$
6. $f(x) = 3x^{2/3}$
7. $f(x) = 1/\sqrt[3]{x^2}$
8. $f(x) = 7x^{-3/4}$
9. $f(x) = x^2 - x$
10. $f(x) = 3x^2 - \pi x$
11. $f(x) = 4x^5 - x^3$
12. $f(x) = x^{100} + x^{99}$
13. $f(x) = 27x^7 + 3x^5 - 45x^3 + \sqrt{2}x$
14. $f(x) = x^2\left(x^3 + 5x^2 - 3x + \sqrt{3}\right)$
15. $f(x) = \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}$
16. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x}}{x} + \dfrac{3}{x^5}$
17. $f(x) = \dfrac{4x^6 + 3x^4}{x^3}$
18. $f(x) = \dfrac{x^6 - x}{x^3}$

En los problemas del 19 al 26 evalúe las integrales indefinidas que se indican.

19. $\int (x^2 + x)\,dx$
20. $\int \left(x^3 + \sqrt{x}\right) dx$
21. $\int (x + 1)^2\,dx$
22. $\int \left(z + \sqrt{2}z\right)^2 dz$
23. $\int \dfrac{(z^2 + 1)^2}{\sqrt{z}}\,dz$
24. $\int \dfrac{s(s + 1)^2}{\sqrt{s}}\,ds$
25. $\int (\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)\,d\theta$
26. $\int (t^2 - 2\cos t)\,dt$

En los problemas del 27 al 36 utilice los métodos de los ejemplos 5 y 6 para evaluar las integrales indefinidas.

27. $\int \left(\sqrt{2}x + 1\right)^3\sqrt{2}\,dx$
28. $\int (\pi x^3 + 1)^4\,3\pi x^2\,dx$
29. $\int (5x^2 + 1)(5x^3 + 3x - 8)^6\,dx$
30. $\int (5x^2 + 1)\sqrt{5x^3 + 3x - 2}\,dx$
31. $\int 3t\sqrt[3]{2t^2 - 11}\,dt$
32. $\int \dfrac{3y}{\sqrt{2y^2 + 5}}\,dy$
33. $\int x^2\sqrt{x^3 + 4}\,dx$
34. $\int (x^3 + x)\sqrt{x^4 + 2x^2}\,dx$
35. $\int \operatorname{sen} x\,(1 + \cos x)^4\,dx$
36. $\int \operatorname{sen} x \cos x\,\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}\,dx$

En los problemas del 37 al 42 se da $f''(x)$. Encuentre $f(x)$ antiderivando dos veces. Observe que en este caso su respuesta debe incluir dos constantes arbitrarias, una proveniente de cada antiderivación. Por ejemplo, si $f''(x) = x$, entonces $f'(x) = x^2/2 + C_1$ y $f(x) = x^3/6 + C_1x + C_2$. Las constantes C_1 y C_2 no pueden combinarse porque C_1x no es una constante.

37. $f''(x) = 3x + 1$
38. $f''(x) = -2x + 3$

39. $f''(x) = \sqrt{x}$

40. $f''(x) = x^{4/3}$

41. $f''(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^3}$

42. $f''(x) = 2\sqrt[3]{x + 1}$

43. Demuestre la fórmula

$$\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]\, dx = f(x)g(x) + C$$

Sugerencia: véase el recuadro al margen junto al teorema A.

44. Demuestre la fórmula

$$\int \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}\, dx = \frac{f(x)}{g(x)} + C$$

45. Utilice la fórmula del problema 43 para encontrar

$$\int \left[\frac{x^2}{2\sqrt{x-1}} + 2x\sqrt{x-1}\right] dx$$

46. Utilice la fórmula del problema 43 para encontrar

$$\int \left[\frac{-x^3}{(2x+5)^{3/2}} + \frac{3x^2}{\sqrt{2x+5}}\right] dx$$

47. Encuentre $\int f''(x)\, dx$ si $f(x) = x\sqrt{x^3 + 1}$.

48. Demuestre la fórmula

$$\int \frac{2g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{2[g(x)]^{3/2}} = \frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} + C$$

49. Demuestre la fórmula

$$\int f^{m-1}(x)g^{n-1}(x)[nf(x)g'(x) + mg(x)f'(x)]\, dx = f^m(x)g^n(x) + C$$

50. Evalúe la integral indefinida

$$\int \operatorname{sen}^3[(x^2+1)^4]\cos[(x^2+1)^4](x^2+1)^3 x\, dx$$

Sugerencia: sea $u = \operatorname{sen}(x^2 + 1)^4$.

51. Evalúe $\int |x|\, dx$.

52. Evalúe $\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$.

CAS **53.** Algunos paquetes de software pueden evaluar integrales indefinidas. Utilice su software en cada una de las siguientes integrales.

(a) $\int 6\operatorname{sen}(3(x - 2))\, dx$

(b) $\int \operatorname{sen}^3(x/6)\, dx$

(c) $\int (x^2 \cos 2x + x \operatorname{sen} 2x)\, dx$

EXPL CAS **54.** Sea $F_0(x) = x \operatorname{sen} x$ y $F_{n+1}(x) = \int F_n(x)\, dx$.

(a) Determine $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, y $F_4(x)$.

(b) Con base en la parte (a) realice una conjetura sobre la forma de $F_{16}(x)$.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** rx^{r-1}; $x^{r+1}/(r+1) + C, r \neq -1$ **2.** $r[f(x)]^{r-1}f'(x)$; $[f(x)]^r f'(x)$ **3.** $(x^4 + 3x^2 + 1)^9/9 + C$ **4.** $c_1\int f(x)\, dx + c_2\int g(x)\, dx$

3.9
Introducción a ecuaciones diferenciales

En la sección precedente, nuestra tarea fue antiderivar (integrar) una función f para obtener una nueva función F. Escribimos

$$\boxed{\int f(x)\, dx = F(x) + C}$$

y, por definición, esto fue correcto siempre y cuando $F'(x) = f(x)$. Ahora $F'(x) = f(x)$ en el lenguaje de derivadas es equivalente a $dF(x) = f(x)dx$ en el lenguaje de diferenciales (véase la sección 2.9). Por lo tanto, podemos interpretar la fórmula del recuadro como

$$\boxed{\int dF(x) = F(x) + C}$$

Desde esta perspectiva, integramos la diferencial de una función para obtener la función (más una constante). Éste fue el punto de vista de Leibniz; adoptarlo nos ayudará a resolver *ecuaciones diferenciales*.

¿Qué es una ecuación diferencial? Para motivar nuestra respuesta, empezamos con un ejemplo sencillo.

EJEMPLO 1 Encuentre una ecuación, en x y y, de la curva que pasa por el punto $(-1, 2)$ y cuya pendiente en cualquier punto de la curva es igual a dos veces la abscisa (coordenada x) de ese punto.

SOLUCIÓN La condición que debe cumplirse en cada punto (x, y) de la curva es

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Estamos buscando una función $y = f(x)$ que satisfaga esta ecuación y con la condición adicional de que $y = 2$ cuando $x = -1$. Sugerimos dos formas de ver este problema.

Método 1 Cuando una ecuación tiene la forma $dy/dx = g(x)$ observamos que y debe ser una antiderivada de $g(x)$; esto es,

$$y = \int g(x)\, dx$$

En nuestro caso,

$$y = \int 2x\, dx = x^2 + C$$

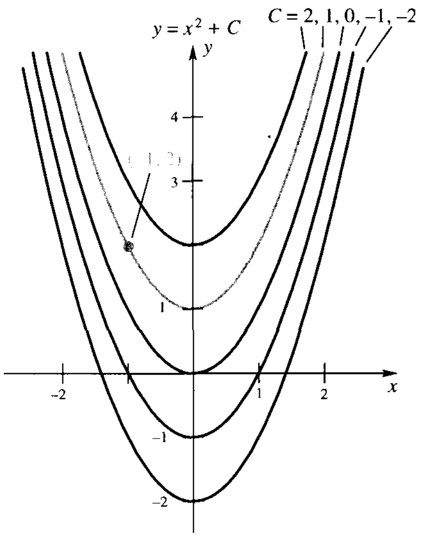


Figura 1

Método 2 Considere a dy/dx como un cociente de dos diferenciales. Cuando multiplicamos ambos lados de $dy/dx = 2x$ por dx, obtenemos

$$dy = 2x\, dx$$

Ahora, integramos las diferenciales de ambos lados, igualamos los resultados y simplificamos

$$\int dy = \int 2x\, dx$$

$$\begin{aligned} y + C_1 &= x^2 + C_2 \\ y &= x^2 + C_2 - C_1 \\ y &= x^2 + C \end{aligned}$$

El segundo método funciona en una gran variedad de problemas que no están en la forma sencilla $dy/dx = g(x)$, como veremos.

La solución $y = x^2 + C$ representa la familia de curvas ilustrada en la figura 1. De esta familia debemos seleccionar la curva para la que $y = 2$ cuando $x = -1$; por lo tanto, queremos que

$$2 = (-1)^2 + C$$

Concluimos que $C = 1$ y, por lo tanto, que $y = x^2 + 1$. ■

Las ecuaciones $dy/dx = 2x$ y $dy = 2x\, dx$ se denominan *ecuaciones diferenciales*. Otros ejemplos son

$$\frac{dy}{dx} = 2xy + \operatorname{sen} x$$

$$y\, dy = (x^3 + 1)\, dx$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$$

Cualquier ecuación en la que la incógnita sea una función y que incluya derivadas (o diferenciales) de esta función desconocida se denomina **ecuación diferencial**. Una función que cuando se sustituye en la ecuación diferencial da una igualdad, se llama una **solución** de la ecuación diferencial. Por lo tanto, resolver una ecuación diferencial es encontrar una *función* desconocida. En general, ésta es una tarea difícil y sobre la que se han escrito muchos y extensos libros. Aquí sólo consideraremos el tipo más sencillo, las ecuaciones diferenciales **de primer orden con variables separables**. Éstas son ecuaciones que incluyen sólo a la primera derivada de la función desconocida y son tales que las variables pueden separarse, una en cada lado de la ecuación.

Separación de variables Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3x^2}{y^2}$$

Si multiplicamos ambos lados por $y^2 dx$, obtenemos

$$y^2\,dy = (x + 3x^2)\,dx$$

En esta forma, la ecuación diferencial tiene separadas sus variables; es decir, los términos que incluyen a y están en un lado de la ecuación y los de x en el otro. De manera separada, podemos resolver la ecuación diferencial utilizando el método 2 (integrar ambos lados, igualar los resultados y simplificar), como lo ilustramos ahora.

EJEMPLO 2 Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3x^2}{y^2}$$

Después encuentre aquella solución para la cual $y = 6$ cuando $x = 0$.

SOLUCIÓN Como se observó anteriormente, la ecuación dada es equivalente a

$$y^2\,dy = (x + 3x^2)\,dx$$

Así,

$$\begin{aligned}
\int y^2\,dy &= \int (x + 3x^2)\,dx \\
\frac{y^3}{3} + C_1 &= \frac{x^2}{2} + x^3 + C_2 \\
y^3 &= \frac{3x^2}{2} + 3x^3 + (3C_2 - 3C_1) \\
&= \frac{3x^2}{2} + 3x^3 + C \\
y &= \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} + 3x^3 + C}
\end{aligned}$$

Para encontrar la constante C utilizamos la condición $y = 6$ cuando $x = 0$. Esto da

$$\begin{aligned}
6 &= \sqrt[3]{C} \\
216 &= C
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$y = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} + 3x^3 + 216}$$

Para verificar nuestro trabajo podemos sustituir este resultado en ambos lados de la ecuación diferencial original para ver que dé una igualdad. También debemos confirmar que $y = 6$ cuando $x = 0$.

Al sustituir en el lado izquierdo obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{3}\left(\frac{3x^2}{2} + 3x^3 + 216\right)^{-2/3}(3x + 9x^2) \\
&= \frac{x + 3x^2}{\left(\frac{3}{2}x^2 + 3x^3 + 216\right)^{2/3}}
\end{aligned}$$

En el lado derecho obtenemos

$$\frac{x + 3x^2}{y^2} = \frac{x + 3x^2}{\left(\frac{3}{2}x^2 + 3x^3 + 216\right)^{2/3}}$$

Como se esperaba, las dos expresiones son iguales. Cuando $x = 0$ tenemos

$$y = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0^2}{2} + 3 \cdot 0^3 + 216} = \sqrt[3]{216} = 6$$

Así, $y = 6$ cuando $x = 0$, como esperábamos. ■

Problemas sobre movimiento Recuerde que si $s(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ representan la posición, velocidad y aceleración, respectivamente, en el instante t de un objeto que se mueve a lo largo de un eje coordenado, entonces

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

$$a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

En algún trabajo previo (véase la sección 2.6) supusimos que $s(t)$ era conocida, y a partir de esto calculamos $v(t)$ y $a(t)$. Ahora queremos considerar el proceso inverso; dada la aceleración $a(t)$, encontrar la velocidad $v(t)$ y la posición $s(t)$.

EJEMPLO 3 **Problema de un cuerpo que cae**

Cerca de la superficie de la Tierra, la aceleración a la que cae un objeto, debido a la gravedad, es de 32 pies por segundo por segundo, siempre y cuando la resistencia al aire se pueda despreciar. Si un objeto se lanza directamente hacia arriba desde una altura inicial de 1000 pies (véase la figura 2) a una velocidad de 50 pies por segundo, encuentre su velocidad y altura 4 segundos después.

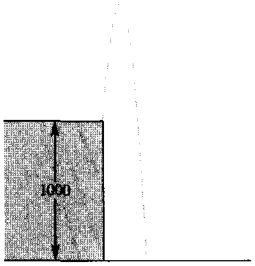


Figura 2

SOLUCIÓN Supongamos que la altura s se considera positiva hacia arriba. Entonces $v = ds/dt$ inicialmente es positiva (s está aumentando), pero $a = dv/dt$ es negativa. (La fuerza debida a la gravedad es descendente, por lo que v disminuye.) De aquí que iniciamos nuestro análisis con la ecuación diferencial $dv/dt = -32$, con las condiciones adicionales de que $v = 50$ y $s = 1000$ cuando $t = 0$. El método 1 (antiderivación directa) y el método 2 (separación de variables) funcionan bien.

$$\frac{dv}{dt} = -32$$

$$v = \int -32\,dt = -32t + C$$

Como $v = 50$ en $t = 0$, encontramos que $C = 50$, y así

$$\boxed{v = -32t + 50}$$

Ahora, $v = ds/dt$, por lo que tenemos otra ecuación diferencial

$$\frac{ds}{dt} = -32t + 50$$

Cuando integramos obtenemos

$$\begin{aligned} s &= \int (-32t + 50)\,dt \\ &= -16t^2 + 50t + K \end{aligned}$$

Ya que $s = 1000$ en $t = 0$, $K = 1000$ y

$$\boxed{s = -16t^2 + 50t + 1000}$$

Por último, en $t = 4$,

$$v = -32(4) + 50 = -78 \text{ pies por segundo}$$

$$s = -16(4)^2 + 50(4) + 1000 = 944 \text{ pies}$$ ■

Hacemos notar que si $v = v_0$ y $s = s_0$ en $t = 0$, el procedimiento del ejemplo 3 lleva a las conocidas fórmulas de caída de un cuerpo.

$$\begin{aligned} a &= -32 \\ v &= -32t + v_0 \\ s &= -16t^2 + v_0 t + s_0 \end{aligned}$$

EJEMPLO 4 La aceleración de un objeto que se mueve a lo largo de un eje coordenado está dada por $a(t) = (2t + 3)^{-3}$ en metros por segundo por segundo. Si la velocidad en $t = 0$ es 4 metros por segundo, encuentre la velocidad 2 segundos más tarde.

SOLUCIÓN Empezamos con la ecuación diferencial de la primera línea, de las ecuaciones que se muestran a continuación. Para realizar la integración en la segunda línea, multiplicamos y dividimos entre 2, así preparamos la integral para la regla generalizada para la potencia.

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= (2t + 3)^{-3} \\ v &= \int (2t + 3)^{-3}\, dt = \frac{1}{2}\int (2t + 3)^{-3}\, 2\, dt \\ &= \frac{1}{2}\frac{(2t + 3)^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{4(2t + 3)^2} + C \end{aligned}$$

Como $v = 4$ en $t = 0$,

$$4 = -\frac{1}{4(3)^2} + C$$

que da $C = \frac{145}{36}$. Así,

$$v = -\frac{1}{4(2t + 3)^2} + \frac{145}{36}$$

En $t = 2$,

$$v = -\frac{1}{4(49)} + \frac{145}{36} \approx 4.023 \text{ metros por segundo}$$

■

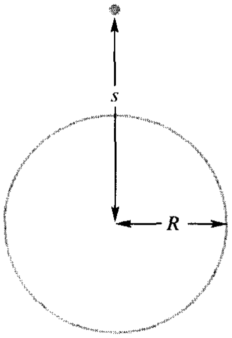
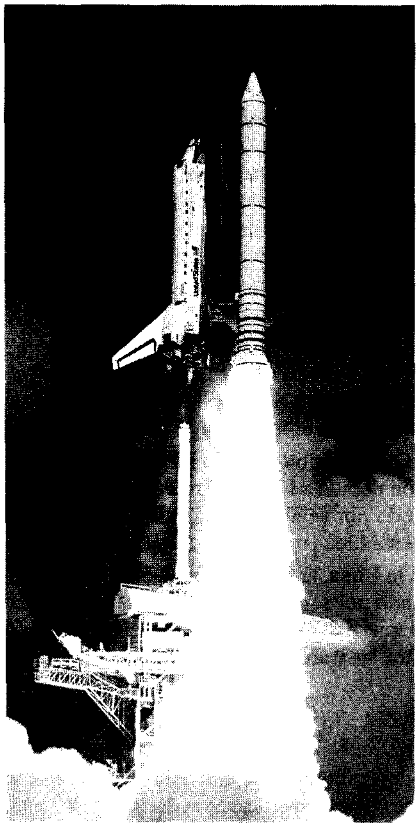


Figura 3



EJEMPLO 5 **Velocidad de escape (opcional)**

La atracción gravitacional F ejercida por la Tierra sobre un objeto de masa m a una distancia s del centro de la Tierra está dado por $F = -mgR^2/s^2$, donde $-g$ ($g \approx 32$ pies por segundo por segundo) es la aceleración debida a la gravedad en la superficie de la Tierra y R ($R \approx 3960$ millas) es el radio de la Tierra (véase la figura 3). Demuestre que un objeto lanzado hacia arriba desde la Tierra, con una velocidad inicial $v_0 \geq \sqrt{2gR} \approx 6.93$ millas por segundo no regresará a la Tierra. En estos cálculos no tome en cuenta la resistencia del aire.

SOLUCIÓN De acuerdo con la segunda Ley de Newton, $F = ma$; es decir,

$$F = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = m\frac{dv}{ds}v$$

Así,

$$mv\frac{dv}{ds} = -mg\frac{R^2}{s^2}$$

Al separar variables se obtiene

$$\begin{aligned} v\, dv &= -gR^2 s^{-2}\, ds \\ \int v\, dv &= -gR^2 \int s^{-2}\, ds \\ \frac{v^2}{2} &= \frac{gR^2}{s} + C \end{aligned}$$

Ahora $v = v_0$ cuando $s = R$, y de este modo $C = \frac{1}{2}v_0^2 - gR$. En consecuencia,

$$v^2 = \frac{2gR^2}{s} + v_0^2 - 2gR$$

Por último, ya que $2gR^2/s$ se reduce conforme s aumenta, vemos que v permanece positiva si y sólo si $v_0 \geq \sqrt{2gR}$. ■

Revisión de conceptos

1. $dy/dx = 3x^2 + 1$ y $dy/dx = x/y^2$ son ejemplos de lo que se llama una ________.

2. Para resolver la ecuación diferencial $dy/dx = g(x, y)$ hay que encontrar la ________ que, cuando se sustituya por y proporcione una igualdad.

3. Para resolver la ecuación diferencial $dy/dx = x^2y^3$, el primer paso sería ________.

4. Para resolver el problema de un cuerpo que cae cerca de la superficie de la Tierra, iniciamos con el hecho experimental de que la aceleración debida a la gravedad es de −32 pies por segundo por segundo; es decir, $a = dv/dt = -32$. Al resolver esta ecuación diferencial se obtiene $v = ds/dt =$ ________, y al resolver la ecuación diferencial resultante se obtiene $s =$ ________.

Conjunto de problemas 3.9

En los problemas del 1 al 4 demuestre que la función indicada es una solución de la ecuación diferencial que se da; es decir, sustituya la función que se indica por y para ver que produzca una igualdad.

1. $\frac{dy}{dx} + \frac{x}{y} = 0;\ y = \sqrt{1 - x^2}$

2. $-x\frac{dy}{dx} + y = 0;\ y = Cx$

3. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0;\ y = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x$

4. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 1;\ y = \operatorname{sen}(x + C)$ y $y = \pm 1$

En los problemas del 5 al 14 encuentre primero la solución general (que incluya una constante C) para la ecuación diferencial dada. Después encuentre la solución particular que satisfaga la condición que se indica. (Véase el ejemplo 2.)

5. $\frac{dy}{dx} = x^2 + 1;\ y = 1$ en $x = 1$

6. $\frac{dy}{dx} = x^{-3} + 2;\ y = 3$ en $x = 1$

7. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y};\ y = 1$ en $x = 1$

8. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{y}};\ y = 4$ en $x = 1$

9. $\frac{dz}{dt} = t^2z^2;\ z = 1/3$ en $t = 1$

10. $\frac{dy}{dt} = y^4;\ y = 1$ en $t = 0$

11. $\frac{ds}{dt} = 16t^2 + 4t - 1;\ s = 100$ en $t = 0$

12. $\frac{du}{dt} = u^3(t^3 - t);\ u = 4$ en $t = 0$

13. $\frac{dy}{dx} = (2x + 1)^4;\ y = 6$ at $x = 0$

14. $\frac{dy}{dx} = -y^2x(x^2 + 2)^4;\ y = 1$ at $x = 0$

15. Encuentre la ecuación, en x y y, de la curva que pasa por (1, 2) cuya pendiente en cualquier punto es tres veces su abscisa (véase el ejemplo 1).

16. Encuentre la ecuación, en x y y, de la curva que pasa por (1, 2) cuya pendiente en cualquier punto es el triple del cuadrado de su ordenada (coordenada y).

En los problemas del 17 al 20, un objeto se mueve a lo largo de una recta, sujeto a la aceleración a (en centímetros por segundo por segundo), que se indica, con la velocidad inicial v_0 (en centímetros por segundo) y la distancia dirigida s_0 (en centímetros). Encuentre la velocidad v y la distancia dirigida s después de 2 segundos (véase el ejemplo 4).

17. $a = t;\ v_0 = 3,\ s_0 = 0$

18. $a = (1 + t)^{-4};\ v_0 = 0,\ s_0 = 10$

$\boxed{C}$ **19.** $a = \sqrt[3]{2t + 1};\ v_0 = 0,\ s_0 = 10$

$\boxed{C}$ **20.** $a = (3t + 1)^{-3};\ v_0 = 4,\ s_0 = 0$

21. Se lanza una pelota hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial de 96 pies por segundo. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza? (Véase el ejemplo 3.)

22. Se lanza una pelota hacia arriba desde la superficie de un planeta en donde la aceleración debida a la gravedad es k (una constante negativa) pies por segundo por segundo. Si la velocidad inicial es v_0, demuestre que la altura máxima es $-v_0^2/2k$.

$\boxed{C}$ **23.** En la superficie de la Luna, la aceleración debida a la gravedad es −5.28 pies por segundo por segundo. Si un objeto se lanza hacia arriba desde una altura inicial de 1000 pies, a una velocidad de 56 pies por segundo, encuentre su velocidad y su altura 4.5 segundos más tarde.

$\boxed{C}$ **24.** ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el objeto del problema 23?

25. La tasa de cambio del volumen V de una bola de nieve que se derrite es proporcional al área de su superficie S; es decir, $dV/dt = -kS$, donde k es una constante positiva. Si el radio de la bola en $t = 0$ es $r = 2$, y en $t = 10$ es $r = 0.5$, demuestre que $r = -\frac{3}{20}t + 2$.

26. ¿Desde qué altura, por arriba de la Tierra, debe dejarse caer una pelota para que llegue al suelo a una velocidad de -136 pies por segundo?

[C] **27.** Determine la *velocidad de escape* para un objeto lanzado desde cada uno de los siguientes cuerpos celestes (véase el ejemplo 5). Aquí, $g \approx 32$ pies por segundo por segundo.

	Aceleración debida a la gravedad	Radio (millas)
Luna	$-0.165g$	1,080
Venus	$-0.85g$	3,800
Júpiter	$-2.6g$	43,000
Sol	$-28g$	432,000

28. Si los frenos de un automóvil, cuando se aplican por completo, producen una desaceleración constante de 11 pies por segundo por segundo, ¿cuál es la distancia más corta en la que pueden aplicarse los frenos hasta detenerse, cuando lleva una velocidad de 60 millas por hora?

29. ¿Qué aceleración constante causará que un automóvil aumente su velocidad de 45 a 60 millas por hora en 10 segundos?

30. Un bloque se desliza hacia abajo en un plano inclinado con una aceleración de 8 pies por segundo por segundo. Si el plano inclinado tiene una longitud de 75 pies y el bloque llega a la parte baja en 3.75 segundos, ¿cuál fue la velocidad inicial del bloque?

31. Cierto cohete, inicialmente en reposo, que es disparado directamente hacia arriba tiene una aceleración de $6t$ metros por segundo por segundo durante los primeros 10 segundos después del despegue, a partir de los cuales el motor se detiene y el cohete sólo está sujeto a la aceleración debida a la gravedad de -10 metros por segundo por segundo. ¿A qué altura llegará el cohete?

32. Al ponerse en marcha en la estación A, un tren acelera a 3 metros por segundo por segundo durante 8 segundos, después viaja a velocidad constante v_m durante 100 segundos, y finalmente frena (desacelera) a 4 metros por segundo por segundo, para hacer una parada en la estación B. Encuentre (a) v_m y (b) la distancia entre A y B.

33. A partir del reposo, un autobús aumenta su velocidad con una aceleración constante a_1, después viaja a velocidad constante v_m, y finalmente frena para detenerse a una aceleración constante a_2 ($a_2 < 0$). Le toma 4 minutos recorrer las 2 millas entre las paradas C y D, y luego 3 minutos para recorrer 1.4 millas entre las paradas D y E.

(a) Bosqueje la gráfica de la velocidad v como una función del tiempo t, $0 \le t \le 7$.

(b) Encuentre la velocidad máxima v_m.

(c) Si $a_1 = -a_2 = a$, evalúe a.

34. Un globo de aire caliente abandona el piso elevándose a 4 pies por segundo. Dieciséis segundos después, Victoria arroja una pelota directamente hacia arriba a su amigo Colleen, que está en el globo. ¿A qué velocidad lanzó la pelota si llegó a Colleen?

35. De acuerdo con la Ley de Torricelli, la razón de cambio del volumen, V, de agua con respecto al tiempo en un tanque que se está vaciando es proporcional a la raíz cuadrada de la profundidad del agua. Un tanque cilíndrico de radio $10/\sqrt{\pi}$ centímetros y 16 centímetros de altura, inicialmente lleno, tarda 40 segundos en vaciarse.

(a) Escriba una ecuación diferencial para V en el instante t y las condiciones correspondientes.

(b) Resuelva la ecuación diferencial.

(c) Encuentre el volumen del agua después de 10 segundos.

[C] **36.** En cierto estado, la población de lobos P ha crecido a una tasa proporcional a la raíz cúbica del tamaño de la población. En 1980, la población se estimó en 1000 y en 1990 en 1700.

(a) Escriba la ecuación diferencial para P en el instante t con las dos condiciones correspondientes.

(b) Resuelva la ecuación diferencial.

(c) ¿Cuándo llegará a 4000 la población de lobos?

37. En $t = 0$, una pelota se deja caer desde una altura de 16 pies. Si pega con el piso y rebota a una altura de 9 pies (véase la figura 4):

(a) Encuentre una fórmula de dos partes para la velocidad $v(t)$ que sea válida hasta que la pelota choque con el piso por segunda ocasión.

(b) ¿Cuáles son los dos instantes en que la pelota estuvo a una altura de 9 pies?

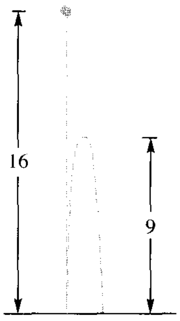


Figura 4

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** ecuación diferencial **2.** función **3.** separar las variables **4.** $-32t + v_0$; $-16t^2 + v_0t + s_0$

3.10 Repaso del capítulo

Examen de conceptos

Responda con verdadero o falso a cada una de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

1. Una función continua definida en un intervalo cerrado debe alcanzar un valor máximo en ese intervalo.

2. Si una función derivable f alcanza un valor máximo en un punto interior c de su dominio, entonces $f'(c) = 0$.

3. Para una función es posible tener un número infinito de puntos críticos.

4. Una función continua que es creciente en $(-\infty, \infty)$ debe ser diferenciable en todas partes.

5. Si $f(x) = 3x^6 + 4x^4 + 2x^2$, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en toda la recta real.

6. Si f es una función creciente y derivable en un intervalo I, entonces $f'(x) > 0$ para toda x en I.

7. Si $f'(x) > 0$, para toda x en I, entonces f es creciente en I.

8. Si $f''(c) = 0$, entonces f tiene un punto de inflexión en $(c, f(c))$.

9. Una función cuadrática no tiene puntos de inflexión.

10. Si $f'(x) > 0$ para toda x en $[a, b]$, entonces f alcanza su valor máximo sobre $[a, b]$ en b.

11. La función $y = \tan^2 x$ no tiene valor mínimo.

12. La función $y = 2x^3 + x$ no tiene valor máximo ni valor mínimo.

13. La función $y = 2x^3 + x + \tan x$ no tiene valor máximo ni valor mínimo.

14. La gráfica de $y = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \dfrac{(x + 2)(x - 3)}{x - 3}$ tiene una asíntota vertical en $x = 3$.

15. La gráfica de $y = \dfrac{x^2 + 1}{1 - x^2}$ tiene un asíntota horizontal en $y = -1$.

16. La gráfica de $y = \dfrac{3x^2 + 2x + \operatorname{sen} x}{x}$ tiene una asíntota oblicua en $y = 3x + 2$.

17. La función $f(x) = \sqrt{x}$ satisface las hipótesis del teorema del valor medio en $[0, 2]$.

18. La función $f(x) = |x|$ satisface las hipótesis del teorema del valor medio en $[-1, 1]$.

19. En el intervalo $[-1, 1]$, sólo existe un punto en donde la recta tangente a $y = x^3$ es paralela a la recta secante.

20. Si $f'(x) = 0$ para toda x en (a, b), entonces f es constante en este intervalo.

21. Si $f'(c) = f''(c) = 0$, entonces $f(c)$ no es valor máximo ni valor mínimo.

22. La gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ tiene un número infinito de puntos de inflexión.

23. Entre todos los rectángulos con área fija K, aquel con perímetro máximo es un cuadrado.

24. Si la gráfica de una función derivable tiene tres intersecciones con el eje x, entonces debe tener al menos dos puntos en donde la recta tangente es horizontal.

25. La suma de dos funciones crecientes es una función creciente.

26. El producto de dos funciones crecientes es una función creciente.

27. Si $f'(0) = 0$ y $f''(x) > 0$ para $x \geq 0$, entonces f es creciente en $[0, \infty)$.

28. Si $f'(x) \leq 2$ para toda x en el intervalo $[0, 3]$ y $f(0) = 1$, entonces $f(3) < 4$.

29. Si f es una función derivable, entonces f es no decreciente en (a, b), si y sólo si $f'(x) \geq 0$ en (a, b).

30. Dos funciones derivables tienen la misma derivada en (a, b) si y sólo si difieren por una constante en (a, b).

31. Si $f''(x) > 0$ para toda x, entonces la gráfica de $y = f(x)$ no puede tener una asíntota horizontal.

32. Un valor máximo global siempre es un valor máximo local.

33. Una función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$, puede tener, a lo más, un valor máximo local en cualquier intervalo abierto.

34. La función lineal $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, no tiene valor mínimo en ningún intervalo abierto.

35. Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a)f(b) < 0$, entonces $f(x) = 0$ tiene una raíz entre a y b.

36. Una de las virtudes del método de bisección es su rápida convergencia.

37. El método de Newton producirá una sucesión convergente para la función $f(x) = x^{1/3}$.

38. Si el método de Newton no converge para un valor inicial, entonces no convergerá para todo valor inicial.

39. Si g es continua en $[a, b]$ y si $a < g(a) < g(b) < b$, entonces g tiene un punto fijo entre a y b.

40. Una de las virtudes del método de bisección es que siempre converge.

41. La integral indefinida es un operador lineal.

42. $\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]\,dx = f(x)g(x) + C$.

43. $y = \cos x$ es una solución para la ecuación diferencial $(dy/dx)^2 = 1 - y^2$.

44. Todas las funciones que son antiderivadas deben tener derivadas.

45. Si la segunda derivada de dos funciones son iguales, entonces las funciones difieren a lo más por una constante.

46. $\int f'(x)\,dx = f(x)$ para cada función derivable f.

47. Si $s = -16t^2 + v_0 t$ proporciona la altura en el instante t de una pelota lanzada directamente hacia arriba, desde la superficie de la Tierra; entonces, la pelota chocará con el suelo con velocidad $-v_0$.

Problemas de examen

En los problemas del 1 al 12 se dan una función f y su dominio. Determine los puntos críticos, evalúe f en estos puntos y encuentre los valores máximo y mínimo (globales).

1. $f(x) = x^2 - 2x$; $[0, 4]$

2. $f(t) = \dfrac{1}{t}$; $[1, 4]$

3. $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$; $\left[-2, -\frac{1}{2}\right]$

4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; $[-2, 0)$

5. $f(x) = |x|$; $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

6. $f(s) = s + |s|; [-1, 1]$

7. $f(x) = 3x^4 - 4x^3; [-2, 3]$

8. $f(u) = u^2(u - 2)^{1/3}; [-1, 3]$

9. $f(x) = 2x^5 - 5x^4 + 7; [-1, 3]$

10. $f(x) = (x - 1)^3(x + 2)^2; [-2, 2]$

11. $f(\theta) = \operatorname{sen} \theta; [\pi/4, 4\pi/3]$

12. $f(\theta) = \operatorname{sen}^2 \theta - \operatorname{sen} \theta; [0, \pi]$

En los problemas del 13 al 19 se da una función f con dominio $(-\infty, \infty)$. Indique en dónde f es creciente y en dónde es cóncava hacia abajo.

13. $f(x) = 3x - x^2$

14. $f(x) = x^9$

15. $f(x) = x^3 - 3x + 3$

16. $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + 1$

17. $f(x) = x^4 - 4x^5$

18. $f(x) = x^3 - \frac{6}{5}x^5$

19. $f(x) = x^3 - x^4$

20. Encuentre en dónde es creciente y en dónde es decreciente la función g, definida mediante $g(t) = t^3 + 1/t$. Encuentre los valores extremos locales de g. Asimismo, encuentre el punto de inflexión. Haga un bosquejo de la gráfica.

21. Encuentre en dónde es creciente y en dónde es decreciente la función f, definida por $f(x) = x^2(x - 4)$. Encuentre los valores extremos locales de f. También encuentre el punto de inflexión. Dibuje la gráfica.

22. Encuentre los valores máximo y mínimo, si existen, de la función definida por

$$f(x) = \frac{4}{x^2 + 1} + 2$$

En los problemas del 23 al 30 bosqueje la gráfica de la función f dada, marque todos los extremos (locales y globales) y los puntos de inflexión y muestre las asíntotas, si las hay. Asegúrese de utilizar f′ y f″.

23. $f(x) = x^4 - 2x$

24. $f(x) = (x^2 - 1)^2$

25. $f(x) = x\sqrt{x - 3}$

26. $f(x) = \dfrac{x - 2}{x - 3}$

27. $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

28. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

29. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{x}$

30. $f(x) = \dfrac{2}{(x + 1)^2}$

En los problemas del 31 al 36 haga la gráfica de la función f en la región $(-\pi, \pi)$, a menos que se indique lo contrario, etiquete todos los extremos (locales y globales) y los puntos de inflexión; también muestre las asíntotas, si existen. Asegúrese de utilizar f′ y f″.

31. $f(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$

32. $f(x) = \operatorname{sen} x - \tan x$

33. $f(x) = x \tan x; (-\pi/2, \pi/2)$

34. $f(x) = 2x - \cot x; (0, \pi)$

35. $f(x) = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x$

36. $f(x) = 2 \cos x - 2 \operatorname{sen} x$

37. Dibuje la gráfica de una función F que tenga todas las propiedades siguientes:

(a) F es continua en todas partes;

(b) $F(-2) = 3, F(2) = -1$;

(c) $F'(x) = 0$ para $x > 2$;

(d) $F''(x) < 0$ para $x < 2$.

38. Dibuje la gráfica de una función F que tenga todas las propiedades siguientes:

(a) F es continua en todas partes;

(b) $F(-1) = 6, F(3) = -2$;

(c) $F'(x) < 0$ para $x < -1, F'(-1) = F'(3) = -2, F'(7) = 0$;

(d) $F''(x) < 0$ para $x < -1, F''(x) = 0$ para $-1 < x < 3$, $F''(x) > 0$ para $x > 3$.

39. Dibuje la gráfica de una función F que tenga todas las propiedades siguientes:

(a) F es continua en todas partes;

(b) F tiene periodo π;

(c) $0 \leq F(x) \leq 2, F(0) = 0, F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$;

(d) $F'(x) > 0$ para $0 < x < \dfrac{\pi}{2}, F'(x) < 0$ para $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$;

(e) $F''(x) < 0$ para $0 < x < \pi$.

40. Una larga hoja de metal, de 16 pulgadas de ancho, se dobla hacia arriba en ambos lados para formar un canalón horizontal con lados verticales. ¿Cuántas pulgadas de cada lado deben doblarse hacia arriba para maximizar la capacidad de carga?

41. Una barda, de 8 pies de altura, es paralela a un muro de un edificio y a un pie de éste. ¿Cuál es el tablón más corto que puede pasar por encima de la barda, desde el nivel del piso, para apuntalar el muro?

42. Una página de un libro contiene 27 pulgadas cuadradas de impresión. Si los márgenes superior, inferior y de uno de los lados son de 2 pulgadas y el margen del otro lado es de 1 pulgada, ¿qué tamaño de página utilizaría la menor cantidad de papel?

43. Un abrevadero metálico con extremos semicirculares iguales, sin cubierta superior, debe tener una capacidad de 128π pies cúbicos (véase la figura 1). Determine su radio r y longitud h, si el abrevadero debe requerir la menor cantidad de material para su construcción.

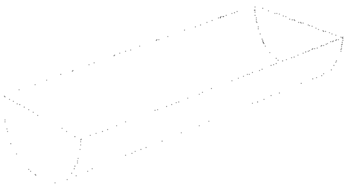


Figura 1

44. Encuentre el máximo y el mínimo de la función definida en el intervalo cerrado $[-2, 2]$ por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x^2 + 6x + 8), & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ -\frac{1}{6}(x^2 + 4x - 12), & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Determine en dónde la gráfica es cóncava hacia arriba y en dónde es cóncava hacia abajo. Haga un bosquejo de la gráfica.

45. Para cada una de las siguientes funciones decida si se puede aplicar el teorema del valor medio en el intervalo I que se indica. Si es así, encuentre todos los valores posibles de c, si no, diga por qué. Haga un bosquejo.

(a) $f(x) = \dfrac{x^3}{3}$; $I = [-3, 3]$

(b) $F(x) = x^{3/5} + 1$; $I = [-1, 1]$

(c) $g(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$; $I = [2, 3]$

46. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos de inflexión de la gráfica de

$$y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 3x + 1$$

47. Sea f una función continua con $f(1) = -1/4$, $f(2) = 0$ y $f(3) = -1/4$. Si la gráfica de $y = f'(x)$ es como la que se muestra en la figura 2, haga un bosquejo de una posible gráfica de $y = f(x)$.

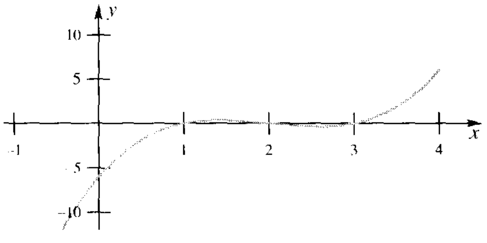


Figura 2

48. Bosqueje la gráfica de una función G con todas las propiedades siguientes:

(a) $G(x)$ es continua y $G''(x) > 0$ para toda x en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$;

(b) $G(-2) = G(2) = 3$;

(c) $\lim\limits_{x \to -\infty} G(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to \infty} [G(x) - x] = 0$;

(d) $\lim\limits_{x \to 0^+} G(x) = \lim\limits_{x \to 0} G(x) = \infty$.

$\boxed{\text{C}}$ **49.** Utilice el método de bisección para resolver $3x - \cos 2x = 0$, con una precisión de seis decimales. Utilice $a_1 = 0$ y $b_1 = 1$.

$\boxed{\text{C}}$ **50.** Utilice el método de Newton para resolver $3x - \cos 2x = 0$, con una precisión de seis decimales. Utilice $x_1 = 0.5$.

$\boxed{\text{C}}$ **51.** Utilice el algoritmo de punto fijo para resolver $3x - \cos 2x = 0$; inicie con $x_1 = 0.5$.

$\boxed{\text{C}}$ **52.** Utilice el método de Newton para resolver $x - \tan x = 0$ en el intervalo $(\pi, 2\pi)$ con una precisión de cuatro decimales. *Sugerencia:* Bosqueje las gráficas de $y = x$ y $y = \tan x$, usando los mismos ejes para obtener una buena aproximación inicial para x_1.

En los problemas del 53 al 67 evalúe las integrales que se indican.

53. $\displaystyle\int \left(x^3 - 3x^2 + 3\sqrt{x}\right) dx$

54. $\displaystyle\int \frac{2x^4 - 3x^2 + 1}{x^2}\, dx$

55. $\displaystyle\int \frac{y^3 - 9y \operatorname{sen} y + 26y^{-1}}{y}\, dy$

56. $\displaystyle\int y\sqrt{y^2 - 4}\, dy$

57. $\displaystyle\int z(2z^2 - 3)^{1/3}\, dz$

58. $\displaystyle\int \cos^4 x \operatorname{sen} x\, dx$

59. $\displaystyle\int (x + 1) \tan^2(3x^2 + 6x) \sec^2(3x^2 + 6x)\, dx$

60. $\displaystyle\int \frac{t^3}{\sqrt{t^4 + 9}}\, dt$

61. $\displaystyle\int t^4(t^5 + 5)^{2/3}\, dt$

62. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}\, dx$

63. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 9}}\, dx$

64. $\displaystyle\int \frac{1}{(y + 1)^2}\, dy$

65. $\displaystyle\int \frac{2}{(2y - 1)^3}\, dy$

66. $\displaystyle\int \frac{y^2 - 1}{(y^3 - 3y)^2}\, dy$

67. $\displaystyle\int \frac{(y^2 + y + 1)}{\sqrt[5]{2y^3 + 3y^2 + 6y}}\, dy$

En los problemas del 68 al 74 resuelva la ecuación diferencial sujeta a la condición que se indica.

68. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x;\ y = 2 \text{ en } x = 0$

69. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}};\ y = 18 \text{ en } x = 3$

70. $\dfrac{dy}{dx} = \csc y;\ y = \pi \text{ en } x = 0$

71. $\dfrac{dy}{dt} = \sqrt{2t-1};\ y = -1 \text{ en } t = \frac{1}{2}$

72. $\dfrac{dy}{dt} = t^2y^4;\ y = 1 \text{ en } t = 1$

73. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x - x^3}{2y};\ y = 3 \text{ en } x = 0$

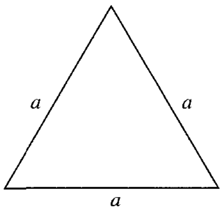
74. $\dfrac{dy}{dx} = x \sec y;\ y = \pi \text{ en } x = 0$

75. Se lanza una pelota directamente hacia arriba desde una torre de 448 pies de altura, a una velocidad inicial de 48 pies por segundo. ¿En cuántos segundos chocará con el piso y a qué velocidad? Suponga que $g = 32$ pies por segundo por segundo y no tome en cuenta la resistencia del aire.

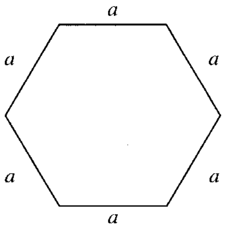
PROBLEMAS DE REPASO E INTRODUCCIÓN

En los problemas del 1 al 12 determine el área de la región sombreada.

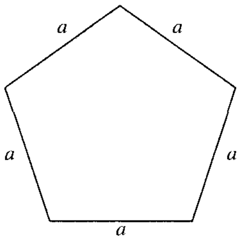
1.



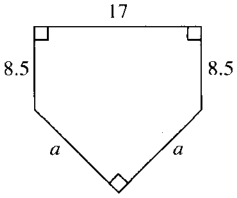
2.



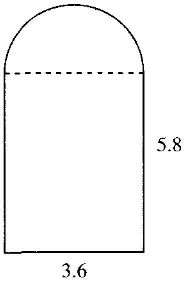
3.



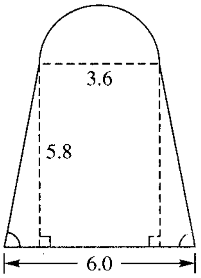
4.



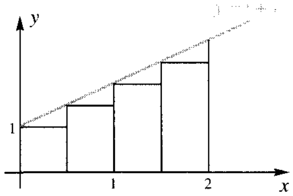
5.



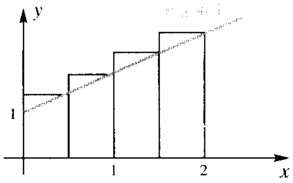
6.



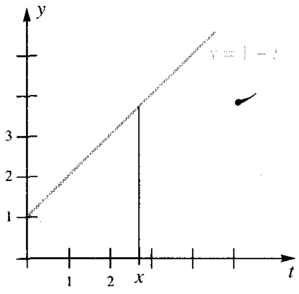
7.



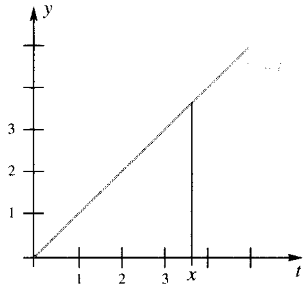
8.



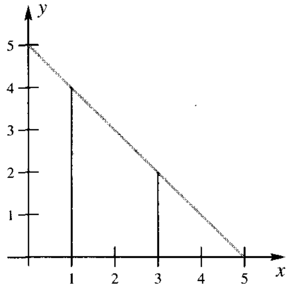
9.



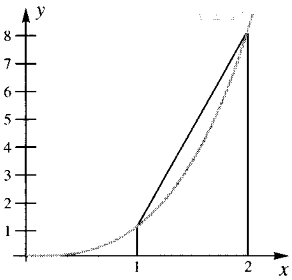
10.



11.



12.



CAPÍTULO 4 La integral definida

4.1 Introducción al área

4.2 La integral definida

4.3 El Primer Teorema Fundamental del Cálculo

4.4 El Segundo Teorema Fundamental del Cálculo y el método de sustitución

4.5 El teorema del valor medio para integrales y el uso de simetría

4.6 Integración numérica

4.7 Repaso del capítulo

4.1

Introducción al área

Dos problemas, ambos de geometría, motivan las dos ideas más importantes en cálculo. El problema de encontrar la recta tangente nos llevó a la *derivada*. El problema de encontrar el área nos conducirá a la *integral definida*.

Para polígonos (regiones planas cerradas acotadas por segmentos de recta), el problema de encontrar el área apenas es un problema. Comenzamos con la definición del área de un rectángulo como la conocida fórmula de largo por ancho y, a partir de esto, de manera sucesiva deducimos las fórmulas para el área de un paralelogramo, un triángulo y cualquier polígono. La sucesión de figuras en la figura 1 sugiere cómo se hace esto.

Incluso, en esta sencilla configuración es claro que el área debe satisfacer cinco propiedades.

1. El área de una región plana es un número (real) no negativo.
2. El área de un rectángulo es el producto de su largo por ancho (ambos medidos en las mismas unidades). El resultado está en unidades cuadradas; por ejemplo, pies cuadrados o centímetros cuadrados.
3. Regiones congruentes tienen áreas iguales.
4. El área de la unión de dos regiones que se traslapan sólo en un segmento de recta es la suma de las áreas de las dos regiones.
5. Si una región está contenida en una segunda región, entonces el área de la primera es menor o igual que el de la segunda.

Cuando consideramos una región con frontera curva, el problema de asignar un área es significativamente más difícil. Sin embargo, hace más de 2000 años, Arquímedes proporcionó la clave de la solución. Considérese una sucesión de polígonos inscritos que aproximen a la región curva con una precisión cada vez mayor. Por ejemplo, para el círculo de radio 1, considérense los polígonos regulares *inscritos* $P_1, P_2, P_3, \ldots$ con 4 lados, 8 lados, 16 lados, …, como se muestra en la figura 2. El área del círculo es el límite cuando $n \to \infty$ de las áreas de P_n. De esta manera, si $A(F)$ denota el área de una región F, entonces

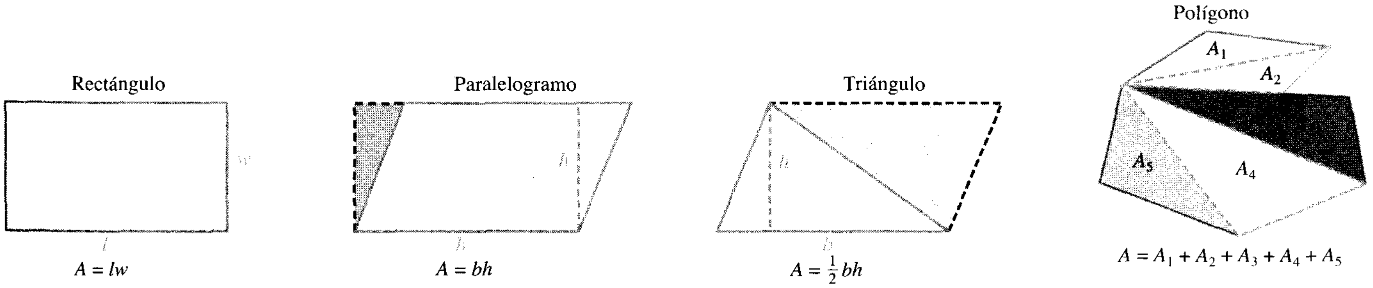


Figura 1

$$A(\text{círculo}) = \lim_{n\to\infty} A(P_n)$$

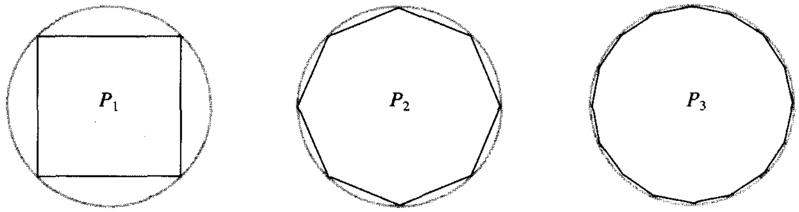


Figura 2

Uso y abuso del lenguaje

Siguiendo con el uso común, nos permitimos un cierto abuso del lenguaje. Las palabras *triángulo*, *rectángulo*, *polígono* y *círculo* serán utilizadas para denotar tanto a las regiones de dos dimensiones de la forma indicada como a sus fronteras unidimensionales. Observe que las regiones tienen áreas, mientras que las curvas tienen longitudes. Cuando decimos que un círculo tiene área πr^2 y circunferencia $2\pi r$, el contexto debe ser claro si *círculo* significa la región o la frontera.

Arquímedes fue más allá, al considerar también polígonos *circunscritos* T_1, T_2, T_3,... (Véase la figura 3.) Demostró que se obtiene el mismo valor para el área del círculo de radio 1 (a la que llamó π), si se inscriben o circunscriben polígonos. Sólo es un pequeño paso entre lo que él hizo y nuestro tratamiento moderno del área.

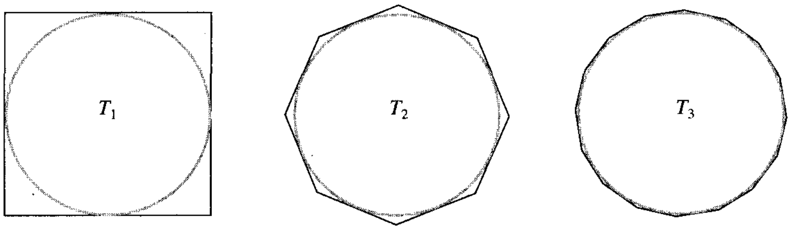


Figura 3

Notación sigma Nuestro enfoque para determinar el área de una región curva, R, implicará los siguientes pasos:

1. Aproximar la región R por medio de n rectángulos, en donde los n rectángulos tomados juntos contengan a R y produzcan un **polígono circunscrito**, o bien, que estén contenidos en R y produzcan un **polígono inscrito**.
2. Determinar el área de cada rectángulo.
3. Sumar las áreas de los n rectángulos.
4. Tomar el límite cuando $n \to \infty$.

Si el límite de las áreas de los polígonos inscritos y circunscritos es el mismo, a este límite le llamamos área de la región R.

El paso 3 incluye la suma de las áreas de los rectángulos, por lo que necesitamos tener una notación para sumas, así como algunas de sus propiedades. Por ejemplo, considere las sumas siguientes:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 100^2$$

y

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$$

Para indicar estas sumas de una manera compacta, las escribimos como

$$\sum_{i=1}^{100} i^2 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i$$

respectivamente. Aquí Σ (sigma mayúscula griega), que corresponde a la Σ en español, significa que estamos sumando todos los números de la forma indicada cuando el *índice i* recorre todos los enteros positivos, lo cual comienza con el entero que aparece debajo de Σ y finaliza con el entero arriba de Σ. Así,

$$\sum_{i=2}^{4} a_i b_i = a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{k}{k^2 + 1} = \frac{1}{1^2 + 1} + \frac{2}{2^2 + 1} + \frac{3}{3^2 + 1} + \frac{4}{4^2 + 1}$$

Si todas las c_i en $\sum_{i=1}^{n} c_i$ tienen el mismo valor, digamos c, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = \underbrace{c + c + c + \cdots + c}_{n \text{ términos}}$$

Como resultado,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} c = nc}$$

En particular,

$$\sum_{i=1}^{5} 2 = 5(2) = 10 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{100} (-4) = 100(-4) = -400$$

Propiedades de $\sum$ Considerado como un operador, Σ opera sobre sucesiones y lo hace de una manera lineal.

Teorema A **Linealidad de $\sum$**

Si c es una constante, entonces

(i) $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$;

(ii) $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$;

(iii) $\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$.

Demostración Las demostraciones son sencillas, sólo consideramos (i).

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = c\sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 1 Suponga que $\sum_{i=1}^{100} a_i = 60$ y $\sum_{i=1}^{100} b_i = 11$. Calcule

$$\sum_{i=1}^{100} (2a_i - 3b_i + 4)$$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{100} (2a_i - 3b_i + 4) &= \sum_{i=1}^{100} 2a_i - \sum_{i=1}^{100} 3b_i + \sum_{i=1}^{100} 4 \\ &= 2\sum_{i=1}^{100} a_i - 3\sum_{i=1}^{100} b_i + \sum_{i=1}^{100} 4 \\ &= 2(60) - 3(11) + 100(4) = 487 \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

EJEMPLO 2 **Sumas telescópicas**

Demuestre que:

(a) $\sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$

(b) $\sum_{i=1}^{n} [(i + 1)^2 - i^2] = (n + 1)^2 - 1$

SOLUCIÓN

(a) Aquí debemos resistir nuestra inclinación por aplicar la linealidad y, en lugar de eso, escribimos la suma y esperamos algunas cancelaciones convenientes.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1}-a_i) &= (a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)\\ &= -a_1+a_2-a_2+a_3-a_3+a_4-\cdots-a_n+a_{n+1}\\ &= -a_1+a_{n+1}=a_{n+1}-a_1\end{aligned}$$

(b) Esto se deduce, de manera inmediata, de la parte (a). ■

El símbolo utilizado para el índice no importa. Así,

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{j=1}^{n}a_j=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

y todos éstas son iguales a $a_1+a_2+\cdots+a_n$. Por esta razón, con frecuencia al índice se le llama **índice mudo**.

Fórmulas para algunas sumas especiales Al determinar áreas de regiones, con frecuencia necesitaremos considerar la suma de los primeros n enteros positivos, así como las sumas de sus cuadrados, cubos, etcétera. Hay fórmulas útiles para éstas; las demostraciones se estudian después del ejemplo 4.

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}i=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}i^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}i^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}i^4=1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

EJEMPLO 3 Encuentre una fórmula para $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(j+2)(j-5)$.

SOLUCIÓN Hacemos uso de la linealidad y de las fórmulas 1 y 2 anteriores.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}(j+2)(j-5) &= \sum_{j=1}^{n}(j^2-3j-10)=\sum_{j=1}^{n}j^2-3\sum_{j=1}^{n}j-\sum_{j=1}^{n}10\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-3\frac{n(n+1)}{2}-10n\\ &= \frac{n}{6}[2n^2+3n+1-9n-9-60]\\ &= \frac{n(n^2-3n-34)}{3}\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 4 ¿Cuántas naranjas hay en la pirámide que se muestra en la figura 4?

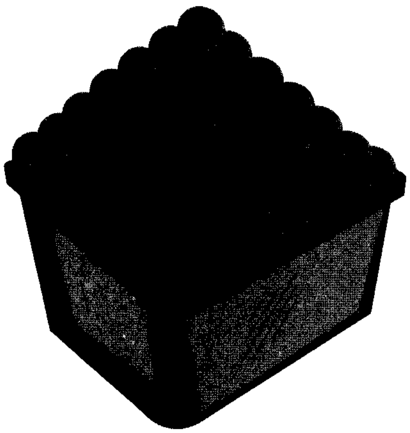


Figura 4

SOLUCIÓN $\displaystyle 1^2+2^2+3^2+\cdots+7^2=\sum_{i=1}^{7}i^2=\frac{7(8)(15)}{6}=140$ ■

Demostraciones de las fórmulas para las sumas especiales Para demostrar la fórmula de la suma especial 1, iniciamos con la identidad $(i+1)^2-i^2=2i+1$; sumamos ambos lados, aplicamos el ejemplo 2 en el lado izquierdo y utilizamos la linealidad en el derecho.

$$(i+1)^2 - i^2 = 2i + 1$$

$$\sum_{i=1}^{n}[(i+1)^2 - i^2] = \sum_{i=1}^{n}(2i+1)$$

$$(n+1)^2 - 1^2 = 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$n^2 + 2n = 2\sum_{i=1}^{n} i + n$$

$$\frac{n^2+n}{2} = \sum_{i=1}^{n} i$$

Casi la misma técnica funciona para establecer las fórmulas 2, 3 y 4 (véanse los problemas del 29 al 31).

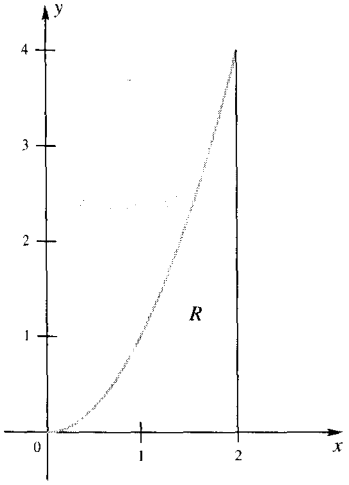


Figura 5

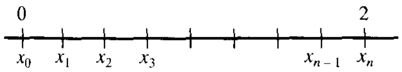


Figura 6

Área por medio de polígonos inscritos Considere la región R acotada por la parábola $y = f(x) = x^2$, el eje x y la recta vertical $x = 2$ (figura 5). Nos referiremos a R como la región acotada bajo la curva $y = x^2$, entre $x = 0$ y $x = 2$. Nuestra meta es calcular su área $A(R)$.

Divida el intervalo $[0, 2]$, como en la figura 6, en n subintervalos, cada uno de longitud $\Delta x = 2/n$, por medio de los $n + 1$ puntos

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 2$$

Así,

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = \Delta x = \frac{2}{n}$$

$$x_2 = 2 \cdot \Delta x = \frac{4}{n}$$

$$\vdots$$

$$x_i = i \cdot \Delta x = \frac{2i}{n}$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1} = (n-1) \cdot \Delta x = \frac{(n-1)2}{n}$$

$$x_n = n \cdot \Delta x = n\left(\frac{2}{n}\right) = 2$$

Considérese el rectángulo representativo con base $[x_{i-1}, x_i]$ y altura $f(x_{i-1}) = x_{i-1}^2$. Su área es $f(x_{i-1})\Delta x$ (véase la parte superior izquierda de la figura 7). La unión R_n de todos esos rectángulos forma el polígono inscrito en la parte inferior derecha de la figura 7.

El área $A(R_n)$ puede calcularse al sumar las áreas de estos rectángulos.

$$A(R_n) = f(x_0)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\,\Delta x$$

Ahora,

$$f(x_i)\,\Delta x = x_i^2\,\Delta x = \left(\frac{2i}{n}\right)^2 \cdot \frac{2}{n} = \left(\frac{8}{n^3}\right)i^2$$

Por lo tanto,

$$A(R_n) = \left[\frac{8}{n^3}(0^2) + \frac{8}{n^3}(1^2) + \frac{8}{n^3}(2^2) + \cdots + \frac{8}{n^3}(n-1)^2\right]$$

$$= \frac{8}{n^3}[1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2]$$

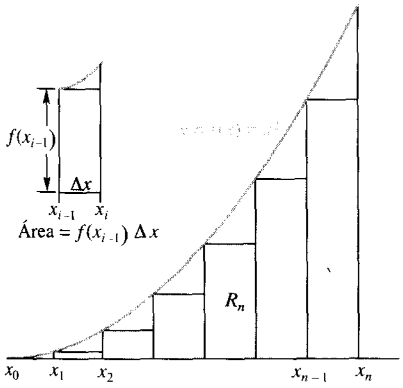


Figura 7

$$= \frac{8}{n^3}\left[\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right] \qquad \text{(Fórmula para la suma especial 2, con } n-1 \text{ en lugar de } n\text{)}$$

$$= \frac{8}{6}\left(\frac{2n^3-3n^2+n}{n^3}\right)$$

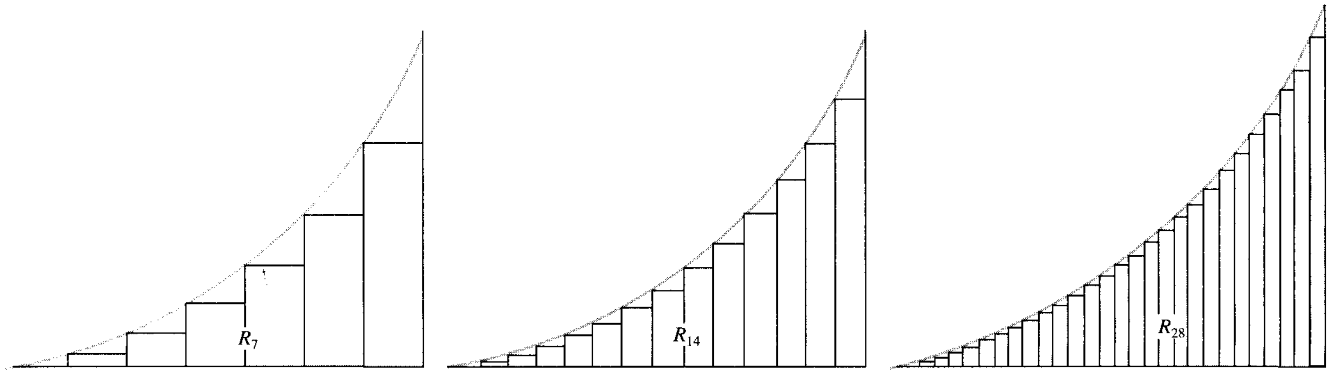
$$= \frac{4}{3}\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{8}{3}-\frac{4}{n}+\frac{4}{3n^2}$$

Concluimos que

$$A(R) = \lim_{n\to\infty} A(R_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{3}-\frac{4}{n}+\frac{4}{3n^2}\right) = \frac{8}{3}$$

Los diagramas de la figura 8 deben ayudarnos a visualizar lo que está sucediendo cuando n se hace cada vez más grande.



$A(R_7) \approx \frac{8}{3} - 0.5442$ $\quad$ $A(R_{14}) \approx \frac{8}{3} - 0.2789$ $\quad$ $A(R_{28}) \approx \frac{8}{3} - 0.1412$

Figura 8

Área por medio de polígonos circunscritos Quizá usted aún no esté convencido de que $A(R) = \frac{8}{3}$. Podemos dar más evidencia. Considérese el rectángulo con base $[x_{i-1}, x_i]$ y altura $f(x_i) = x_i^2$ (se muestra en la esquina superior izquierda en la figura 9). Su área es $f(x_i)\Delta x$. La unión S_n de todos esos rectángulos forma un polígono circunscrito para la región R, como se muestra en la parte inferior derecha de la figura 9.

El área $A(S_n)$ se calcula en analogía con el cálculo de $A(R_n)$.

$$A(S_n) = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

Como antes, $f(x_i)\,\Delta x = x_i^2\,\Delta x = (8/n^3)i^2$, y así

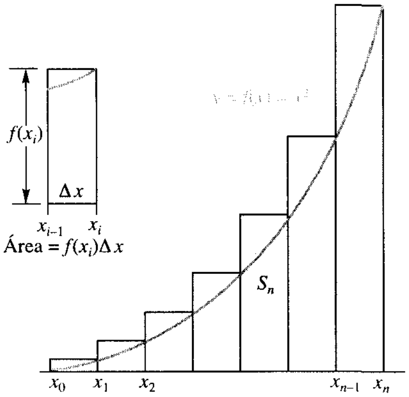
$$A(S_n) = \left[\frac{8}{n^3}(1^2) + \frac{8}{n^3}(2^2) + \cdots + \frac{8}{n^3}(n^2)\right]$$

$$= \frac{8}{n^3}[1^2 + 2^2 + \cdots + n^2]$$

$$= \frac{8}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] \qquad \text{(Fórmula para la suma especial 2)}$$

$$= \frac{8}{6}\left[\frac{2n^3+3n^2+n}{n^3}\right]$$

$$= \frac{8}{3}+\frac{4}{n}+\frac{4}{3n^2}$$



Polígono circunscrito

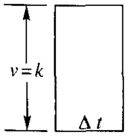
Figura 9

Otra vez, concluimos que

$$A(R) = \lim_{n\to\infty} A(S_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}\right) = \frac{8}{3}$$

Otro problema con el mismo tema Suponga que un objeto está viajando a lo largo del eje x, de tal manera que su velocidad en el instante t está dada por $v = f(t) = \frac{1}{4}t^3 + 1$ pies por segundo. ¿Cuánto avanzará entre $t = 0$ y $t = 3$? Este problema puede resolverse por el método de ecuaciones diferenciales (sección 3.9), pero tenemos algo distinto en mente.

Nuestro punto de partida es el hecho familiar que, si un objeto viaja a velocidad constante k durante un intervalo de tiempo de longitud Δt, entonces la distancia recorrida es $k\ \Delta t$. Pero esto es exactamente el área de un rectángulo, el cual se muestra en la figura 10.



Distancia = $k\ \Delta t$

Figura 10

Ahora considérese el problema dado, en donde $v = f(t) = \frac{1}{4}t^3 + 1$. La gráfica se muestra en la parte superior de la figura 11. Divídase el intervalo $[0, 3]$ en n subintervalos de longitud $\Delta t = 3/n$ por medio de los puntos $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 3$. Después considérense los correspondientes polígonos circunscritos S_n que se muestran en la parte inferior de la figura 11 (también podríamos haber considerado los polígonos inscritos). Su área, $A(S_n)$, debe ser una buena aproximación de la distancia recorrida, en especial si Δt es pequeña, ya que en cada subintervalo la velocidad real es casi igual a una constante (el valor de v al final del subintervalo). Además, esta aproximación debe ser cada vez mejor conforme n se hace más grande. Llegamos a la conclusión de que la distancia exacta recorrida es $\lim_{n\to\infty} A(S_n)$; es decir, es el área de la región debajo de la curva de la velocidad entre $t = 0$ y $t = 3$.

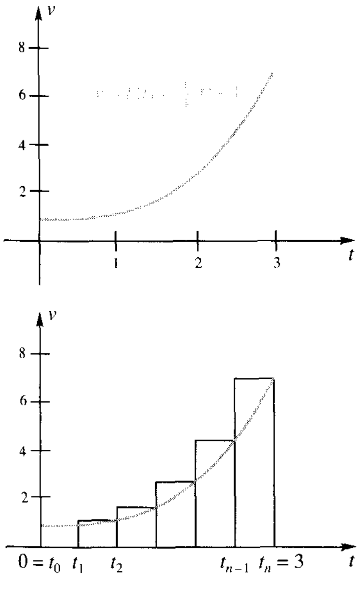


Figura 11

Para calcular $A(S_n)$, observe que $t_i = 3i/n$, y por lo tanto el área del i-ésimo rectángulo es

$$f(t_i)\ \Delta t = \left[\frac{1}{4}\left(\frac{3i}{n}\right)^3 + 1\right]\frac{3}{n} = \frac{81}{4n^4}i^3 + \frac{3}{n}$$

Por lo que,

$$\begin{aligned}
A(S_n) &= f(t_1)\ \Delta t + f(t_2)\ \Delta t + \cdots + f(t_n)\ \Delta t \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\ \Delta t \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{81}{4n^4}i^3 + \frac{3}{n}\right) \\
&= \frac{81}{4n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 + \sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n} \\
&= \frac{81}{4n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + \frac{3}{n}\cdot n \qquad \text{(Fórmula para la suma especial 3).} \\
&= \frac{81}{16}\left[n^2\frac{(n^2+2n+1)}{n^4}\right] + 3 \\
&= \frac{81}{16}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + 3
\end{aligned}$$

Concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} A(S_n) = \frac{81}{16} + 3 = \frac{129}{16} \approx 8.06$$

El objeto recorrió alrededor de 8.06 pies, entre $t = 0$ y $t = 3$.

Lo que fue cierto en este ejemplo es verdadero para cualquier objeto en movimiento con velocidad positiva. *La distancia recorrida es el área de la región bajo la curva de la velocidad.*

Revisión de conceptos

1. El valor de $\sum_{i=1}^{5} 2i$ es ________ y el valor de $\sum_{i=1}^{5} 2$ es ________.

2. Si $\sum_{i=1}^{10} a_i = 9$ y $\sum_{i=1}^{10} b_i = 7$, entonces el valor de $\sum_{i=1}^{10} (3a_i - 2b_i) =$ _____ y el valor de $\sum_{i=1}^{10} (a_i + 4) =$ _____.

3. El área de un polígono ________ subestima (estima por defecto) el área de la región, mientras que el área de un polígono ________ sobreestima (estima por exceso) esta área.

4. El valor exacto de la región bajo la curva $y = [\![x]\!]$ entre 0 y 4 es ________.

Conjunto de problemas 4.1

En los problemas del 1 al 8 encuentre los valores de la suma indicada.

1. $\sum_{k=1}^{6} (k - 1)$

2. $\sum_{i=1}^{6} i^2$

3. $\sum_{k=1}^{7} \frac{1}{k + 1}$

4. $\sum_{l=3}^{8} (l + 1)^2$

5. $\sum_{m=1}^{8} (-1)^m 2^{m-2}$

6. $\sum_{k=3}^{7} \frac{(-1)^k 2^k}{(k + 1)}$

7. $\sum_{n=1}^{6} n \cos(n\pi)$

8. $\sum_{k=-1}^{6} k \operatorname{sen}(k\pi/2)$

En los problemas del 9 al 14 escriba la suma que se indica en la notación sigma.

9. $1 + 2 + 3 + \cdots + 41$

10. $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 50$

11. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{100}$

12. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{100}$

13. $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \cdots + a_{99}$

14. $f(w_1)\,\Delta x + f(w_2)\,\Delta x + \cdots + f(w_n)\,\Delta x$

En los problemas del 15 al 18 suponga que $\sum_{i=1}^{10} a_i = 40$ *y* $\sum_{i=1}^{10} b_i = 50$. *Calcule cada una de las sumas siguientes (véase el ejemplo 1).*

15. $\sum_{i=1}^{10} (a_i + b_i)$

16. $\sum_{n=1}^{10} (3a_n + 2b_n)$

17. $\sum_{p=0}^{9} (a_{p+1} - b_{p+1})$

18. $\sum_{q=1}^{10} (a_q - b_q - q)$

En los problemas del 19 al 24 utilice las fórmulas para las sumas especiales de la 1 a la 4 para encontrar cada una de las sumas.

19. $\sum_{i=1}^{100} (3i - 2)$

20. $\sum_{i=1}^{10} [(i - 1)(4i + 3)]$

21. $\sum_{k=1}^{10} (k^3 - k^2)$

22. $\sum_{k=1}^{10} 5k^2(k + 4)$

23. $\sum_{i=1}^{n} (2i^2 - 3i + 1)$

24. $\sum_{i=1}^{n} (2i - 3)^2$

25. Sume ambos lados de las dos igualdades que siguen, despeje S y de aquí proporcione otra demostración de la fórmula 1.

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 2) + (n - 1) + n$$
$$S = n + (n - 1) + (n - 2) + \cdots + 3 + 2 + 1$$

26. Demuestre la siguiente fórmula para una **suma geométrica**:

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = \frac{a - ar^{n+1}}{1 - r} \quad (r \neq 1)$$

Sugerencia: sea $S = a + ar + \cdots + ar^n$. Simplifique $S - rS$ y despeje S.

27. Utilice el problema 26 para calcular cada suma.

(a) $\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^k$

(b) $\sum_{k=1}^{10} 2^k$

28. Utilice una deducción como la del problema 25 para obtener una fórmula para la **suma aritmética**:

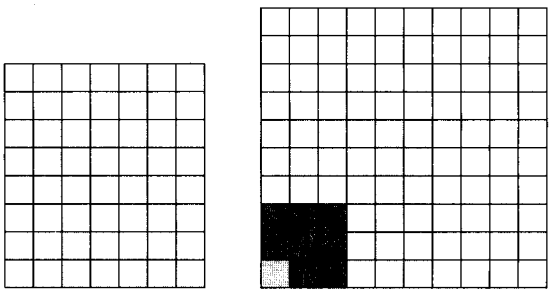
$$\sum_{k=0}^{n} (a + kd) = a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + (a + nd)$$

29. Utilice la identidad $(i + 1)^3 - i^3 = 3i^2 + 3i + 1$ para demostrar la fórmula de la suma especial 2.

30. Utilice la identidad $(i + 1)^4 - i^4 = 4i^3 + 6i^2 + 4i + 1$ para demostrar la fórmula de la suma especial 3.

31. Utilice la identidad $(i + 1)^5 - i^5 = 5i^4 + 10i^3 + 10i^2 + 5i + 1$ para demostrar la fórmula de la suma especial 4.

32. Utilice los diagramas de la figura 12 para establecer las fórmulas 1 y 3.



$1 + 2 + \cdots + n =$

$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 =$

Figura 12

C **33.** En estadística definimos la *media* $\bar{x}$ y la *varianza* s^2 de una sucesión de números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ por

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Encuentre $\bar{x}$ y s^2 para la sucesión de números 2, 5, 7, 8, 9, 10, 14.

34. Mediante las definiciones del problema 33 encuentre $\bar{x}$ y s^2 para cada sucesión de números.

(a) 1, 1, 1, 1, 1

(b) 1001, 1001, 1001, 1001, 1001

(c) 1, 2, 3

(d) 1,000,001; 1,000,002; 1,000,003

35. Utilice las definiciones del problema 33 para demostrar que cada igualdad es verdadera.

(a) $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = 0$

(b) $s^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \bar{x}^2$

36. Con base en su respuesta a las partes (a) y (b) del problema 34, haga una conjetura acerca de la varianza de n números idénticos. Demuestre su conjetura.

37. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cualesquiera números reales. Encuentre el valor de c que minimiza $\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)^2$.

38. En la canción *Los doce días de Navidad*, mi verdadero amor me dio 1 regalo el primer día, 1 + 2 regalos el segundo día, 1 + 2 + 3 regalos el tercer día, y así sucesivamente durante 12 días.

(a) Encuentre el número total de regalos otorgados en 12 días.

(b) Encuentre una fórmula para T_n, el número de regalos dados durante una Navidad de n días.

39. Un tendero colocó naranjas en una pila piramidal. Si la capa inferior es rectangular con 10 hileras de 16 naranjas y en la capa superior tiene una sola hilera de naranjas, ¿cuántas naranjas hay en la pila?

40. Responda la misma pregunta del problema 39, si la capa inferior tiene 50 hileras de 60 naranjas.

41. Generalice el resultado de los problemas 39 y 40 al caso de m hileras de n naranjas.

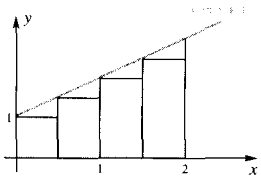
42. Determine una fórmula sencilla para la suma

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

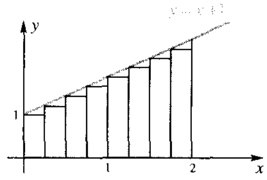
Sugerencia: $\frac{1}{i(i+1)}=\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}$.

En los problemas del 43 al 48 encuentre el área del polígono inscrito o circunscrito que se indica.

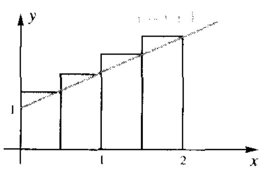
43.



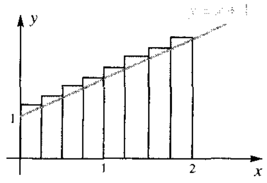
44.



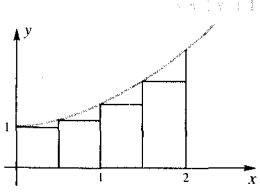
45.



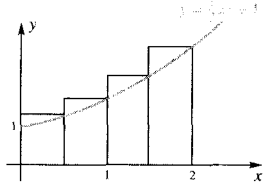
46.



47.



48.



En los problemas del 49 al 52 haga un bosquejo de la gráfica de la función que se da en el intervalo [a, b]; después divida [a, b] en n subintervalos iguales. Por último, calcule el área del correspondiente polígono circunscrito.

49. $f(x) = x + 1; a = -1, b = 2, n = 3$

50. $f(x) = 3x - 1; a = 1, b = 3, n = 4$

$\boxed{C}$ **51.** $f(x) = x^2 - 1; a = 2, b = 3, n = 6$

$\boxed{C}$ **52.** $f(x) = 3x^2 + x + 1; a = -1, b = 1, n = 10$

En los problemas del 53 al 58 encuentre el área de la región bajo la curva $y = f(x)$ en el intervalo [a, b]. Para hacer esto, divida el intervalo [a, b] en n subintervalos iguales, calcule el área del correspondiente polígono circunscrito y después haga $n \to \infty$. (Véase el ejemplo para $y = x^2$ en el texto.)

53. $y = x + 2; a = 0, b = 1$

54. $y = \frac{1}{2}x^2 + 1; a = 0, b = 1$

55. $y = 2x + 2; a = -1, b = 1$. *Sugerencia:* $x_i = -1 + \frac{2i}{n}$

56. $y = x^2; a = -2, b = 2$

$\boxed{\approx}$ **57.** $y = x^3; a = 0, b = 1$

$\boxed{\approx}$ **58.** $y = x^3 + x; a = 0, b = 1$

59. Suponga que un objeto está viajando a lo largo del eje x, de tal manera que su velocidad a los t segundos es $v = t + 2$ pies por segundo. ¿Qué distancia recorrió entre $t = 0$ y $t = 1$? *Sugerencia:* véase el análisis del problema de la velocidad al final de esta sección y utilice el resultado del problema 53.

60. Siga las instrucciones del problema 59 dado que $v = \frac{1}{2}t^2 + 2$. Puede utilizar el resultado del problema 54.

61. Denótese con A_a^b el área bajo la curva $y = x^2$ en el intervalo $[a, b]$.

(a) Demuestre que $A_0^b = b^3/3$. *Sugerencia:* $\Delta x = b/n$, de modo que $x_i = ib/n$; utilice polígonos circunscritos.

(b) Demuestre que $A_a^b = b^3/3 - a^3/3$. Suponga que $a \geq 0$.

62. Suponga que un objeto, que se mueve a lo largo del eje x, tiene velocidad $v = t^2$ metros por segundo a los t segundos. ¿Qué distancia viajó entre $t = 3$ y $t = 5$? Véase el problema 61.

63. Utilice los resultados del problema 61 para calcular el área bajo la curva $y = x^2$ en cada uno de los siguientes intervalos.

(a) $[0, 5]$ (b) $[1, 4]$ (c) $[2, 5]$

64. Con base en las fórmulas especiales para la suma de la 1 a la 4, podría suponer que

$$1^m + 2^m + 3^m + \cdots + n^m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + C_n$$

donde C_n es un polinomio en n de grado m. Suponga que esto es cierto (que lo es) y, para $a \geq 0$, sea $A_a^b(x^m)$ el área bajo la curva $y = x^m$ en el intervalo $[a, b]$.

(a) Demuestre que $A_0^b(x^m) = \frac{b^{m+1}}{(m+1)}$.

(b) Demuestre que $A_a^b(x^m) = \frac{b^{m+1}}{m+1} - \frac{a^{m+1}}{m+1}$.

65. Utilice los resultados del problema 64 para calcular cada una de las siguientes áreas.

(a) $A_0^2(x^3)$ (b) $A_1^2(x^3)$ (c) $A_1^2(x^5)$ (d) $A_0^2(x^9)$

66. Deduzca las fórmulas $A_n = \frac{1}{2}nr^2 \operatorname{sen}(2\pi/n)$ y $B_n = nr^2 \tan(\pi/n)$ para las áreas de los polígonos regulares de n lados inscritos y circunscritos en un círculo de radio r. Después demuestre que $\lim_{n\to\infty} A_n$ y $\lim_{n\to\infty} B_n$ ambos son πr^2.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** 30; 10 **2.** 13; 49 **3.** inscrito; circunscrito **4.** 6

4.2 La integral definida

Todos los preparativos están hechos; estamos listos para definir la integral definida. Newton y Leibniz introdujeron las primeras versiones de este concepto. Sin embargo, fue Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) quien nos dio la definición moderna. En la formulación de esta definición nos guían las ideas analizadas en la sección precedente. La primera noción es la de una suma de Riemann.

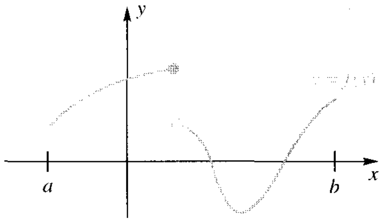
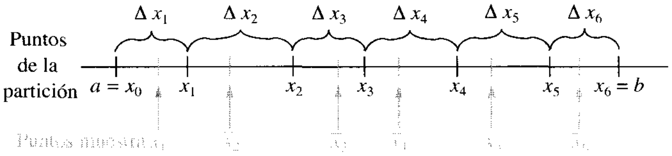


Figura 1

Sumas de Riemann Considere una función f definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. Puede haber valores tanto positivos como negativos en el intervalo; incluso, no necesita ser continua. Su gráfica podría parecerse a la de la figura 1.

Suponga una partición P del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos (no necesariamente de la misma longitud) por medio de los puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ y sea $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ selecciónese un punto $\bar{x}_i$ (que puede ser un punto frontera); le llamamos *punto muestra* para el i-ésimo subintervalo. Un ejemplo se estas construcciones se muestra en la figura 2 para $n = 6$.



Una partición de [a, b] con puntos muestra $\bar{x}_i$

Figura 2

A la suma

$$R_P = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\, \Delta x_i$$

le llamamos una **suma de Riemann** para f correspondiente a la partición P. Su interpretación geométrica se muestra en la figura 3.

Una suma de Riemann interpretada como una suma algebraica de áreas

$$\sum_{i=1}^{6} f(\bar{x}_i)\, \Delta x_i = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$$

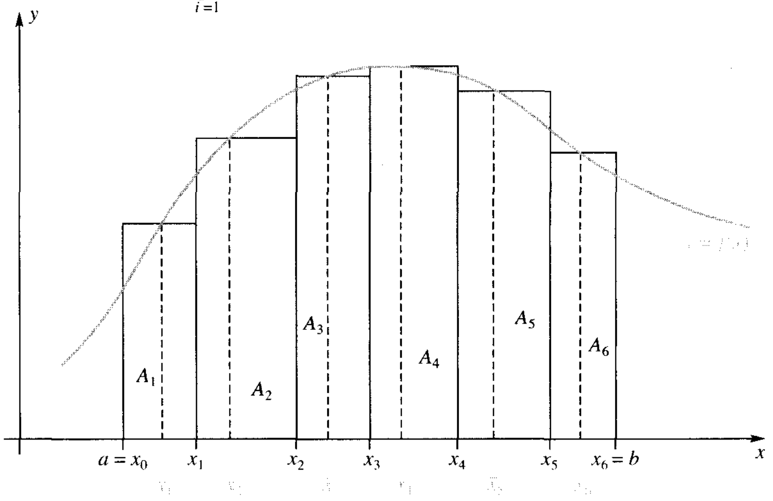


Figura 3

EJEMPLO 1 Evalúe la suma de Riemann para $f(x) = x^2 + 1$, en el intervalo $[-1, 2]$; utilice la partición de puntos igualmente espaciados $-1 < -0.5 < 0 < 0.5 < 1 < 1.5 < 2$ y tome como punto muestral $\overline{x}_i$ al punto medio del i-ésimo subintervalo.

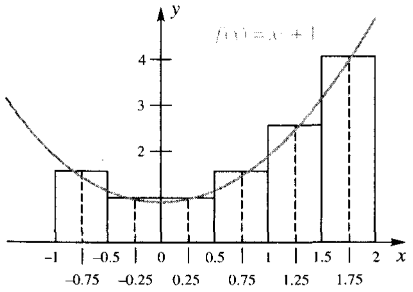


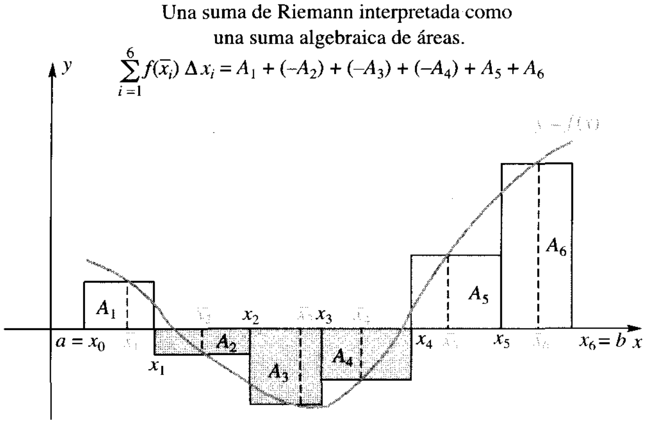
Figura 4

SOLUCIÓN Observe la gráfica en la figura 4.

$$
\begin{aligned}
R_P &= \sum_{i=1}^{6} f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i \\
&= [f(-0.75) + f(-0.25) + f(0.25) + f(0.75) + f(1.25) + f(1.75)](0.5) \\
&= [1.5625 + 1.0625 + 1.0625 + 1.5625 + 2.5625 + 4.0625](0.5) \\
&= 5.9375
\end{aligned}
$$

■

Las funciones en las figuras 3 y 4 fueron positivas. A consecuencia de esto, la suma de Riemann es simplemente la suma de las áreas de los rectángulos. Pero, ¿qué pasa si f es negativa? En este caso, un punto muestra, $\overline{x}_i$ con la propiedad de que $f(\overline{x}_i) < 0$ llevará a un rectángulo que está completamente por debajo del eje x, y el producto $f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i$ será negativo. Esto significa que la contribución de tal rectángulo a la suma de Riemann es negativa. La figura 5 ilustra esto.


Una suma de Riemann interpretada como una suma algebraica de áreas.

$$\sum_{i=1}^{6} f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i = A_1 + (-A_2) + (-A_3) + (-A_4) + A_5 + A_6$$

Figura 5

EJEMPLO 2 Evalúe la suma de Riemann R_p para

$$f(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 4) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$$

en el intervalo $[0, 5]$; utilice la partición P con puntos de la partición $0 < 1.1 < 2 < 3.2 < 4 < 5$ y los correspondientes puntos muestra $\overline{x}_1 = 0.5$, $\overline{x}_2 = 1.5$, $\overline{x}_3 = 2.5$, $\overline{x}_4 = 3.6$, y $\overline{x}_5 = 5$.

SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
R_P &= \sum_{i=1}^{5} f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i \\
&= f(\overline{x}_1)\,\Delta x_1 + f(\overline{x}_2)\,\Delta x_2 + f(\overline{x}_3)\,\Delta x_3 + f(\overline{x}_4)\,\Delta x_4 + f(\overline{x}_5)\,\Delta x_5 \\
&= f(0.5)(1.1 - 0) + f(1.5)(2 - 1.1) + f(2.5)(3.2 - 2) \\
&\quad + f(3.6)(4 - 3.2) + f(5)(5 - 4) \\
&= (7.875)(1.1) + (3.125)(0.9) + (-2.625)(1.2) + (-2.944)(0.8) + 18(1) \\
&= 23.9698
\end{aligned}
$$

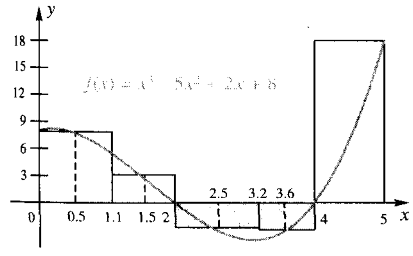


Figura 6

La correspondiente representación gráfica aparece en la figura 6. ■

Definición de la integral definida Ahora supóngase que P, Δx_i y $\overline{x}_i$ tienen los significados dados anteriormente. Además, sea $\|P\|$, llamada la **norma** de P, y que denota la longitud del subintervalo más largo de la partición P. Así, en el ejemplo 1, $\|P\| = 0.5$; en el ejemplo 2, $\|P\| = 3.2 - 2 = 1.2$.

Definición **Integral definida**

Sea f una función que está definida en el intervalo cerrado $[a, b]$. Si

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\, \Delta x_i$$

existe, decimos que f es integrable en $[a, b]$. Además, $\int_a^b f(x)\, dx$, denominada **integral definida** (o integral de Riemann) de f de a hacia b, entonces está dada por

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\, \Delta x_i$$

Notación para integrales

Hemos elegido como nuestro símbolo para la integral definida la misma "S" alargada, como lo hicimos para la antiderivada en el capítulo anterior. La "S", por supuesto, se establece por "suma", ya que la integral definida es el límite de un tipo particular de suma, la suma de Riemann.

La conexión entre la antiderivada del capítulo 3 y la integral definida en esta sección se aclarará en la sección 4.4, cuando presentemos el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo.

El corazón de la definición es la última línea. El concepto capturado en esa ecuación surge de nuestro análisis del área en la sección anterior. Sin embargo, hemos modificado de forma considerable la noción presentada aquí. Por ejemplo, ahora permitimos que f sea negativa en parte o en todo $[a, b]$; también utilizamos particiones con subintervalos que pueden tener longitudes diferentes y permitimos que $\overline{x}_i$ sea *cualquier* punto del i-ésimo subintervalo. Debido a que hemos realizado estos cambios, es importante establecer de manera precisa cómo se relaciona la integral definida con el área. En general, $\int_a^b f(x)\, dx$ proporciona el *área con signo* de la región encerrada entre la curva $y = f(x)$ y el eje x en el intervalo $[a, b]$, queriendo decir que se asocia un signo positivo a las áreas de partes que están por arriba del eje x y se asocia un signo negativo a las áreas de partes que están abajo del eje x. En símbolos,

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = A_{\text{arriba}} - A_{\text{abajo}}}$$

donde A_{arriba} y A_{abajo} son como se muestran en la figura 7.

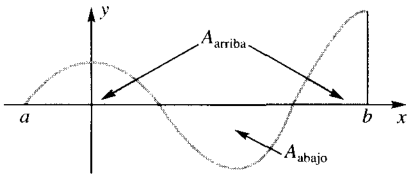


Figura 7

El significado de la palabra *límite* en la definición de integral definida es más general que en el uso que se ha dado antes y debe explicarse. La igualdad

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\, \Delta x_i = L$$

significa que, en correspondencia a cada $\varepsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\, \Delta x_i - L \right| < \varepsilon$$

para todas las sumas de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\, \Delta x_i$ para f en $[a, b]$, para las cuales la norma $\|P\|$ de la partición asociada es menor que δ. En este caso, decimos que el límite dado existe y tiene el valor L.

Esto fue un bocado y no lo digeriremos en un momento ahora. Simplemente afirmamos que los teoremas usuales sobre límites también se cumplen para esta clase de límite.

En cuanto al símbolo $\int_a^b f(x)\, dx$, podríamos llamar a a extremo inferior y a b extremo superior de la integral. No obstante, la mayoría de los autores utilizan la terminología **límite inferior** de integración y **límite superior** de integración, que está bien a condición de que nos demos cuenta de que este uso de la palabra *límite* no tiene nada que ver con su significado más técnico.

En nuestra definición de $\int_a^b f(x)\,dx$, de manera implícita supusimos que $a < b$. Con las definiciones siguientes, eliminamos esa restricción.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx, \quad a > b$$

Por lo tanto,

$$\int_2^2 x^3\,dx = 0, \qquad \int_6^2 x^3\,dx = -\int_2^6 x^3\,dx$$

Por último, señalamos que x es una **variable muda** en el símbolo $\int_a^b f(x)\,dx$. Con esto queremos decir que x puede reemplazarse por cualquier otra letra (con tal que, por supuesto, ésta se sustituya en cada lugar que se presente). Por lo tanto,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$$

¿Cuáles funciones son integrables? No toda función es integrable en un intervalo cerrado $[a, b]$. Por ejemplo, la función no acotada

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

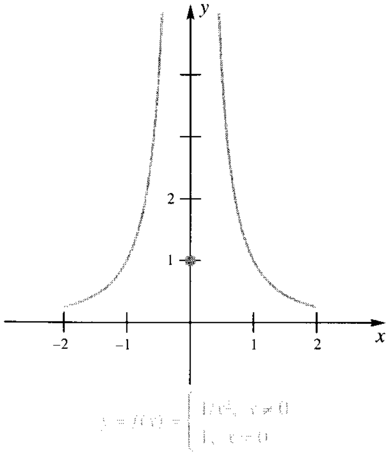


Figura 8

la cual se grafica en la figura 8, no es integrable en $[-2, 2]$. Puede demostrarse que para esta función no acotada, la suma de Riemann puede hacerse arbitrariamente grande. Por lo tanto, el límite de la suma de Riemann en $[-2, 2]$ no existe.

Incluso, algunas funciones acotadas pueden no ser integrables, pero tienen que ser muy complicadas (para un ejemplo, véase el problema 39). El teorema A (a continuación) es el más importante respecto a la integrabilidad. Desafortunadamente, es demasiado difícil demostrarlo aquí, lo dejamos para libros de cálculo avanzado.

Teorema A Teorema de integrabilidad

Si f es acotada en $[a, b]$ y si f es continua, excepto en un número finito de puntos, entonces f es integrable en $[a, b]$. En particular, si f es continua en todo el intervalo $[a, b]$, es integrable en $[a, b]$.

Como una consecuencia de este teorema, las funciones que están a continuación son integrables en todo intervalo cerrado $[a, b]$.

1. Funciones polinomiales.
2. Funciones seno y coseno.
3. Funciones racionales, con tal que el intervalo $[a, b]$ no contenga puntos en donde el denominador sea cero.

Cálculo de integrales definidas El saber que una función es integrable nos permite calcular su integral mediante una **partición regular** (es decir, una partición con subintervalos de igual longitud) y la elección de los puntos muestra $\overline{x}_i$ de cualquier forma conveniente para nosotros. Los ejemplos 3 y 4 incluyen polinomios que, lo acabamos de aprender, son integrables.

EJEMPLO 3 Evalúe $\int_{-2}^{3}(x + 3)\,dx$.

SOLUCIÓN Divídase el intervalo $[-2, 3]$ en n subintervalos iguales, cada uno de longitud $\Delta x = 5/n$. En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ utilícese $\overline{x}_i = x_i$ como el punto muestra. Entonces

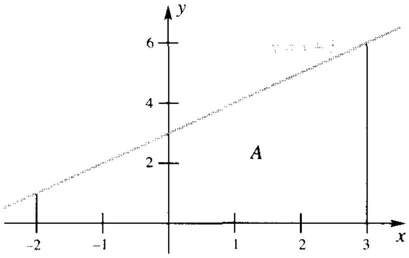
$$\begin{aligned}
x_0 &= -2\\
x_1 &= -2 + \Delta x = -2 + \frac{5}{n}\\
x_2 &= -2 + 2\,\Delta x = -2 + 2\left(\frac{5}{n}\right)\\
&\vdots\\
x_i &= -2 + i\,\Delta x = -2 + i\left(\frac{5}{n}\right)\\
&\vdots\\
x_n &= -2 + n\,\Delta x = -2 + n\left(\frac{5}{n}\right) = 3
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(x_i) = x_i + 3 = 1 + i(5/n)$, de modo que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[1 + i\left(\frac{5}{n}\right)\right]\frac{5}{n}\\
&= \frac{5}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{25}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\\
&= \frac{5}{n}(n) + \frac{25}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] \qquad \text{(Fórmula para la suma especial 1)}\\
&= 5 + \frac{25}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Como P es una partición regular, $\|P\| \to 0$ es equivalente a $n \to \infty$. Concluimos que

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{3}(x + 3)\,dx &= \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[5 + \frac{25}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]\\
&= \frac{35}{2}
\end{aligned}$$

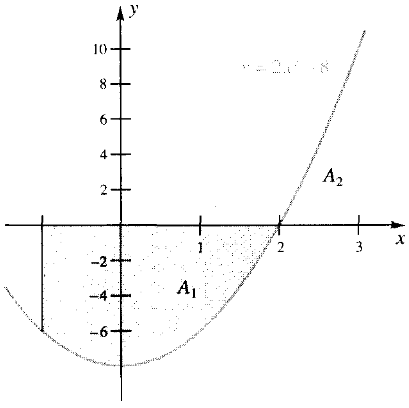


$\int_{-2}^{3}(x + 3)\,dx = A = \frac{35}{2}$

Figura 9

Con facilidad podemos verificar nuestra respuesta, ya que la integral pedida da el área del trapecio de la figura 9. La conocida fórmula para el área de un trapecio $A = \frac{1}{2}(a + b)h$ da $\frac{1}{2}(1 + 6)5 = 35/2$. ■

EJEMPLO 4 Evalúe $\int_{-1}^{3}(2x^2 - 8)\,dx$.



$\int_{-1}^{3}(2x^2 - 8)\,dx = -A_1 + A_2 = -\frac{40}{3}$

Figura 10

Sentido común

Dada la gráfica de una función, siempre podemos hacer una estimación para el valor de una integral definida utilizando el hecho de que es el área con signo

$$A_{\text{arriba}} - A_{\text{abajo}}$$

Por lo tanto, en el ejemplo 4 podríamos estimar el valor de la integral haciendo de cuenta que la parte por arriba del eje x es un triángulo y la parte por abajo del eje x es un rectángulo. Nuestra estimación es

$$\tfrac{1}{2}(1)(10) - (3)(6) = -13$$

SOLUCIÓN Aquí no hay fórmula de geometría elemental que nos ayude. La figura 10 sugiere que la integral es $-A_1 + A_2$, en donde A_1 y A_2 son las áreas de las regiones por abajo y por encima del eje x, respectivamente.

Sea P una partición regular de $[-1, 3]$ en n subintervalos, cada uno de longitud $\Delta x = 4/n$, En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, elíjase $\overline{x}_i$, como el punto frontera del lado derecho, de modo que $\overline{x}_i = x_i$. Entonces,

$$x_i = -1 + i\,\Delta x = -1 + i\left(\frac{4}{n}\right)$$

y

$$\begin{aligned} f(x_i) &= 2x_i^2 - 8 = 2\left[-1 + i\left(\frac{4}{n}\right)\right]^2 - 8 \\ &= -6 - \frac{16i}{n} + \frac{32i^2}{n^2} \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[-6 - \frac{16}{n}\,i + \frac{32}{n^2}\,i^2\right]\frac{4}{n} \\ &= -\frac{24}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{64}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{128}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= -\frac{24}{n}(n) - \frac{64}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} + \frac{128}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= -24 - 32\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{128}{6}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{3}(2x^2 - 8)\,dx &= \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[-24 - 32\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{128}{6}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= -24 - 32 + \frac{128}{3} = -\frac{40}{3} \end{aligned}$$

No es de sorprender que la respuesta sea negativa, ya que la región por debajo del eje x parece ser mayor que aquella que está por encima del eje x (véase la figura 10). Nuestra respuesta es cercana a la estimación dada en la nota al margen SENTIDO COMÚN; esto nos reafirma que nuestra respuesta probablemente sea correcta. ■

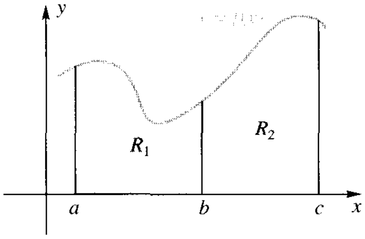


Figura 11

Propiedad aditiva para intervalos Nuestra definición de integral definida fue motivada por el problema de áreas para regiones curvas. Considérense las dos regiones curvas R_1 y R_2 de la figura 11 y sea $R = R_1 \cup R_2$. Es claro que

$$A(R) = A(R_1 \cup R_2) = A(R_1) + A(R_2)$$

lo cual sugiere que

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Rápidamente señalamos que esto no constituye una demostración de este hecho acerca de integrales, ya que, antes que nada, nuestro análisis de área en la sección 4.1 fue un poco informal y, segundo, nuestro diagrama supone que f es positiva, lo cual no necesariamente es cierto. Sin embargo, las integrales definidas satisfacen esta propiedad aditiva para intervalos y no importa cómo estén acomodados los tres puntos a, b y c. Dejamos la demostración rigurosa para trabajos más avanzados.

Teorema B **Propiedad aditiva para intervalos**

Si f es integrable en un intervalo que contenga a los puntos a, b y c, entonces

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

no importa el orden de a, b y c.

Por ejemplo,

$$\int_0^2 x^2\,dx = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 x^2\,dx$$

lo cual, de buena gana, la mayoría de las personas cree. Pero también es cierto que

$$\int_0^2 x^2\,dx = \int_0^3 x^2\,dx + \int_3^2 x^2\,dx$$

lo cual parece sorprendente. Si usted desconfía del teorema, podría evaluar realmente cada una de las integrales anteriores para ver que se cumple la igualdad.

Velocidad y posición Casi al final de la sección 4.1 explicamos cómo el área debajo de la curva de la velocidad es igual a la distancia recorrida, siempre que la función velocidad $v(t)$ sea positiva. En general, la posición (que podría ser positiva o negativa) es igual a la integral definida de la función velocidad (que podría ser positiva o negativa). Para ser más específicos, si $v(t)$ es la velocidad de un objeto en el instante t, donde $t \geq 0$, y si el objeto está en la posición 0 en el instante 0, entonces la posición del objeto en el instante a es $\int_0^a v(t)\,dt$.

EJEMPLO 5 Un objeto en el origen en el instante $t = 0$ tiene velocidad, medida en metros por segundo,

$$v(t) = \begin{cases} t/20, & \text{si } 0 \leq t \leq 40 \\ 2, & \text{si } 40 < t \leq 60 \\ 5 - t/20 & \text{si } t > 60 \end{cases}$$

Haga un bosquejo de la curva velocidad. Exprese la posición del objeto en $t = 140$ como una integral definida y evalúela mediante fórmulas de la geometría plana.

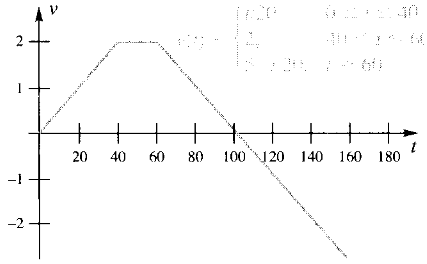


Figura 12

SOLUCIÓN La figura 12 muestra la curva solución. La posición en el instante 140 es igual a la integral definida $\int_0^{140} v(t)\,dt$, que puede evaluarse por medio de las formulas para el área de un triángulo y de un rectángulo; asimismo, con el uso de la propiedad aditiva para intervalos (teorema B):

$$\begin{aligned}\int_0^{140} v(t)\,dt &= \int_0^{40} \frac{t}{20}\,dt + \int_{40}^{60} 2\,dt + \int_{60}^{140} \left(5 - \frac{t}{20}\right) dt \\ &= 40 + 40 + 40 - 40 = 80\end{aligned}$$

■

Revisión de conceptos

1. Una suma de la forma $\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i$ se denomina _____.

2. El límite de la suma anterior para f definida en $[a, b]$ se llama una _____ y se simboliza por medio de _____.

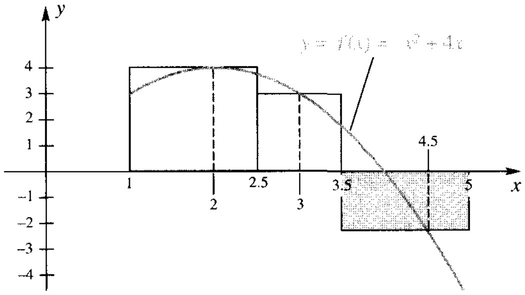
3. Geométricamente, la integral definida corresponde a un área con signo. En términos de A_{arriba} y A_{abajo}, $\int_a^b f(x)\,dx = =$ _____.

4. Por lo tanto, el valor de $\int_{-1}^{4} x\,dx$ es _____.

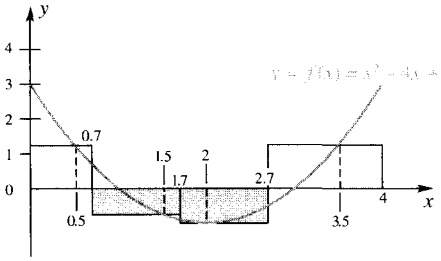
Conjunto de problemas 4.2

En los problemas 1 y 2 calcule la suma de Riemann que se sugiere para cada figura.

1.



2.



En los problemas del 3 al 6 calcule la suma de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i$ *para los datos que se dan.*

3. $f(x) = x - 1$; $P: 3 < 3.75 < 4.25 < 5.5 < 6 < 7$; $\bar{x}_1 = 3, \bar{x}_2 = 4, \bar{x}_3 = 4.75, \bar{x}_4 = 6, \bar{x}_5 = 6.5$

4. $f(x) = -x/2 + 3$; $P: -3 < -1.3 < 0 < 0.9 < 2$; $\bar{x}_1 = -2, \bar{x}_2 = -0.5, \bar{x}_3 = 0, \bar{x}_4 = 2$

☐C **5.** $f(x) = x^2/2 + x$; $[-2, 2]$ se dividió en ocho subintervalos iguales, $\bar{x}_i$ es el punto medio.

☐C **6.** $f(x) = 4x^3 + 1$; $[0, 3]$ se dividió en seis subintervalos iguales, $\bar{x}_i$ es el punto del extremo derecho.

En los problemas del 7 al 10 utilice los valores que se dan de a y b y exprese el límite dado como una integral definida.

7. $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (\bar{x}_i)^3\,\Delta x_i$; $a = 1, b = 3$

8. $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (\bar{x}_i + 1)^3\,\Delta x_i$; $a = 0, b = 2$

9. $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{x}_i^2}{1 + \bar{x}_i}\,\Delta x_i$; $a = -1, b = 1$

10. $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{sen} \bar{x}_i)^2\,\Delta x_i$; $a = 0, b = \pi$

≈ *En los problemas del 11 al 16 evalúe las integrales definidas con el uso de la definición, como en los ejemplos 3 y 4.*

11. $\int_0^2 (x + 1)\,dx$ **12.** $\int_0^2 (x^2 + 1)\,dx$

Sugerencia: utilice $\bar{x}_i = 2i/n$.

13. $\int_{-2}^{1} (2x + \pi)\,dx$ **14.** $\int_{-2}^{1} (3x^2 + 2)\,dx$

Sugerencia: utilice $\bar{x}_i = -2 + 3i/n$.

15. $\int_0^5 (x + 1)\,dx$ **16.** $\int_{-10}^{10} (x^2 + x)\,dx$

En los problemas del 17 al 22, por medio de la propiedad aditiva para intervalos y las fórmulas adecuadas para áreas de la geometría plana, calcule $\int_a^b f(x)\,dx$*, donde a y b son los extremos izquierdo y derecho para los cuales f está definida. Comience por elaborar una gráfica de la función que se da.*

17. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x \le 2 \\ x & \text{si } 2 < x \le 5 \end{cases}$

18. $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2(x - 1) + 2 & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$

19. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$

20. $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{4 - x^2} & \text{si } -2 \le x \le 0 \\ -2x - 2 & \text{si } 0 < x \le 2 \end{cases}$

21. $f(x) = \sqrt{A^2 - x^2}; -A \le x \le A$

22. $f(x) = 4 - |x|, -4 \le x \le 4$

En los problemas del 23 al 26 se da la función velocidad para un objeto. Suponiendo que el objeto está en el origen en el instante t = 0, determine la posición en el instante t = 4.

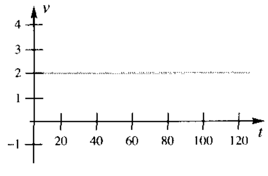
23. $v(t) = t/60$ **24.** $v(t) = 1 + 2t$

25. $v(t) = \begin{cases} t/2 & \text{si } 0 \le t \le 2 \\ 1 & \text{si } 2 < t \le 4 \end{cases}$

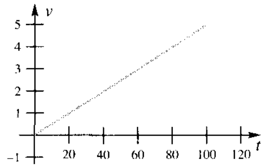
26. $v(t) = \begin{cases} \sqrt{4 - t^2} & \text{si } 0 \le t \le 2 \\ 0 & \text{si } 2 < t \le 4 \end{cases}$

En los problemas del 27 al 30 se graficó la función velocidad de un objeto. Utilice esta gráfica para determinar la posición del objeto en los instantes t = 20, 40, 60, 80, 100 y 120, suponiendo que el objeto está en el origen en el instante t = 0.

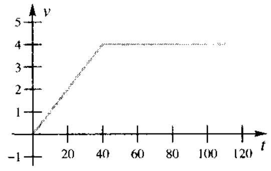
27.



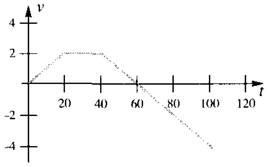
28.



29.



30.



31. Recuerde que $[\![x]\!]$ denota el mayor entero que es menor o igual a x. Calcule cada una de las integrales que están a continuación. Puede utilizar razonamiento geométrico y el hecho de que $\int_0^b x^2\,dx = b^3/3$. (Esto último se demuestra en el problema 34.)

(a) $\int_{-3}^{3} [\![x]\!]\,dx$ (b) $\int_{-3}^{3} [\![x]\!]^2\,dx$

(c) $\int_{-3}^{3} (x - [\![x]\!])\,dx$ (d) $\int_{-3}^{3} (x - [\![x]\!])^2\,dx$

(e) $\int_{-3}^{3} |x|\,dx$ (f) $\int_{-3}^{3} x|x|\,dx$

(g) $\int_{-1}^{2} |x|\llbracket x \rrbracket\,dx$ (h) $\int_{-1}^{2} x^2\llbracket x \rrbracket\,dx$

32. Sea f una función impar y g una función par, y suponga que $\int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx = 3$. Utilice un razonamiento geométrico para calcular cada una de las siguientes integrales:

(a) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ (b) $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx$

(c) $\int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx$ (d) $\int_{-1}^{1} [-g(x)]\,dx$

(e) $\int_{-1}^{1} xg(x)\,dx$ (f) $\int_{-1}^{1} f^3(x)g(x)\,dx$

33. Demuestre que $\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ al completar el siguiente argumento. Para la partición $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, elíjase $\overline{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$. Entonces, $R_P = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i\,\Delta x_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$. Ahora simplifíquese R_P (suma telescópica) y tómese el límite.

34. Demuestre que $\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$ por medio de un argumento parecido al del problema 33, pero utilizando $\overline{x}_i = \left[\frac{1}{3}(x_{i-1}^2 + x_{i-1}x_i + x_i^2)\right]^{1/2}$. Suponga que $0 \le a < b$.

CAS *Muchos sistemas de álgebra computacional (CAS, del inglés computer algebra sistem) permiten la evaluación de sumas de Riemann para la evaluación de los puntos frontera izquierdo, frontera derecho o medio. Mediante tal sistema, en los problemas del 35 al 38 evalúe las sumas de Riemann con 10 subintervalos utilizando evaluaciones de los puntos izquierdo, derecho y medio.*

35. $\int_0^2 (x^3 + 1)\,dx$ **36.** $\int_0^1 \tan x\,dx$

37. $\int_0^1 \cos x\,dx$ **38.** $\int_1^3 (1/x)\,dx$

39. Demuestre que la función f, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

no es integrable en $[0, 1]$. *Sugerencia:* demuestre que no importa qué tan pequeña sea la norma de la partición $\|P\|$,la suma de Riemann puede hacerse que tenga el valor 0 o 1.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** suma de Riemann **2.** integral definida; $\int_a^b f(x)\,dx$ **3.** $A_{\text{arriba}} - A_{\text{abajo}}$ **4.** $\frac{15}{2}$.

4.3
El Primer Teorema Fundamental del Cálculo

El cálculo es el estudio de límites y, hasta ahora, la derivada y la integral definida son los dos límites más importantes que hemos estudiado. La derivada de una función f es

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

y la integral definida es

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i$$

Parece que estas dos clases de límites no tienen relación entre sí. Sin embargo, hay una conexión muy estrecha, como lo veremos en esta sección.

Es habitual que a Newton y Leibniz se les atribuya el descubrimiento del cálculo de manera simultánea, aunque independiente. No obstante, los conceptos de la pendiente de una recta tangente (que condujo a la derivada) se conocían desde un tiempo anterior a ellos, pues fue estudiado por Blaise Pascal e Isaac Barrow años antes que Newton y Leibniz. Y Arquímedes había estudiado áreas de regiones curvas 1800 años antes, en el siglo III a. C. Entonces, ¿por qué se les adjudica el crédito a Newton y Leibniz? Ellos entendieron y explotaron la íntima relación entre antiderivadas e integrales definidas. Esta importante relación se denomina *Primer Teorema Fundamental del Cálculo.*

Primer Teorema Fundamental del Cálculo En su carrera de matemático ha encontrado varios "teoremas fundamentales". El *Primer Teorema Fundamental de la Aritmética* dice que un número entero se factoriza de manera única como un producto de primos. El *Teorema Fundamental del Álgebra* dice que un polinomio de grado n tiene n raíces, contando las raíces complejas y las multiplicidades. Cualquier "teorema fundamental" debe estudiarse con cuidado y luego consignarlo de manera permanente en la memoria.

Casi al final de la sección 4.1 estudiamos un problema en el que la velocidad de un objeto en el instante t está dada por $v = f(t) = \frac{1}{4}t^3 + 1$. Encontramos que la distancia recorrida desde el instante $t = 0$ y el instante $t = 3$ es igual a

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t = \frac{129}{16}$$

Al usar la terminología de la sección 4.2, ahora vemos que la distancia recorrida desde el instante $t = 0$ y el instante $t = 3$ es igual a la integral definida

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t = \int_0^3 f(t)\,dt$$

(Como la velocidad es positiva para toda $t \geq 0$, la distancia recorrida a lo largo del tiempo t es igual a la posición del objeto en el instante t. Si la velocidad fuese negativa para algún valor de t, entonces, en el instante t el objeto viajaría hacia atrás; en tal caso, la distancia recorrida no sería igual a la posición). Podemos utilizar el mismo razonamiento para encontrar que la distancia s recorrida desde el instante $t = 0$ hasta el instante $t = x$ es

$$s(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

La pregunta que ahora planteamos es ésta: ¿cuál es la derivada de s?

Como la derivada de la distancia recorrida (siempre y cuando la velocidad siempre sea positiva) es la velocidad, tenemos

$$s'(x) = v = f(x)$$

En otras palabras,

$$\boxed{\frac{d}{dx}s(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt = f(x)}$$

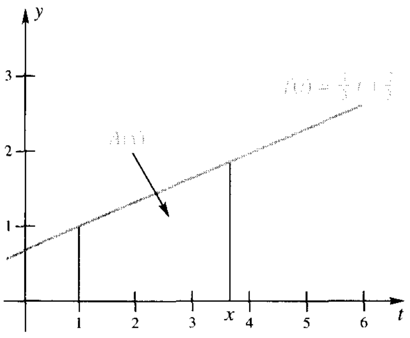


Figura 1

Ahora definimos $A(x)$ como el área bajo la curva de la gráfica de $y = \frac{1}{3}t + \frac{2}{3}$, por arriba del eje t y entre las rectas verticales $t = 1$ y $t = x$, donde $x \geq 1$ (véase la figura 1). Una función como ésta se denomina **función de acumulación,** ya que acumula el área bajo una curva desde un valor fijo ($t = 1$, en este caso) a un valor variable ($t = x$, en este caso). ¿Cuál es la derivada de A?

El área $A(x)$ es igual a la integral definida

$$A(x) = \int_1^x \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}t\right) dt$$

En este caso podemos evaluar esta integral definida mediante un argumento geométrico; $A(x)$ es el área de un trapecio, de modo que

$$A(x) = (x - 1)\frac{1 + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x\right)}{2} = \frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{5}{6}$$

Hecho esto, vemos que la derivada de A es

$$A'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

En otras palabras,

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_1^x \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}t\right) dt = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x}$$

Defina otra función de acumulación B como el área debajo de la curva $y = t^2$, por arriba del eje t, a la derecha del origen y a la izquierda de la recta $t = x$, en donde $x \geq 0$

Terminología

- La integral indefinida $\int f(x)\,dx$ es una *familia de funciones* de x.
- La integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es un *número*, siempre que a y b estén fijas.
- Si el límite superior en una integral definida es una variable x, entonces la integral definida [por ejemplo, $\int_a^x f(t)\,dt$] es una *función de x*.
- Una función de la forma $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ se denomina *función de acumulación.*

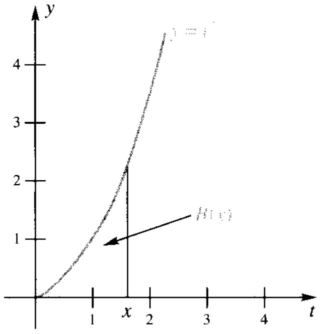


Figura 2

(véase la figura 2). Esta área está dada por la integral definida $\int_0^x t^2\,dt$. Para encontrar esta área, primero construimos una suma de Riemann. Utilizamos una partición regular de $[0, x]$ y evaluamos la función en el extremo de la derecha de cada subintervalo. Entonces $\Delta t = x/n$ y el extremo derecho del i-ésimo subintervalo es $t_i = 0 + i\Delta t = ix/n$. Por lo tanto, la suma de Riemann es

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t &= \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{ix}{n}\right)\frac{x}{n}\\ &= \frac{x}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{ix}{n}\right)^2\\ &= \frac{x^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\\ &= \frac{x^3}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

La integral definida es el límite de estas sumas de Riemann.

$$\begin{aligned}\int_0^x t^2\,dt &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{x^3}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= \frac{x^3}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{n^3}\\ &= \frac{x^3}{6}\cdot 2 = \frac{x^3}{3}\end{aligned}$$

Así, $B(x) = x^3/3$, de modo que la derivada de B es

$$B'(x) = \frac{d}{dx}\frac{x^3}{3} = x^2$$

En otras palabras,

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_0^x t^2\,dt = x^2}$$

Los resultados de las ecuaciones dentro de los últimos tres recuadros sugieren que la derivada de una función de acumulación es igual a la función que se está acumulando. Pero, ¿*siempre* es éste el caso? Y, ¿*por qué* esto es así?

Suponga que estamos utilizando una brocha “retráctil” para pintar la región debajo de la curva. (Por retráctil queremos decir que la brocha se hace más ancha o más angosta conforme se mueve hacia la derecha, de modo que siempre cubra justamente la altura que se pinta. La brocha es ancha cuando los valores del integrando son grandes y es angosta cuando los valores del integrando son pequeños. Véase la figura 3). Con esta analogía, el área acumulada es el área pintada y la tasa de acumulación es la tasa (velocidad) a la cual la pintura se está aplicando. Pero la velocidad a la que se está aplicando es igual al ancho de la brocha, en realidad, la altura de la función. Podemos establecer este resultado como sigue.

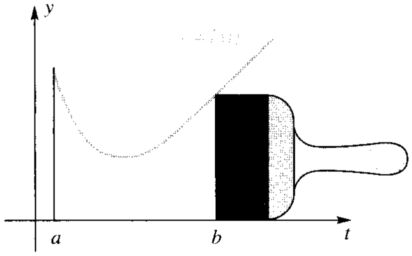


Figura 3

La tasa de acumulación en $t = x$ es igual al valor de la función que se está acumulando en $t = x$.

Esto, en pocas palabras, es el *Primer Teorema Fundamental del Cálculo*. Es *fundamental* porque relaciona la derivada y la integral definida, las dos clases más importantes de límites que hemos estudiado hasta ahora.

Teorema A **Primer Teorema Fundamental del Cálculo.**

Sea f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea x un punto (variable) en (a, b). Entonces,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Bosquejo de la demostración Por ahora presentamos un bosquejo de la demostración, el cual muestra las características importantes de la demostración, pero una demostración completa debe esperar hasta después que hayamos establecido otros resultados. Para x en $[a, b]$, definimos $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Entonces para x en (a, b)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt &= F'(x)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right]\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt\end{aligned}$$

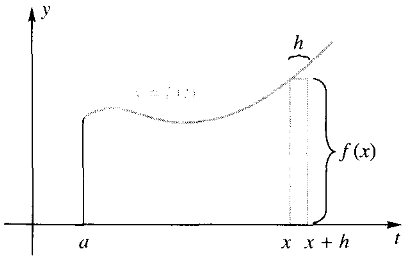


Figura 4

La última línea se deduce de la propiedad aditiva para intervalos (teorema 4.2B). Ahora, cuando h es pequeña, f no cambia mucho en el intervalo $[x, x + h]$. En este intervalo, f es aproximadamente igual a $f(x)$, el valor de f se evalúa en el extremo izquierdo del intervalo (véase la figura 4). El área bajo la curva $y = f(t)$ de x a $x + h$ es aproximadamente igual al área del rectángulo con ancho h y altura $f(x)$, esto es, $\int_x^{x+h} f(t)\,dt \approx hf(x)$. Por lo tanto,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt \approx \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[hf(x)] = f(x) \qquad \blacksquare$$

Por supuesto, el error en este argumento es que h nunca es cero, así que no podemos asegurar que f no cambia en el intervalo $[x, x + h]$. Daremos una demostración formal al final de esta sección.

Propiedades de comparación La consideración de las áreas de las regiones R_1 y R_2, en la figura 5, sugiere otra propiedad de las integrales definidas.

Teorema B **Propiedad de Comparación**

Si f y g son integrables en $[a, b]$ y si $f(x) \le g(x)$ para toda x en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

En lenguaje informal, pero descriptivo, decimos que la integral definida preserva desigualdades.

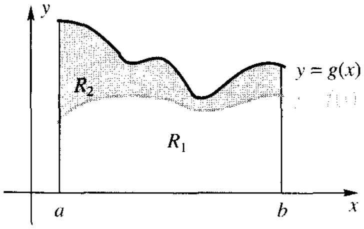


Figura 5

Demostración Sea P: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ una partición arbitraria de $[a, b]$ y para cada i sea $\bar{x}_i$ cualquier punto muestra en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. De manera sucesiva podemos concluir que

$$f(\bar{x}_i) \le g(\bar{x}_i)$$

$$f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i \le g(\bar{x}_i)\,\Delta x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} g(\bar{x}_i)\,\Delta x_i$$

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i \le \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\bar{x}_i)\,\Delta x_i$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

■

Teorema C **Propiedad de Acotamiento**

Si f es integrable en $[a, b]$ y $m \le f(x) \le M$ para toda x en $[a, b]$, entonces

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

Demostración La gráfica en la figura 6 nos ayuda a entender el teorema. Observe que $m(b-a)$ es el área del pequeño rectángulo inferior, $M(b-a)$ es el área del rectángulo mayor y $\int_a^b f(x)\,dx$ es el área debajo de la curva.

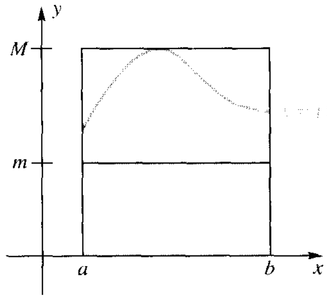


Figura 6

Para demostrar la desigualdad del lado derecho, sea $g(x) = M$ para toda x en $[a, b]$. Entonces, por el teorema B,

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

Sin embargo, $\int_a^b g(x)\,dx$ es igual al área del rectángulo con ancho $b-a$ y altura M. Así,

$$\int_a^b g(x)\,dx = M(b-a)$$

La desigualdad del lado izquierdo se maneja de manera análoga. ■

La integral definida es un operador lineal Anteriormente aprendimos que D_x, $\int \cdots dx$, y Σ son operadores lineales. Puede agregar $\int_a^b \cdots dx$ a la lista.

Teorema D **Linealidad de la integral definida**

Suponga que f y g son integrables en $[a, b]$ y que k es una constante. Entonces kf y $f+g$ son integrables y:

(i) $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$;

(ii) $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$; y

(iii) $\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$.

Demostración Las demostraciones de (i) y (ii) dependen de la linealidad de Σ y las propiedades de límites. Demostramos (ii).

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx &= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\bar{x}_i) + g(\bar{x}_i)]\Delta x_i \\ &= \lim_{\|P\|\to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(\bar{x}_i)\,\Delta x_i \right] \\ &= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i + \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\bar{x}_i)\,\Delta x_i \\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

La parte (iii) se deduce de (i) y (ii) si se escribe $f(x) - g(x)$ como $f(x) + (-1)g(x)$. ■

Demostración del Primer Teorema Fundamental del Cálculo. Con estos resultados a la mano, ahora estamos preparados para demostrar el *Primer Teorema Fundamental del Cálculo.*

Demostración En el bosquejo de la demostración que se presentó antes, definimos $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, y establecimos el hecho de que

$$F(x + h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

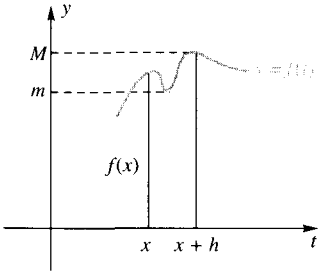


Figura 7

Suponga por el momento que $h > 0$ y sean m y M los valores mínimo y máximo, respectivamente, de f en el intervalo $[x, x + h]$ (véase la figura 7). Por el teorema C,

$$mh \leq \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq Mh$$

o

$$mh \leq F(x + h) - F(x) \leq Mh$$

Al dividir entre h, obtenemos

$$m \leq \frac{F(x + h) - F(x)}{h} \leq M$$

Ahora m y M en realidad dependen de h. Además, ya que f es continua, tanto m como M deben aproximarse a $f(x)$ cuando $h \to 0$. Así, por el Teorema del Emparedado,

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = f(x)$$

El caso en donde $h < 0$ se maneja de manera análoga. ■

Una consecuencia teórica de este teorema es que toda función continua f tiene una antiderivada F dada por la función de acumulación

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

No obstante, este hecho no es útil para obtener una fórmula sencilla para cualquier antiderivada particular. La sección 7.6 proporciona varios ejemplos de funciones importantes que están definidas como funciones de acumulación. En el capítulo 6 definiremos la función logaritmo natural como una función de acumulación.

EJEMPLO 1 Encuentre $\frac{d}{dx}\left[\int_1^x t^3\,dt\right]$.

SOLUCIÓN Por el *Primer Teorema Fundamental del Cálculo*,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^x t^3\,dt\right] = x^3 \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Determine $\frac{d}{dx}\left[\int_2^x \frac{t^{3/2}}{\sqrt{t^2+17}}\,dt\right]$.

SOLUCIÓN Retamos a cualquiera a que resuelva este ejemplo, evaluando primero la integral. Sin embargo, por medio del *Primer Teorema Fundamental del Cálculo,* es un problema trivial.

$$\frac{d}{dx}\left[\int_2^x \frac{t^{3/2}}{\sqrt{t^2+17}}\,dt\right] = \frac{x^{3/2}}{\sqrt{x^2+17}} \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Encuentre $\frac{d}{dx}\left[\int_x^4 \tan^2 u \cos u\,du\right], \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.

SOLUCIÓN Utilizar la variable muda u en lugar de t no debe preocupar a nadie. No obstante, el hecho de que x sea el límite inferior, en lugar del límite superior, es molesto. He aquí cómo manejar esta dificultad.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\int_x^4 \tan^2 u \cos u\,du\right] &= \frac{d}{dx}\left[-\int_4^x \tan^2 u \cos u\,du\right]\\ &= -\frac{d}{dx}\left[\int_4^x \tan^2 u \cos u\,du\right] = -\tan^2 x \cos x\end{aligned}$$

El intercambio de los límites superior e inferior está permitido si anteponemos un signo negativo.

(Recuérdese que por definición $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.) $\blacksquare$

EJEMPLO 4 Encuentre $D_x\left[\int_1^{x^2} (3t-1)\,dt\right]$ de dos formas.

SOLUCIÓN Una manera de encontrar esta derivada es mediante la aplicación del *Primer Teorema Fundamental del Cálculo*, aunque ahora tenemos una nueva complicación; el límite superior es x^2 en lugar de x. Este problema puede manejarse por medio de la regla de la cadena. Podemos considerar la expresión entre paréntesis como

$$\int_1^u (3t-1)\,dt \qquad \text{donde } u = x^2$$

Por medio de la regla de la cadena, la derivada con respecto a x de esta función compuesta es

$$D_u\left[\int_1^u (3t-1)\,dt\right]\cdot D_x u = (3u-1)(2x) = (3x^2-1)(2x) = 6x^3 - 2x$$

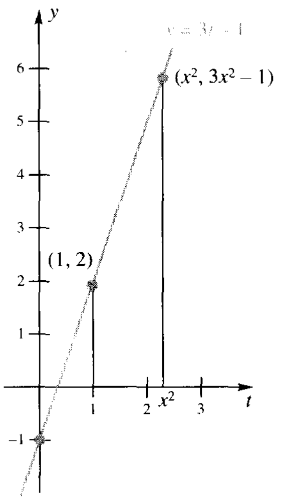


Figura 8

Otra manera de encontrar esta derivada es evaluar primero la integral definida y después utilizar nuestras reglas para derivadas. La integral definida $\int_1^{x^2} (3t-1)\,dt$ es el área debajo de la recta $y = 3t - 1$ entre $t = 1$ y $t = x^2$ (véase la figura 8). Como el área de este trapecio es $\frac{x^2-1}{2}[2 + (3x^2-1)] = \frac{3}{2}x^4 - x^2 - \frac{1}{2}$,

$$\int_1^{x^2} (3t - 1)\,dt = \frac{3}{2}x^4 - x^2 - \frac{1}{2}$$

Por lo tanto,

$$D_x \int_1^{x^2} (3t - 1)\,dt = D_x\left(\frac{3}{2}x^4 - x^2 - \frac{1}{2}\right) = 6x^3 - 2x \qquad \blacksquare$$

La posición como velocidad acumulada En la sección anterior vimos cómo la posición de un objeto, que inicialmente está en el origen, es igual a la integral definida de la función velocidad. Con frecuencia, esto conduce a funciones de acumulación, como lo ilustra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Un objeto en el origen, en el instante $t = 0$, tiene velocidad, medida en metros por segundo,

$$v(t) = \begin{cases} t/20 & \text{si } 0 \le t \le 40 \\ 2 & \text{si } 40 < t \le 60 \\ 5 - t/20 & \text{si } t > 60 \end{cases}$$

¿Cuándo, si sucede, el objeto regresa al origen?

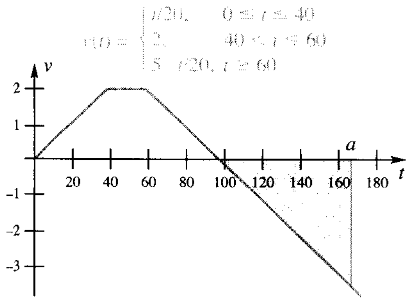


Figura 9

SOLUCIÓN Denótese con $F(a) = \int_0^a v(t)\,dt$ a la posición del objeto en el instante a. La acumulación se ilustra en la figura 9. Si el objeto regresa al origen en algún tiempo a, entonces a debe satisfacer $F(a) = 0$. El valor que se requiere de a seguramente es mayor que 100, ya que el área debajo de la curva entre 0 y 100 debe ser exactamente igual al área por arriba de la curva y por debajo del eje t, entre 100 y a. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} F(a) &= \int_0^a v(t)\,dt = \int_0^{100} v(t)\,dt + \int_{100}^a v(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}40\cdot 2 + 20\cdot 2 + \frac{1}{2}40\cdot 2 + \int_{100}^a (5 - t/20)\,dt \\ &= 120 + \frac{1}{2}(a - 100)(5 - a/20) \\ &= -130 + 5a - \frac{1}{40}a^2 \end{aligned}$$

Entonces debemos hacer $F(a) = 0$. Las dos soluciones para esta ecuación cuadrática son $a = 100 \pm 40\sqrt{3}$. Tomando el signo de menos da un valor menor que 100, que no puede ser la solución, por lo que se descarta. La otra solución es $100 + 40\sqrt{3} \approx 169.3$. Comprobemos esta solución:

$$\begin{aligned} F(a) &= \int_0^{100+40\sqrt{3}} v(t)\,dt \\ &= \int_0^{100} v(t)\,dt + \int_{100}^{100+40\sqrt{3}} v(t)\,dt \\ &= 120 + \frac{1}{2}\left(100 + 40\sqrt{3} - 100\right)\left(5 - \left(100 + 40\sqrt{3}\right)/20\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el objeto regresa al origen en el instante $t = 100 + 40\sqrt{3} \approx 169.3$ segundos. $\blacksquare$

Una forma de evaluar integrales definidas El siguiente ejemplo muestra la forma (es cierto que de una manera difícil) para evaluar una integral definida. Si este método parece largo y engorroso, sea paciente. La sección próxima trata con formas eficientes para evaluar integrales definidas.

EJEMPLO 6 Sea $A(x) = \int_1^x t^3\,dt$.

(a) Si $y = A(x)$, encuentre $dy/dx = x^3$.
(b) Encuentre la solución de la ecuación diferencial $dy/dx = x^3$ que satisface $y = 0$ cuando $x = 1$.
(c) Encuentre $\int_1^4 t^3\,dt$.

SOLUCIÓN

(a) Por el *Primer Teorema Fundamental del Cálculo*,

$$\frac{dy}{dx} = A'(x) = x^3$$

(b) Como la ecuación diferencial $dy/dx = x^3$ es separable, podemos escribir

$$dy = x^3\,dx$$

Al integrar ambos lados se obtiene

$$y = \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$$

Cuando $x = 1$ debemos tener $y = A(1) = \int_1^1 t^3\,dt = 0$. Así, elegimos C, de modo que

$$0 = A(1) = \frac{1^4}{4} + C$$

Por lo tanto, $C = -1/4$. Así que la solución de la ecuación diferencial es $y = x^4/4 - 1/4$.

(c) Como $y = A(x) = x^4/4 - 1/4$, tenemos

$$\int_1^4 t^3\,dt = A(4) = \frac{4^4}{4} - \frac{1}{4} = 64 - \frac{1}{4} = \frac{255}{4}$$ ■

Revisión de conceptos

1. Como $4 \le x^2 \le 16$ para toda x en $[2, 4]$, la propiedad de acotamiento de la integral definida nos permite decir ________ $\le \int_2^4 x^2\,dx \le$ ________.

2. $\frac{d}{dx}\left[\int_1^x \operatorname{sen}^3 t\,dt\right] =$ ________.

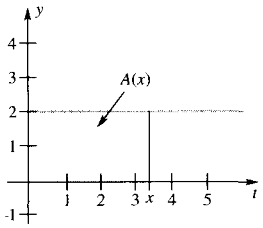
3. Por la linealidad, $\int_1^4 cf(x)\,dx = c \cdot$ ________ y $\int_2^5 \left(x + \sqrt{x}\right)dx = \int_2^5 x\,dx +$ ________.

4. Si $\int_1^4 f(x)\,dx = 5$ y si $g(x) \le f(x)$ para toda x en $[1, 4]$, entonces la propiedad de comparación nos permite decir que $\int_1^4 g(x)\,dx \le$ ________.

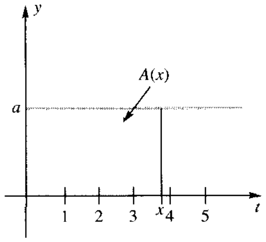
Conjunto de problemas 4.3

En los problemas del 1 al 8 determine una fórmula y haga la gráfica de la función de acumulación $A(x)$ que es igual al área indicada.

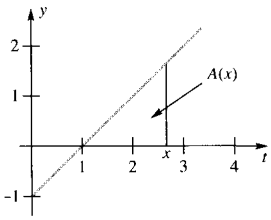
1.



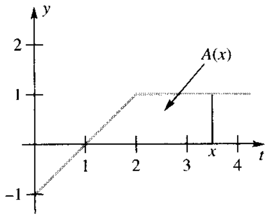
2.



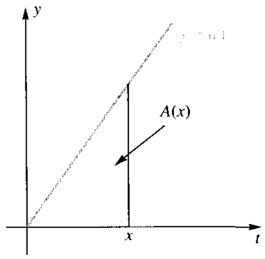
3.



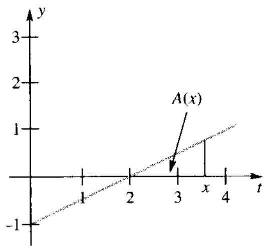
4.



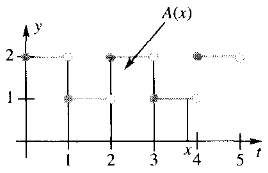
5.



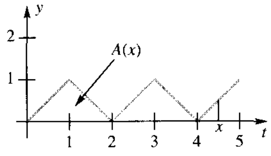
6.



7.



8.



Suponga que $\int_0^1 f(x)\,dx = 2$, $\int_1^2 f(x)\,dx = 3$, $\int_0^1 g(x)\,dx = -1$, *y* $\int_0^2 g(x)\,dx = 4$. *Utilice las propiedades de las integrales definidas (linealidad, aditividad para intervalos, etcétera). Para calcular cada una de las integrales en los problemas del 9 al 16.*

9. $\int_1^2 2f(x)\,dx$

10. $\int_0^2 2f(x)\,dx$

11. $\int_0^2 [2f(x) + g(x)]\,dx$

12. $\int_0^1 [2f(s) + g(s)]\,ds$

13. $\int_2^1 [2f(s) + 5g(s)]\,ds$

14. $\int_1^1 [3f(x) + 2g(x)]\,dx$

15. $\int_0^2 [3f(t) + 2g(t)]\,dt$

16. $\int_0^2 \left[\sqrt{3}f(t) + \sqrt{2}g(t) + \pi\right] dt$

En los problemas del 17 al 26, encuentre $G'(x)$.

17. $G(x) = \int_1^x 2t\,dt$

18. $G(x) = \int_x^1 2t\,dt$

19. $G(x) = \int_0^x \left(2t^2 + \sqrt{t}\right) dt$

20. $G(x) = \int_1^x \cos^3 2t \tan t\,dt;\ -\pi/2 < x < \pi/2$

21. $G(x) = \int_x^{\pi/4} (s - 2)\cot 2s\,ds;\ 0 < x < \pi/2$

22. $G(x) = \int_1^x xt\,dt$ (Téngase cuidado).

23. $G(x) = \int_1^{x^2} \operatorname{sen} t\,dt$

24. $G(x) = \int_1^{x^2+x} \sqrt{2z + \operatorname{sen} z}\,dz$

25. $G(x) = \int_{-x^2}^{x} \frac{t^2}{1 + t^2}\,dt$ *Sugerencia:* $\int_{-x^2}^{x} = \int_{-x^2}^{0} + \int_0^x$

26. $G(x) = \int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} t^5\,dt$

En los problemas del 27 al 32 determine el o los intervalos en los que la gráfica de $y = f(x)$, $x \geq 0$, es (a) creciente, (b) cóncava hacia arriba.

27. $f(x) = \int_0^x \frac{s}{\sqrt{1 + s^2}}\,ds$

28. $f(x) = \int_0^x \frac{1 + t}{1 + t^2}\,dt$

29. $f(x) = \int_0^x \cos u\,du$

30. $f(x) = \int_0^x (t + \operatorname{sen} t)\,dt$

31. $f(x) = \int_1^x \frac{1}{\theta}\,d\theta$

32. $f(x)$ es la función de acumulación $A(x)$ del problema 8.

En los problemas del 33 al 36 utilice la propiedad aditiva para intervalos y la linealidad para evaluar $\int_0^4 f(x)\,dx$. Comience por dibujar una gráfica de f.

33. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 4 - x & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$

35. $f(x) = |x - 2|$

36. $f(x) = 3 + |x - 3|$

37. Considere la función $G(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donde $f(t)$ oscila alrededor de la recta $y = 2$ sobre la región $[0, 10]$ del eje x y está dada por la figura 10.

(a) ¿En qué valores de esta región aparecen los máximos y mínimos locales de $G(x)$?

(b) ¿En dónde alcanza $G(x)$ su máximo y su mínimo absolutos?

(c) ¿En qué intervalos $G(x)$ es cóncava hacia abajo?

(d) Bosqueje la gráfica de $G(x)$.

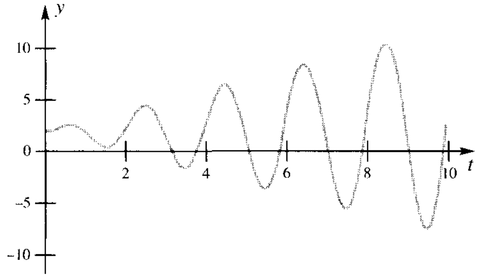


Figura 10

38. Realice el mismo análisis que hizo en el problema 37 para la función $G(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ dada por la figura 11, en donde $f(t)$ oscila alrededor de la recta $y = 2$ para el intervalo $[0, 10]$.

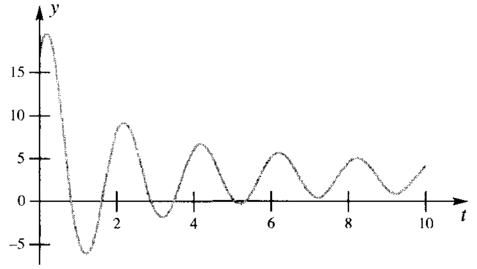


Figura 11

39. Sea $F(x) = \int_0^x (t^4 + 1)\,dt$.

(a) Encuentre $F(0)$.

(b) Sea $y = F(x)$. Aplique el *Primer Teorema Fundamental del Cálculo* para obtener $dy/dx = F'(x) = x^4 + 1$. Resuelva la ecuación diferencial $dy/dx = x^4 + 1$.

(c) Encuentre la solución de esta ecuación diferencial que satisface $y = F(0)$ cuando $x = 0$.

(d) Demuestre que $\int_0^1 (x^4 + 1)\,dx = \frac{6}{5}$.

40. Sea $G(x) = \int_0^x \operatorname{sen} t\,dt$.

(a) Encuentre $G(0)$ y $G(2\pi)$.

(b) Sea $y = G(x)$. Aplique el Primer Teorema Fundamental del Cálculo para obtener $dy/dx = G'(x) = \operatorname{sen} x$. Resuelva la ecuación diferencial $dy/dx = \operatorname{sen} x$.

(c) Encuentre la solución a esta ecuación diferencial que satisface $y = G(0)$ cuando $x = 0$.

(d) Demuestre que $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx = 2$.

(e) Encuentre todos los puntos extremos relativos y de inflexión de G en el intervalo $[0, 4\pi]$.

(f) Haga la gráfica de $y = G(x)$ en el intervalo $[0, 4\pi]$.

41. Demuestre que $1 \le \int_0^1 \sqrt{1 + x^4}\,dx \le \frac{6}{5}$. *Sugerencia:* explique por qué $1 \le \sqrt{1 + x^4} \le 1 + x^4$ para x en el intervalo cerrado $[0, 1]$; después utilice la propiedad de comparación (teorema B) y el resultado del problema 39d.

42. Demuestre que $2 \le \int_0^1 \sqrt{4 + x^4} \le \frac{21}{5}$. (Véase la sugerencia para el problema 41).

GC *En los problemas del 43 al 48 utilice una calculadora gráfica (GC, del inglés graphic calculator) para graficar cada integrando. Después utilice la propiedad de acotamiento (teorema C) para encontrar una cota inferior y una cota superior para cada integral definida.*

43. $\int_0^4 (5 + x^3)\,dx$

44. $\int_2^4 (x + 6)^5\,dx$

45. $\int_1^5 \left(3 + \frac{2}{x}\right)dx$

46. $\int_{10}^{20} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^5 dx$

47. $\int_{4\pi}^{8\pi} \left(5 + \frac{1}{20}\operatorname{sen}^2 x\right)dx,$

48. $\int_{0.2}^{0.4} (0.002 + 0.0001\cos^2 x)\,dx$

49. Encuentre $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x \frac{1 + t}{2 + t}\,dt.$

50. Encuentre $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x - 1}\int_1^x \frac{1 + t}{2 + t}\,dt.$

51. Encuentre $f(x)$ si $\int_1^x f(t)\,dt = 2x - 2.$

52. Encuentre $f(x)$ si $\int_0^x f(t)\,dt = x^2.$

53. Encuentre $f(x)$ si $\int_0^{x^2} f(t)\,dt = \frac{1}{3}x^3.$

54. ¿Existe alguna función f tal que $\int_0^x f(t)\,dt = x + 1$? Explique.

En los problemas del 55 al 60 decida si la afirmación dada es verdadera o falsa. Después justifique su respuesta.

55. Si f es continua y $f(x) \ge 0$ para toda x en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0.$

56. Si $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$, entonces $f(x) \ge 0$ para toda x en $[a, b]$.

57. Si $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, entonces $f(x) = 0$ para toda x en $[a, b]$.

58. Si $f(x) \ge 0$ y $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, entonces $f(x) = 0$ para toda x en $[a, b]$.

59. Si $\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$, entonces

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx > 0$$

60. Si f y g son continuas y $f(x) > g(x)$ para toda x en $[a, b]$, entonces $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| > \left|\int_a^b g(x)\,dx\right|$.

61. La velocidad de un objeto es $v(t) = 2 - |t - 2|$. Suponiendo que el objeto está en el origen en el instante $t = 0$, determine una fórmula para su posición en el instante t. (*Sugerencia:* tendrá que considerar de forma separada los intervalos $0 \le t \le 2$ y $t > 2$.) ¿Cuándo, si esto sucede, el objeto regresará al origen?

62. La velocidad de un objeto es

$$v(t) = \begin{cases} 5 & \text{si } 0 \le t \le 100 \\ 6 - t/100 & \text{si } 100 < t \le 700 \\ -1 & \text{si } t > 700 \end{cases}$$

(a) Suponiendo que el objeto está en el origen en el instante 0, determine una fórmula para su posición en el instante t ($t \ge 0$).

(b) ¿Cuál es la distancia más a la derecha del origen que alcanza este objeto?

(c) ¿Cuándo, si esto sucede, el objeto regresará al origen?

63. Sea f continua en $[a, b]$ y, por lo tanto, integrable allí. Demuestre que

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Sugerencia: $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$; utilice el teorema B.

64. Suponga que f' es integrable y $|f'(x)| \le M$ para toda x. Demuestre que $|f(x)| \le |f(a)| + M|x - a|$ para toda a.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** 8; 32 **2.** $\operatorname{sen}^3 x$ **3.** $\int_1^4 f(x)\,dx$; $\int_2^5 \sqrt{x}\,dx$ **4.** 5

4.4
El Segundo Teorema Fundamental del Cálculo y el método de sustitución

El Primer Teorema Fundamental del Cálculo, dado en la sección anterior, proporciona la relación inversa entre las integrales definidas y las derivadas. Aunque aún no es aparente, esta relación nos proporciona una herramienta poderosa para evaluar integrales definidas. Esta herramienta se denomina el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo y lo aplicaremos con mucho mayor frecuencia que el Primer Teorema Fundamental del Cálculo.

Teorema A Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

Sea f continua (y de aquí integrable) en $[a, b]$, y sea F cualquier antiderivada de f en $[a, b]$. Entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

¿Es fundamental?

El Segundo Teorema Fundamental del Cálculo es importante al proporcionar una herramienta poderosa para la evaluación de integrales definidas. Pero su significado más profundo subyace en la relación que establece entre la derivación y la integración; entre derivadas e integrales. Esta relación es sorprendentemente clara cuando volvemos a escribir la conclusión del teorema con $f(x)$ reemplazada por $g'(x)$.

$$\int_a^b g'(x)\,dx = g(b) - g(a)$$

Demostración Para x en el intervalo $[a, b]$, defínase $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Entonces, por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, $G'(x) = f(x)$ para toda x en (a, b). De esta manera, G es una antiderivada de f; pero F también es una antiderivada de f. Del teorema 3.6B, concluimos que como $F'(x) = G'(x)$ las funciones F y G difieren por una constante. Así, para toda x en (a, b)

$$F(x) = G(x) + C$$

Como las funciones F y G son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ (véase el problema 77), tenemos $F(a) = G(a) + C$ y $F(b) = G(b) + C$. Así que $F(x) = G(x) + C$ en el intervalo *cerrado* $[a, b]$.

Como $G(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$, tenemos

$$F(a) = G(a) + C = 0 + C = C$$

Por lo tanto,

$$F(b) - F(a) = [G(b) + C] - C = G(b) = \int_a^b f(t)\,dt \qquad \blacksquare$$

En la sección 3.8 definimos la integral *indefinida* como una antiderivada. En la sección 4.2 definimos la integral *definida* como el límite de una suma de Riemann. Usamos la misma palabra (integral) en ambos casos, aunque por el momento parece que tienen poco en común. El teorema A es fundamental porque muestra cómo la integración indefinida (antiderivación) y la integración definida (área con signo) están relacionadas. Antes de ir a los ejemplos, pregúntese por qué puede utilizar la palabra *cualquier* en el enunciado del teorema.

EJEMPLO 1 Demuestre que $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$,, donde k es una constante.

SOLUCIÓN $F(x) = kx$ es una antiderivada de $f(x) = k$. De esta manera, por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\int_a^b k\,dx = F(b) - F(a) = kb - ka = k(b-a) \qquad ■$$

EJEMPLO 2 Demuestre que $\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$.

SOLUCIÓN $F(x) = x^2/2$ es una antiderivada de $f(x) = x$. Por lo tanto,

$$\int_a^b x\,dx = F(b) - F(a) = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \qquad ■$$

EJEMPLO 3 Demuestre que si r es un número racional diferente de -1, entonces

$$\int_a^b x^r\,dx = \frac{b^{r+1}}{r+1} - \frac{a^{r+1}}{r+1}$$

SOLUCIÓN $F(x) = x^{r+1}/(r+1)$ es una antiderivada de $f(x) = x^r$. Así que, por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\int_a^b x^r\,dx = F(b) - F(a) = \frac{b^{r+1}}{r+1} - \frac{a^{r+1}}{r+1}$$

Si $r < 0$, requerimos que 0 no esté en $[a, b]$. ¿Por qué? ■

Es conveniente introducir un símbolo especial para $F(b) - F(a)$. Escribimos

$$F(b) - F(a) = \big[F(x)\big]_a^b$$

Con esta notación,

$$\int_2^5 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^5 = \frac{125}{3} - \frac{8}{3} = \frac{117}{3} = 39$$

EJEMPLO 4 Evalúe $\int_{-1}^2 (4x - 6x^2)\,dx$

(a) Mediante el uso del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo de manera directa y
(b) primero, aplicando la linealidad (teorema 4.3D).

SOLUCIÓN

(a) $$\int_{-1}^2 (4x - 6x^2)\,dx = \big[2x^2 - 2x^3\big]_{-1}^2$$

$$= (8 - 16) - (2 + 2) = -12$$

(b) Al aplicar primero la linealidad, tenemos

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}(4x - 6x^2)\,dx &= 4\int_{-1}^{2} x\,dx - 6\int_{-1}^{2} x^2\,dx\\ &= 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} - 6\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}\\ &= 4\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) - 6\left(\frac{8}{3} + \frac{1}{3}\right)\\ &= -12\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 5 Evalúe $\int_{1}^{8}(x^{1/3} + x^{4/3})\,dx$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\int_{1}^{8}(x^{1/3} + x^{4/3})\,dx &= \left[\tfrac{3}{4}x^{4/3} + \tfrac{3}{7}x^{7/3}\right]_{1}^{8}\\ &= \left(\tfrac{3}{4}\cdot 16 + \tfrac{3}{7}\cdot 128\right) - \left(\tfrac{3}{4}\cdot 1 + \tfrac{3}{7}\cdot 1\right)\\ &= \tfrac{45}{4} + \tfrac{381}{7} \approx 65.68\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 6 Encuentre $D_x \int_{0}^{x} 3 \operatorname{sen} t\,dt$ de dos maneras.

SOLUCIÓN La manera fácil es aplicar el Primer Teorema Fundamental del Cálculo.

$$D_x \int_{0}^{x} 3 \operatorname{sen} t\,dt = 3 \operatorname{sen} x$$

Una segunda forma de resolver este problema es aplicar el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo para evaluar la integral de 0 a x; después, aplicar las reglas de las derivadas.

$$\int_{0}^{x} 3 \operatorname{sen} t\,dt = [-3\cos t]_{0}^{x} = -3\cos x - (-3\cos 0) = -3\cos x + 3$$

Entonces

$$D_x \int_{0}^{x} 3 \operatorname{sen} t\,dt = D_x(-3\cos x + 3) = 3 \operatorname{sen} x$$ ■

En términos del símbolo para la integral indefinida, podemos escribir la conclusión del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo como

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_{a}^{b}$$

La parte no trivial de la aplicación del teorema es encontrar siempre la integral indefinida $\int f(x)\,dx$. Una de las técnicas más poderosas para hacer esto es el método de sustitución.

El método de sustitución En la sección 3.8 introdujimos el método de sustitución para la regla de la potencia. Esta regla puede extenderse a un caso más general, como lo muestra el siguiente teorema. Un lector perspicaz verá que la regla de sustitución no es más que la regla de la cadena en sentido inverso.

Uso del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

La forma de utilizar el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo para evaluar una integral definida, tal como $\int_a^b f(x)\,dx$, es

(1) encontrar una antiderivada $F(x)$ del integrando $f(x)$, y
(2) sustituir los límites y calcular $F(b) - F(a)$.

Todo depende de ser capaces de encontrar una antiderivada. Por esta razón, regresamos brevemente a la evaluación de integrales *indefinidas*.

Teorema B Regla de sustitución para integrales indefinidas

Sea g una función derivable y suponga que F es una antiderivada de f. Entonces,

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

Demostración Para probar este resultado, es suficiente con demostrar que la derivada del lado derecho es el integrando de la integral del lado izquierdo. Pero esto es una aplicación sencilla de la regla de la cadena

$$D_x[F(g(x)) + C] = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x) \qquad \blacksquare$$

Por lo regular, aplicamos el teorema B como sigue. En una integral como $\int f(g(x))g'(x)\,dx$, hacemos $u = g(u)$, de modo que $du/dx = g'(x)$. Así, $du = g'(x)dx$. Entonces, la integral se transforma en

$$\int f(\underbrace{g(x)}_{u})\underbrace{g'(x)\,dx}_{du} = \int f(u)\,du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

Por lo tanto, si podemos encontrar una antiderivada para $f(x)$, podemos evaluar $\int f(g(x))g'(x)\,dx$. El truco para aplicar el método de sustitución es elegir la sustitución adecuada que se debe hacer. En algunos casos, esta sustitución es obvia; en otros no lo es tanto. El dominio en la aplicación del método de sustitución viene con la práctica.

EJEMPLO 7 Evalúe $\int \text{sen } 3x\,dx$.

SOLUCIÓN Aquí, la sustitución obvia es $u = 3x$, de modo que $du = 3\,dx$. Por lo tanto,

$$\int \text{sen } 3x\,dx = \int \frac{1}{3}\,\text{sen}(\underbrace{3x}_{u})\underbrace{3\,dx}_{du}$$

$$= \frac{1}{3}\int \text{sen } u\,du = -\frac{1}{3}\cos u + C = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$$

Observe cómo tuvimos que multiplicar por $\frac{1}{3}\cdot 3$ para tener en la integral la expresión $3\,dx = du$. ■

EJEMPLO 8 Evalúe $\int x \,\text{sen } x^2\,dx$.

SOLUCIÓN Aquí, la sustitución apropiada es $u = x^2$. Esto nos da, en el integrando, $\text{sen } x^2 = \text{sen } u$, pero más importante, la x adicional en el integrando se puede poner con la diferencial, ya que $du = 2x\,dx$. Por lo tanto,

$$\int x\,\text{sen } x^2\,dx = \int \frac{1}{2}\,\text{sen}(\underbrace{x^2}_{u})\underbrace{2x\,dx}_{du}$$

$$= \frac{1}{2}\int \text{sen } u\,du = -\frac{1}{2}\cos u + C = -\frac{1}{2}\cos x^2 + C \qquad \blacksquare$$

Ninguna ley dice que tiene que escribir la sustitución con u. Si puede realizar la sustitución en forma mental, está bien. Enseguida, una ilustración.

EJEMPLO 9 Evalúe $\int x^3\sqrt{x^4+11}\,dx$.

SOLUCIÓN Sustituya mentalmente $u = x^4 + 11$.

$$\int x^3\sqrt{x^4+11}\,dx = \frac{1}{4}\int (x^4+11)^{1/2}(4x^3\,dx)$$

$$= \frac{1}{6}(x^4+11)^{3/2} + C$$

■

EJEMPLO 10 Evalúe $\int_0^4 \sqrt{x^2+x}\,(2x+1)\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = x^2 + x$, entonces $du = (2x + 1)dx$. Así que

$$\int \underbrace{\sqrt{x^2+x}}_{u}\,\underbrace{(2x+1)\,dx}_{du} = \int u^{1/2}\,du = \tfrac{2}{3}u^{3/2} + C$$

$$= \tfrac{2}{3}(x^2+x)^{3/2} + C$$

Por lo tanto, con base en el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\int_0^4 \sqrt{x^2+x}\,(2x+1)\,dx = \left[\tfrac{2}{3}(x^2+x)^{3/2} + C\right]_0^4$$

$$= \left[\tfrac{2}{3}(20)^{3/2} + C\right] - [0 + C]$$

$$= \tfrac{2}{3}(20)^{3/2} \approx 59.63$$

■

¿Qué hace que esta sustitución funcione?

Observe que en el ejemplo 10 la derivada de u es precisamente $2x + 1$. Por esto funciona la sustitución. Si la expresión entre paréntesis fuese $3x + 1$ en lugar de $2x + 1$, la regla de sustitución no se aplicaría y tendríamos un problema mucho más difícil.

Observe que la C de la integral indefinida se cancela, y siempre sucederá, en la integración definida. Ésta es la *razón* de que en el enunciado del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo pudimos utilizar la frase *cualquier antiderivada*. En particular, siempre podemos elegir $C = 0$ al aplicar dicho teorema.

EJEMPLO 11 Evalúe $\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^3 2x \cos 2x\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = \operatorname{sen} 2x$, entonces $du = 2\cos 2x\,dx$. Así,

$$\int \operatorname{sen}^3 2x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{(\operatorname{sen} 2x)}_{u}{}^3\underbrace{(2\cos 2x)\,dx}_{du} = \frac{1}{2}\int u^3\,du$$

$$= \frac{1}{2}\frac{u^4}{4} + C = \frac{\operatorname{sen}^4 2x}{8} + C$$

Por lo tanto, por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo.

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^3 2x \cos 2x\,dx = \left[\frac{\operatorname{sen}^4 2x}{8}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8}$$

■

Observe que en el procedimiento de dos pasos, ilustrado en los ejemplos 10 y 11, debemos estar seguros de expresar la integral indefinida en términos de x antes de aplicar el segundo teorema fundamental. Esto se debe a que los límites, 0 y 4 en el ejemplo 10 y 0 y $\pi/4$ en el ejemplo 11, se aplican a x, no a u. Pero, ¿qué sucede si al hacer la sustitución $u = \operatorname{sen} 2x$ en el ejemplo 11, también hacemos los cambios correspondientes en los límites de integración para u?

Si $x = 0$, entonces $u = \operatorname{sen}(2 \cdot 0) = 0$.

Si $x = \pi/4$, entonces $u = \operatorname{sen}(2(\pi/4)) = \operatorname{sen}(\pi/2) = 1$.

Entonces, ¿podríamos terminar la integración con la integral definida en términos de u? La respuesta es *sí*.

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^3 2x \cos 2x\,dx = \left[\frac{1}{2}\frac{u^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8}$$

A continuación está el resultado general, que nos permite sustituir los límites de integración y, de este modo, producir un procedimiento con menos pasos.

Teorema C **Regla de sustitución para integrales definidas**

Suponga que g tiene una derivada continua en $[a, b]$, y sea f continua en el rango de g. Entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

donde $u = g(x)$.

Sustitución para integrales definidas

Para hacer la sustitución en una integral definida, se requieren tres cambios:

1. Hacer la sustitución en el integrando.
2. Hacer el cambio adecuado en la diferencial.
3. Cambiar los límites de a y b a $g(a)$ y $g(b)$.

Demostración Sea F una antiderivada de f (la existencia de F está garantizada por el teorema 4.3A). Entonces, por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = \left[F(u)\right]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$

Por otra parte, por medio de la regla de sustitución para las integrales indefinidas (teorema B),

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

y así, otra vez por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \left[F(g(x))\right]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$ ■

EJEMPLO 12 Evalúe $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+2x+6)^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = x^2 + 2x + 6$, de modo que $du = (2x+2)dx = 2(x+1)dx$, y obsérvese que $u = 6$ cuando $x = 0$ y que $u = 9$ cuando $x = 1$. Así que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+2x+6)^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2(x+1)}{(x^2+2x+6)^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_6^9 u^{-2}\,du = \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{u}\right]_6^9 \\ &= -\frac{1}{18} - \left(-\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{36}\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 13 Evalúe $\displaystyle\int_{\pi^2/9}^{\pi^2/4} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = \sqrt{x}$, de modo que $du = dx/(2\sqrt{x})$. Así,

$$\begin{aligned}\int_{\pi^2/9}^{\pi^2/4} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx &= 2\int_{\pi^2/9}^{\pi^2/4} \cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \\ &= 2\int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos u\,du \\ &= \left[2\operatorname{sen} u\right]_{\pi/3}^{\pi/2} = 2 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

El cambio en los límites de integración ocurrió en la segunda igualdad. Cuando $x = \pi^2/9$, $u = \sqrt{\pi^2/9} = \pi/3$; cuando $x = \pi^2/4$, $u = \pi/2$. ■

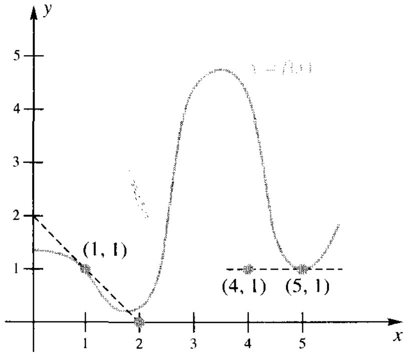


Figura 1

EJEMPLO 14 La figura 1 muestra la gráfica de una función f que tiene tercera derivada continua. Las líneas discontinuas son tangentes a la gráfica de $y = f(x)$ en (1, 1) y en (5, 1). Con base en lo que se muestra, diga, si es posible, si las siguientes integrales son positivas, negativas o cero.

(a) $\int_1^5 f(x)\,dx$ (b) $\int_1^5 f'(x)\,dx$

(c) $\int_1^5 f''(x)\,dx$ (d) $\int_1^5 f'''(x)\,dx$

SOLUCIÓN

(a) La función f es positiva para toda x en el intervalo $[1, 5]$, y la gráfica indica que hay cierta área por arriba del eje x. Por lo tanto, $\int_1^5 f(x)\,dx > 0$.

(b) Por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\int_1^5 f'(x)\,dx = f(5) - f(1) = 1 - 1 = 0$$

(c) Otra vez mediante el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (ahora con f' como una antiderivada de f''), vemos que

$$\int_1^5 f''(x)\,dx = f'(5) - f'(1) = 0 - (-1) = 1$$

(d) La función f es cóncava hacia arriba en $x = 5$, de modo que $f''(5) > 0$, y es cóncava hacia abajo en $x = 1$, de modo que $f''(1) < 0$. Así que

$$\int_1^5 f'''(x)\,dx = f''(5) - f''(1) > 0$$ ■

Este ejemplo ilustra la notable propiedad de que todo lo que necesitamos conocer para evaluar una integral definida son los valores de una antiderivada en los puntos frontera a y b. Por ejemplo, para evaluar $\int_1^5 f''(x)\,dx$, todo lo que necesitábamos saber eran $f'(5)$ y $f'(1)$; no necesitábamos conocer f' y f'' en los puntos del intervalo abierto (a, b).

Tasa de cambio acumulada El Segundo Teorema Fundamental del Cálculo puede volver a enunciarse de esta manera:

$$\int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

Si $F(t)$ mide el total de alguna cantidad en el instante t, entonces el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo dice que la tasa de cambio acumulada del instante $t = a$ al instante $t = b$ es igual al cambio neto en esa cantidad en el intervalo $[a, b]$, esto es, el total presente en el instante $t = b$ menos el total presente en el instante $t = a$.

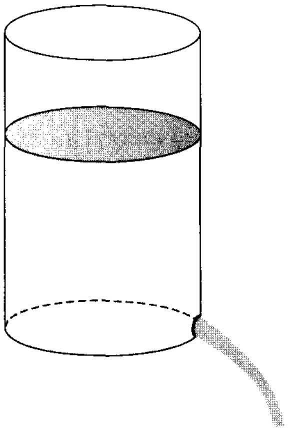


Figura 2

EJEMPLO 15 Sale agua de un depósito, cuya capacidad es de 55 galones, a una tasa de $V'(t) = 11 - 1.1t$, en donde t se mide en horas y V en galones. (Véase la figura 2). Al principio, el depósito está lleno. (a) ¿Cuánta agua sale del tanque entre $t = 3$ y $t = 5$ horas? (b) ¿Cuánto tiempo pasa para que queden exactamente 5 galones en el tanque?

SOLUCIÓN $V(t)$ representa la cantidad de agua que ha salido hasta el instante t.

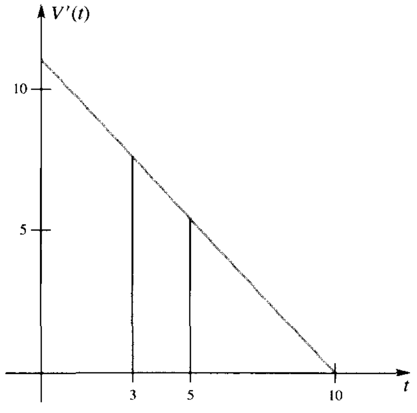


Figura 3

(a) La cantidad que ha salido entre $t = 3$ y $t = 5$ horas es igual al área debajo de la curva $V'(t)$ de 3 a 5 (figura 3). Así,

$$V(5) - V(3) = \int_3^5 V'(t)\,dt = \int_3^5 (11 - 1.1t)\,dt = \left[11t - \frac{1.1}{2}t^2\right]_3^5 = 13.2$$

Por lo tanto, han salido 13.2 galones en las dos horas entre los instantes $t = 3$ y $t = 5$.

(b) Denótese con t_1 el instante en que queden 5 galones en el depósito. Entonces, la cantidad que ha salido es igual a 50, por lo que $V(t_1) = 50$. Como al principio, el depósito estaba lleno (es decir, no había salido agua), tenemos $V(0) = 0$. Por consiguiente,

$$V(t_1) - V(0) = \int_0^{t_1} (11 - 1.1t)\,dt$$

$$50 - 0 = \left[11t - \frac{1.1}{2}t^2\right]_0^{t_1}$$

$$0 = -50 + 11t_1 - 0.55t_1^2$$

Las soluciones de esta última ecuación son $10\left(11 \pm \sqrt{11}\right)/11$, aproximadamente 6.985 y 13.015. Observe que como $\int_0^{10}(11 - 1.1t)\,dt = 55$, el depósito está drenado en el instante $t = 10$, llevándonos a descartar la última solución. Así que al cabo de 6.985 horas quedan 5 galones. ■

Revisión de conceptos

1. Si f es continua en $[a, b]$ y si allí F es cualquier ________ de f, entonces $\int_a^b f(x)\,dx =$ ________.

2. El símbolo $\left[F(x)\right]_a^b$ se establece para la expresión ________.

3. Con base en el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, $\int_c^d F'(x)\,dx =$ ________.

4. Con la sustitución $u = x^3 + 1$, la integral definida $\int_0^1 x^2(x^3 + 1)^4\,dx$ se transforma en la nueva integral definida ________.

Conjunto de problemas 4.4

En los problemas del 1 al 14 utilice el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo para evaluar cada integral definida.

1. $\int_0^2 x^3\,dx$

2. $\int_{-1}^2 x^4\,dx$

3. $\int_{-1}^2 (3x^2 - 2x + 3)\,dx$

4. $\int_1^2 (4x^3 + 7)\,dx$

5. $\int_1^4 \frac{1}{w^2}\,dw$

6. $\int_1^3 \frac{2}{t^3}\,dt$

7. $\int_0^4 \sqrt{t}\,dt$

8. $\int_1^8 \sqrt[3]{w}\,dw$

9. $\int_{-4}^{-2} \left(y^2 + \frac{1}{y^3}\right) dy$

10. $\int_1^4 \frac{s^4 - 8}{s^2}\,ds$

11. $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$

12. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} 2\,\text{sen}\,t\,dt$

13. $\int_0^1 (2x^4 - 3x^2 + 5)\,dx$

14. $\int_0^1 (x^{4/3} - 2x^{1/3})\,dx$

En los problemas del 15 al 34 utilice el método de sustitución para determinar cada una de las siguientes integrales indefinidas.

15. $\int \sqrt{3x + 2}\,dx$

16. $\int \sqrt[3]{2x - 4}\,dx$

17. $\int \cos(3x + 2)\,dx$

18. $\int \text{sen}(2x - 4)\,dx$

19. $\int \text{sen}(6x - 7)\,dx$

20. $\int \cos\left(\pi v - \sqrt{7}\right) dv$

21. $\int x\sqrt{x^2 + 4}\,dx$

22. $\int x^2(x^3 + 5)^9\,dx$

23. $\int x(x^2 + 3)^{-12/7}\,dx$

24. $\int v\left(\sqrt{3}v^2 + \pi\right)^{7/8} dv$

25. $\int x\,\text{sen}(x^2 + 4)\,dx$

26. $\int x^2\cos(x^3 + 5)\,dx$

27. $\int \frac{x\,\text{sen}\sqrt{x^2 + 4}}{\sqrt{x^2 + 4}}\,dx$

28. $\int \frac{z\cos\left(\sqrt[3]{z^2 + 3}\right)}{\left(\sqrt[3]{z^2 + 3}\right)^2}\,dz$

29. $\int x^2(x^3+5)^8\cos[(x^3+5)^9]\,dx$

30. $\int x^6(7x^7+\pi)^8\,\text{sen}[(7x^7+\pi)^9]\,dx$

31. $\int x\cos(x^2+4)\sqrt{\text{sen}(x^2+4)}\,dx$

32. $\int x^6\,\text{sen}(3x^7+9)\sqrt[3]{\cos(3x^7+9)}\,dx$

33. $\int x^2\,\text{sen}(x^3+5)\cos^9(x^3+5)\,dx$

34. $\int x^{-4}\sec^2(x^{-3}+1)\sqrt[5]{\tan(x^{-3}+1)}\,dx$

Sugerencia: $D_x \tan x = \sec^2 x$

En los problemas del 35 al 58 utilice la regla de sustitución para integrales definidas para evaluar cada integral definida.

35. $\int_0^1 (x^2+1)^{10}(2x)\,dx$

36. $\int_{-1}^0 \sqrt{x^3+1}(3x^2)\,dx$

37. $\int_{-1}^3 \frac{1}{(t+2)^2}\,dt$

38. $\int_2^{10}\sqrt{y-1}\,dy$

39. $\int_5^8 \sqrt{3x+1}\,dx$

40. $\int_1^7 \frac{1}{\sqrt{2x+2}}\,dx$

41. $\int_{-3}^3 \sqrt{7+2t^2}\,(8t)\,dt$

42. $\int_1^3 \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x}}\,dx$

43. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,\text{sen}\,x\,dx$

44. $\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2\,3x\cos 3x\,dx$

45. $\int_0^1 (x+1)(x^2+2x)^2\,dx$

46. $\int_1^4 \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{\sqrt{x}}\,dx$

47. $\int_0^{\pi/6} \text{sen}^3\,\theta\cos\theta\,d\theta$

48. $\int_0^{\pi/6} \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos^3\theta}\,d\theta$

49. $\int_0^1 \cos(3x-3)\,dx$

50. $\int_0^{1/2} \text{sen}(2\pi x)\,dx$

51. $\int_0^1 x\,\text{sen}(\pi x^2)\,dx$

52. $\int_0^{\pi} x^4\cos(2x^5)\,dx$

53. $\int_0^{\pi/4} (\cos 2x + \text{sen}\,2x)\,dx$

54. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos 3x + \text{sen}\,5x)\,dx$

55. $\int_0^{\pi/2} \text{sen}\,x\,\text{sen}(\cos x)\,dx$

56. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\cos(\pi\,\text{sen}\,\theta)\,d\theta$

57. $\int_0^1 x\cos^3(x^2)\,\text{sen}(x^2)\,dx$

58. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2\,\text{sen}^2(x^3)\cos(x^3)\,dx$

59. La figura 4 muestra la gráfica de una función f que tiene tercera derivada continua. Las líneas discontinuas son tangentes a la gráfica de $y = f(x)$ en los puntos $(0, 2)$ y $(3, 0)$. Con base en lo que se muestra, diga, si es posible, si las siguientes integrales son positivas, negativas o cero.

(a) $\int_0^3 f(x)\,dx$ (b) $\int_0^3 f'(x)\,dx$

(c) $\int_0^3 f''(x)\,dx$ (d) $\int_0^3 f'''(x)\,dx$

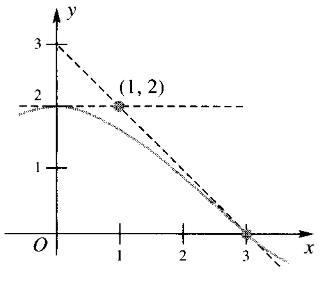


Figura 4

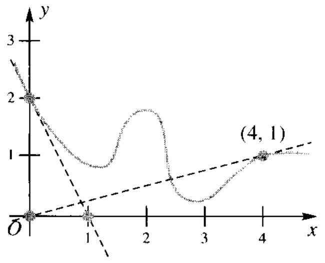


Figura 5

60. La figura 5 muestra la gráfica de una función f que tiene tercera derivada continua. Las líneas discontinuas son tangentes a la gráfica de $y = f(x)$ en los puntos $(0, 2)$ y $(4, 1)$. Con base en lo que se muestra, diga, si es posible, si las siguientes integrales son positivas, negativas o cero.

(a) $\int_0^4 f(x)\,dx$ (b) $\int_0^4 f'(x)\,dx$

(c) $\int_0^4 f''(x)\,dx$ (d) $\int_0^4 f'''(x)\,dx$

61. De un depósito, que tiene capacidad para 200 galones (inicialmente lleno), sale agua a razón de $V'(t) = 20 - t$, donde t se mide en horas y V en galones. ¿Cuánta agua sale entre la hora 10 y la 20? ¿Cuánto tardará el depósito en vaciarse por completo?

62. De un depósito, inicialmente lleno con 55 galones, sale petróleo a razón de $V'(t) = 1 - t/110$. ¿Cuánto petróleo sale durante la primera hora? ¿Y durante la décima hora? ¿Cuánto tarda en quedar vacío el depósito?

63. El agua que se utiliza en una pequeña población se mide en galones por hora. En la figura 6 se muestra una gráfica de esta tasa de uso, desde la medianoche hasta el mediodía de un día particular. Estime la cantidad total de agua consumida durante este periodo de 12 horas.

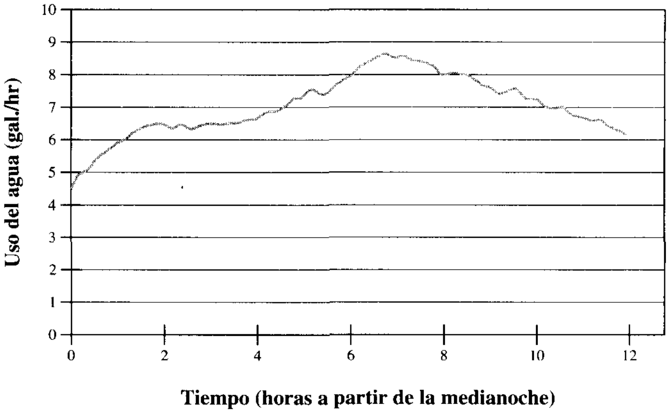


Figura 6

64. La figura 7 muestra la tasa de consumo de petróleo, en millones de barriles por año, para Estados Unidos desde 1973 hasta 2003. De forma aproximada, ¿cuántos barriles de petróleo se consumieron entre 1990 y 2000?

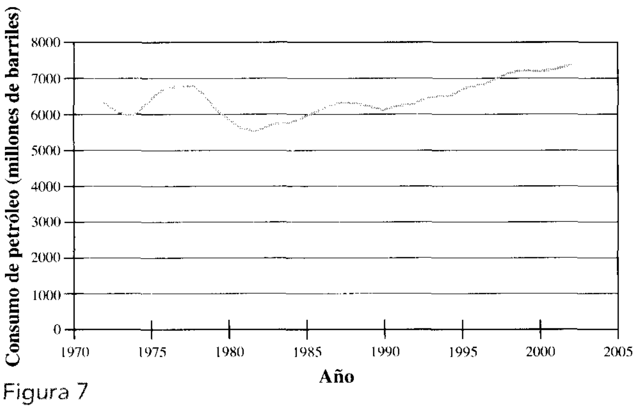


Figura 7

65. La figura 8 muestra el uso de potencia eléctrica, medido en megawatts, para una pequeña población para un día (medido de medianoche a medianoche). Estime la energía eléctrica usada durante el día, medida en megawatts-hora. *Sugerencia:* la potencia es la derivada de la energía.

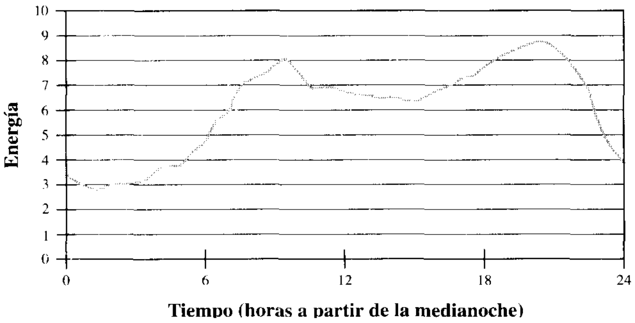


Figura 8

66. La masa de una varilla, medida en kilogramos, desde el extremo izquierdo al punto x, en metros, es $m(x) = x + x^2/8$. ¿Cuál es la densidad $\delta(x)$ de la varilla, medida en kilogramos por metro? Suponiendo que la varilla tiene un largo de 2 metros, exprese la masa total de la varilla en términos de su densidad.

67. Aseguramos que

$$\int_a^b x^n\,dx + \int_{a^n}^{b^n} \sqrt[n]{y}\,dy = b^{n+1} - a^{n+1}$$

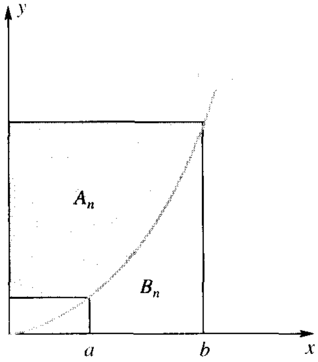


Figura 9

(a) Utilice la figura 9 para justificar esto mediante un argumento geométrico.

(b) Demuestre el resultado usando el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo.

(c) Demuestre que $A_n = nB_n$.

68. Con base en el método sugerido en el ejemplo 6 de la sección 4.3, demuestre el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo.

En los problemas del 69 al 72 primero identifique el límite dado como una integral definida y luego evalúe la integral por medio del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo.

69. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3i}{n}\right)^2 \frac{3}{n}$

70. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n}\right)^3 \frac{2}{n}$

71. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi i}{n}\right)\right] \frac{\pi}{n}$

72. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[1 + \frac{2i}{n} + \left(\frac{2i}{n}\right)^2\right] \frac{2}{n}$

C **73.** Explique por qué, para n grande, $(1/n^3)\sum_{i=1}^{n} i^2$ debe ser una buena aproximación para $\int_0^1 x^2\,dx$. Ahora calcule la expresión de la suma para $n = 10$ y evalúe la integral por medio del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo. Compare sus valores.

74. Evalúe $\int_{-2}^{4} (2[\![x]\!] - 3|x|)\,dx$.

75. Demuestre que $\frac{1}{2}x|x|$ es una antiderivada de $|x|$ y utilice este hecho para obtener una fórmula sencilla para $\int_a^b |x|\,dx$.

76. Encuentre una fórmula sencilla para $\int_0^b [\![x]\!]\,dx, b > 0$.

77. Suponga que f es continua en $[a, b]$.

(a) Sea $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Demuestre que G es continua en $[a, b]$.

(b) Sea $F(x)$ cualquier antiderivada de f en $[a, b]$. Demuestre que F es continua en $[a, b]$.

78. Proporcione un ejemplo para demostrar que la función de acumulación $G(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ puede ser continua aun si f no es continua.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** antiderivada; $F(b) - F(a)$ **2.** $F(b) - F(a)$ **3.** $F(d) - F(c)$

4. $\int_1^2 \frac{1}{3}u^4\,du$

4.5
El teorema del valor medio para integrales y el uso de la simetría

Sabemos lo que significa el promedio de un conjunto de n números, $y_1, y_2, \ldots, y_n$: simplemente los sumamos y dividimos entre n

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$$

¿Podemos dar significado al concepto del promedio de una función f en un intervalo $[a, b]$? Bueno, suponga que tomamos una partición regular de $[a, b]$, digamos $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, con $\Delta x = (b - a)/n$. El promedio de los n valores $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ es

$$\begin{aligned}\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n}\frac{1}{b-a} \\ &= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\end{aligned}$$

Esta última es una suma de Riemann para f en $[a, b]$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} &= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

Esto sugiere la siguiente definición.

Definición Valor promedio de una función

Si f es integrable en el intervalo $[a, b]$, entonces el **valor promedio** de f en $[a, b]$ es

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

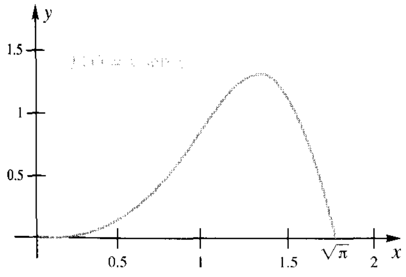


Figura 1

EJEMPLO 1 Determine el valor promedio de la función definida por $f(x) = x$ sen x^2 en el intervalo $[0, \sqrt{\pi}]$. (Véase la figura 1.)

SOLUCIÓN El valor promedio es

$$\frac{1}{\sqrt{\pi} - 0}\int_0^{\sqrt{\pi}} x \operatorname{sen} x^2\,dx$$

Para evaluar esta integral, hacemos la sustitución $u = x^2$, de modo que $du = 2x\,dx$. Cuando $x = 0, u = 0$ y cuando $x = \sqrt{\pi}, u = \pi$. Así,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\pi}} x \operatorname{sen} x^2\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\operatorname{sen} u\,du = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Big[-\cos u\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad ■$$

EJEMPLO 2 Suponga que la temperatura, en grados Fahrenheit, de una barra metálica de longitud de 2 pies, depende de la posición x, de acuerdo con la función $T(x) = 40 + 20x(2 - x)$. Determine la temperatura promedio en la barra. ¿Existe algún punto en donde la temperatura real sea igual a la temperatura promedio?

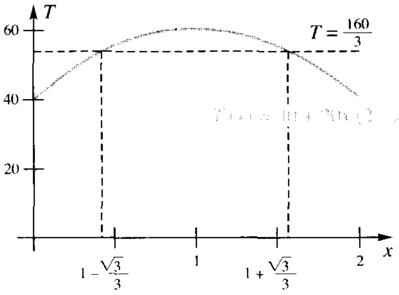


Figura 2

SOLUCIÓN La temperatura promedio es

$$\frac{1}{2}\int_0^2 [40 + 20x(2 - x)]\,dx = \int_0^2 (20 + 20x - 10x^2)\,dx$$

$$= \left[20x + 10x^2 - \frac{10}{3}x^3\right]_0^2$$

$$= \left(40 + 40 - \frac{80}{3}\right) = \frac{160}{3}\ \text{°F}$$

La figura 2, que muestra la temperatura T como una función de x, indica que debemos esperar dos puntos en los que la temperatura real sea igual a la temperatura promedio. Para determinar estos puntos, hacemos $T(x)$ igual a 160/3 e intentamos resolver para x.

$$40 + 20x(2 - x) = \frac{160}{3}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

La fórmula cuadrática da

$$x = \frac{1}{3}\left(3 - \sqrt{3}\right) \approx 0.42265 \quad \text{y} \quad x = \frac{1}{3}\left(3 + \sqrt{3}\right) \approx 1.5774$$

Ambas soluciones están entre 0 y 2, por lo cual existen dos puntos en los que la temperatura es igual a la temperatura promedio. ■

Parece como si siempre debiese existir un valor de x con la propiedad de que $f(x)$ sea igual al valor promedio de la función. Esto es cierto sólo con que la función f sea continua.

Los dos teoremas del valor medio

El teorema del valor medio para derivadas dice que existe algún punto c en el intervalo $[a, b]$ en el que la tasa promedio de cambio de f, $(f(b) - f(a))/(b - a)$, es igual a la tasa instantánea de cambio $f'(c)$.

El teorema del valor medio para integrales dice que existe algún punto c en el intervalo $[a, b]$ en el que el valor medio de la función $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$ es igual al valor real de la función, $f(c)$.

Teorema A Teorema del valor medio para integrales

Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe un número c entre a y b, tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

Demostración Para $a \le x \le b$ defínase $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Por el teorema del valor medio para derivadas (aplicado a G) existe una c en el intervalo (a, b), tal que

$$G'(c) = \frac{G(b) - G(a)}{b - a}$$

Como $G(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$, $G(b) = \int_a^b f(t)\,dt$, $G'(c) = f(c)$, esto lleva a

$$G'(c) = f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \qquad ■$$

Con frecuencia, el teorema del valor medio para integrales se expresa como sigue: si f es integrable en $[a, b]$, entonces existe una c en $(a, b]$, tal que

$$\int_a^b f(t)\,dt = (b - a)\,f(c)$$

Cuando se ve de esta manera, el teorema del valor medio para integrales dice que existe alguna c en el intervalo $[a, b]$, tal que el área del rectángulo con altura $f(c)$ y ancho $b - a$ es igual al área bajo la curva. En la figura 3 el área bajo la curva es igual al área del rectángulo.

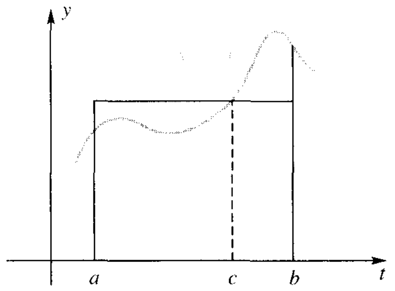


Figura 3

⊟ Estimación de integrales

Esta versión del teorema del valor medio para integrales, con la figura 3 junto a ella, sugiere una buena manera de estimar el valor de una integral definida. El área de la región bajo la curva es igual al área de un rectángulo. Uno puede hacer una buena estimación de este rectángulo simplemente "echando un vistazo" a la región. En la figura 3, el área de la parte sombreada *por arriba* de la curva debe coincidir con el área de la parte en blanco por *debajo* de la curva.

EJEMPLO 3 Determine todos los valores de c que satisfacen el teorema del valor medio para integrales, para $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-3, 3]$.

SOLUCIÓN La gráfica de $f(x)$ que se muestra en la figura 4 indica que podría haber dos valores de c que satisfacen el teorema del valor medio para integrales. El valor promedio de la función es

$$\frac{1}{3-(-3)}\int_{-3}^{3} x^2\,dx = \frac{1}{6}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3} = \frac{1}{18}[27-(-27)] = 3$$

Para determinar los valores de c, resolvemos

$$3 = f(c) = c^2$$
$$c = \pm\sqrt{3}$$

Tanto $-\sqrt{3}$ como $\sqrt{3}$ están en el intervalo $[-3, 3]$, así que ambos valores satisfacen el teorema del valor medio para integrales. ■

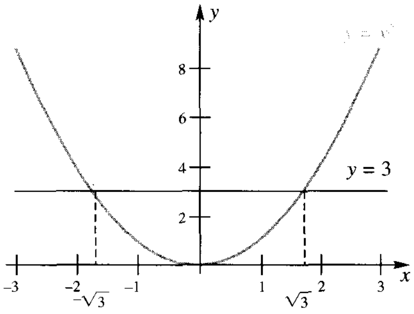


Figura 4

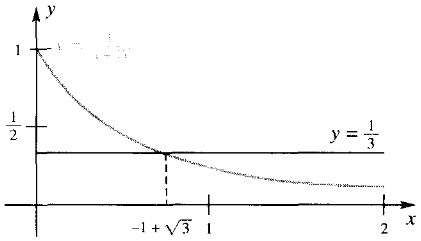


Figura 5

EJEMPLO 4 Determine todos los valores de c que satisfacen el teorema del valor medio para integrales para $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ en el intervalo $[0, 2]$.

SOLUCIÓN La gráfica de $f(x)$ que se muestra en la figura indica que debe haber un valor de c que satisface el teorema del valor medio para integrales. El valor promedio de la función se determina haciendo la sustitución $u = x + 1$, $du = dx$, en donde cuando $x = 0$, $u = 1$ y cuando $x = 2$, $u = 3$:

$$\frac{1}{2-0}\int_{0}^{2}\frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{1}^{3}\frac{1}{u^2}\,du = \frac{1}{2}\left[-u^{-1}\right]_{1}^{3} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}+1\right) = \frac{1}{3}$$

Para determinar el valor de c, resolvemos

$$\frac{1}{3} = f(c) = \frac{1}{(c+1)^2}$$
$$c^2 + 2c + 1 = 3$$
$$c = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-2)}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

Observe que $-1 - \sqrt{3} \approx -2.7321$ y $-1 + \sqrt{3} \approx 0.73205$. La única de estas soluciones que está en el intervalo $[0, 2]$ es $c = -1 + \sqrt{3}$ así, éste es el único valor de c que satisface el teorema del valor medio para integrales. ■

Uso de la simetría en la evaluación de integrales definidas

Recuerde que una función par es aquella que satisface $f(-x) = f(x)$, mientras que una función impar satisface $f(-x) = -f(x)$. La gráfica de la primera es simétrica respecto al eje x; la gráfica de la segunda es simétrica respecto al origen. A continuación, está un útil teorema de integración para tales funciones.

Teorema B **Teorema de simetría**

Si f es una función par, entonces

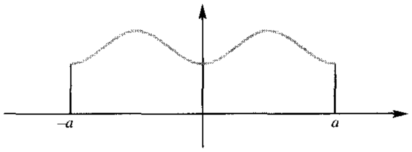
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Si f es una función impar, entonces

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

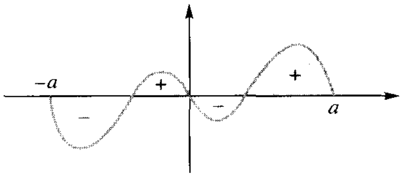
Demostración para funciones pares La interpretación geométrica de este teorema se muestra en las figuras 6 y 7. Para justificar analíticamente los resultados, primero escribimos

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$



Función par
Área de la izquierda = área de la derecha

Figura 6



Función impar
El área de la izquierda neutraliza el área de la derecha

Figura 7

En la primera de las integrales de la derecha hacemos la sustitución $u = -x$, $du = -dx$. Si f es par, $f(u) = f(-x) = f(x)$ y

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{-a}^{0} f(-x)(-dx) = -\int_{a}^{0} f(u)\,du = \int_{0}^{a} f(u)\,du = \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Por lo tanto,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

La demostración para funciones impares se deja como un ejercicio (problema 60). ■

Asegúrese de observar las hipótesis del teorema de simetría. El integrando debe ser par o impar y el intervalo de integración debe ser simétrico con respecto al origen. Éstas son condiciones restrictivas, pero es sorprendente cómo se cumplen en las aplicaciones. Cuando se cumplen, pueden simplificar en gran medida las integraciones.

EJEMPLO 5 Evalúe $\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx$.

SOLUCIÓN Puesto que $\cos(-x/4) = \cos(x/4)$, $f(x) = \cos(x/4)$ es una función par. Así que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx = 2\int_{0}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx = 8\int_{0}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}dx$$

$$= 8\int_{0}^{\pi/4} \cos u\,du = \left[8 \operatorname{sen} u\right]_{0}^{\pi/4} = 4\sqrt{2}$$ ■

EJEMPLO 6 Evalúe $\displaystyle\int_{-5}^{5} \frac{x^5}{x^2+4}\,dx$.

SOLUCIÓN $f(x) = x^5/(x^2+4)$ es una función impar. Por lo tanto, la integral anterior tiene el valor cero. ■

EJEMPLO 7 Evalúe $\displaystyle\int_{-2}^{2} (x\,\mathrm{sen}^4 x + x^3 - x^4)\,dx$.

SOLUCIÓN Los primeros dos términos en el integrando son impares, el último es par. Por eso podemos escribir la integral como

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} (x\,\mathrm{sen}^4 x + x^3)\,dx - \int_{-2}^{2} x^4\,dx &= 0 - 2\int_{0}^{2} x^4\,dx \\ &= \left[-2\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = -\frac{64}{5}\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 8 Evalúe $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}^3 x\,\cos^5 x\,dx$.

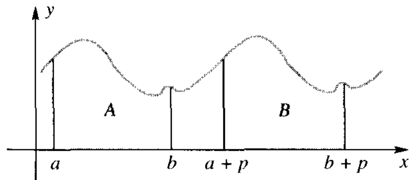
SOLUCIÓN La función sen x es impar y cos x es par. Una función impar elevada a una potencia impar es impar, por lo que $\mathrm{sen}^3\,x$ es impar. Una función par elevada a cualquier potencia entera es par, por lo que $\cos^5 x$ es par. Una función impar por una función par es impar. Por lo tanto, el integrando en esta integral es una función par y el intervalo es simétrico respecto al origen, así que el valor de esta integral es 0. ■

Uso de la periodicidad Recuérdese que una función f es *periódica* si existe un número p, tal que $f(x + p) = f(x)$ para toda x en el dominio de f. El número positivo más pequeño p que cumple con lo anterior se denomina **periodo** de f. Las funciones trigonométricas son ejemplos de funciones periódicas.

Teorema C

Si f es periódica con periodo p, entonces

$$\int_{a+p}^{b+p} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$



Área (A) = Área (B)

Figura 8

Demostración La interpretación geométrica puede verse en la figura 8. Para demostrar el resultado, sea $u = x - p$ de modo que $x = u + p$ y $du = dx$. Entonces

$$\int_{a+p}^{b+p} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(u+p)\,du = \int_{a}^{b} f(u)\,du = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

Podríamos reemplazar $f(u + p)$ por $f(u)$, ya que f es periódica. ■

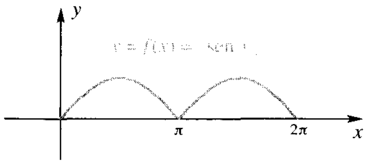


Figura 9

EJEMPLO 9 Evalúe (a) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} |\mathrm{sen}\,x|\,dx$ y (b) $\displaystyle\int_{0}^{100\pi} |\mathrm{sen}\,x|\,dx$.

SOLUCIÓN

(a) Observe que $f(x) = |\mathrm{sen}\,x|$ es periódica con periodo π (véase la figura 9). Así que la integral en (a) es

$$\int_0^{2\pi} |\text{sen } x|\,dx = \int_0^{\pi} |\text{sen } x|\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\text{sen } x|\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} |\text{sen } x|\,dx + \int_0^{\pi} |\text{sen } x|\,dx$$

$$= 2\int_0^{\pi} \text{sen } x\,dx = 2\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = 2[1 - (-1)] = 4$$

(b) La integral en (b) es

$$\int_0^{100\pi} |\text{sen } x|\,dx = \underbrace{\int_0^{\pi} |\text{sen } x|\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\text{sen } x|\,dx + \cdots + \int_{99\pi}^{100\pi} |\text{sen } x|\,dx}_{100 \text{ integrales iguales a } \int_0^{\pi} \text{sen } x\,dx}$$

$$= 100\int_0^{\pi} \text{sen } x\,dx = 100\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = 100(2) = 200 \qquad \blacksquare$$

Observe que en el ejemplo 9 tuvimos que utilizar la simetría porque no podemos encontrar una antiderivada para $|\text{sen } x|$ en el intervalo $[0, 100\pi]$.

Revisión de conceptos

1. El valor promedio de una función f en el intervalo $[a, b]$ es ________.

2. El teorema del valor medio para integrales dice que existe una c en el intervalo (a, b), tal que el valor promedio de la función en $[a, b]$ es igual a ________.

3. Si f es una función impar, $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx =$ ________; si f es una función par, $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx =$ ________.

4. La función f es periódica si existe un número p, tal que ________ para toda x en el dominio de f. El número positivo más pequeño de tal p se denomina el (la) ________ de la función.

Conjunto de problemas 4.5

En los problemas del 1 al 14 determine el valor promedio de la función en el intervalo dado.

1. $f(x) = 4x^3;\ [1, 3]$

2. $f(x) = 5x^2;\ [1, 4]$

3. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 16}};\ [0, 3]$

4. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3 + 16}};\ [0, 2]$

5. $f(x) = 2 + |x|;\ [-2, 1]$

6. $f(x) = x + |x|;\ [-3, 2]$

7. $f(x) = \cos x;\ [0, \pi]$

8. $f(x) = \text{sen } x;\ [0, \pi]$

9. $f(x) = x\cos x^2;\ \left[0, \sqrt{\pi}\right]$

10. $f(x) = \text{sen}^2 x \cos x;\ [0, \pi/2]$

11. $F(y) = y(1 + y^2)^3;\ [1, 2]$

12. $g(x) = \tan x \sec^2 x;\ [0, \pi/4]$

13. $h(z) = \dfrac{\text{sen}\sqrt{z}}{\sqrt{z}};\ [\pi/4, \pi/2]$

14. $G(v) = \dfrac{\text{sen } v \cos v}{\sqrt{1 + \cos^2 v}};\ [0, \pi/2]$

En los problemas del 15 al 28 encuentre todos lo valores de x que satisfacen el teorema del valor medio para integrales en el intervalo dado.

15. $f(x) = \sqrt{x + 1};\ [0, 3]$

16. $f(x) = x^2;\ [-1, 1]$

17. $f(x) = 1 - x^2;\ [-4, 3]$

18. $f(x) = x(1 - x);\ [0, 1]$

19. $f(x) = |x|;\ [0, 2]$

20. $f(x) = |x|;\ [-2, 2]$

21. $H(z) = \text{sen } z;\ [-\pi, \pi]$

22. $g(y) = \cos 2y;\ [0, \pi]$

23. $R(v) = v^2 - v;\ [0, 2]$

24. $T(x) = x^3;\ [0, 2]$

25. $f(x) = ax + b;\ [1, 4]$

26. $S(y) = y^2;\ [0, b]$

27. $f(x) = ax + b;\ [A, B]$

28. $q(y) = ay^2;\ [0, b]$

GC ≈ *Utilice una calculadora gráfica para hacer la gráfica del integrando en los problemas del 29 a 32. Luego estime la integral, como se sugiere en la nota al margen que acompaña al teorema B.*

29. $\displaystyle\int_0^{2\pi} (5 + \text{sen } x)^4\,dx$

30. $\displaystyle\int_0^{2} \left[3 + \text{sen}(x^2)\right] dx$

31. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2}{1 + x^2}\,dx$

32. $\displaystyle\int_{10}^{20} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^5 dx$

33. La figura 10 muestra la humedad relativa H como una función del tiempo t (medido en días, a partir del domingo) para un edificio de oficinas. Aproxime la humedad relativa promedio para la semana.

34. La figura 11 muestra la temperatura T como una función del tiempo t (medido en horas después de la medianoche) para un día en San Luis, Missouri.

(a) Aproxime la temperatura promedio para el día.

(b) ¿Debe existir algún instante cuando la temperatura es igual a la temperatura promedio para el día? Explique.

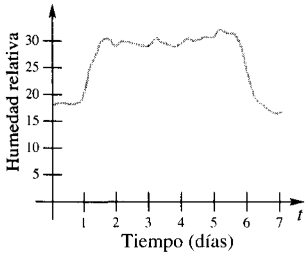


Figura 10

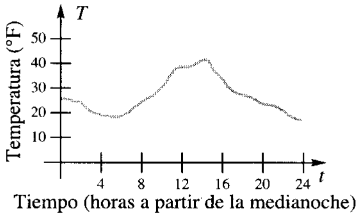


Figura 11

En los problemas del 35 al 44 utilice la simetría para ayudarse a evaluar la integral dada.

35. $\int_{-\pi}^{\pi} (\text{sen}\, x + \cos x)\, dx$

36. $\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{(1 + x^2)^4}\, dx$

37. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\text{sen}\, x}{1 + \cos x}\, dx$

38. $\int_{-\sqrt[3]{\pi}}^{\sqrt[3]{\pi}} x^2 \cos(x^3)\, dx$

39. $\int_{-\pi}^{\pi} (\text{sen}\, x + \cos x)^2\, dx$

40. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} z\, \text{sen}^2(z^3) \cos(z^3)\, dz$

41. $\int_{-1}^{1} (1 + x + x^2 + x^3)\, dx$

42. $\int_{-100}^{100} (v + \text{sen}\, v + v \cos v + \text{sen}^3 v)^5\, dv$

43. $\int_{-1}^{1} (|x^3| + x^3)\, dx$

44. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (|x|\, \text{sen}^5 x + |x|^2 \tan x)\, dx$

45. ¿Cómo es $\int_{-b}^{-a} f(x)\, dx$ comparada con $\int_{a}^{b} f(x)\, dx$, cuando f es una función par? ¿Y cuando f es una función impar?

46. Demuestre (por medio de sustitución) que

$$\int_a^b f(-x)\, dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\, dx$$

47. Utilice periodicidad para calcular $\int_0^{4\pi} |\cos x|\, dx$.

48. Calcule $\int_0^{4\pi} |\text{sen}\, 2x|\, dx$.

49. Si f es periódica, con periodo p, entonces

$$\int_a^{a+p} f(x)\, dx = \int_0^p f(x)\, dx$$

Convénzase de que esto es cierto: trace una gráfica y luego utilice el resultado para calcular $\int_1^{1+\pi} |\text{sen}\, x|\, dx$.

50. Utilice el resultado del problema 49 para calcular

$$\int_2^{2+\pi/2} |\text{sen}\, 2x|\, dx.$$

51. Calcule $\int_1^{1+\pi} |\cos x|\, dx$.

52. Demuestre o refute que la integral del valor promedio es igual a la integral de la función en el intervalo: $\int_a^b \overline{f}\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$, donde $\overline{f}$ es el valor promedio de la función f en el intervalo $[a, b]$.

EXPL **53.** Suponga que u y v puedan integrarse en el intervalo $[a, b]$ y que los valores promedio en el intervalo se denotan por $\overline{u}$ y $\overline{v}$, demuestre o refute que

(a) $\overline{u} + \overline{v} = \overline{u + v}$;

(b) $k\overline{u} = \overline{ku}$, donde k es cualquier constante;

(c) si $u \leq v$ entonces $\overline{u} \leq \overline{v}$.

54. La corriente eléctrica domiciliaria puede modelarse por medio del voltaje $V = \hat{V}\, \text{sen}(120\pi t + \phi)$, donde t se mide en segundos, $\hat{V}$ es el valor máximo que V puede alcanzar y ϕ es el ángulo de fase. Por lo común, tal voltaje es de 60 ciclos, ya que en 1 segundo el voltaje da 60 oscilaciones. El voltaje cuadrado medio, por lo común denotado por V_{rms}, se define como la raíz cuadrada del V^2. De aquí que

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{\int_{\phi}^{1+\phi} (\hat{V}\, \text{sen}(120\pi t + \phi))^2\, dt}$$

Una buena medida de cuánto calor puede producir un voltaje dado está determinado por V_{rms}.

(a) Calcule el voltaje promedio durante un segundo.

(b) Calcule el voltaje promedio en 1/60 de un segundo.

(c) Demuestre que $V_{\text{rms}} = \frac{\hat{V}\sqrt{2}}{2}$ calculando la integral para V_{rms}.

Sugerencia: $\int \text{sen}^2 t\, dt = -\frac{1}{2}\cos t\, \text{sen}\, t + \frac{1}{2}t + C.$

(d) Si por lo regular el V_{rms} para la corriente domiciliaria es 120 volts, ¿cuál es el valor $\hat{V}$ en este caso?

55. Proporcione una demostración del teorema del valor medio para integrales (teorema A) que no utilice el Primer Teorema Fundamental del Cálculo. *Sugerencia:* aplique el teorema de existencia máximo-mínimo y el teorema del valor intermedio.

56. Integrales que aparecen con frecuencia en las aplicaciones son $\int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx$ y $\int_0^{2\pi} \text{sen}^2 x\, dx$.

(a) Por medio de una identidad trigonométrica, muestre que

$$\int_0^{2\pi} (\text{sen}^2 x + \cos^2 x)\, dx = 2\pi$$

(b) Muestre, a partir de consideraciones geométricas, que

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx = \int_0^{2\pi} \text{sen}^2 x\, dx$$

(c) Concluya que $\int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx = \int_0^{2\pi} \text{sen}^2 x\, dx = \pi$.

GC **57.** Sea $f(x) = |\operatorname{sen} x| \operatorname{sen}(\cos x)$.

(a) ¿Es par, impar o ninguna de los dos?

(b) Observe que f es periódica, ¿cuál es su periodo?

(c) Evalúe la integral definida de f para cada uno de los intervalos siguientes: $[0, \pi/2]$, $[-\pi/2, \pi/2]$, $[0, 3\pi/2]$, $[-3\pi/2, 3\pi/2]$, $[0, 2\pi]$, $[\pi/6, 13\pi/6]$, $[\pi/6, 4\pi/3]$, $[13\pi/6, 10\pi/3]$.

58. Repita el problema 57 para $f(x) = \operatorname{sen} x\,|\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)|$.

59. Complete la generalización del Teorema de Pitágoras, iniciado en el problema 59 de la sección 0.3, mediante la demostración de que $A + B = C$ en la figura 12, éstas son las áreas de regiones semejantes construidas sobre los dos catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

(a) Convénzase de que semejanza significa

$$g(x) = \frac{a}{c}f\left(\frac{c}{a}x\right) \quad \text{y} \quad h(x) = \frac{b}{c}f\left(\frac{c}{b}x\right)$$

(b) Demuestre que $\displaystyle\int_0^a g(x)\,dx + \int_0^b h(x)\,dx = \int_0^c f(x)\,dx.$

60. Demuestre el teorema de simetría para el caso de funciones impares.

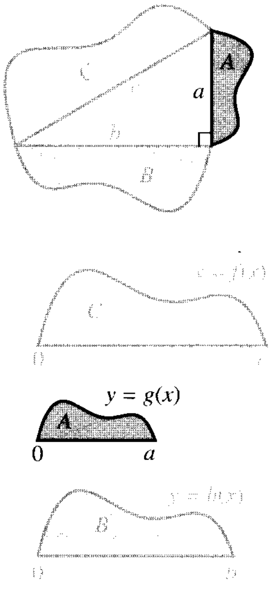


Figura 12

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ **2.** $f(c)$ **3.** 0; $2\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$ **4.** $f(x + p) = f(x)$; periodo.

4.6
Integración numérica

Sabemos que si f es continua en un intervalo cerrado [a, b], entonces la integral definida $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ debe existir. La existencia es una cosa; la evaluación es un asunto muy distinto. Hay muchas integrales definidas que no se pueden evaluar mediante los métodos que hemos aprendido; es decir, usando el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo. Por ejemplo, las integrales indefinidas

$$\int \operatorname{sen}(x^2)\,dx, \qquad \int \sqrt{1 - x^4}\,dx, \qquad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

no pueden expresarse algebraicamente en términos de funciones elementales; es decir, en términos de funciones estudiadas en un primer curso de cálculo. Aunque algunas integrales indefinidas elementales se pueden encontrar, con frecuencia conviene usar los métodos de aproximación de esta sección, pues éstos conducen a algoritmos eficientes que se pueden programar directamente en una calculadora o computadora. En la sección 4.2 vimos cómo usar las sumas de Riemann para aproximar una integral definida. En esta sección revisamos estas sumas de Riemann y presentamos dos métodos más: la regla del trapecio y la regla de la parábola.

Sumas de Riemann En la sección 4.2 introducimos el concepto de suma de Riemann. Suponga que f está definida en $[a, b]$ y que dividimos el intervalo $[a, b]$ en n intervalos más pequeños con puntos extremos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Entonces, la suma de Riemann está definida como

$$\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i$$

en donde $\overline{x}_i$ es algún punto (incluso, posiblemente un extremo) en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Por ahora, supondremos que la partición es *regular*, esto es, $\Delta x_i = (b - a)/n$

para toda i. Las sumas de Riemann se introdujeron en la sección 4.2, con el objetivo de expresar la integral definida como el límite de la suma de Riemann. Aquí vemos a la suma de Riemann como una forma de aproximar una integral definida.

Consideramos los tres casos: en donde el punto muestra, $\overline{x}_i$, es el extremo izquierdo, el extremo derecho o el punto medio de $[x_{i-1}, x_i]$. El extremo izquierdo, el extremo derecho y el punto medio del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ son

$$\text{extremo izquierdo} = x_{i-1} = a + (i-1)\frac{b-a}{n}$$

$$\text{extremo derecho} = x_i = a + i\,\frac{b-a}{n}$$

$$\text{punto medio} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = \frac{a + (i-1)\frac{b-a}{n} + a + i\frac{b-a}{n}}{2} = a + \left(i - \tfrac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}$$

Para una suma de Riemann del punto izquierdo tomamos $\overline{x}_i$ como x_{i-1}, el extremo izquierdo:

$$\text{Suma de Riemann del punto izquierdo} = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + (i-1)\frac{b-a}{n}\right)$$

Para una suma de Riemann del punto derecho tomamos $\overline{x}_i$ como x_i, el extremo derecho:

$$\text{Suma de Riemann del punto derecho} = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\,\frac{b-a}{n}\right)$$

Para la suma de Riemann del punto medio tomamos $\overline{x}_i$ como $(x_{i-1} + x_i)/2$, el punto medio del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$:

$$\text{Suma de Riemann del punto medio} = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + \left(i - \tfrac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right)$$

Las figuras en la gran tabla de la página siguiente ilustran cómo funcionan estas aproximaciones (y otras dos, que introduciremos posteriormente en esta sección).

EJEMPLO 1 Aproxime la integral definida $\int_1^3 \sqrt{4-x}\,dx$; use las sumas de Riemann del punto izquierdo, del punto derecho y del punto medio con $n = 4$.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = \sqrt{4-x}$. Tenemos $a = 1, b = 3$ y $n = 4$, por lo que $(b-a)/n = 0.5$. Los valores x_i y $f(x_i)$ son

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1.0 & f(x_0) &= f(1.0) = \sqrt{4-1} \approx 1.7321\\
x_1 &= 1.5 & f(x_1) &= f(1.5) = \sqrt{4-1.5} \approx 1.5811\\
x_2 &= 2.0 & f(x_2) &= f(2.0) = \sqrt{4-2} \approx 1.4142\\
x_3 &= 2.5 & f(x_3) &= f(2.5) = \sqrt{4-2.5} \approx 1.2247\\
x_4 &= 3.0 & f(x_4) &= f(3.0) = \sqrt{4-3} = 1.0000
\end{aligned}$$

Mediante la suma de Riemann del punto izquierdo tenemos la siguiente aproximación:

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \sqrt{4-x}\,dx &\approx \text{Suma de Riemann del punto izquierdo}\\
&= \frac{b-a}{n}[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)]\\
&= 0.5[f(1.0) + f(1.5) + f(2.0) + f(2.5)]\\
&\approx 0.5(1.7321 + 1.5811 + 1.4142 + 1.2247)\\
&\approx 2.9761
\end{aligned}$$

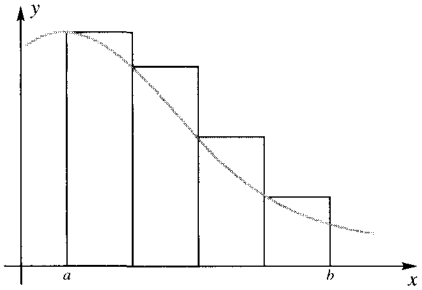
Métodos para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$

1. Suma de Riemann del punto izquierdo

$$\text{Área del } i\text{-ésimo rectángulo} = f(x_{i-1})\,\Delta x_i = \frac{b-a}{n} f\left(a + (i-1)\frac{b-a}{n}\right)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + (i-1)\frac{b-a}{n}\right)$$

$$E_n = \frac{(b-a)^2}{2n} f'(c) \text{ para alguna } c \text{ en } [a, b]$$

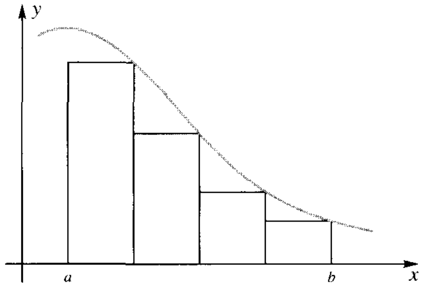


2. Suma de Riemann del punto derecho

$$\text{Área del } i\text{-ésimo rectángulo} = f(x_i)\,\Delta x_i = \frac{b-a}{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

$$E_n = -\frac{(b-a)^2}{2n} f'(c) \text{ para alguna } c \text{ en } [a, b]$$

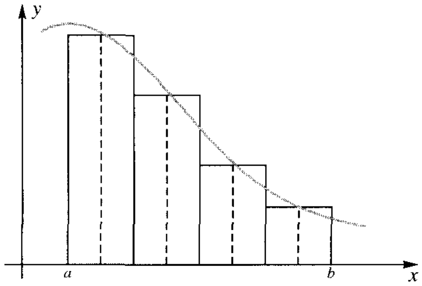


3. Suma de Riemann del punto medio

$$\text{Área del } i\text{-ésimo rectángulo} = f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)\Delta x_i = \frac{b-a}{n} f\left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right)$$

$$E_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(c) \text{ para alguna } c \text{ en } [a, b]$$



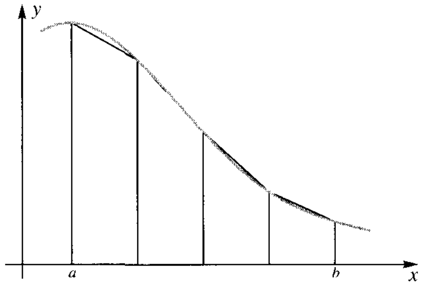
4. Regla del trapecio

$$\text{Área del trapecio } i\text{-ésimo} = \frac{b-a}{n}\,\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

$$= \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) + f(b)\right]$$

$$E_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c) \text{ para alguna } c \text{ en } [a, b]$$

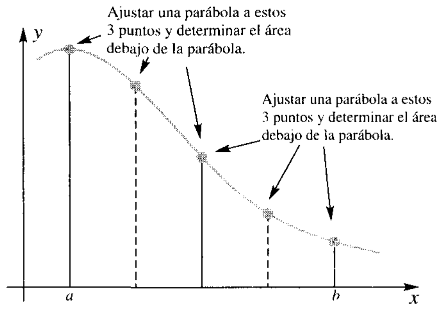


5. Regla de la parábola (*n* debe ser par)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{n-3}) + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$= \frac{b-a}{3n}\left[f(a) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f\left(a + (2i-1)\frac{b-a}{n}\right) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f\left(a + 2i\frac{b-a}{n}\right) + f(b)\right]$$

$$E_n = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(c) \text{ para alguna } c \text{ en } [a, b]$$



Ajustar una parábola a estos 3 puntos y determinar el área debajo de la parábola.

Ajustar una parábola a estos 3 puntos y determinar el área debajo de la parábola.

La suma de Riemann del punto derecho lleva a la aproximación siguiente:

$$\begin{aligned}\int_1^3 \sqrt{4-x}\,dx &\approx \text{Suma de Riemann del punto derecho}\\ &= \frac{b-a}{n}[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)]\\ &= 0.5[f(1.5)+f(2.0)+f(2.5)+f(3.0)]\\ &\approx 0.5(1.5811+1.4142+1.2247+1.0000)\\ &\approx 2.6100\end{aligned}$$

Por último, la aproximación de la suma de Riemann del punto medio para la integral definida es

$$\begin{aligned}\int_1^3 \sqrt{4-x}\,dx &\approx \text{Suma de Riemann del punto medio}\\ &= \frac{b-a}{n}\left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)\right]\\ &= 0.5\,[f(1.25)+f(1.75)+f(2.25)+f(2.75)]\\ &\approx 0.5(1.6583+1.5000+1.3229+1.1180)\\ &\approx 2.7996\end{aligned}$$

■

En este último ejemplo no eran necesarias las aproximaciones, ya que podríamos haber evaluado esta integral por medio del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\begin{aligned}\int_1^3 \sqrt{4-x}\,dx &= \left[-\frac{2}{3}(4-x)^{3/2}\right]_1^3 = -\frac{2}{3}(4-3)^{3/2}+\frac{2}{3}(4-1)^{3/2}\\ &= 2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\approx 2.7974\end{aligned}$$

La aproximación mediante la suma de Riemann del punto medio resultó ser la más cercana. Las figuras en la tabla de la página anterior sugieren que, con frecuencia, éste será el caso.

El ejemplo siguiente es más realista, en el sentido de que no es posible aplicar el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo.

EJEMPLO 2 Aproxime la integral definida $\int_0^2 \operatorname{sen} x^2\,dx$, mediante la suma de Riemann del punto derecho, con $n = 8$.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = \operatorname{sen} x^2$. Tenemos $a = 0$, $b = 2$ y $n = 8$, de modo que $(b-a)/n = 0.25$. Al usar la suma de Riemann del punto derecho tenemos la siguiente aproximación:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \operatorname{sen} x^2\,dx &\approx \text{Suma de Riemann del punto derecho}\\ &= \frac{b-a}{n}\left[\sum_{i=1}^{8} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\right]\\ &= 0.25(\operatorname{sen} 0.25^2+\operatorname{sen} 0.5^2+\operatorname{sen} 0.75^2+\operatorname{sen} 1^2\\ &\quad+\operatorname{sen} 1.25^2+\operatorname{sen} 1.5^2+\operatorname{sen} 1.75^2+\operatorname{sen} 2^2)\\ &\approx 0.69622\end{aligned}$$

■

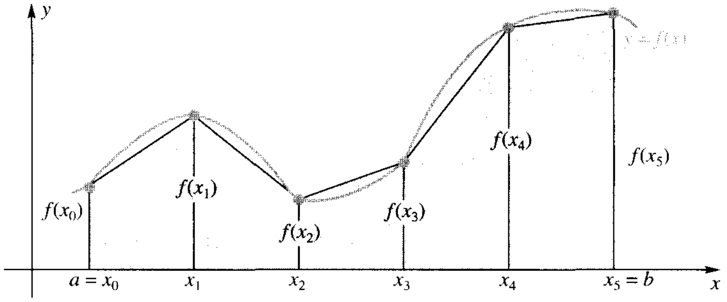
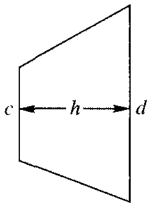


Figura 1



$A = h\,\frac{c+d}{2} = \frac{h}{2}(c+d)$

Figura 2

La regla del trapecio Suponga que unimos las parejas de puntos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ y $(x_i, f(x_i))$ mediante segmentos de recta, como se muestra en la figura 1, y así se forman n trapecios. Entonces, en lugar de aproximar el área debajo de la curva mediante la suma de áreas de *rectángulos*, la aproximamos mediante la suma de las áreas de los *trapecios*. Este método se denomina regla del trapecio.

Al recordar la fórmula para el área que aparece en la figura 2 podemos escribir el área del trapecio como

$$A_i = \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

Más precisamente, deberíamos hablar del área con *signo*, pues A_i será negativa en un subintervalo donde ϕ sea negativa. La integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es aproximadamente igual a $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$, es decir, igual a

$$\frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \cdots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Esto se simplifica a la regla del trapecio:

Regla del trapecio

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$= \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) + f(b)\right]$$

EJEMPLO 3 Aproxime la integral definida $\int_0^2 \operatorname{sen} x^2\,dx$ por medio de la regla del trapecio con $n = 8$.

SOLUCIÓN Éste es el mismo integrando e intervalo como en el ejemplo 2.

$$\int_0^2 \operatorname{sen} x^2\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{7} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) + f(b)\right]$$

$$= 0.125\left[\operatorname{sen} 0^2 + 2(\operatorname{sen} 0.25^2 + \operatorname{sen} 0.5^2 + \operatorname{sen} 0.75^2 + \operatorname{sen} 1^2\right.$$

$$\left. + \operatorname{sen} 1.25^2 + \operatorname{sen} 1.5^2 + \operatorname{sen} 1.75^2) + \operatorname{sen} 2^2\right]$$

$$\approx 0.79082$$

■

Es de suponer que podríamos obtener una mejor aproximación al elegir una n mayor; esto sería fácil si usáramos una computadora. Sin embargo, aunque al considerar n mayor se reduce el error del método, al menos potencialmente aumenta el error de cálculo. Por ejemplo, no sería adecuado considerar $n = 1{,}000{,}000$, pues los errores potenciales por el redondeo harían más que compensar el hecho de que el error del método fuese minúsculo. En breve, hablaremos más sobre los errores.

La regla de la parábola (regla de Simpson) En la regla del trapecio aproximamos la curva $y = f(x)$ por medio de segmentos de recta. Parece probable que podríamos hacerlo mejor utilizando segmentos parabólicos. Al igual que antes, dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de longitud $h = (b - a)/n$, pero esta vez con n un número *par*. Entonces ajustamos segmentos parabólicos a tres puntos adyacentes, como se muestra en la figura 3.

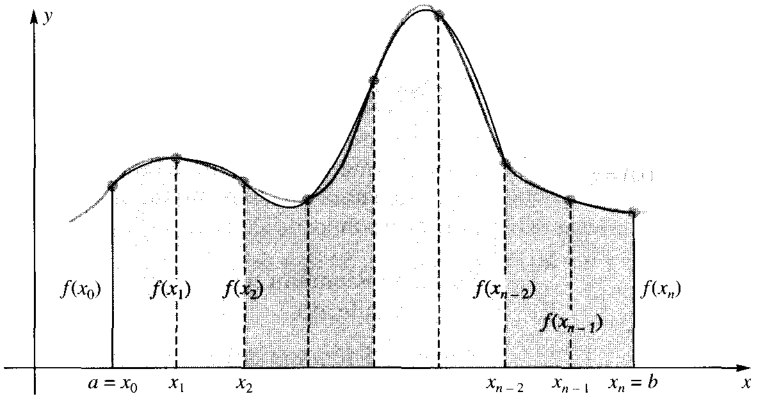
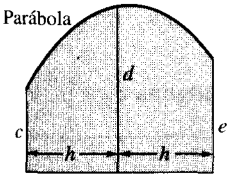


Figura 3



$A = \frac{h}{3}(c + 4d + e)$

Figura 4

El uso de la fórmula del área en la figura 4 (véase el problema 17 para la deducción) conduce a una aproximación denominada **regla de la parábola.** También se le llama **regla de Simpson,** en honor del matemático inglés Thomas Simpson (1710–1761).

Regla de la parábola (n par)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$= \frac{b-a}{3n}\left[f(a) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f\left(a + (2i-1)\frac{b-a}{n}\right) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f\left(a + 2i\frac{b-a}{n}\right) + f(b)\right]$$

El patrón de los coeficientes es 1, 4, 2, 4, 2, 4, 2,..., 2, 4, 1.

EJEMPLO 4 Aproxime la integral definida $\int_0^3 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ por medio de la regla de la parábola con $n = 6$.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = 1/(1 + x^2)$, $a = 0$, $b = 3$ y $n = 6$. Las x_i son $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1.0, \ldots, x_6 = 3.0$

$$\int_0^3 \frac{1}{1+x^2}\,dx \approx \frac{3-0}{3\cdot 6}\,[f(0) + 4f(0.5) + 2f(1.0) + 4f(1.5) + 2f(2.0) + 4f(2.5) + f(3.0)]$$

$$= \frac{1}{6}(1 + 4\cdot 0.8 + 2\cdot 0.5 + 4\cdot 0.30769 + 2\cdot 0.2 + 4\cdot 0.13793 + 0.1)$$

$$= 1.2471$$

■

Análisis del error En cualquier uso práctico de los métodos de aproximación descritos en esta sección, necesitamos tener alguna idea del tamaño del error incluido. Por fortuna, los métodos descritos en esta sección tienen fórmulas de error sencillas, siempre que el integrando tenga un número suficiente de derivadas. Llamamos a E_n el error si satisface

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{aproximación con base en } n \text{ intervalos} + E_n$$

Las fórmulas del error se dan en el siguiente teorema. Las demostraciones de estos resultados son muy difíciles y aquí las omitiremos.

Teorema A

Suponiendo que existen las derivadas necesarias en el intervalo $[a, b]$, los errores para la suma de Riemann del punto izquierdo, la suma de Riemann del punto derecho, la suma de Riemann del punto medio, la regla del trapecio y la regla de la parábola son

Suma de Riemann del punto izquierdo:	$E_n = \frac{(b-a)^2}{2n} f'(c)$ para alguna c en $[a, b]$
Suma de Riemann del punto derecho:	$E_n = -\frac{(b-a)^2}{2n} f'(c)$ para alguna c en $[a, b]$
Suma de Riemann del punto medio:	$E_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(c)$ para alguna c en $[a, b]$
Regla del trapecio:	$E_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c)$ para alguna c en $[a, b]$
Regla de la parábola:	$E_n = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(c)$ para alguna c en $[a, b]$

La cosa más importante de ser observada acerca de estas fórmulas de errores es la posición de n, el número de subintervalos. En todos los casos, la n aparece elevada a alguna potencia en el *denominador*. Por lo tanto, cuando n aumenta, el error disminuye. Además, entre más grande sea el exponente en n, el término de error se aproximará más rápido a cero. Por ejemplo, el término del error en la regla de la parábola incluye una n^4 en el denominador. Como n^4 crece mucho más rápido que n^2, el término del error para la regla de la parábola se aproximará a cero más rápido que el término del error para la regla del trapecio o la regla de la suma de Riemann del punto medio. De forma análoga, el término del error para la regla del trapecio se aproximará a cero más rápido que el término del error para las reglas de la suma de Riemann del punto izquierdo o derecho. Otra cosa que se debe notar acerca de estas fórmulas del error es que se cumplen "para alguna c en $[a, b]$". En la mayor parte de las situaciones prácticas, nunca podemos decir cuál es el valor de c. Todo lo que podemos hacer es obtener una cota superior sobre qué tan grande puede ser el error. Los siguientes ejemplos ilustran esto.

EJEMPLO 5 Aproxime la integral definida $\int_1^4 \frac{1}{1+x}\,dx$ por medio de la regla de la parábola con $n = 6$ y proporcione una cota para el valor absoluto del error.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $a = 1$, $b = 4$ y $n = 6$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{1}{1+x}\,dx &\approx \frac{b-a}{3n}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \\ &\qquad 4f(x_5) + f(x_6)] \\ &= \frac{3}{3(6)}[f(1.0) + 4f(1.5) + 2f(2.0) + 4f(2.5) + 2f(3.0) + \\ &\qquad 4f(3.5) + f(4.0)] \\ &\approx \frac{1}{6}(5.4984) \approx 0.9164\end{aligned}$$

El término del error para la regla de la parábola incluye la cuarta derivada del integrando:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \\
f''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} \\
f'''(x) &= -\frac{6}{(1+x)^4} \\
f^{(4)}(x) &= \frac{24}{(1+x)^5}
\end{aligned}
$$

La pregunta a la que ahora nos enfrentamos es ¿qué tan grande puede ser $|f^{(4)}(x)|$ en el intervalo $[1, 4]$? Es claro que $f^{(4)}(x)$ es una función decreciente no negativa en este intervalo, así que su valor absoluto alcanza su valor mayor en el extremo izquierdo, esto es, cuando $x = 1$. El valor de la cuarta derivada en $x = 1$ es $f^{(4)}(1) = 24/(1 + 1)^5 = 3/4$. Así que

$$|E_6| = \left|-\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(c)\right| = \frac{(4-1)^5}{180 \cdot 6^4} |f^{(4)}(c)| \le \frac{(4-1)^5}{180 \cdot 6^4} \frac{3}{4} \approx 0.00078$$

Por lo tanto, el error no es mayor que 0.00078. ■

En el siguiente ejemplo damos vuelta a las cosas. En lugar de especificar n y preguntar por el error, damos el error deseado y preguntamos qué tan grande debe ser n.

EJEMPLO 6 ¿Qué tan grande debe ser n para garantizar que el valor absoluto del error sea menor que 0.00001, cuando utilizamos (a) la suma de Riemann del punto derecho, (b) la regla del trapecio y (c) la regla de la parábola para estimar $\int_1^4 \frac{1}{1+x}\,dx$?

SOLUCIÓN Las derivadas del integrando $f(x) = 1/(1 + x)$ están dadas en el ejemplo anterior.

(a) El valor absoluto del término del error para la suma de Riemann del punto derecho es

$$|E_n| = \left|-\frac{(4-1)^2}{2n} f'(c)\right| = \frac{3^2}{2n}\left|\frac{1}{(1+c)^2}\right| \le \frac{9}{2n}\frac{1}{(1+1)^2} = \frac{9}{8n}$$

Queremos $|E_n| \le 0.00001$, así que necesitamos

$$
\begin{aligned}
\frac{9}{8n} &\le 0.00001 \\
n &\ge \frac{9}{8 \cdot 0.00001} = 112{,}500
\end{aligned}
$$

(b) Para la regla del trapecio tenemos

$$|E_n| = \left|-\frac{(4-1)^3}{12n^2} f''(c)\right| = \frac{3^3}{12n^2}\left|\frac{2}{(1+c)^3}\right| \le \frac{54}{12n^2(1+1)^3} = \frac{9}{16n^2}$$

Necesitamos que $|E_n| \le 0.00001$, así que n debe satisfacer

$$
\begin{aligned}
\frac{9}{16n^2} &\le 0.00001 \\
n^2 &\ge \frac{9}{16 \cdot 0.00001} = 56{,}250 \\
n &\ge \sqrt{56{,}250} \approx 237.17
\end{aligned}
$$

Así que, $n = 238$ debe hacerlo.

(c) Para la regla de la parábola,

$$|E_n| = \left|-\frac{(b-a)^5}{180n^4}f^{(4)}(c)\right| = \frac{3^5}{180n^4}\left|\frac{24}{(1+c)^5}\right| \leq \frac{3^5 \cdot 24}{180n^4(1+1)^5} = \frac{81}{80n^4}$$

Necesitamos $|E_n| \leq 0.00001$, así que

$$\frac{81}{80n^4} \leq 0.00001$$

$$n^4 \geq \frac{81}{80 \cdot 0.00001} \approx 101{,}250$$

$$n \geq 101{,}250^{1/4} \approx 17.8$$

Debemos redondear al siguiente entero par (ya que, para la regla de la parábola, n debe ser par). Por lo tanto, requerimos $n = 18$. ■

Observe cuán diferentes fueron las respuestas para las tres partes del ejemplo anterior. ¡Dieciocho subintervalos para la regla de la parábola dará casi la misma precisión que 100,000 subintervalos para la suma de Riemann del punto derecho! En realidad, la regla de la parábola es un método muy poderoso para aproximar integrales definidas.

Funciones definidas por medio de una tabla En todos los ejemplos anteriores, la función que hemos integrado se ha definido siempre en el intervalo completo de integración. Existen muchas situaciones en donde éste no es el caso. Por ejemplo, la velocidad se mide cada minuto, el flujo de agua de un tanque se mide cada 10 segundos y el área de la sección transversal se mide cada 0.1 milímetros. En todos estos casos, la integral tiene un significado claramente definido. Aunque no podemos obtener la integral de manera exacta, podemos utilizar las sumas de Riemann para aproximar la integral.

Minutos	Velocidad
0	0
10	55
20	57
30	60
40	70
50	70
60	70
70	70
80	19
90	0
100	59
110	63
120	65
130	62
140	0
150	0
160	0
170	22
180	38
190	35
200	25
210	0

EJEMPLO 7 Mientras su padre conducía desde San Luis hasta la ciudad de Jefferson, Chris observó la velocidad del automóvil cada 10 minutos, esto es, cada sexto de hora. La tabla al margen muestra estas lecturas del velocímetro. Utilice la regla del trapecio para aproximar cuánto viajaron.

SOLUCIÓN Sea $v(t)$ la velocidad del automóvil en el instante t, en donde t se mide en horas, contadas a partir del inicio del viaje. Si conocemos $v(t)$ para toda t en el intervalo $[0, 3.5]$ podemos encontrar la distancia recorrida tomando $\int_0^{3.5} v(t)\,dt$. El problema es que sólo conocemos $v(t)$ para 22 valores de t; $t_k = k/6$, donde $k = 0, 1, 2, \ldots, 21$. La figura 5 muestra una gráfica de la información que nos dan. Dividimos el intervalo $[0, 3.5]$ en intervalos de ancho $\frac{1}{6}$ (ya que 10 minutos es un sexto de una hora). Entonces, la regla del trapecio da

$$\int_0^{3.5} v(t)\,dt \approx \frac{3.5-0}{2\cdot 21}\left[v(0) + 2\sum_{i=1}^{20} v\left(0 + i\frac{3.5-0}{21}\right) + v(21)\right]$$

$$= \frac{3.5}{42}[0 + 2(55 + 57 + 60 + 70 + 70 + 70 + 70 + 19 + 0 + 59$$

$$+ 63 + 65 + 62 + 0 + 0 + 0 + 22 + 38 + 35 + 25) + 0]$$

$$= 140$$

Ellos condujeron aproximadamente 140 millas ■

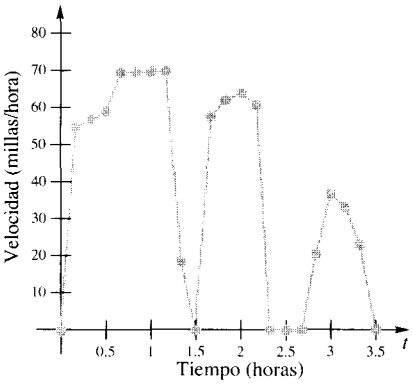


Figura 5

Revisión de conceptos

1. El patrón de coeficientes en la regla del trapecio es ______.

2. El patrón de coeficientes en la regla de la parábola es ______.

3. El error en la regla del trapecio tiene n^2 en el denominador, mientras que el error en la regla de la parábola tiene _______ en el denominador, de modo que esperamos que la segunda proporcione una mejor aproximación a una integral definida.

4. Si f es positiva y cóncava hacia arriba, entonces la regla del trapecio dará siempre un valor de $\int_a^b f(x)\,dx$ demasiado ______.

Conjunto de problemas 4.6

$\boxed{C}$ *En los problemas 1 al 6 utilice los métodos de (1) suma de Riemann del punto izquierdo, (2) suma de Riemann del punto derecho, (3) regla del trapecio, (4) regla de la parábola, con n = 8, para aproximar la integral definida. Luego utilice el segundo teorema fundamental del cálculo para determinar el valor exacto de cada integral.*

1. $\int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx$

2. $\int_1^3 \frac{1}{x^3}\,dx$

3. $\int_0^2 \sqrt{x}\,dx$

4. $\int_1^3 x\sqrt{x^2+1}\,dx$

5. $\int_0^1 x(x^2+1)^5\,dx$

6. $\int_1^4 (x+1)^{3/2}\,dx$

$\boxed{C}$ *En los problemas del 7 al 10 utilice los métodos de (1) suma de Riemann del punto izquierdo, (2) suma de Riemann del punto derecho, (3) suma de Riemann del punto medio, (4) regla del trapecio, (5) regla de la parábola, con n = 4, 8, 16. (Observe que ninguna de estas integrales puede evaluarse mediante el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, con las técnicas que ha aprendido hasta aquí). Presente sus aproximaciones en una tabla, como la siguiente:*

	SRPI	SRPD	SRPM	Trapecio	Parábola
$n = 4$					
$n = 8$					
$n = 16$					

7. $\int_1^3 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

8. $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$

9. $\int_0^2 \sqrt{x^2+1}\,dx$

10. $\int_1^3 x\sqrt{x^3+1}\,dx$

$\boxed{C}$ *En los problemas del 11 al 14 determine una n de modo que la regla del trapecio aproximará a la integral con un error En, que satisface* $|E_n| \le 0.01$. *Luego, utilizando esa n, aproxime la integral.*

11. $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$

12. $\int_1^3 \frac{1}{1+x}\,dx$

13. $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$

14. $\int_1^3 \sqrt{x+1}\,dx$

$\boxed{C}$ *En los problemas 15 y 16 determine una n de modo que la regla de la parábola aproximará a la integral con un error En, que satisface* $|E_n| \le 0.01$. *Luego, con esa n, aproxime la integral.*

15. $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$

16. $\int_4^8 \sqrt{x+1}\,dx$

17. Let $f(x) = ax^2 + bx + c$. Demuestre que

$$\int_{m-h}^{m+h} f(x)\,dx \quad \text{y} \quad \frac{h}{3}[f(m-h) + 4f(m) + f(m+h)]$$

tienen el valor $(h/3)[a(6m^2 + 2h^2) + b(6m) + 6c]$. Esto establece la fórmula del área, en la que está basada la regla de la parábola.

18. De dos formas distintas, muestre que la regla de la parábola es exacta para cualquier polinomio cúbico.

(a) Por medio de cálculo directo.

(b) Demostrando que $E_n = 0$.

Justifique sus respuestas a los problemas 19 al 22, de dos maneras: (1) mediante las propiedades de la gráfica de la función, y (2) por medio de las fórmulas del error del teorema A.

19. Si una función f es creciente en el intervalo $[a, b]$, la suma de Riemann del punto izquierdo ¿será mayor o menor que $\int_a^b f(x)\,dx$?

20. Si una función f es creciente en el intervalo $[a, b]$, la suma de Riemann del punto derecho ¿será mayor o menor que $\int_a^b f(x)\,dx$?

21. Si una función f es cóncava hacia abajo en el intervalo $[a, b]$, la suma de Riemann del punto medio ¿será mayor o menor que $\int_a^b f(x)\,dx$?

22. Si una función f es cóncava hacia abajo en el intervalo $[a, b]$, la suma de la regla del trapecio ¿será mayor o menor que $\int_a^b f(x)\,dx$?

23. Muestre que la regla de la parábola proporciona el valor exacto de $\int_{-a}^{a} x^k\,dx$ siempre que k sea impar.

24. Es interesante que una versión modificada de la regla del trapecio sea más precisa, en general, que la regla de la parábola. Esta versión dice que

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T - \frac{[f'(b) - f'(a)]h^2}{12}$$

donde T es la estimación usual por medio de trapecios.

(a) Utilice esta fórmula con $n = 8$ para estimar $\int_1^3 x^4\,dx$ y observe su notable precisión.

(b) Utilice esta fórmula con $n = 12$ para estimar $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$.

25. Sin hacer cálculo alguno, clasifique de la más pequeña a la más grande las aproximaciones de $\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx$, para los siguientes métodos: suma de Riemann del punto izquierdo, suma de Riemann del punto derecho, suma de Riemann del punto medio, regla del trapecio.

26. Sin hacer cálculo alguno, clasifique de la más pequeña a la más grande las aproximaciones de $\int_1^3 (x^3 + x^2 + x + 1)\,dx$, para los siguientes métodos: suma de Riemann del punto izquierdo, suma de Riemann del punto derecho, regla del trapecio, regla de la parábola.

27. Utilice la regla del trapecio para aproximar el área del terreno a orillas del lago que se muestra en la figura 6. Las dimensiones están en pies.

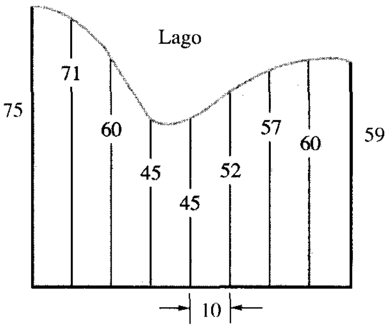


Figura 6

28. Utilice la regla de la parábola para aproximar la cantidad de agua necesaria para llenar una piscina, cuya figura se muestra en la figura 7, a una profundidad de 6 pies. Todas las dimensiones están en pies.

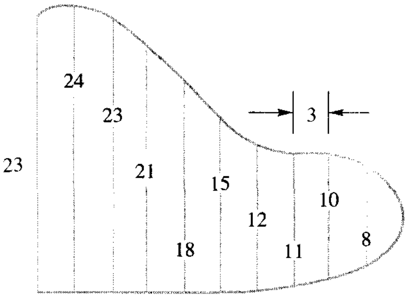


Figura 7

C **29.** La figura 8 muestra la profundidad, en pies, del agua en un río, medida a intervalos de 20 pies por la anchura del río. Si el río fluye a 4 millas por hora, durante un día, ¿cuánta agua (en pies cúbicos) fluye pasando por el lugar en donde se tomaron estas medidas? Utilice la regla de la parábola.

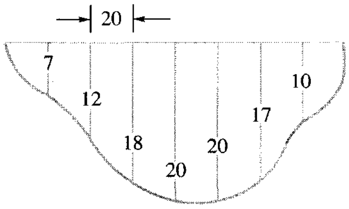


Figura 8

30. En un día de trabajo, Terí anotó su velocidad cada 3 minutos. Los resultados se muestran en la siguiente tabla. ¿Qué distancia manejó?

Tiempo (minutos)	0	3	6	9	12	15	18	21	24
Velocidad (mi/h)	0	31	54	53	52	35	31	28	0

31. Cada 12 minutos, entre las 4:00 p. m. y las 6:00 p. m., se midió la razón (en galones por minuto) a la cual fluía el agua del depósito de agua de un pueblo. Los resultados se muestran en la siguiente tabla. ¿Cuánta agua fue utilizada en este periodo de 2 horas?

Tiempo	4:00	4:12	4:24	4:36	4:48	5:00	5:12	5:24	5:36	5:48	6:00
Flujo (gal/min)	65	71	68	78	105	111	108	144	160	152	148

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** 1, 2, 2, . . . , 2, 1 **2.** 1, 4, 2, 4, 2, . . . , 4, 1 **3.** n^4 **4.** grande

4.7 Repaso del capítulo

Examen de conceptos

Responda con verdadero o falso a cada una de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

1. La integral indefinida es un operador lineal.

2. $\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]\,dx = f(x)g(x) + C.$

3. Todas las funciones continuas deben tener antiderivadas.

4. Si las segundas derivadas de dos funciones son iguales, entonces las funciones difieren a lo más por una constante.

5. $\int f'(x)\,dx = f(x)$ para toda función derivable f.

6. Si $s = -16t^2 + v_0 t$ da la altura en el instante t de una pelota lanzada directamente hacia arriba desde la superficie de la Tierra, entonces la pelota llegará al suelo con velocidad $-v_0$.

7. $\sum_{i=1}^{n} (a_i + a_{i-1}) = a_0 + a_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} a_i.$

8. $\sum_{i=1}^{100}(2i - 1) = 10{,}000.$

9. Si $\sum_{i=1}^{10} a_i^2 = 100$ y $\sum_{i=1}^{10} a_i = 20$, entonces $\sum_{i=1}^{10}(a_i + 1)^2 = 150.$

10. Si f está acotada en $[a, b]$, entonces f es integrable allí.

11. $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

12. Si $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, entonces $f(x) = 0$ para toda x en $[a, b]$.

13. Si $\int_a^b [f(x)]^2\,dx = 0$, entonces $f(x) = 0$ para toda x en $[a, b]$.

14. Si $a > x$ y $G(x) = \int_a^x f(z)\,dz$, entonces $G'(x) = -f(x)$.

15. El valor de $\int_x^{x+2\pi}(\operatorname{sen} t + \cos t)\,dt$ es independiente de x.

16. El operador lím es lineal.

17. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^{13} x\,dx = 0.$

18. $\int_1^5 \operatorname{sen}^2 x\,dx = \int_1^7 \operatorname{sen}^2 x\,dx + \int_7^5 \operatorname{sen}^2 x\,dx.$

19. Si f es continua y positiva en todas partes, entonces $\int_c^d f(x)\,dx$ es positiva.

20. $D_x\left[\int_0^{x^2} \frac{1}{1 + t^2}\,dt\right] = \frac{1}{1 + x^4}.$

21. $\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen} x|\,dx = \int_0^{2\pi} |\cos x|\,dx.$

22. $\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen} x|\,dx = 4\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx.$

23. La antiderivada de funciones impares son funciones pares.

24. Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces $F(5x)$ es una antiderivada de $f(5x)$.

25. Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces $F(2x + 1)$ es una antiderivada de $f(2x + 1)$.

26. Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces $F(x) + 1$ es una antiderivada de $f(x) + 1$.

27. Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces

$$\int f(v(x))\,dx = F(v(x)) + C$$

28. Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces

$$\int f^2(x)\,dx = \tfrac{1}{3}F^3(x) + C$$

29. Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces

$$\int f(x)\frac{df}{dx}\,dx = \tfrac{1}{2}F^2(x) + C$$

30. Si $f(x) = 4$ en $[0, 3]$, entonces toda suma de Riemann para f en el intervalo dado tiene el valor 12.

31. Si $F'(x) = G'(x)$ para toda x en $[a, b]$, entonces $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

32. Si $f(x) = f(-x)$ para toda x en $[-a, a]$, entonces $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$

33. Si $\bar{z} = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 z(t)\,dt$, entonces $z(t) - \bar{z}$ es una función impar para $-1 \le t \le 1$.

34. Si $F'(x) = f(x)$ para toda x en $[0, b]$, entonces $\int_0^b f(x)\,dx = F(b)$.

35. $\int_{-99}^{99}(ax^3 + bx^2 + cx)\,dx = 2\int_0^{99} bx^2\,dx.$

36. Si $f(x) \le g(x)$ en $[a, b]$, entonces $\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b |g(x)|\,dx.$

37. Si $f(x) \le g(x)$ en $[a, b]$, entonces $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \left|\int_a^b g(x)\,dx\right|.$

38. $\left|\sum_{i=1}^n a_i\right| \le \sum_{i=1}^n |a_i|.$

39. Si f es continua en $[a, b]$, entonces $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$

40. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \operatorname{sen}\left(\frac{2i}{n}\right)\cdot\frac{2}{n} = \int_0^2 \operatorname{sen} x\,dx.$

41. Si $\|P\| \to 0$, entonces el número de subintervalos en la partición tiende a ∞.

42. Siempre podemos expresar la integral indefinida de una función elemental en términos de funciones elementales.

43. Para una función creciente, la suma de Riemann del punto izquierdo siempre será menor que la suma de Riemann del punto derecho.

44. Para una función lineal $f(x)$, la suma de Riemann del punto medio siempre dará el valor exacto de $\int_a^b f(x)\,dx$, sin importar el valor de n.

45. La regla del trapecio con $n = 10$ dará una estimación para $\int_0^5 x^3\,dx$ que es menor al valor verdadero.

46. La regla de la parábola con $n = 10$ dará el valor exacto de $\int_0^5 x^3\,dx$.

Problemas de examen

En los problemas del 1 al 12 evalúe las integrales que se indican.

1. $\int_0^1 \left(x^3 - 3x^2 + 3\sqrt{x}\right)dx$

2. $\int_1^2 \frac{2x^4 - 3x^2 + 1}{x^2}\,dx$

3. $\int_1^{\pi} \frac{y^3 - 9y\operatorname{sen} y + 26y^{-1}}{y}\,dy$

4. $\int_4^9 y\sqrt{y^2 - 4}\,dy$

5. $\int_2^8 z(2z^2 - 3)^{1/3}\,dz$

6. $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \operatorname{sen} x\,dx$

7. $\int_0^{\pi} (x + 1)\tan^2(3x^2 + 6x)\sec^2(3x^2 + 6x)\,dx$

8. $\int_0^2 \frac{t^3}{\sqrt{t^4 + 9}}\,dt$

9. $\int_1^2 t^4(t^5 + 5)^{2/3}\,dt$

10. $\displaystyle\int_2^3 \frac{y^2-1}{(y^3-3y)^2}\,dy$

11. $\displaystyle\int (x+1)\operatorname{sen}(x^2+2x+3)\,dx$

12. $\displaystyle\int_1^5 \frac{(y^2+y+1)}{\sqrt[5]{2y^3+3y^2+6y}}\,dy$

13. Sea P una partición regular del intervalo $[0,2]$ en cuatro subintervalos iguales, y sea $f(x)=x^2-1$. Escriba la suma de Riemann para f sobre P, en la que $\bar{x}_i$ es el extremo de la derecha de cada subintervalo de P, $i=1,2,3,4$. Determine el valor de esta suma de Riemann y bosqueje la gráfica.

14. Si $f(x)=\displaystyle\int_{-2}^{x}\frac{1}{t+3}\,dt$, $-2\le x$, encuentre $f'(7)$.

15. Evalúe $\displaystyle\int_0^3 \left(2-\sqrt{x+1}\right)^2 dx$.

16. Si $f(x)=3x^2\sqrt{x^3-4}$, encuentre el valor promedio de f en $[2,5]$.

17. Evalúe $\displaystyle\int_2^4 \frac{5x^2-1}{x^2}\,dx$.

18. Evalúe $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(3^i-3^{i-1})$.

19. Evalúe $\displaystyle\sum_{i=1}^{10}(6i^2-8i)$.

20. Evalúe cada suma.

(a) $\displaystyle\sum_{m=2}^{4}\left(\frac{1}{m}\right)$ (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{6}(2-i)$ (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}\cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)$

21. Escriba en notación sigma

(a) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{78}$

(b) $x^2+2x^4+3x^6+4x^8+\cdots+50x^{100}$

22. Haga un bosquejo de la región bajo la curva $y=16-x^2$ entre $x=0$ y $x=3$, muestre el polígono inscrito correspondiente a una partición regular de $[0,3]$ en n subintervalos. Encuentre una fórmula para el área de este polígono y después encuentre el área debajo de la curva tomando un límite.

23. If $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=4$, $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx=2$, y $\displaystyle\int_0^2 g(x)\,dx=-3$, evalúe cada integral.

(a) $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^0 f(x)\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^2 3f(u)\,du$ (d) $\displaystyle\int_0^2 [2g(x)-3f(x)]\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^{-2} f(-x)\,dx$

24. Evalúe cada integral.

(a) $\displaystyle\int_0^4 |x-1|\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^4 [\![x]\!]\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^4 (x-[\![x]\!])\,dx$

Sugerencia: primero bosqueje una gráfica en las partes (a) y (b).

25. Suponga que $f(x)=f(-x)$, $f(x)\le 0$, $g(-x)=-g(x)$, $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx=-4$, y $\displaystyle\int_0^2 g(x)\,dx=5$. Evalúe cada integral

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{-2}^{2} |f(x)|\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{-2}^{2} g(x)\,dx$ (d) $\displaystyle\int_{-2}^{2} [f(x)+f(-x)]\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^2 [2g(x)+3f(x)]\,dx$ (f) $\displaystyle\int_{-2}^{0} g(x)\,dx$

26. Evalúe $\displaystyle\int_{-100}^{100}(x^3+\operatorname{sen}^5 x)\,dx$.

27. Encuentre c, del teorema del valor medio para integrales, para $f(x)=3x^2$ en $[-4,-1]$.

28. Encuentre $G'(x)$ para cada función G.

(a) $G(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2+1}\,dt$

(b) $G(x)=\displaystyle\int_1^{x^2} \frac{1}{t^2+1}\,dt$

(c) $G(x)=\displaystyle\int_x^{x^3} \frac{1}{t^2+1}\,dt$

29. Encuentre $G'(x)$ para cada función G.

(a) $G(x)=\displaystyle\int_1^x \operatorname{sen}^2 z\,dz$

(b) $G(x)=\displaystyle\int_x^{x+1} f(z)\,dz$

(c) $G(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(z)\,dz$

(d) $G(x)=\displaystyle\int_0^x\left(\int_0^u f(t)\,dt\right)du$

(e) $G(x)=\displaystyle\int_0^{g(x)}\left(\frac{d}{du}g(u)\right)du$

(f) $G(x)=\displaystyle\int_0^{-x} f(-t)\,dt$

30. Evalúe cada uno de los siguientes límites, reconociéndolos como una integral definida.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{4i}{n}}\cdot\frac{4}{n}$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{2i}{n}\right)^2\frac{2}{n}$

31. Demuestre que si $f(x)=\displaystyle\int_{2x}^{5x}\frac{1}{t}\,dt$, entonces f es una función constante en $(0,\infty)$.

32. Aproxime $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{1+x^4}\,dx$ utilizando las sumas de Riemann del punto izquierdo, del punto derecho y del punto medio, con $n=8$.

33. Aproxime $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{1+x^4}\,dx$ utilizando la regla del trapecio, con $n=8$, y proporcione una cota superior para el valor absoluto del error.

34. Aproxime $\int_0^4 \frac{1}{1+2x}\,dx$ mediante la regla de la parábola, con $n = 8$, y proporcione una cota superior para el valor absoluto del error.

35. ¿Qué tan grande debe ser n, en la regla del trapecio, para aproximar $\int_1^2 \frac{1}{1+x^4}\,dx$ con un error no mayor que 0.0001?

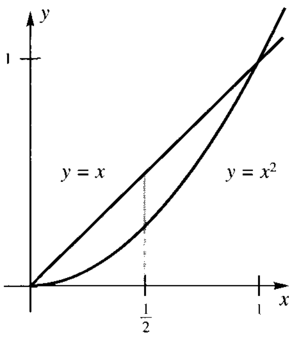
36. ¿Qué tan grande debe ser n, en la regla de la parábola, para aproximar $\int_0^4 \frac{1}{1+2x}\,dx$ con un error no mayor que 0.0001?

37. Sin realizar cálculo alguno, clasifique de menor a mayor las aproximaciones de $\int_1^6 \frac{1}{x}\,dx$ por los métodos siguientes: suma de Riemann del punto izquierdo, suma de Riemann del punto medio, regla del trapecio.

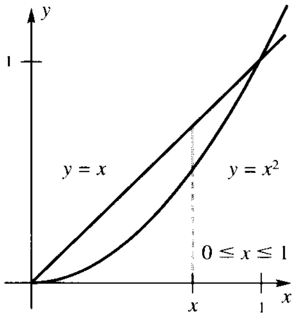
PROBLEMAS DE REPASO E INTRODUCCIÓN

En los problemas del 1 al 6 determine la longitud de la línea continua gris.

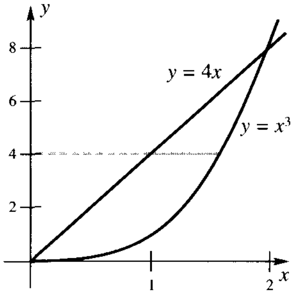
1.



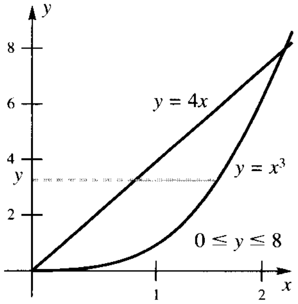
2.



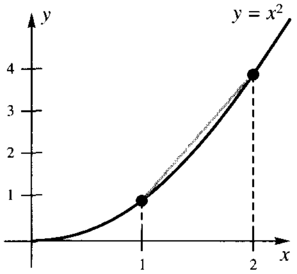
3.



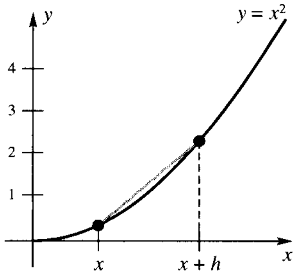
4.



5.

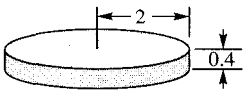


6.

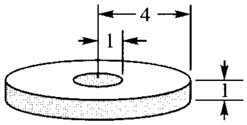


Para cada una de las siguientes figuras, el volumen del sólido es igual al área de la base por la altura. Proporcione el volumen de cada uno de estos sólidos.

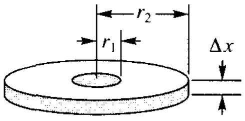
7.



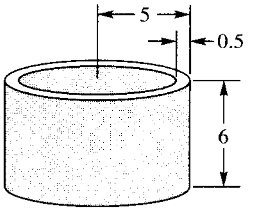
8.



9.



10.



Evalúe cada una de las siguientes integrales definidas.

11. $\int_{-1}^{2}(x^4 - 2x^3 + 2)\,dx$

12. $\int_{0}^{3} y^{2/3}\,dy$

13. $\int_{0}^{2}\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}\right)dx$

14. $\int_{1}^{4}\sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx$

CAPÍTULO 5 Aplicaciones de la integral

5.1 El área de una región plana
5.2 Volúmenes de sólidos: capas, discos, arandelas
5.3 Volúmenes de sólidos de revolución: cascarones
5.4 Longitud de una curva plana
5.5 Trabajo y fuerza de un fluido
5.6 Momentos y centro de masa
5.7 Probabilidad y variables aleatorias
5.8 Repaso del capítulo

5.1

El área de una región plana

El breve estudio de áreas en la sección 4.1 sirvió para motivar la definición de la integral definida. Ahora, con la última noción firmemente establecida, utilizamos la integral definida para calcular áreas de formas cada vez más complejas. Como es nuestra costumbre, iniciamos con casos sencillos.

Una región por arriba del eje x Supóngase que $y = f(x)$ determina una curva en el plano xy y supóngase que f es continua y no negativa en el intervalo $a \le x \le b$ (como en la figura 1). Considérese la región R acotada por las gráficas de $y = f(x), x = a, x = b$ y $y = 0$. Nos referiremos a R como la región bajo $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$. Su área $A(R)$ está dada por

$$A(R) = \int_a^b f(x)\,dx$$

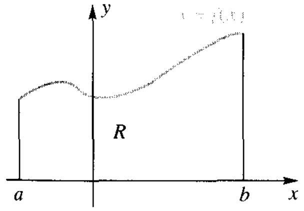


Figura 1

EJEMPLO 1 Encuentre el área de la región R bajo $y = x^4 - 2x^3 + 2$ entre $x = -1$ y $x = 2$.

≈ **SOLUCIÓN** La gráfica de R se muestra en la figura 2. Una estimación razonable para el área de R es su base por una altura promedio, digamos $(3)(2) = 6$. El valor exacto es

$$A(R) = \int_{-1}^{2}(x^4 - 2x^3 + 2)\,dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + 2x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{32}{5} - \frac{16}{2} + 4\right) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{51}{10} = 5.1$$

El valor calculado de 5.1 es suficientemente cercano a nuestra estimación, 6, para darnos confianza de su validez. ■

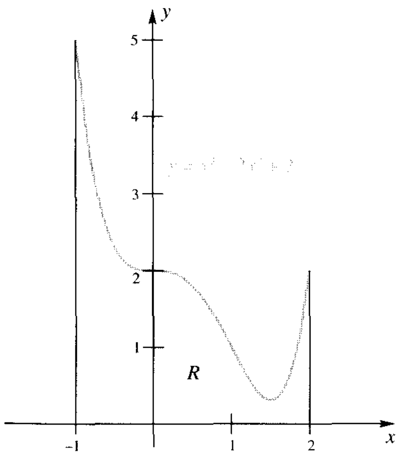


Figura 2

Una región debajo del eje x El área es un número no negativo. Si la gráfica de $y = f(x)$ está por debajo del eje x, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ es un número negativo y, por lo tanto, no puede ser un área. Sin embargo, sólo es el negativo del área de la región acotada por $y = f(x), x = a, x = b$ y $y = 0$.

EJEMPLO 2 Encuentre el área de la región R acotada por $y = x^2/3 - 4$, el eje x, $x = -2$ y $x = 3$.

≈ **SOLUCIÓN** La región R se muestra en la figura 3. Nuestra estimación preliminar para su área es $(5)(3) = 15$. El valor exacto es

$$A(R) = -\int_{-2}^{3}\left(\frac{x^2}{3} - 4\right)dx = \int_{-2}^{3}\left(-\frac{x^2}{3} + 4\right)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{9} + 4x\right]_{-2}^{3} = \left(-\frac{27}{9} + 12\right) - \left(\frac{8}{9} - 8\right) = \frac{145}{9} \approx 16.11$$

Estamos tranquilos por la cercanía de 16.11 a nuestra estimación. ■

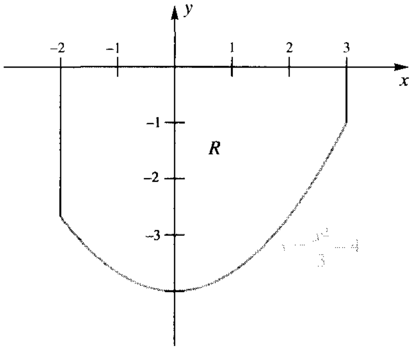


Figura 3

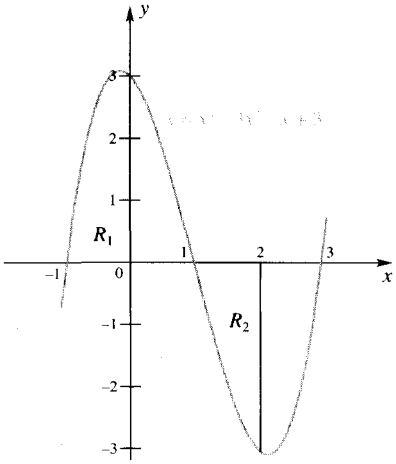


Figura 4

EJEMPLO 3 Encuentre el área de la región R acotada por $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$, el segmento del eje x entre $x = -1$ y $x = 2$, y la recta $x = 2$.

SOLUCIÓN La región R está sombreada en la figura 4. Observe que una parte de ella está arriba del eje x y otra está debajo. Las áreas de estas dos partes, R_1 y R_2, deben calcularse por separado. Puede verificar que la curva cruza el eje x en $-1, 1$ y 3. Así que

$$\begin{aligned} A(R) &= A(R_1) + A(R_2) \\ &= \int_{-1}^{1} (x^3 - 3x^2 - x + 3)\,dx - \int_{1}^{2} (x^3 - 3x^2 - x + 3)\,dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{1}^{2} \\ &= 4 - \left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{23}{4} \end{aligned}$$

Note que podríamos haber escrito esta área como una integral utilizando el símbolo de valor absoluto.

$$A(R) = \int_{-1}^{2} |x^3 - 3x^2 - x + 3|\,dx$$

pero ésta no es una simplificación real, ya que para evaluar esta integral tendríamos que separarla en dos partes, justo como lo hicimos antes. ■

Una manera útil de pensar Para regiones sencillas del tipo considerado anteriormente, es muy fácil escribir la integral correcta. Cuando consideremos regiones más complicadas (por ejemplo, regiones entre dos curvas), la tarea de seleccionar la integral correcta es más difícil. Sin embargo, hay una manera de pensar que puede ser muy útil. Regrese a la definición de área y de integral definida. Aquí está en cinco pasos.

Paso 1: Bosqueje la región.

Paso 2: Córtela en pedazos delgados (tiras); marque una pieza representativa.

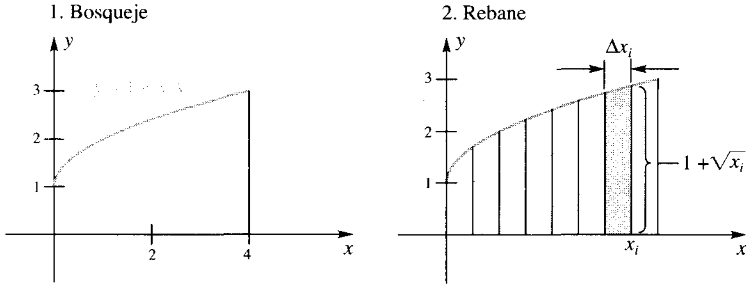
Paso 3: Aproxime el área de esta pieza representativa como si fuese un rectángulo.

Paso 4: Sume las aproximaciones a las áreas de las piezas.

Paso 5: Tome el límite cuando el ancho de las piezas se aproxima a cero, obteniendo así una integral definida.

Para ilustrar, consideramos otro ejemplo, aún sencillo.

EJEMPLO 4 Formule la integral para el área de la región bajo $y = 1 + \sqrt{x}$ entre $x = 0$ y $x = 4$ (véase la figura 5).



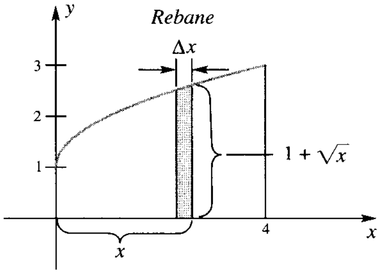
3. Aproxime el área de una pieza representativa: $\Delta A_i \approx (1 + \sqrt{x_i})\,\Delta x_i$

4. Sume: $A \approx \sum_{i=1}^{n} (1 + \sqrt{x_i})\,\Delta x_i$

5. Tome el límite: $A = \int_0^4 (1 + \sqrt{x})\,dx$

Figura 5

SOLUCIÓN Una vez comprendido este procedimiento de cinco pasos, podemos reducirlo a tres: *rebane, aproxime* e *integre*. Considere la palabra *integre* como la incorporación de dos pasos: (1) sumar las áreas de las piezas y (2) tomar el límite cuando el ancho de las piezas tiende a cero. En este proceso $\Sigma \ldots \Delta x$ se transforma en $\int \ldots dx$ cuando tomamos el límite. La figura 6 proporciona la forma abreviada para el mismo problema.



Aproxime

$\Delta A \approx (1 + \sqrt{x})\,\Delta x$

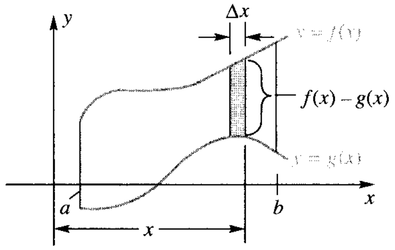
Integre

$A = \int_0^4 (1 + \sqrt{x})\,dx$

Figura 6

■

Una región entre dos curvas Considere las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ con $g(x) \le f(x)$ en $a \le x \le b$. Ellas determinan la región que se muestra en la figura 7. Utilizamos el método *rebane, aproxime, integre* para encontrar su área. Asegúrese de notar que $f(x) - g(x)$ da la altura correcta para la tira delgada, aun cuando la gráfica de g está por debajo del eje x. En este caso, $g(x)$ es negativa; de modo que restar $g(x)$ es lo mismo que sumar un número positivo. Puede verificar que $f(x) - g(x)$ también da la altura correcta, incluso cuando $f(x)$ y $g(x)$ son negativas.



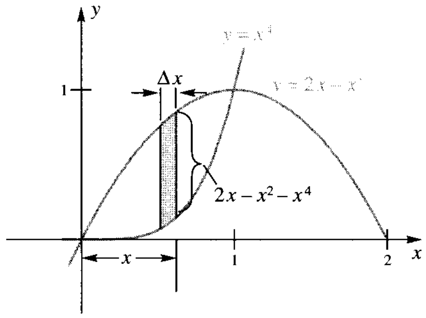
$\Delta A \approx [f(x) - g(x)]\,\Delta x$

$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$

Figura 7

EJEMPLO 5 Encuentre el área de la región entre las curvas $y = x^4$ y $y = 2x - x^2$.

SOLUCIÓN Empezamos por encontrar en dónde se intersecan las dos curvas. Para hacer esto, necesitamos resolver $2x - x^2 = x^4$, una ecuación de cuarto grado, la cual por lo regular es difícil de resolver. No obstante, en este caso $x = 0$ y $x = 1$ son soluciones obvias. Nuestro bosquejo de la región, junto con la aproximación apropiada y la integral correspondiente, se muestra en la figura 8.



$\Delta A \approx (2x - x^2 - x^4)\,\Delta x$

$A = \int_0^1 (2x - x^2 - x^4)\,dx$

Figura 8

Queda una tarea: evaluar la integral.

$$\int_0^1 (2x - x^2 - x^4)\,dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15} \qquad ■$$

EJEMPLO 6 **Rebanadas horizontales** Encuentre el área de la región entre la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $4x - 3y = 4$.

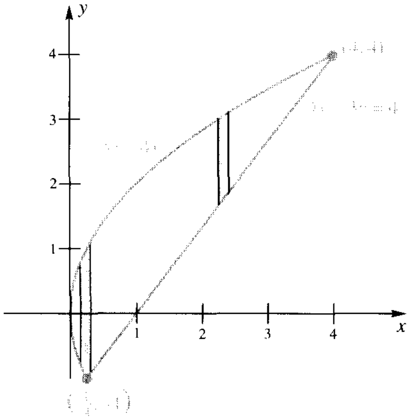


Figura 9

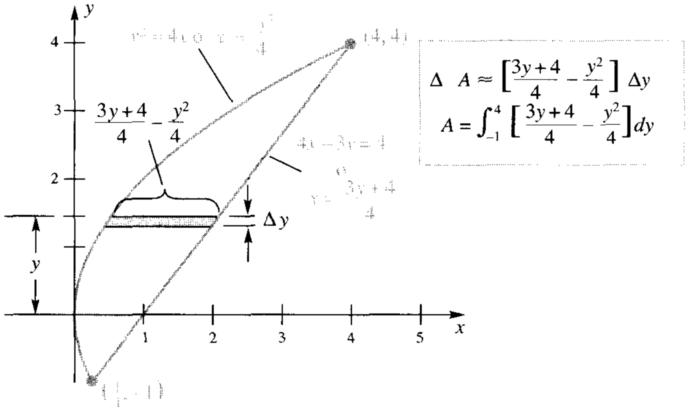
SOLUCIÓN Necesitaremos los puntos de intersección de estas dos curvas. Las ordenadas de estos puntos pueden determinarse escribiendo la segunda ecuación como $4x = 3y + 4$ y luego igualando las dos expresiones para $4x$.

$$\begin{aligned} y^2 &= 3y + 4 \\ y^2 - 3y - 4 &= 0 \\ (y - 4)(y + 1) &= 0 \\ y &= 4, -1 \end{aligned}$$

Cuando $y = 4, x = 4$ y cuando $y = -1, x = \frac{1}{4}$, concluimos que los puntos de intersección son $(4, 4)$ y $\left(\frac{1}{4}, -1\right)$. La región entre las curvas se muestra en la figura 9.

Ahora imagine que se rebana esta región de forma vertical. Nos enfrentamos a un problema, ya que la frontera inferior consiste en dos curvas diferentes. Las rebanadas en el extremo izquierdo van de la rama inferior de la parábola a su rama superior. Para el resto de la región, las rebanadas se extienden desde la recta hasta la parábola. Para resolver el problema con rebanadas verticales se requiere que primero dividamos nuestra región en dos partes, configurando una integral para cada parte y evaluando ambas integrales.

Un enfoque más apropiado es rebanar la región de manera horizontal, como se muestra en la figura 10, y por eso usamos como variable de integración a y en lugar de x. Observe que las rebanadas horizontales siempre van de la parábola (a la izquierda) a la recta (a la derecha). La longitud de tal rebanada es el valor más grande de $\left(x = \frac{1}{4}(3y + 4)\right)$ menos el valor más pequeño de $\left(x = \frac{1}{4}y^2\right)$.



y
(4, 4)
$\frac{3y+4}{4} - \frac{y^2}{4}$
$\Delta A \approx \left[\frac{3y+4}{4} - \frac{y^2}{4}\right]\Delta y$
$A = \int_{-1}^{4}\left[\frac{3y+4}{4} - \frac{y^2}{4}\right]dy$
$4x - 3y = 4$
Δy
y
4
3
2
1
2
3
4
5
x

Figura 10

$$\begin{aligned} A = \int_{-1}^{4}\left[\frac{3y + 4 - y^2}{4}\right]dy &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{4}(3y + 4 - y^2)\,dy \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{3y^2}{2} + 4y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{4} \\ &= \frac{1}{4}\left[\left(24 + 16 - \frac{64}{3}\right) - \left(\frac{3}{2} - 4 + \frac{1}{3}\right)\right] \\ &= \frac{125}{24} \approx 5.21 \end{aligned}$$

Hay dos puntos a observar: (1) El integrando que resulta de las rebanadas horizontales incluye a y, no a x; (2) para obtener el integrando, se despeja x de ambas ecuaciones y se resta el valor más pequeño de x del mayor. ■

Distancia y desplazamiento Considere un objeto que se mueve a lo largo de una recta con velocidad $v(t)$ en el instante t. Si $v(t) \geq 0$, entonces $\int_a^b v(t)\, dt$ proporciona la distancia recorrida durante el intervalo de tiempo $a \leq t \leq b$. Sin embargo, si algunas veces $v(t)$ es negativa (que corresponde a que el objeto se mueva en sentido inverso), entonces

$$\int_a^b v(t)\, dt = s(b) - s(a)$$

mide el **desplazamiento** del objeto, esto es, la distancia dirigida desde su posición inicial $s(a)$ hasta su posición final $s(b)$. Para obtener la **distancia total** que el objeto recorrió durante $a \leq t \leq b$, debemos calcular $\int_a^b |v(t)|\, dt$, el área entre la curva de la velocidad y el eje t.

EJEMPLO 7 Un objeto se encuentra en la posición $s = 3$ en el instante $t = 0$. Su velocidad en el instante t es $v(t) = 5$ sen $6\pi t$. ¿Cuál es la posición del objeto en el instante $t = 2$ y cuánto recorrió durante este tiempo?

SOLUCIÓN El desplazamiento del objeto, esto es, el cambio en su posición, es

$$s(2) - s(0) = \int_0^2 v(t)\, dt = \int_0^2 5 \text{ sen } 6\pi t\, dt = \left[-\frac{5}{6\pi} \cos 6\pi t\right]_0^2 = 0$$

Por lo tanto, $s(2) = s(0) + 0 = 3 + 0 = 3$. El objeto se encuentra en la posición 3, en el instante $t = 2$. La distancia total recorrida es

$$\int_0^2 |v(t)|\, dt = \int_0^2 |5 \text{ sen } 6\pi t|\, dt$$

Para realizar esta integración hacemos uso de la simetría (véase la figura 11). Así que

$$\int_0^2 |v(t)|\, dt = 12 \int_0^{2/12} 5 \text{ sen } 6\pi t\, dt = 60\left[-\frac{1}{6\pi} \cos 6\pi t\right]_0^{1/6} = \frac{20}{\pi} \approx 6.3662$$ ■

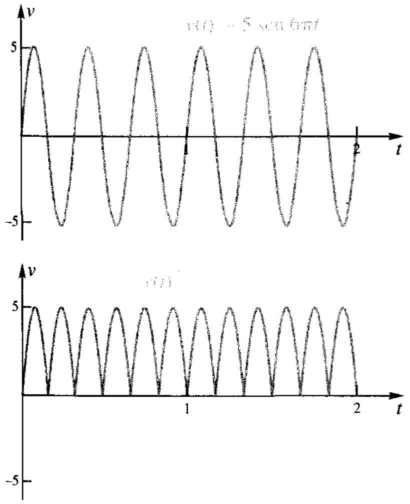


Figura 11

Revisión de conceptos

1. Sea R la región entre la curva $y = f(x)$ y el eje x en el intervalo $[a, b]$. Si $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$, entonces $A(R) =$ _____, pero si $f(x) \leq 0$ para toda x en $[a, b]$, entonces $A(R) =$ _____.

2. Para determinar el área de la región entre dos curvas, es bueno recordar la siguiente frase de tres palabras: _____.

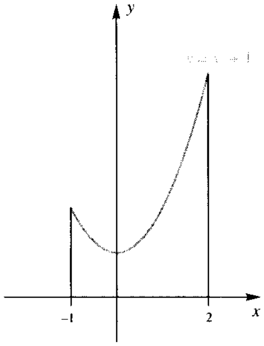
3. Suponga que las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ acotan a una región R en la que $f(x) \leq g(x)$. Entonces el área de R está dada por $A(R) = \int_a^b$ _____ dx, donde a y b se determinan resolviendo la ecuación _____.

4. Si $p(y) \leq q(y)$ para toda y en $[c, d]$, entonces el área $A(R)$ de la región R acotada por las curvas $x = p(y)$ y $x = q(y)$ entre $y = c$ y $y = d$ está dada por $A(R) =$ _____.

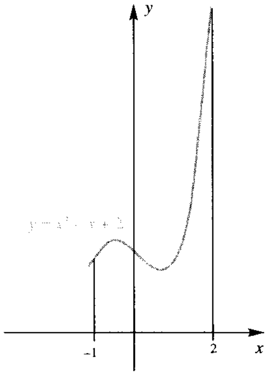
Conjunto de problemas 5.1

En los problemas del 1 al 10 utilice el procedimiento de tres pasos (rebanar, aproximar, integrar) para configurar y evaluar una integral (o integrales) para el área de la región que se indica.

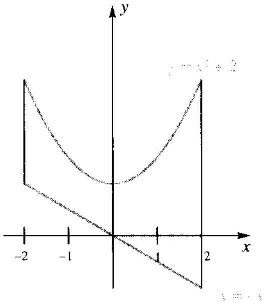
1.



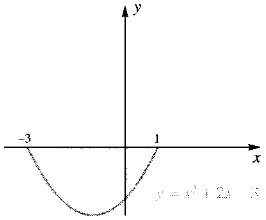
2.



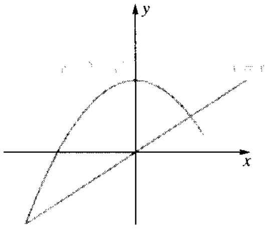
3.



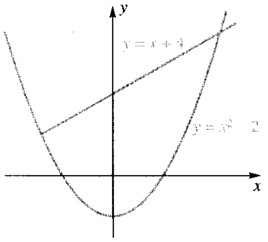
4.



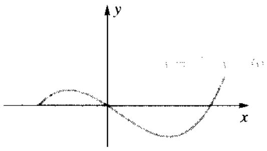
5.



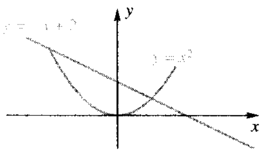
6.



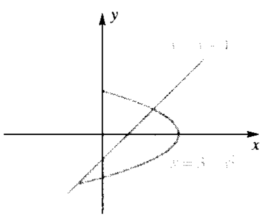
7.



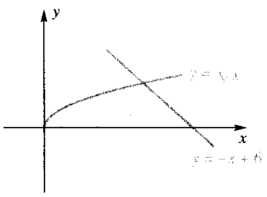
8.



9.



10.



≈ *En los problemas del 11 al 28 dibuje la región acotada por las gráficas de las ecuaciones que se dan, muestre una rebanada representativa, aproxime su área, formule una integral y calcule el área de la región. Haga una estimación del área para confirmar su respuesta.*

11. $y = 3 - \frac{1}{3}x^2, y = 0$, entre $x = 0$ y $x = 3$

12. $y = 5x - x^2, y = 0$, entre $x = 1$ y $x = 3$

13. $y = (x - 4)(x + 2), y = 0$, entre $x = 0$ y $x = 3$

14. $y = x^2 - 4x - 5, y = 0$, entre $x = -1$ y $x = 4$

15. $y = \frac{1}{4}(x^2 - 7), y = 0$, entre $x = 0$ y $x = 2$

16. $y = x^3, y = 0$, entre $x = -3$ y $x = 3$

17. $y = \sqrt[3]{x}, y = 0$, entre $x = -2$ y $x = 2$

18. $y = \sqrt{x} - 10, y = 0$, entre $x = 0$ y $x = 9$

19. $y = (x - 3)(x - 1), y = x$

20. $y = \sqrt{x}, y = x - 4, x = 0$

21. $y = x^2 - 2x, y = -x^2$

22. $y = x^2 - 9, y = (2x - 1)(x + 3)$

23. $x = 8y - y^2, x = 0$

24. $x = (3 - y)(y + 1), x = 0$

25. $x = -6y^2 + 4y, x + 3y - 2 = 0$

26. $x = y^2 - 2y, x - y - 4 = 0$

27. $4y^2 - 2x = 0, 4y^2 + 4x - 12 = 0$

28. $x = 4y^4, x = 8 - 4y^4$

29. Haga un bosquejo de la región R acotada por $y = x + 6, y = x^3$ y $2y + x = 0$. Después encuentre su área. *Sugerencia:* divida R en dos partes.

30. Por medio de integración, encuentre el área del triángulo con vértices en $(-1, 4), (2, -2)$ y $(5, 1)$.

31. Un objeto se mueve a lo largo de una recta, de modo que su velocidad en el instante t es $v(t) = 3t^2 - 24t + 36$ pies por segundo. Encuentre el desplazamiento y la distancia total que recorre el objeto para $-1 \leq t \leq 9$.

32. Siga las instrucciones del problema 31, si $v(t) = \frac{1}{2} + \operatorname{sen} 2t$ y el intervalo es $0 \leq t \leq 3\pi/2$.

33. Iniciando en $s = 0$ cuando $t = 0$, un objeto se mueve a lo largo de una recta de modo que su velocidad en el instante t es $v(t) = 2t - 4$ centímetros por segundo. ¿Cuánto tiempo le toma llegar a $s = 12$? ¿Cuánto tiempo le toma recorrer una distancia total de 12 centímetros?

34. Considere la curva $y = 1/x^2$ para $1 \leq x \leq 6$.

(a) Calcule el área debajo de esta curva.

(b) Determine c de modo que la recta $x = c$ biseque el área de la parte (a).

(c) Determine d de modo que la recta $y = d$ biseque el área de la parte (a).

35. Calcule las áreas A, B, C y D en la figura 12. Verifique calculando $A + B + C + D$ en una sola integración.

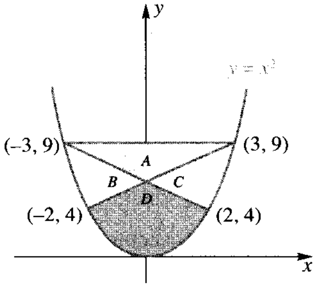


Figura 12

36. Demuestre el principio de Cavalieri. (Bonaventura Cavalieri —1598-1647— desarrolló este principio en 1635). Si dos regiones tienen la misma altura en cada x en $[a, b]$, entonces tienen la misma área (véase la figura 13).

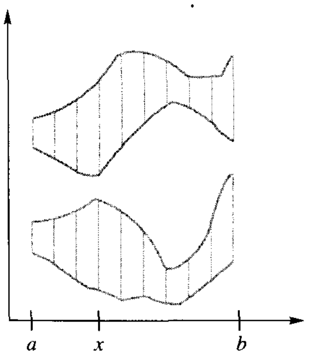


Figura 13

37. Utilice el principio de Cavalieri (no integre; vea el problema 36) para demostrar que las regiones sombreadas en la figura 14 tienen la misma área.

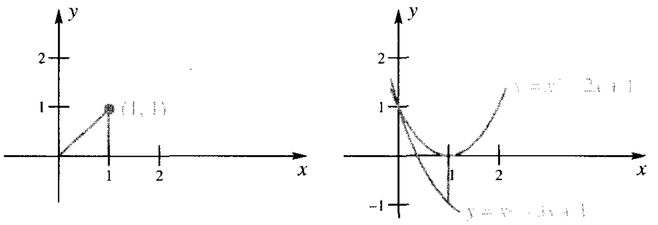


Figura 14

38. Encuentre el área de la región encerrada entre $y = \text{sen}\, x$ y $y = \frac{1}{2}$, $0 \le x \le 17\pi/6$.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $\int_a^b f(x)\,dx;\ -\int_a^b f(x)\,dx$ **2.** rebane, aproxime, integre. **3.** $[g(x) - f(x)];\ f(x) = g(x)$ **4.** $\int_c^d [q(y) - p(y)]\,dy$

5.2 Volúmenes de sólidos: capas, discos, arandelas

No es sorprendente que la integral definida pueda utilizarse para calcular *áreas*; se inventó para ese propósito. Pero los usos de la integral van mucho más allá de esa aplicación. Muchas cantidades pueden considerarse como el resultado de rebanar algo en pequeños pedazos, aproximar cada pedazo, sumarlos y tomar el límite cuando los pedazos disminuyen su tamaño. Este método de rebanar, aproximar e integrar puede utilizarse para encontrar los *volúmenes* de sólidos, siempre y cuando el volumen de cada pedazo sea fácil de aproximar.

¿Qué es el volumen? Comenzamos con sólidos sencillos denominados *cilindros rectos* cuatro de los cuales se muestran en la figura 1. En cada caso el sólido se genera moviendo una región plana (la base) a lo largo de una distancia h en dirección perpendicular a esa región. Y en cada caso el volumen del sólido se define como el área A de la base por la altura h; esto es,

$$V = A \cdot h$$

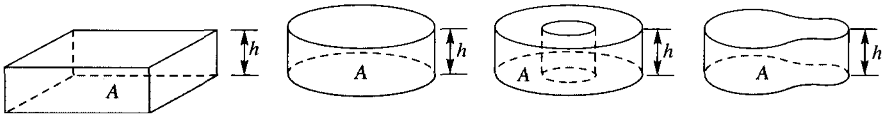


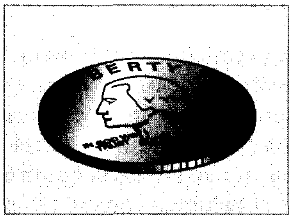
Figura 1

Ahora considere un sólido con la propiedad de que su sección transversal perpendicular a una recta dada tiene área conocida. En particular, supóngase que la recta es el eje x y que el área de la sección transversal en x es $A(x)$, $a \le x \le b$ (véase la figura 2). Dividimos el intervalo $[a, b]$ insertando los puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Después, a través de estos puntos, pasamos planos perpendiculares al eje x, con lo que rebanamos el sólido en **capas** delgadas o rebanadas (véase la figura 3). El *volumen* ΔV_i de una rebanada debe ser aproximadamente el volumen de un cilindro; esto es,

$$\Delta V_i \approx A(\bar{x}_i)\,\Delta x_i$$

El volumen de una moneda

Considere una moneda ordinaria, digamos, de 25 centavos de dólar.



Ésta tiene un radio de aproximadamente 1 centímetro y un grosor de casi 0.2 centímetros. Su volumen es el área de la base, $A = \pi(1^2)$ por el grosor $h = 0.2$; esto es

$$V = (1\pi)(0.2) \approx 0.63$$

centímetros cúbicos.

(Recuérdese que $\overline{x}_i$, denominado *punto muestra*, es cualquier número en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$).

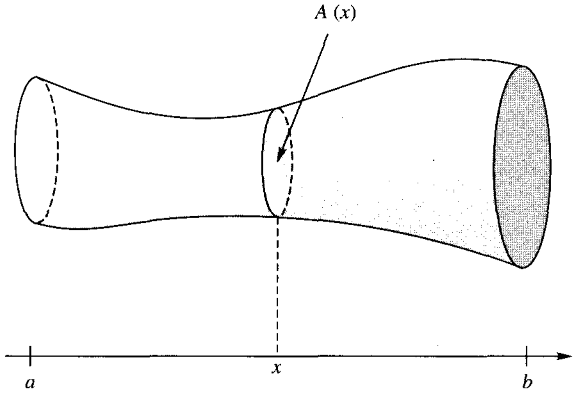


Figura 2

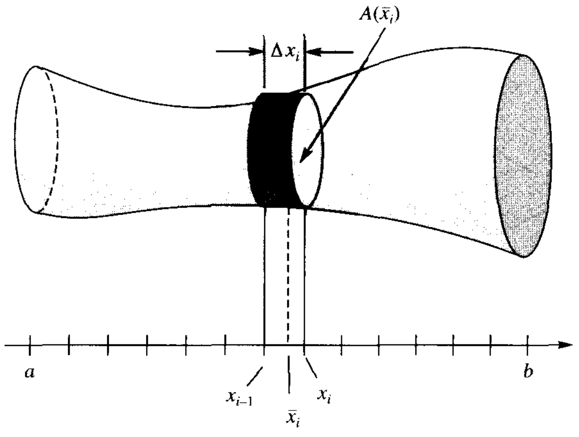


Figura 3

El "volumen" V del sólido debe estar dado, de manera aproximada, por la suma de Riemann.

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(\overline{x}_i)\ \Delta x_i$$

Cuando hacemos que la norma de la partición tienda a cero, obtenemos una integral definida; ésta se define como el **volumen** del sólido.

$$\boxed{V = \int_a^b A(x)\, dx}$$

En lugar de aplicar de manera mecánica la fórmula en el recuadro para obtener volúmenes, le sugerimos que en cada problema vaya a través del proceso que conduce a ella. Al igual que para áreas, llamamos a este proceso *rebane, aproxime, integre.* Se ilustra en los siguientes ejemplos.

Sólidos de revolución: Método de los discos Cuando una región plana está por completo en un lado de una recta fija en su plano y se hace girar alrededor de esa recta, genera un **sólido de revolución**. La recta fija se denomina **eje** del sólido de revolución.

A manera de ilustración, si la región acotada por un semicírculo y su diámetro se hace girar alrededor de ese diámetro, barre un sólido esférico (véase la figura 4). Si la región dentro de un triángulo rectángulo se hace girar alrededor de uno de sus catetos, genera un sólido cónico (véase la figura 5). Cuando una región circular se hace girar alrededor de una recta en su plano y que no interseque al círculo (véase la figura 6), barre un toro (dona). En cada caso es posible representar el volumen como una integral definida.

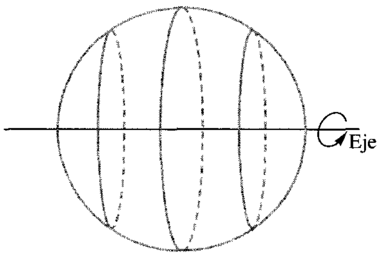


Figura 4

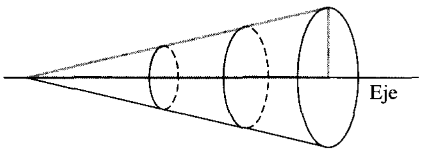


Figura 5

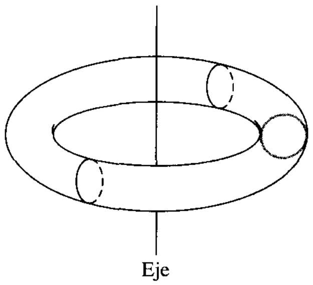


Figura 6

EJEMPLO 1 Encuentre el volumen del sólido de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje x la región plana R, acotada por $y = \sqrt{x}$, el eje x y la recta $x = 4$.

SOLUCIÓN La región R, con una rebanada representativa, se muestra como la parte de la izquierda de la figura 7. Cuando se hace girar en torno al eje x, esta región genera un sólido de revolución y la rebanada genera un disco, un objeto delgado en forma de moneda.

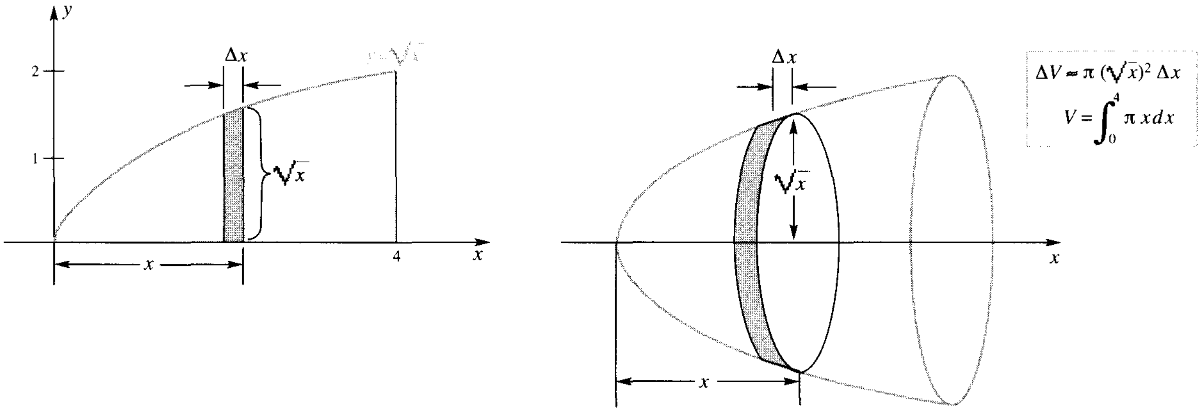

y
2
1
Δx
$y = \sqrt{x}$
$\sqrt{x}$
x
4
x
Δx
$\sqrt{x}$
x
x
$\Delta V \approx \pi(\sqrt{x})^2 \Delta x$
$V = \int_0^4 \pi x\,dx$

Figura 7

Al recordar que el volumen de un cilindro circular recto es $\pi r^2 h$, aproximamos el volumen ΔV de este disco con $\Delta V \approx \pi\left(\sqrt{x}\right)^2 \Delta x$ y entonces integramos

$$V = \pi \int_0^4 x\,dx = \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \pi\frac{16}{2} = 8\pi \approx 25.13$$

≈ ¿Es razonable esta respuesta? El cilindro circular recto que contiene al sólido tiene volumen $V = \pi 2^2 \cdot 4 = 16\pi$. La mitad de este número parece razonable. ■

EJEMPLO 2 Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por la curva $y = x^3$, el eje y y la recta $y = 3$ en torno al eje y (véase la figura 8).

SOLUCIÓN Aquí rebanamos de manera horizontal, lo cual hace que y sea la elección como la variable de integración. Observe que $y = x^3$ es equivalente a $x = \sqrt[3]{y}$ y $\Delta V \approx \pi\left(\sqrt[3]{y}\right)^2 \Delta y$.

Por lo tanto, el volumen es

$$V = \pi \int_0^3 y^{2/3}\,dy = \pi\left[\frac{3}{5}y^{5/3}\right]_0^3 = \pi\frac{9\sqrt[3]{9}}{5} \approx 11.76$$

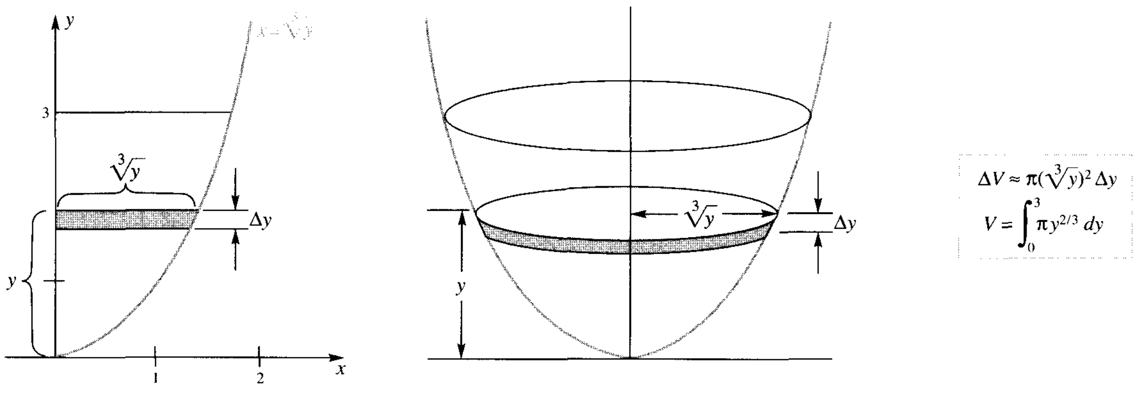
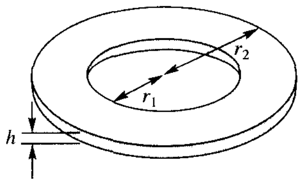

y
$x = \sqrt[3]{y}$
3
$\sqrt[3]{y}$
Δy
y
1
2
x
$\sqrt[3]{y}$
Δy
y
$\Delta V \approx \pi(\sqrt[3]{y})^2 \Delta y$
$V = \int_0^3 \pi y^{2/3}\,dy$

Figura 8 ■



$V = A \bullet h$
$= \pi(r_2^2 - r_1^2)h$

Figura 9

Método de las arandelas Algunas veces, al rebanar un sólido de revolución se obtienen discos con agujeros en medio. Les llamamos **arandelas**. Observe el diagrama y la fórmula de volumen que la acompaña, los cuales se muestran en la figura 9.

EJEMPLO 3 Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por las parábolas $y = x^2$ y $y^2 = 8x$ en torno al eje x.

SOLUCIÓN Las palabras clave siguen siendo *rebane, aproxime, integre* (véase la figura 10).

$$V = \pi \int_0^2 (8x - x^4)\, dx = \pi\left[\frac{8x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{48\pi}{5} \approx 30.16$$

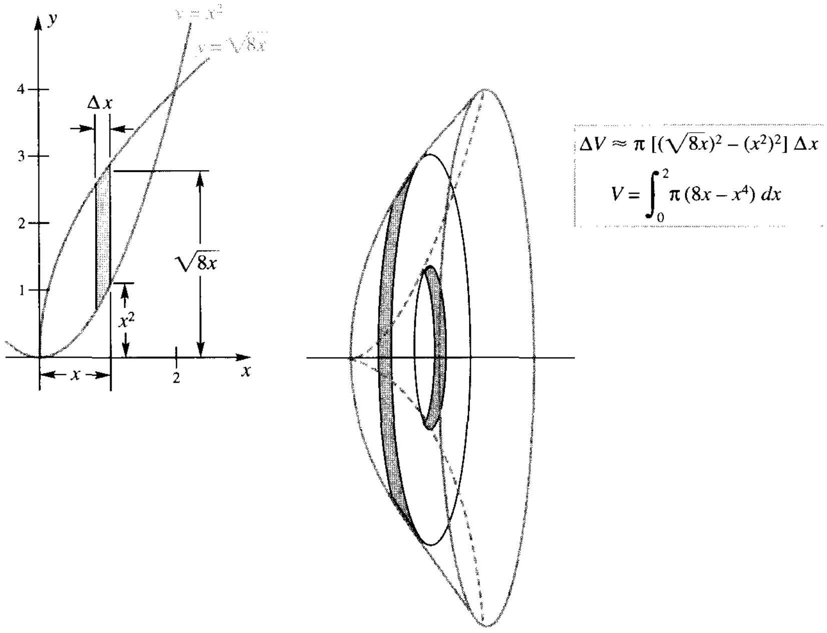

y
$y = x^2$
$y = \sqrt{8x}$
4
3
2
1
Δx
$\sqrt{8x}$
x^2
x
2
x
$\Delta V \approx \pi\,[(\sqrt{8x})^2 - (x^2)^2]\,\Delta x$
$V = \int_0^2 \pi\,(8x - x^4)\,dx$

Figura 10 ■

EJEMPLO 4 La región semicircular acotada por la curva $x = \sqrt{4 - y^2}$ y el eje y se hace girar alrededor de la recta $x = -1$. Configure la integral que representa su volumen.

SOLUCIÓN Aquí el radio exterior de la arandela es $1 + \sqrt{4 - y^2}$ y el radio interior es 1. La figura 11 muestra la solución. Se puede simplificar la integral. La parte que está por arriba del eje x tiene el mismo volumen que la parte por debajo de él (que se manifiesta por sí mismo en un integrando par). Por eso podemos integrar desde 0 hasta 2 y multiplicar el resultado por dos. También, el integrando se simplifica.

$$V = \pi \int_{-2}^{2} \left[\left(1 + \sqrt{4 - y^2}\right)^2 - 1^2\right] dy$$

$$= 2\pi \int_0^2 \left[2\sqrt{4 - y^2} + 4 - y^2\right] dy$$

Ahora, véase el problema 35 para considerar una forma de evaluar esta integral.

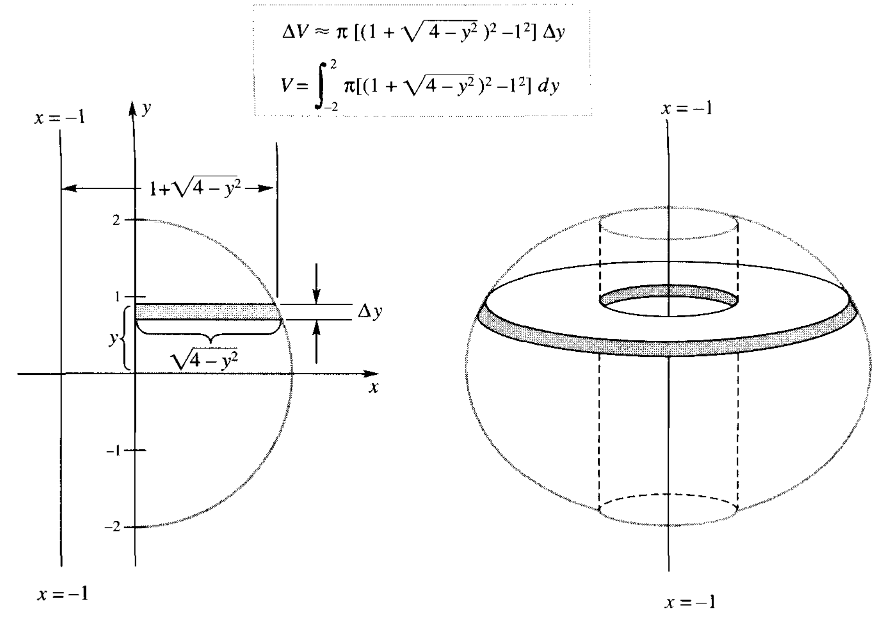

$\Delta V \approx \pi[(1+\sqrt{4-y^2})^2 - 1^2]\,\Delta y$
$V = \int_{-2}^{2} \pi[(1+\sqrt{4-y^2})^2 - 1^2]\,dy$
x = −1
y
$1+\sqrt{4-y^2}$
2
1
y
$\sqrt{4-y^2}$
Δy
x
−1
−2
x = −1
x = −1
x = −1

Figura 11

■

Otros sólidos con secciones transversales conocidas Hasta ahora, nuestros sólidos habían tenido secciones transversales circulares. Sin embargo, el método de encontrar el volumen funciona también para sólidos cuyas secciones transversales son cuadrados o triángulos. En realidad, todo lo que se necesita es que las áreas de las secciones transversales puedan determinarse, ya que, en este caso, también podemos aproximar el volumen de la rebanada —una capa— con esta sección transversal. Entonces, el volumen se encuentra mediante integración.

EJEMPLO 5 Sea la base de un sólido la región plana en el primer cuadrante acotada por $y = 1 - x^2/4$, el eje x y el eje y. Supóngase que las secciones transversales perpendiculares al eje x son cuadrados. Encuentre el volumen del sólido.

SOLUCIÓN Cuando rebanamos este sólido de manera perpendicular al eje x, obtenemos las delgadas cajas cuadradas (véase la figura 12), como rebanadas de queso.

$$V = \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^2 dx = \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}\right) dx = \left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{80}\right]_0^2$$

$$= 2 - \frac{8}{6} + \frac{32}{80} = \frac{16}{15} \approx 1.07$$

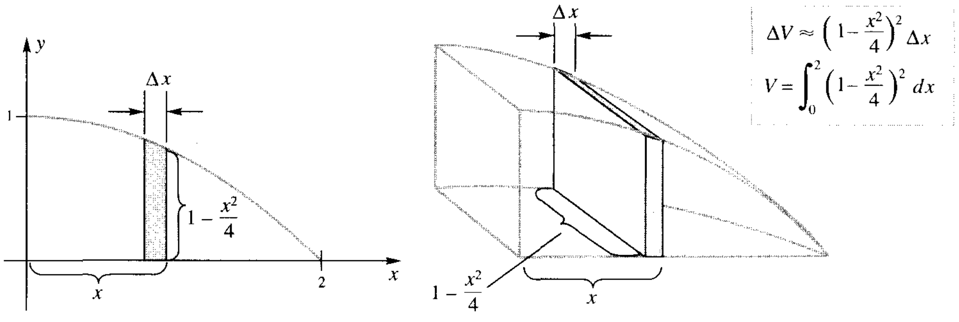
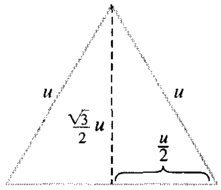

y
1
Δx
$1 - \frac{x^2}{4}$
x
2
x
Δx
$\Delta V \approx \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^2 \Delta x$
$V = \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^2 dx$
$1 - \frac{x^2}{4}$
x

Figura 12

■

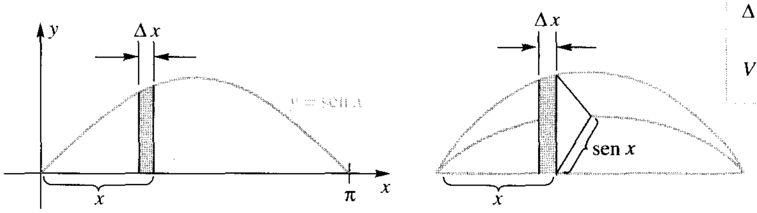


$A = \frac{1}{2}u\left(\frac{\sqrt{3}}{2}u\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}u^2$

Figura 13

EJEMPLO 6 La base de un sólido es la región entre un arco de $y = \text{sen}\,x$ y el eje x. Cada sección transversal perpendicular al eje x es un triángulo equilátero apoyado en esta base. Encuentre el volumen del sólido.

SOLUCIÓN Necesitamos el resultado de que el área de un triángulo equilátero de lado u es $\sqrt{3}\,u^2/4$ (véase la figura 13). Procedemos como se muestra en la figura 14.



$\Delta V \approx \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\,\text{sen}^2 x\right)\Delta x$

$V = \int_0^{\pi}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\,\text{sen}^2 x\right)dx$

Figura 14

Para realizar la integración indicada, usamos la fórmula para el medio ángulo $\text{sen}^2 x = (1 - \cos 2x)/2$.

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\pi}\frac{1 - \cos 2x}{2}dx = \frac{\sqrt{3}}{8}\int_0^{\pi}(1 - \cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\left[\int_0^{\pi}1\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2x \cdot 2\,dx\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\left[x - \frac{1}{2}\text{sen}\,2x\right]_0^{\pi} = \frac{\sqrt{3}}{8}\pi \approx 0.68$$ ■

Revisión de conceptos

1. El volumen de un disco de radio r y grosor h es ______.

2. El volumen de una arandela con radio interno r, radio externo R y grosor h es ______.

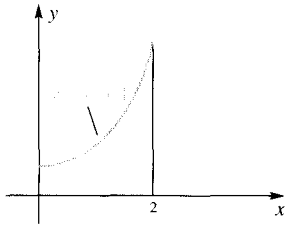
3. Si la región R, acotada por $y = x^2$, $y = 0$ y $x = 3$, se hace girar en torno al eje x, el disco en x tendrá un volumen $\Delta V \approx$ ______.

4. Si la región R de la pregunta 3 se hace girar en torno a la recta $y = -2$, la arandela en x tendrá volumen $\Delta V \approx$ ______.

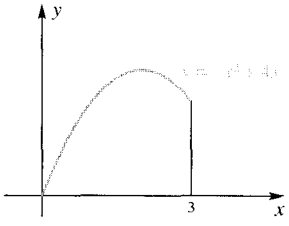
Conjunto de problemas 5.2

En los problemas del 1 al 4 encuentre el volumen del sólido generado cuando la región que se indica se hace girar alrededor del eje especificado; rebane, aproxime, integre.

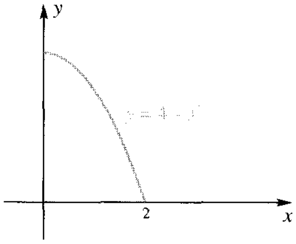
1. Eje x



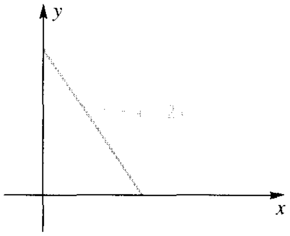
2. Eje x



3. (a) Eje x
(b) Eje y



4. (a) Eje x
(b) Eje y



En los problemas del 5 al 10 dibuje la región R acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas y muestre una rebanada vertical representativa. Después encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar R en torno al eje x.

5. $y = \frac{x^2}{\pi}, x = 4, y = 0$

6. $y = x^3, x = 3, y = 0$

7. $y = \frac{1}{x}, x = 2, x = 4, y = 0$

8. $y = x^{3/2}, y = 0$, entre $x = 2$ y $x = 3$

9. $y = \sqrt{9 - x^2}, y = 0$, entre $x = -2$ y $x = 3$

10. $y = x^{2/3}, y = 0$, entre $x = 1$ y $x = 27$

En los problemas del 11 al 16 haga un dibujo de la región R acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas y muestre una rebanada horizontal representativa. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar R alrededor del eje y.

11. $x = y^2, x = 0, y = 3$

12. $x = \frac{2}{y}, y = 2, y = 6, x = 0$

13. $x = 2\sqrt{y}, y = 4, x = 0$ **14.** $x = y^{2/3}, y = 27, x = 0$

15. $x = y^{3/2}, y = 9, x = 0$ **16.** $x = \sqrt{4 - y^2}, x = 0$

17. Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar en torno al eje x la región acotada por la mitad superior de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y el eje x; de esta manera, encuentre el volumen de un *esferoide alargado*. Aquí a y b son constantes positivas, con $a > b$.

18. Encuentre el volumen del sólido que se genera al hacer girar, en torno al eje x, la región acotada por la recta $y = 6x$ y la parábola $y = 6x^2$.

19. Encuentre el volumen del sólido que se genera al hacer girar, en torno al eje x, la región acotada por la recta $x - 2y = 0$ y la parábola $y^2 = 4x$.

20. Encuentre el volumen del sólido que se genera al hacer girar, en torno al eje x, la región en el primer cuadrante acotada por el círculo $x^2 + y^2 = r^2$, el eje x y la recta $x = r - h, 0 < h < r$, calculando así el volumen de un *casquete esférico* de altura h, de una esfera de radio r.

21. Encuentre el volumen del sólido que se genera al hacer girar, en torno al eje y, la región acotada por la recta $y = 4x$ y la parábola $y = 4x^2$.

22. Encuentre el volumen del sólido que se genera al hacer girar, en torno a la recta $y = 2$, la región en el primer cuadrante acotada por las parábolas $3x^2 - 16y + 48 = 0$ y $x^2 - 16y + 80 = 0$ y el eje y.

23. La base de un sólido es la región interior del círculo $x^2 + y^2 = 4$. Encuentre el volumen del sólido si cada sección transversal a un plano perpendicular al eje x es un cuadrado. *Sugerencia:* véanse los ejemplos 5 y 6.

24. Resuelva el problema 23 suponiendo que cada sección transversal a un plano perpendicular al eje x es un triángulo isósceles con base en el plano xy y altura 4. *Sugerencia:* para completar la evaluación, interprete $\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx$ como el área de un semicírculo.

25. La base de un sólido está acotada por un arco de $y = \sqrt{\cos x}$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, y el eje x. Cada sección transversal perpendicular al eje x es un cuadrado apoyado en esta base. Encuentre el volumen del sólido.

26. La base de un sólido es la región acotada por $y = 1 - x^2$ y $y = 1 - x^4$. Las secciones transversales del sólido, que son perpendiculares al eje x, son cuadrados. Encuentre el volumen del sólido.

27. Encuentre el volumen de un octante (un octavo) de la región sólida común a dos cilindros circulares rectos de radio 1 cuyos ejes se intersecan en ángulos rectos. *Sugerencia:* las secciones transversales horizontales son cuadradas. Véase la figura 15.

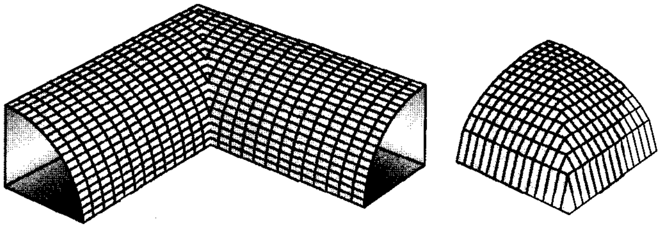


Figura 15

28. Encuentre el volumen dentro de la "cruz" que se muestra en la figura 16. Suponga que ambos cilindros tienen radio de 2 pulgadas y largo de 12 pulgadas. *Sugerencia:* el volumen es igual al volumen del primer cilindro más el volumen del segundo cilindro menos el volumen de la región común a ambos. Utilice el resultado del problema 27.

29. Encuentre el volumen interior a la "cruz" de la figura 16, suponiendo que ambos cilindros tienen radio r y largo L.

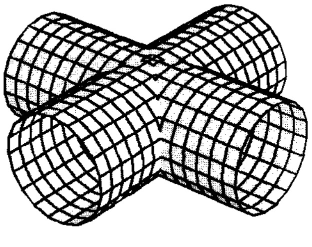


Figura 16

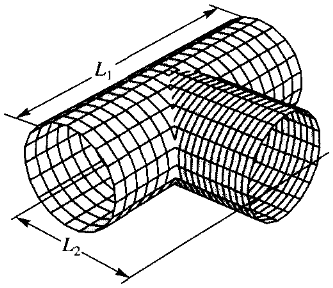


Figura 17

30. Encuentre el volumen interior de la "T" en la figura 17, suponiendo que cada cilindro tiene radio $r = 2$ pulgadas y que las longitudes son $L_1 = 12$ pulgadas y $L_2 = 8$ pulgadas.

31. Repita el problema 30 para r, L_1 y L_2 arbitrarias.

32. La base de un sólido es la región R acotada por $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$. Cada sección transversal perpendicular al eje x es un semicírculo cuyo diámetro se extiende a lo largo de R. Encuentre el volumen del sólido.

33. Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región en el primer cuadrante acotada por la curva $y^2 = x^3$, la recta $x = 4$ y el eje x:

(a) en torno a la recta $x = 4$; (b) en torno a la recta $y = 8$.

34. Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región en el primer cuadrante acotada por la curva $y^2 = x^3$, la recta $y = 8$ y el eje y:

(a) en torno a la recta $x = 4$; (b) en torno a la recta $y = 8$.

35. Complete la evaluación de la integral del ejemplo 4, observando que

$$\int_0^2 \left[2\sqrt{4-y^2}+4-y^2\right]dy$$

$$= 2\int_0^2 \sqrt{4-y^2}\,dy + \int_0^2 (4-y^2)\,dy$$

Ahora interprete la primera integral como el área de un cuarto de círculo.

36. Un barril abierto de radio r y altura h, al inicio está lleno de agua. Se inclina y el agua se derrama hasta que el nivel del agua coincide con el diámetro de la base y toca exactamente el borde superior. Encuentre el volumen del agua que queda en el barril. Véase la figura 18.

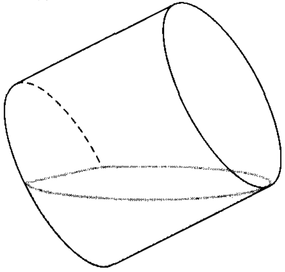


Figura 18

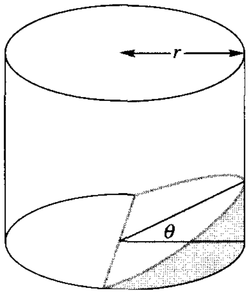


Figura 19

37. Se corta una cuña de un cilindro circular recto de radio r (véase la figura 19). La superficie superior de la cuña está en un plano que pasa por el diámetro de la base circular y forma un ángulo θ con la base. Encuentre el volumen de la cuña.

38. (El reloj de agua) Un tanque de agua se obtiene haciendo girar, en torno al eje y, la curva $y = kx^4$, $k > 0$.

(a) Encuentre $V(y)$, el volumen de agua en el tanque como una función de su profundidad y.

(b) El agua sale a través de un pequeño orificio de acuerdo con la Ley de Torricelli $\left(dV/dt = -m\sqrt{y}\right)$. Demuestre que el nivel del agua desciende a una velocidad constante.

39. Demuestre que el volumen de un cono general (véase la figura 20) es $\frac{1}{3}Ah$, donde A es el área de la base y h es la altura. Utilice este resultado para dar la fórmula para el volumen de:

(a) Un cono circular recto de radio r y altura h;

(b) Un tetraedro regular con arista de longitud r.

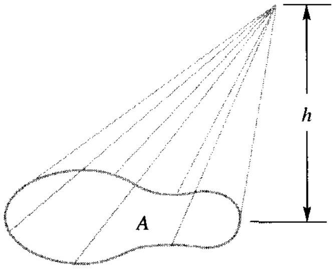


Figura 20

40. Formule la versión del principio de Cavalieri para el volumen (véase el problema 36 de la sección 5.1).

41. Aplique el principio de Cavalieri para volúmenes a los dos sólidos que se muestran en la figura 21. (Uno es una semiesfera de radio r; el otro es un cilindro de radio r y altura r, del que se eliminó un cono circular recto de radio r y altura r). Suponiendo que el volumen de un cono circular recto es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$, encuentre el volumen de una semiesfera de radio r.

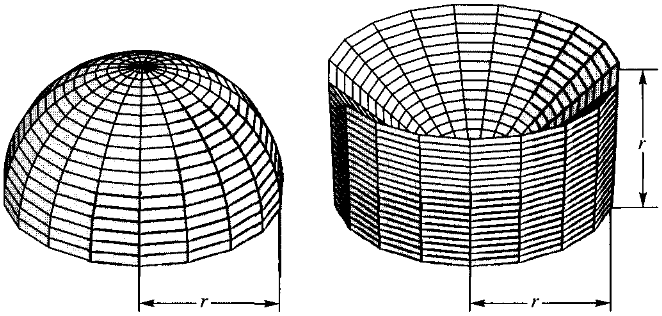


Figura 21

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $\pi r^2 h$ **2.** $\pi(R^2 - r^2)h$ **3.** $\pi x^4\,\Delta x$ **4.** $\pi[(x^2+2)^2 - 4]\,\Delta x$

5.3

Volúmenes de sólidos de revolución: cascarones

Existe otro método para encontrar el volumen de un sólido de revolución: el método de los cascarones cilíndricos. Para muchos problemas, es más fácil de aplicar que el método de los discos o el de las arandelas.

Un cascarón cilíndrico es un sólido acotado por dos cilindros circulares rectos concéntricos (véase la figura 1). Si el radio interno es r_1, el radio externo es r_2 y la altura es h, entonces su volumen está dado por

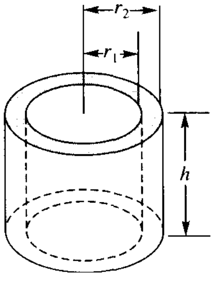


Figura 1

$$\begin{aligned} V &= (\text{área de la base}) \cdot (\text{altura}) \\ &= (\pi r_2^2 - \pi r_1^2)h \\ &= \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h \\ &= 2\pi\left(\frac{r_2 + r_1}{2}\right)h(r_2 - r_1) \end{aligned}$$

La expresión $(r_1 + r_2)/2$, que denotaremos con r, es el promedio de r_1 y r_2. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \cdot (\text{radio promedio})\cdot(\text{altura})\cdot(\text{grosor}) \\ &= 2\pi r h\,\Delta r \end{aligned}$$

He aquí una buena forma de recordar esta fórmula: si el cascarón fuera muy delgado y flexible (como papel), podríamos cortarlo por un lado, abrirlo para formar una hoja rectangular y después calcular su volumen, suponiendo que esta hoja forma una delgada caja rectangular de largo $2\pi r$, altura h y grosor Δr (véase la figura 2).

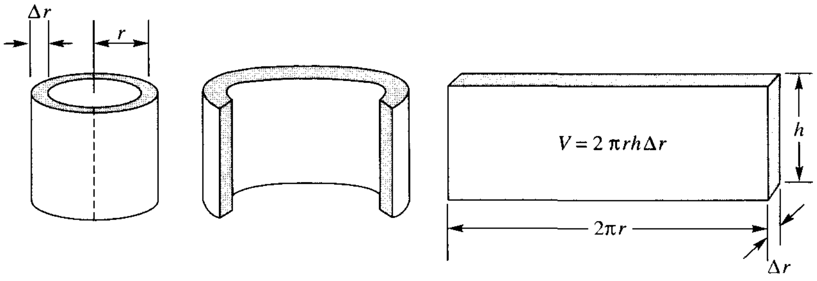


Figura 2

El método de los cascarones Ahora, considere una región del tipo que se muestra en la figura 3. Rebánela de manera vertical y hágala girar en torno al eje y. Generará un sólido de revolución y cada rebanada generará una pieza que es aproximadamente un cascarón cilíndrico. Para obtener el volumen de este sólido, calculamos el volumen ΔV de un cascarón representativo, sumamos y tomamos el límite cuando el grosor de los cascarones tiende a cero. Por supuesto, lo último es una integral. De nuevo, la estrategia es rebane, aproxime, integre.

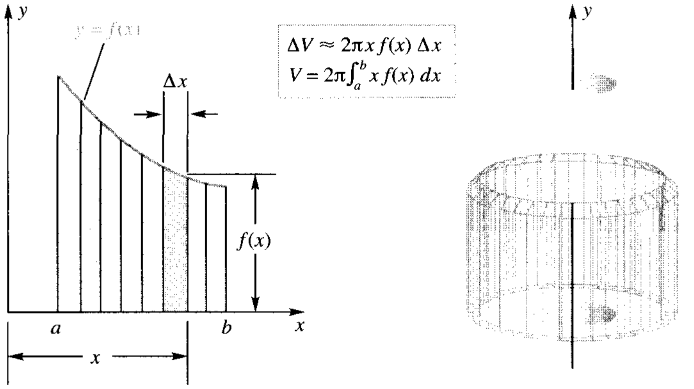


Figura 3

EJEMPLO 1 La región acotada por $y = 1/\sqrt{x}$, el eje x, $x = 1$ y $x = 4$ se hace girar en torno al eje y. Encuentre el volumen del sólido resultante.

SOLUCIÓN Con base en la figura 3, vemos que el volumen del cascarón que se genera por la rebanada es

$$\Delta V \approx 2\pi x f(x)\,\Delta x$$

que, para $f(x) = 1/\sqrt{x}$, se convierte en

$$\Delta V \approx 2\pi x \frac{1}{\sqrt{x}}\Delta x$$

Entonces, el volumen se encuentra por medio de integración.

$$V = 2\pi\int_1^4 x\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\pi\int_1^4 x^{1/2}\,dx$$

$$= 2\pi\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_1^4 = 2\pi\left(\frac{2}{3}\cdot 8 - \frac{2}{3}\cdot 1\right) = \frac{28\pi}{3} \approx 29.32 \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 La región acotada por la recta $y = (r/h)x$, el eje x y $x = h$ se hace girar alrededor del eje x, y por ello se genera un cono (suponga que $r > 0$, $h > 0$). Encuentre su volumen por el método de los discos y por el método de los cascarones.

SOLUCIÓN

Método de los discos Siga los pasos sugeridos por la figura 4; esto es, *rebane, aproxime, integre.*

$$V = \pi\frac{r^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \pi\frac{r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{\pi r^2 h^3}{3h^2} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

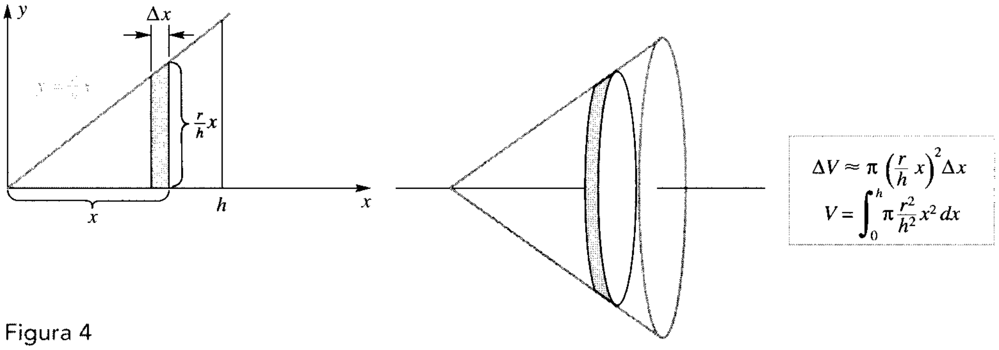

y
Δx
$y = \frac{r}{h}x$
$\frac{r}{h}x$
x
h
x
$\Delta V \approx \pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2\Delta x$
$V = \int_0^h \pi\frac{r^2}{h^2}x^2\,dx$

Figura 4

Método de los cascarones Siga los pasos sugeridos por la figura 5. Entonces el volumen es

$$V = \int_0^r 2\pi y\left(h - \frac{h}{r}y\right)dy = 2\pi h\int_0^r\left(y - \frac{1}{r}y^2\right)dy$$

$$= 2\pi h\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3r}\right]_0^r = 2\pi h\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{3}\right] = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

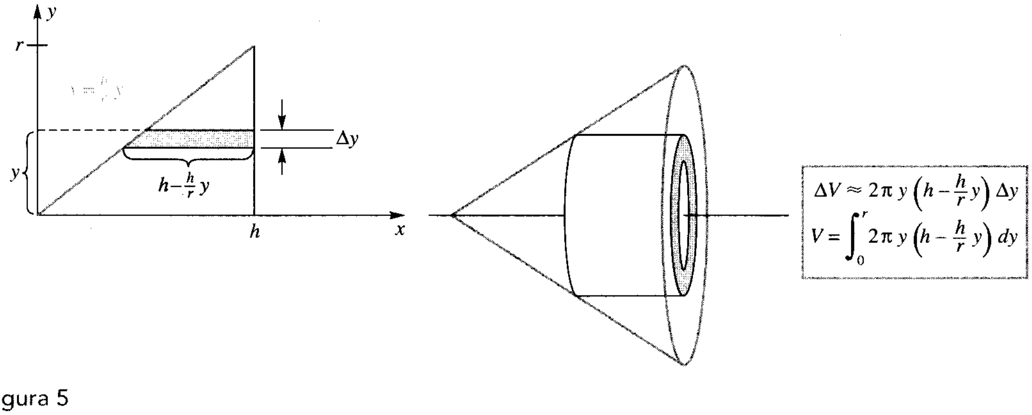

y
r
$x = \frac{h}{r}y$
Δy
y
$h-\frac{h}{r}y$
h
x
$\Delta V \approx 2\pi y\left(h - \frac{h}{r}y\right)\Delta y$
$V = \int_0^r 2\pi y\left(h - \frac{h}{r}y\right)dy$

Figura 5

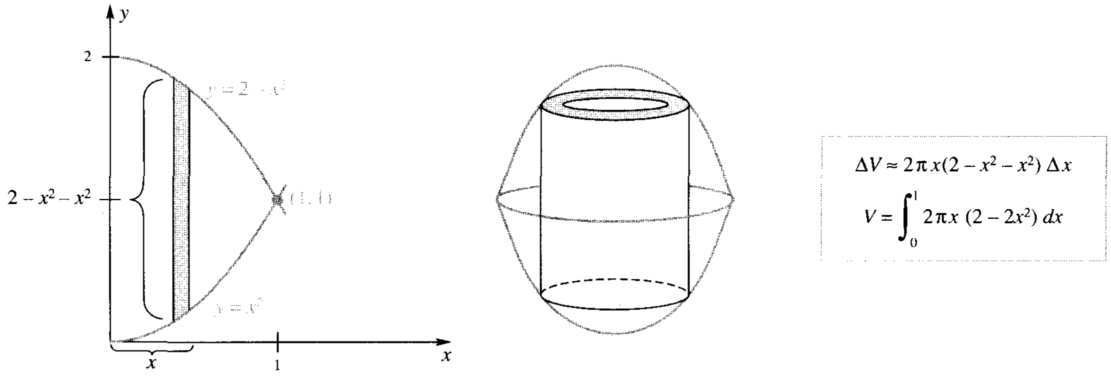
Como era de esperarse, ambos métodos dan la bien conocida fórmula para el volumen de un cono circular recto. ■

EJEMPLO 3 Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar en torno al eje y, la región en el primer cuadrante que está por encima de la parábola $y = x^2$ y por debajo de la parábola $y = 2 - x^2$.

SOLUCIÓN Un vistazo a la región (parte izquierda de la figura 6) debe convencerle de que las rebanadas horizontales que conducen al método de los discos no son la mejor elección (ya que la frontera de la derecha consta de dos partes de dos curvas, haciendo necesario usar dos integrales). Sin embargo, las rebanadas verticales, que resultan en cascarones esféricos, funcionarán bien.

$$V = \int_0^1 2\pi x(2 - 2x^2)\,dx = 4\pi \int_0^1 (x - x^3)\,dx$$

$$= 4\pi\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 4\pi\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right] = \pi \approx 3.14$$



$\Delta V \approx 2\pi x(2 - x^2 - x^2)\,\Delta x$

$V = \int_0^1 2\pi x\,(2 - 2x^2)\,dx$

Figura 6

■

Reuniendo todo Aunque la mayoría de nosotros puede dibujar razonablemente bien una figura plana, algunos lo harán menos bien al dibujar sólidos en tres dimensiones. Pero no existe una ley que diga que tenemos que dibujar un sólido para calcular su volumen. Por lo común, bastará con una figura plana, siempre que podamos visualizar en nuestras mentes el sólido correspondiente. En el ejemplo siguiente vamos a imaginar que hacemos girar, respecto a varios ejes, la región R de la figura 7. Nuestra tarea es formular y evaluar una integral para el volumen del sólido resultante y vamos a hacerlo viendo la figura plana.

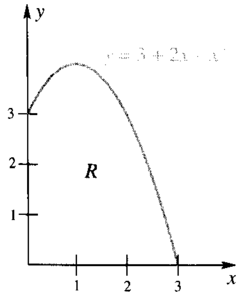


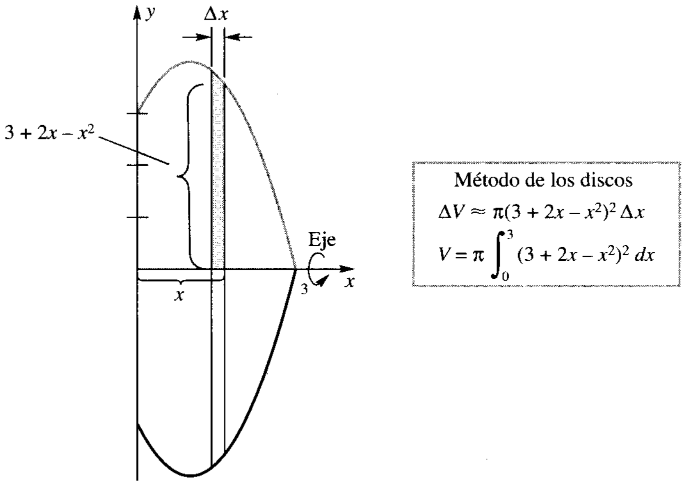
Figura 7

EJEMPLO 4 Formule y evalúe una integral para el volumen del sólido que resulta cuando la región R, que se muestra en la figura 7, se hace girar en torno

(a) el eje x, (b) el eje y,
(c) la recta $y = -1$, (d) la recta $x = 4$.

SOLUCIÓN

(a)



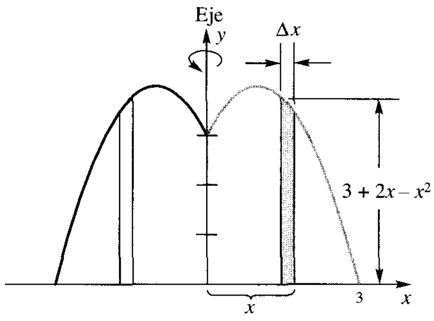
Método de los discos

$\Delta V \approx \pi(3 + 2x - x^2)^2\,\Delta x$

$V = \pi \int_0^3 (3 + 2x - x^2)^2\,dx$

$$V = \pi \int_0^3 (3 + 2x - x^2)^2\,dx = \frac{153}{5}\pi \approx 96.13$$

(b)



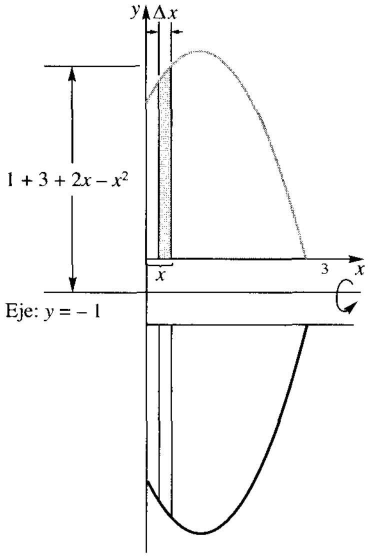
Método de los cascarones
$\Delta V \approx 2\pi x\,(3 + 2x - x^2)\,\Delta x$
$V = 2\pi \int_0^3 x\,(3 + 2x - x^2)\,dx$

$$V = 2\pi \int_0^3 x(3 + 2x - x^2)\,dx = \frac{45}{2}\pi \approx 70.69$$

Tecnología

En las cuatro partes de este ejemplo, el integrando resultó ser un polinomio; pero encontrar el polinomio implica algunos desarrollos largos. Una vez que las integrales están configuradas, evaluarlas es una tarea ideal para un CAS.

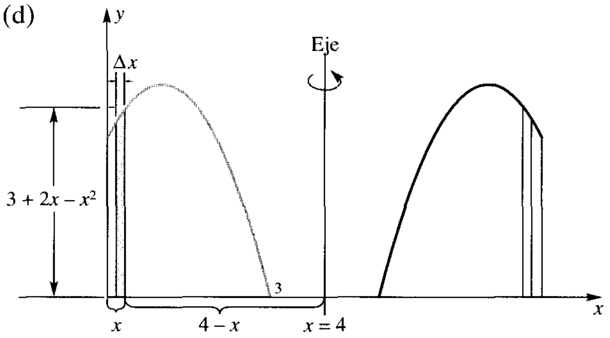
(c)



Método de las arandelas
$\Delta V \approx \pi[(4 + 2x - x^2)^2 - 1^2]\,\Delta x$
$V = \pi \int_0^3 [(4 + 2x - x^2)^2 - 1]\,dx$

$$V = \pi \int_0^3 [(4 + 2x - x^2)^2 - 1]\,dx = \frac{243}{5}\pi \approx 152.68$$

(d)



Método de los cascarones
$\Delta V \approx 2\pi\,(4 - x)(3 + 2x - x^2)\,\Delta x$
$V = 2\pi \int_0^3 (4 - x)(3 + 2x - x^2)\,dx$

$$V = 2\pi \int_0^3 (4 - x)(3 + 2x - x^2)\,dx = \frac{99}{2}\pi \approx 155.51$$

Observe que en los cuatro casos los límites de integración son los mismos; es la región plana original la que determina estos límites. ■

Revisión de conceptos

1. El volumen ΔV de un cascarón delgado cilíndrico de radio x, altura $f(x)$ y grosor Δx está dado por $\Delta V \approx$ ________.

2. La región triangular R acotada por $y = x$, $y = 0$ y $x = 2$, se hace girar en torno al eje y, generando un sólido. El método de los cascarones produce la integral ________ como su volumen; el método de las arandelas da la integral ________ como su volumen.

3. La región R de la pregunta 2 se hace girar en torno a la recta $x = -1$, generando un sólido. El método de los cascarones da la integral ________ como su volumen.

4. La región R de la pregunta 2 se hace girar en torno a la recta $y = -1$, generando un sólido. El método de los cascarones da la integral ________ como su volumen.

Conjunto de problemas 5.3

En los problemas del 1 al 12 encuentre el volumen del sólido que se genera cuando la región R, acotada por las curvas dadas, se hace girar en torno al eje que se indica. Haga esto mediante los siguientes pasos.

(a) Dibuje la región R.

(b) Muestre una rebanada rectangular representativa marcada de manera adecuada.

(c) Escriba una fórmula para aproximar el volumen del cascarón generado por esta rebanada.

(d) Formule la integral correspondiente.

(e) Evalúe la integral.

1. $y = \dfrac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$; alrededor del eje y

2. $y = x^2$, $x = 1$, $y = 0$; alrededor del eje y

3. $y = \sqrt{x}$, $x = 3$, $y = 0$; alrededor del eje y.

4. $y = 9 - x^2 (x \geq 0)$, $x = 0$, $y = 0$; alrededor del eje y

5. $y = \sqrt{x}$, $x = 5$, $y = 0$; alrededor de la recta $x = 5$

6. $y = 9 - x^2 (x \geq 0)$, $x = 0$, $y = 0$; alrededor de la recta $x = 3$

7. $y = \frac{1}{4}x^3 + 1$, $y = 1 - x$, $x = 1$; alrededor del eje y

8. $y = x^2$, $y = 3x$; alrededor del eje y

9. $x = y^2$, $y = 1$, $x = 0$; alrededor del eje x

10. $x = \sqrt{y} + 1$, $y = 4$, $x = 0$, $y = 0$; alrededor del eje x

11. $x = y^2$, $y = 2$, $x = 0$; alrededor de la recta $y = 2$

12. $x = \sqrt{2y} + 1$, $y = 2$, $x = 0$, $y = 0$; alrededor de la recta $y = 3$

13. Considere la región R (véase la figura 8). Formule una integral para el volumen del sólido que se obtiene cuando se hace girar R alrededor de la recta dada, utilice el método que se indica.

(a) El eje x (arandelas)
(b) El eje y (cascarones)
(c) La recta $x = a$ (cascarones)
(d) La recta $x = b$ (cascarones)

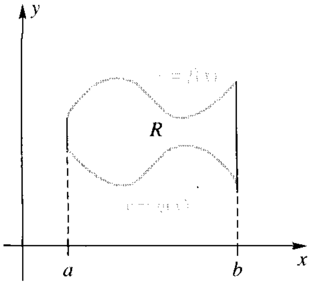


Figura 8

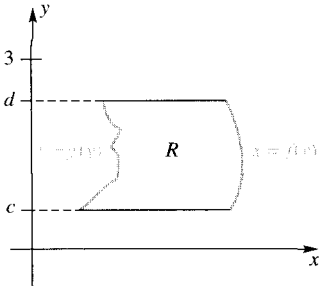


Figura 9

14. En la figura 9 se muestra una región R. Formule una integral para el volumen del sólido que se obtiene cuando se hace girar R alrededor de cada recta. Utilice el método que se indica.

(a) El eje y (arandelas)
(b) El eje x (cascarones)
(c) La recta $y = 3$ (cascarones)

15. Dibuje la región R acotada por $y = 1/x^3$, $x = 1$, $x = 3$ y $y = 0$. Formule (pero no evalúe) integrales para cada uno de lo siguiente.

(a) El área de R.

(b) El volumen del sólido que se obtiene cuando se hace girar R en torno al eje y.

(c) El volumen del sólido que se obtiene cuando se hace girar R alrededor de la recta $y = -1$.

(d) El volumen del sólido que se obtiene cuando se hace girar R alrededor de la recta $x = 4$.

16. Siga las instrucciones del problema 15 para la región acotada por $y = x^3 + 1$ y $y = 0$ y entre $x = 0$ y $x = 2$.

17. Encuentre el volumen del sólido que se genera al hacer girar la región R acotada por las curvas $x = \sqrt{y}$ y $x = y^3/32$ alrededor del eje x.

18. Siga las instrucciones del problema 17, pero haga girar R alrededor de la recta $y = 4$.

19. Se perfora un agujero redondo de radio a que pasa por el centro de una esfera sólida de radio b (suponga que $b > a$). Encuentre el volumen del sólido que queda.

20. Establezca la integral (utilizando cascarones) para el volumen del toro que se obtiene al hacer girar, alrededor de la recta $x = b$, la región interior del círculo $x^2 + y^2 = a^2$, en donde $b > a$. Después evalúe esta integral. *Sugerencia:* cuando simplifique, le puede ayudar considerar una parte de esta integral como un área.

21. La región en el primer cuadrante acotada por $x = 0$, $y = \operatorname{sen}(x^2)$ y $y = \cos(x^2)$ se hace girar alrededor del eje y. Encuentre el volumen del sólido resultante.

22. La región acotada por $y = 2 + \operatorname{sen} x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 2\pi$, se hace girar en torno al eje y. Encuentre el volumen que resulta. *Sugerencia:* $\int x \operatorname{sen} x \, dx = \operatorname{sen} x - x \cos x + C$.

23. Sea R la región acotada por $y = x^2$ y $y = x$. Encuentre el volumen del sólido que resulta cuando R se hace girar alrededor de:

(a) el eje x;
(b) el eje y;
(c) la recta $y = x$.

24. Suponga que conocemos la fórmula $S = 4\pi r^2$ para el área de la superficie de una esfera, pero no conocemos la fórmula correspondiente para su volumen V. Obtenga esta fórmula rebanando la esfera sólida en delgados *cascarones esféricos* concéntricos (véase la figura 10). *Sugerencia:* el volumen ΔV de un cascarón delgado esférico de radio exterior x es $\Delta V \approx 4\pi x^2 \Delta x$.

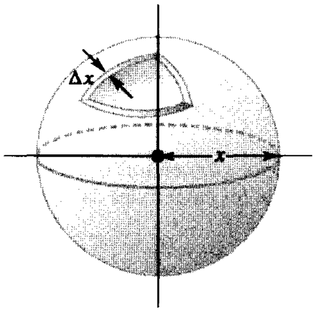


Figura 10

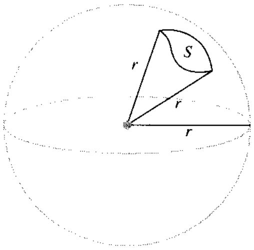


Figura 11

25. Considere una región de área S en la superficie de una esfera de radio r. Encuentre el volumen del sólido que resulta cuando cada punto de esta región se conecta con el centro de la esfera mediante un segmento de recta (véase la figura 11). *Sugerencia:* utilice el método de cascarones esféricos mencionado en el problema 24.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $2\pi x f(x)\,\Delta x$ **2.** $2\pi \int_0^2 x^2\,dx;\ \pi \int_0^2 (4 - y^2)\,dy$ **3.** $2\pi \int_0^2 (1 + x)x\,dx$ **4.** $2\pi \int_0^2 (1 + y)(2 - y)\,dy$

5.4 Longitud de una curva plana

¿Cuál es la longitud de la curva espiral que se muestra en la figura 1? Si fuese un pedazo de cuerda, la mayoría de nosotros la estiraríamos y la mediríamos con una regla. Pero si es la gráfica de una ecuación, resulta más difícil de hacer.

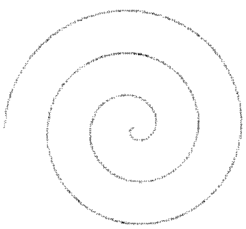


Figura 1

Un poco de reflexión sugiere una pregunta previa. ¿Qué es una curva plana? Hasta ahora hemos utilizado el término *curva* de manera informal, con frecuencia, en referencia a la gráfica de una función. Éste es el momento de ser más precisos, aun para curvas que no son gráficas de funciones. Comenzaremos con varios ejemplos.

La gráfica de $y = \operatorname{sen} x, 0 \leq x \leq \pi$ es una curva plana (véase la figura 2). También lo es la gráfica de $x = y^2, -2 \leq y \leq 2$ (véase la figura 3). En ambos casos, la curva es la gráfica de una función, la primera de la forma $y = f(x)$, la segunda de la forma $x = g(y)$. Sin embargo, la curva espiral no se ajusta a ninguno de estos patrones. Tampoco la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, aunque en este caso podríamos considerarla como la gráfica combinada de las dos funciones $y = f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ y $y = g(x) = -\sqrt{a^2 - x^2}$.

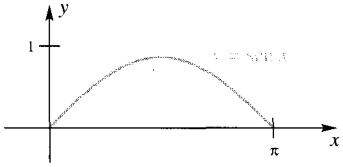


Figura 2

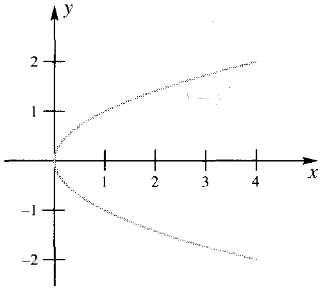
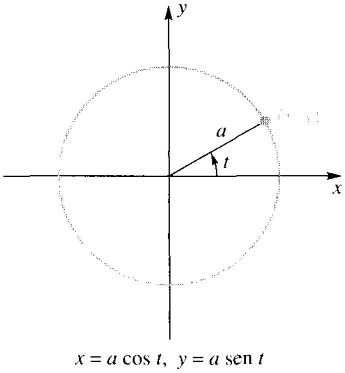


Figura 3

La circunferencia sugiere otra manera de pensar con respecto a las curvas. De trigonometría, recuerde que

$$x = a \cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

describen la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ (véase la figura 4). Considere a t como el tiempo y que x y y dan la posición de una partícula en el instante t. La variable t se denomina **parámetro**. Tanto x como y se expresan en términos de este parámetro. Decimos que $x = a \cos t, y = a \operatorname{sen} t, 0 \leq t \leq 2\pi$, son **ecuaciones paramétricas** que describen a la circunferencia.



$x = a \cos t,\ y = a \operatorname{sen} t$
$0 \leq t \leq 2\pi$

Figura 4

Si tuviésemos que graficar las ecuaciones paramétricas $x = t \cos t, y = t \operatorname{sen} t, 0 \leq t \leq 5\pi$, obtendríamos una curva parecida a la espiral con la que iniciamos. Incluso, podemos pensar en la curva seno (figura 2) y la parábola (figura 3) en forma paramétrica. Escribimos

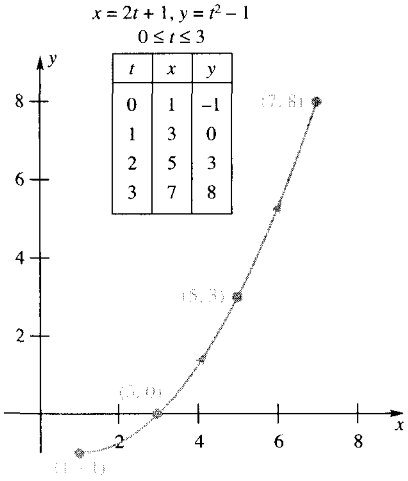
$$x = t, \qquad y = \operatorname{sen} t, \qquad 0 \leq t \leq \pi$$

y

$$x = t^2, \qquad y = t, \qquad -2 \le t \le 2$$

Así, para nosotros, una **curva plana** está determinada por un par de ecuaciones paramétricas $x = f(t), y = g(t), a \le t \le b$, en donde suponemos que f y g son continuas en el intervalo dado. Conforme t aumenta de a a b, el punto (x, y) traza una curva en el plano. He aquí otro ejemplo.

EJEMPLO 1 Dibuje la curva determinada por las ecuaciones paramétricas $x = 2t + 1, y = t^2 - 1, 0 \le t \le 3$.



$x = 2t + 1, y = t^2 - 1$
$0 \le t \le 3$

t	x	y
0	1	−1
1	3	0
2	5	3
3	7	8

Figura 5

SOLUCIÓN Construimos una tabla de valores, con tres columnas, después trazamos las parejas ordenadas (x, y), y por último conectamos estos puntos en el orden creciente de t, como se muestra en la figura 5. Para producir tal gráfica, puede utilizarse una calculadora gráfica o un CAS (del inglés computer algebra sistem: sistema de álgebra computacional). Por lo regular, tal software produce una gráfica creando una tabla, al igual que nosotros, y conecta los puntos. ■

En realidad, la definición que hemos dado es demasiado amplia para los propósitos que tenemos en mente, así que de inmediato nos restringiremos a lo que se denomina *curva suave*. El adjetivo *suave* se eligió para indicar eso como un objeto que se mueve a lo largo de la curva, de modo que su posición en el instante t, que es (x, y), no sufrirá cambios repentinos de dirección (la continuidad de f' y de g', aseguran esto) y no se detiene ni regresa por la misma curva (esto se asegura si $f'(t)$ y $g'(t)$ no son cero de manera simultánea).

Definición

Una curva plana es **suave** si está determinada por un par de ecuaciones paramétricas $x = f(t), y = g(t), a \le t \le b$, en donde f' y g' existen y son continuas en $[a, b]$, y $f'(t)$ y $g'(t)$ no son cero de manera simultánea en (a, b).

La forma en que una curva se parametriza, esto es, la forma en que se eligen las funciones $f(t)$ y $g(t)$ y el dominio para t, determina una *dirección positiva*. Por ejemplo, cuando $t = 0$, en el ejemplo 1 (figura 5), la curva está en el punto $(1, -1)$, y cuando $t = 1$, la curva está en $(3, 0)$. Cuando t aumenta desde $t = 0$ hasta $t = 3$, la curva sigue una trayectoria de $(1, -1)$ a $(7, 8)$. Esta dirección, que a menudo se indica por medio de una flecha en la curva, como se muestra en la figura 5, se denomina la **orientación** de la curva. La orientación de una curva es irrelevante para la determinación de su longitud, pero en problemas que encontraremos más adelante en el texto, la orientación es importante.

EJEMPLO 2 Dibuje la curva determinada por medio de las ecuaciones paramétricas $x = t - \operatorname{sen} t, y = 1 - \cos t, 0 \le t \le 4\pi$. Indique la orientación. ¿La curva es suave?

$x = t - \operatorname{sen} t,\ y = 1 - \cos t$
$0 \le t \le 4\pi$

t	$x(t)$	$y(t)$
0	0.00	0
$\pi/2$	0.57	1
π	3.14	2
$3\pi/2$	5.71	1
2π	6.28	0
$5\pi/2$	6.85	1
3π	9.42	2
$7\pi/2$	10.00	1
4π	12.57	0

Figura 6

SOLUCIÓN La tabla que muestra los valores de x y y para varios valores de t, desde 0 hasta 4π, guía a la gráfica de la figura 6. Esta curva no es suave aunque x y y son funciones diferenciables de t. El problema es que $dx/dt = 1 - \cos t$ y $dy/dt = \operatorname{sen} t$ son 0 de forma simultánea cuando $t = 2\pi$. El objeto baja lentamente hasta detenerse en el instante $t = 2\pi$, luego empieza a subir en una nueva dirección. ■

La curva descrita en el ejemplo 2 se denomina **cicloide**. Describe la trayectoria de un punto fijo en el borde de una rueda de radio 1, cuando la rueda se hace rodar a lo largo del eje x. (Véase el problema 18 para una deducción de este resultado).

Longitud de arco Por último, estamos preparados para la pregunta principal. ¿Qué significa la longitud de la curva suave dada de forma paramétrica por $x = f(t)$, $y = g(t), a \le t \le b$?

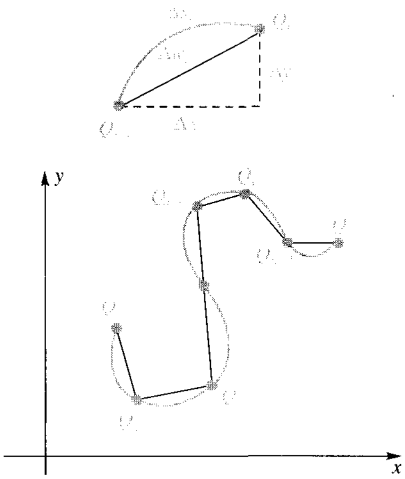


Figura 7

Divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos por medio de los puntos t_i:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$$

Esto corta a la curva en n pedazos con correspondientes puntos extremos Q_0, Q_1, $Q_2, \ldots, Q_{n-1}, Q_n$, como se muestra en la figura 7.

Nuestra idea es aproximar la curva por medio del segmento de línea poligonal indicada, calcular su longitud total y después tomar el límite cuando la norma de la partición tiende a cero. En particular, aproximamos la *longitud* Δs_i del i-ésimo segmento (véase la figura 7) por

$$\begin{aligned}\Delta s_i \approx \Delta w_i &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \\ &= \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2}\end{aligned}$$

Del teorema del valor medio para derivadas (teorema 3.6A), sabemos que existen puntos $\bar{t}_i$ y $\hat{t}_i$ en (t_{i-1}, t_i) tales que

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(\bar{t}_i)\,\Delta t_i$$

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(\hat{t}_i)\,\Delta t_i$$

en donde $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\Delta w_i &= \sqrt{[f'(\bar{t}_i)\,\Delta t_i]^2 + [g'(\hat{t}_i)\,\Delta t_i]^2} \\ &= \sqrt{[f'(\bar{t}_i)]^2 + [g'(\hat{t}_i)]^2}\,\Delta t_i\end{aligned}$$

y la longitud total del segmento de línea poligonal es

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta w_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f'(\bar{t}_i)]^2 + [g'(\hat{t}_i)]^2}\,\Delta t_i$$

La última expresión es casi una suma de Riemann, la única dificultad es que $\bar{t}_i$ y $\hat{t}_i$ no parecen ser el mismo punto. Sin embargo, se demuestra en textos de cálculo avanzado que en el límite (cuando la norma de la partición tiende a 0) esto no importa. Por esto, podemos definir la **longitud de arco** L de la curva como el límite de la expresión anterior cuando la norma de la partición tiende a cero; es decir,

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt}$$

Dos casos especiales son de gran interés. Si la curva está dada por $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, tratamos a x como el parámetro y el resultado del recuadro toma la forma

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}$$

De manera análoga, si la curva está dada por $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$, consideramos a y como el parámetro, obteniendo

$$\boxed{L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy}$$

Estas fórmulas dan los resultados conocidos para círculos y segmentos de recta, como lo ilustran los siguientes dos ejemplos.

EJEMPLO 3 Encuentre el perímetro de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

SOLUCIÓN Escribimos la ecuación de la circunferencia en forma paramétrica: $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Entonces $dx/dt = -a \operatorname{sen} t$, $dy/dt = a \cos t$, y por la primera de nuestras fórmulas,

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2 \cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} a\, dt = \Big[at\Big]_0^{2\pi} = 2\pi a \qquad ■$$

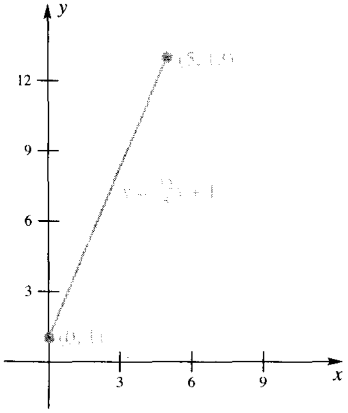


Figura 8

EJEMPLO 4 Encuentre la longitud del segmento de recta de $A(0, 1)$ a $B(5, 13)$.

SOLUCIÓN El segmento de recta dado se muestra en la figura 8. Observe que la ecuación de la recta correspondiente es $y = \frac{12}{5}x + 1$, de modo que $dy/dx = \frac{12}{5}$; y así, por la segunda de las tres fórmulas para la longitud,

$$L = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2}\, dx = \int_0^5 \sqrt{\frac{5^2 + 12^2}{5^2}}\, dx = \frac{13}{5}\int_0^5 1\, dx$$

$$= \left[\frac{13}{5}x\right]_0^5 = 13$$

Esto coincide con el resultado que se obtiene por medio de la fórmula de distancia. ■

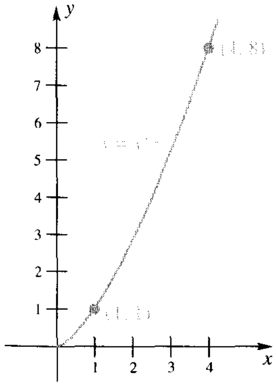


Figura 9

EJEMPLO 5 Encuentre la longitud del arco de la curva $y = x^{3/2}$, desde el punto $(1, 1)$ hasta el punto $(4, 8)$ (véase la figura 9).

≈ **SOLUCIÓN** Empezamos por estimar esta longitud encontrando la longitud del segmento que va de $(1,1)$ a $(4,8)$: $\sqrt{(4-1)^2 + (8-1)^2} = \sqrt{58} \approx 7.6$. La longitud real debe ser un poco mayor.

Para el cálculo exacto, observamos que $dy/dx = \frac{3}{2}x^{1/2}$, de modo que

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}\, dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx$$

Sea $u = 1 + \frac{9}{4}x$; entonces $du = \frac{9}{4}dx$. De aquí que,

$$\int \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \frac{4}{9}\int \sqrt{u}\, du = \frac{4}{9}\frac{2}{3}u^{3/2} + C$$

$$= \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} + C$$

Por lo tanto,

$$\int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \left[\frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\right]_1^4 = \frac{8}{27}\left(10^{3/2} - \frac{13^{3/2}}{8}\right) \approx 7.63 \qquad ■$$

Para la mayor parte de los problemas de longitud de arco es fácil configurar la integral definida que proporciona la longitud. Sólo es cosa de sustituir las derivadas necesarias en la fórmula. Sin embargo, con frecuencia es difícil, si no imposible, evaluar estas integrales por medio del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, a consecuencia de la dificultad de determinar las antiderivadas. Para muchos problemas debemos recurrir a una técnica numérica tal como la regla de la parábola, descrita en la sección 4.6, para obtener una aproximación a la integral definida.

EJEMPLO 6 Dibuje la gráfica de la curva dada de forma paramétrica por $x = 2 \cos t$, $y = 4 \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq \pi$. Establezca una integral definida que proporcione la longitud del arco y aproxime esta integral definida por medio de la regla de la parábola con $n = 8$.

$x = 2\cos t,\ y = 4\,\mathrm{sen}\,t$
$0 \le t \le \pi$

t	x	y
0	2	0
$\pi/6$	$\sqrt{3}$	2
$\pi/3$	1	$2\sqrt{3}$
$\pi/2$	0	4
$2\pi/3$	-1	$2\sqrt{3}$
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}$	2
π	-2	0

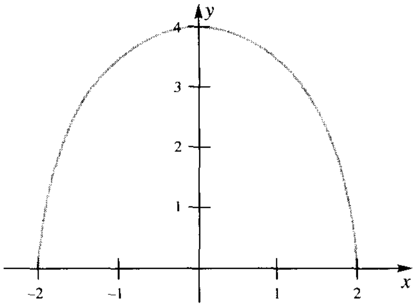


Figura 10

SOLUCIÓN La gráfica (véase la figura 10) se dibujó, como en los ejemplos anteriores, construyendo primero una tabla de valores con tres columnas. La integral definida que proporciona la longitud del arco es

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \\
&= \int_0^{\pi} \sqrt{(-2\,\mathrm{sen}\,t)^2 + (4\cos t)^2}\, dt \\
&= \int_0^{\pi} 2\sqrt{\mathrm{sen}^2 t + 4\cos^2 t}\, dt \\
&= 2\int_0^{\pi} \sqrt{1 + 3\cos^2 t}\, dt
\end{aligned}
$$

Esta integral definida no puede evaluarse por medio del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo. Sea $f(t) = \sqrt{1 + 3\cos^2 t}$. La aproximación por medio de la regla de la parábola con $n = 8$ es

$$
\begin{aligned}
L &\approx 2\frac{\pi - 0}{3\cdot 8}\left[f(0) + 4f\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2f\left(\frac{2\pi}{8}\right) + 4f\left(\frac{3\pi}{8}\right) + 2f\left(\frac{4\pi}{8}\right)\right. \\
&\qquad \left. + 4f\left(\frac{5\pi}{8}\right) + 2f\left(\frac{6\pi}{8}\right) + 4f\left(\frac{7\pi}{8}\right) + f(\pi)\right] \\
&\approx 2\frac{\pi}{24}[2.0 + 4\cdot 1.8870 + 2\cdot 1.5811 + 4\cdot 1.1997 + 2\cdot 1.0 \\
&\qquad + 4\cdot 1.1997 + 2\cdot 1.5811 + 4\cdot 1.8870 + 2.0)] \\
&\approx 9.6913
\end{aligned}
$$

■

Diferencial de la longitud de arco Sea f continuamente diferenciable en $[a, b]$. Para cada x en (a, b), defínase $s(x)$ como

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(u)]^2}\, du$$

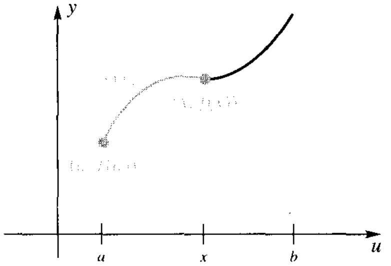


Figura 11

Entonces, $s(x)$ da la longitud del arco de la curva $y = f(u)$ desde el punto $(a, f(a))$ hasta $(x, f(x))$ (véase la figura 11). Por medio del Primer Teorema Fundamental del Cálculo (teorema 4.3A),

$$s'(x) = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Por lo que ds, la **diferencial de la longitud del arco**, puede escribirse como

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

En efecto, dependiendo de cómo se parametrice una gráfica, llegamos a tres fórmulas para ds:

$$\boxed{ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt}$$

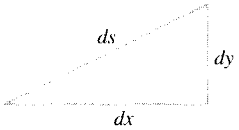


Figura 12

Algunas personas prefieren recordar estas fórmulas escribiendo (véase la figura 12)

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

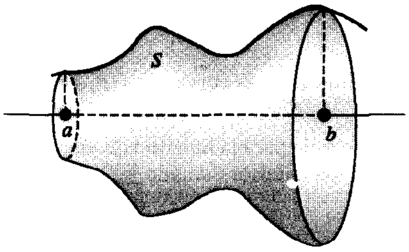


Figura 13

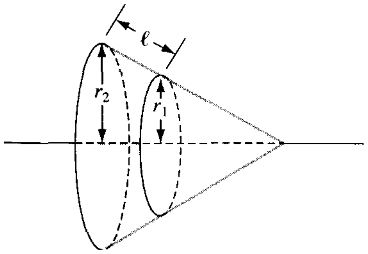


Figura 14

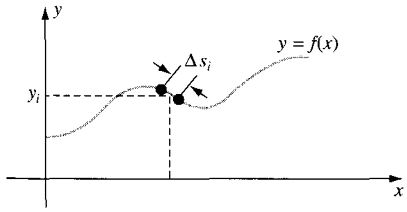


Figura 15

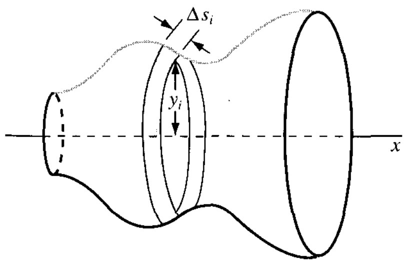


Figura 16

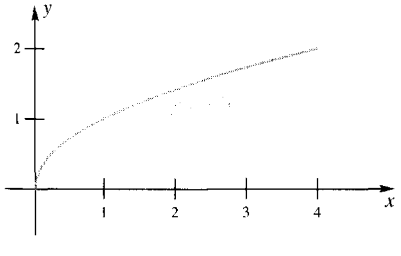


Figura 17

Las tres formas surgen de dividir y multiplicar el lado derecho por $(dx)^2$, $(dy)^2$ y $(dt)^2$, respectivamente. Por ejemplo,

$$(ds)^2 = \left[\frac{(dx)^2}{(dx)^2} + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}\right](dx)^2 = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right](dx)^2$$

que da la primera de las tres fórmulas.

Área de una superficie de revolución Si se hace girar una curva plana suave alrededor de un eje en su plano, genera una superficie de revolución, como se ilustra en la figura 13. Nuestra meta es determinar el área de tal superficie.

Para empezar, introducimos la fórmula para el área de un tronco o cono truncado. Un **tronco o cono truncado** es la parte de la superficie de un cono comprendida entre dos planos perpendiculares al eje del cono (sombreado en la figura 14). Si un cono truncado tiene radios de sus bases r_1 y r_2, y altura oblicua l, entonces su área A está dada por

$$A = 2\pi\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)\ell = 2\pi(\text{radio promedio})\cdot(\text{altura oblicua})$$

La deducción de este resultado sólo depende de la fórmula para el área de un círculo (véase el problema 31).

Supóngase que $y = f(x)$, $a \le x \le b$ determina una curva suave en la mitad superior del plano xy, como se muestra en la figura 15. Divídase el intervalo $[a, b]$ en n pedazos por medio de los puntos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, y por ello también se divide a la curva en n partes. Denótese con Δs_i a la longitud del i-ésimo pedazo y sea y_i la ordenada de un punto de ese pedazo. Cuando la curva se hace girar alrededor del eje x, genera una superficie y el pedazo representativo genera una banda angosta. El "área" de esta banda podría aproximarse a la de un cono truncado, esto es, aproximadamente $2\pi y_i \Delta s_i$. Cuando sumamos las contribuciones de todos los pedazos y tomamos el límite cuando la norma de la partición tiende a cero, obtenemos lo que definimos como el área de la superficie de revolución. Todo esto está indicado en la figura 16. Así, el área de la superficie es

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi y_i \,\Delta s_i \\ &= 2\pi \int_a^b y\,ds \\ &= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx \end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Encuentre el área de la superficie de revolución generada al hacer girar la curva $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 4$, en torno al eje x (véase la figura 17).

SOLUCIÓN Aquí, $f(x) = \sqrt{x}$ y $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$. Así,

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^4 \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\,dx = 2\pi \int_0^4 \sqrt{x}\sqrt{\frac{4x+1}{4x}}\,dx \\ &= \pi \int_0^4 \sqrt{4x+1}\,dx = \left[\pi \cdot \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(4x+1)^{3/2}\right]_0^4 \\ &= \frac{\pi}{6}(17^{3/2} - 1^{3/2}) \approx 36.18 \end{aligned}$$

Si la curva se da en forma paramétrica por $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t \le b$, entonces la fórmula para el área de la superficie se transforma en

$$\boxed{A = 2\pi \int_a^b y\,ds = 2\pi \int_a^b g(t)\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt}$$

■

Revisión de conceptos

1. La gráfica de las ecuaciones paramétricas $x = 4\cos t$, $y = 4\,\text{sen}\, t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, es una curva denominada ________.

2. La curva determinada por $y = x^2 + 1$, $0 \leq x \leq 4$, puede ponerse en forma paramétrica mediante x como el parámetro al escribir x = ________, y = ________.

3. La fórmula para la longitud L de la curva $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, es L = ________.

4. La demostración de la fórmula para la longitud de una curva depende fuertemente de un teorema anterior llamado ________.

Conjunto de problemas 5.4

En los problemas del 1 al 6 encuentre la longitud de la curva que se indica.

1. $y = 4x^{3/2}$ entre $x = 1/3$ y $x = 5$

2. $y = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2}$ entre $x = 1$ y $x = 2$

3. $y = (4 - x^{2/3})^{3/2}$ entre $x = 1$ y $x = 8$

4. $y = (x^4 + 3)/(6x)$ entre $x = 1$ y $x = 3$

5. $x = y^4/16 + 1/(2y^2)$ entre $y = -3$ y $y = -2$ *Sugerencia:* observe los signos $\sqrt{u^2} = -u$ cuando $u < 0$.

6. $30xy^3 - y^8 = 15$ entre $y = 1$ y $y = 3$

En los problemas del 7 al 10 dibuje la gráfica de la ecuación paramétrica dada y determine su longitud.

7. $x = t^3/3$, $y = t^2/2$; $0 \leq t \leq 1$

8. $x = 3t^2 + 2$, $y = 2t^3 - 1/2$; $1 \leq t \leq 4$

9. $x = 4\,\text{sen}\, t$, $y = 4\cos t - 5$; $0 \leq t \leq \pi$

10. $x = \sqrt{5}\,\text{sen}\, 2t - 2$, $y = \sqrt{5}\cos 2t - \sqrt{3}$; $0 \leq t \leq \pi/4$

11. Utilice una integración en x para determinar la longitud del segmento de la recta $y = 2x + 3$, entre $x = 1$ y $x = 3$. Verifique por medio de la fórmula de distancia.

12. Utilice una integración en y para encontrar la longitud del segmento de recta $2y - 2x + 3 = 0$, entre $y = 1$ y $y = 3$. Verifique por medio de la fórmula de distancia.

En los problemas del 13 al 16 establezca una integral definida que proporcione la longitud del arco de la curva dada. Aproxime la integral por medio de la regla de la parábola con $n = 8$.

13. $x = t$, $y = t^2$; $0 \leq t \leq 2$

14. $x = t^2$, $y = \sqrt{t}$; $1 \leq t \leq 4$

15. $x = \text{sen}\, t$, $y = \cos 2t$; $0 \leq t \leq \pi/2$

16. $x = t$, $y = \tan t$; $0 \leq t \leq \pi/4$

17. Dibuje la gráfica de la *hipocicloide* de cuatro vértices $x = a\,\text{sen}^3 t$, $y = a\cos^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, y encuentre su longitud. *Sugerencia:* por simetría, usted puede multiplicar por cuatro la longitud de la parte en el primer cuadrante.

18. Inicialmente, un punto P en el borde de una rueda de radio a está en el origen. Conforme la rueda avanza a la derecha a lo largo del eje x, P describe una curva denominada *cicloide* (véase la figura 18). Deduzca las ecuaciones paramétricas para la cicloide, como sigue. El parámetro es θ.

(a) Demuestre que $\overline{OT} = a\theta$.

(b) Convénzase de que $\overline{PQ} = a\,\text{sen}\,\theta$, $\overline{QC} = a\cos\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

(c) Demuestre que $x = a(\theta - \text{sen}\,\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$.

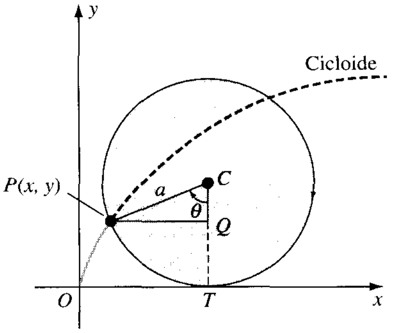


Figura 18

19. Encuentre la longitud de un arco de la cicloide del problema 18. *Sugerencia:* primero demuestre que

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = 4a^2\,\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

20. Suponga que la rueda del problema 18 gira a una velocidad constante de $\omega = d\theta/dt$, donde t es el tiempo. Entonces $\theta = \omega t$.

(a) Demuestre que la rapidez ds/dt de P a lo largo de la cicloide es

$$\frac{ds}{dt} = 2a\omega\left|\text{sen}\frac{\omega t}{2}\right|$$

(b) ¿Cuándo la rapidez es máxima y cuándo es mínima?

(c) Explique por qué un insecto en la rueda de un automóvil que va a 60 millas por hora, en algunos momentos viaja a 120 millas por hora.

21. Encuentre la longitud de cada curva.

(a) $y = \int_1^x \sqrt{u^3 - 1}\,du$, $1 \leq x \leq 2$

(b) $x = t - \text{sen}\, t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \leq t \leq 4\pi$

22. Encuentre la longitud de cada curva.

(a) $y = \int_{\pi/6}^x \sqrt{64\,\text{sen}^2 u \cos^4 u - 1}\,du$, $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

(b) $x = a\cos t + at\,\text{sen}\, t$, $y = a\,\text{sen}\, t - at\cos t$, $-1 \leq t \leq 1$

En los problemas del 23 al 30 encuentre el área de la superficie generada al hacer girar la curva dada alrededor del eje x.

23. $y = 6x$, $0 \leq x \leq 1$

24. $y = \sqrt{25 - x^2}$, $-2 \leq x \leq 3$

25. $y = x^3/3$, $1 \leq x \leq \sqrt{7}$

26. $y = (x^6 + 2)/(8x^2)$, $1 \leq x \leq 3$

27. $x = t$, $y = t^3$, $0 \leq t \leq 1$

28. $x = 1 - t^2, y = 2t, 0 \leq t \leq 1$

29. $y = \sqrt{r^2 - x^2}, -r \leq x \leq r$

30. $x = r \cos t, y = r \operatorname{sen} t, 0 \leq t \leq \pi$

31. Si la superficie de un cono de altura oblicua ℓ y radio de la base r se corta a lo largo de un lado y se extiende en el plano, se convierte en el sector de un círculo de radio ℓ y ángulo central θ (véase la figura 19).

(a) Demuestre que $\theta = 2\pi r/\ell$ radianes.

(b) Utilice la fórmula $\frac{1}{2}\ell^2\theta$ para el área de un sector de radio ℓ y ángulo central θ para demostrar que el área de la superficie lateral de un cono es $\pi r\ell$.

(c) Utilice el resultado de la parte (b) para obtener la fórmula $A = 2\pi[(r_1 + r_2)/2]/\ell$ para el área lateral de un cono truncado con radios de las bases r_1 y r_2 y altura oblicua ℓ.

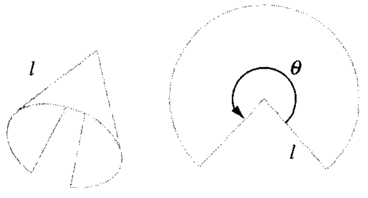


Figura 19

32. Demuestre que el área de la parte de la superficie de una esfera de radio a entre dos planos paralelos separados h unidades ($h < 2a$) es $2\pi ah$. Así, demuestre que si un cilindro circular recto está circunscrito alrededor de una esfera, entonces dos planos paralelos a la base del cilindro acotan regiones de la misma área en la esfera y en el cilindro.

33. La figura 20 muestra un arco de una cicloide. Sus ecuaciones paramétricas (véase el problema 18) están dadas por

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

(a) Demuestre que cuando esta curva se hace girar alrededor del eje x el área de la superficie generada es

$$A = 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^{3/2}\, dt$$

(b) Con la ayuda de la fórmula para la mitad de un ángulo, $1 - \cos t = 2 \operatorname{sen}^2(t/2)$, evalúe A.

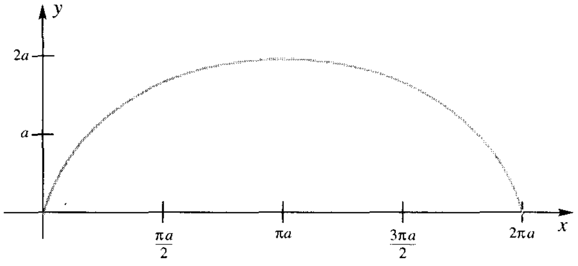


Figura 20

34. La circunferencia $x = a \cos t, y = a \operatorname{sen} t, 0 \leq t \leq 2\pi$ se hace girar en torno a la recta $x = b, 0 < a < b$, con lo que genera un toro (dona). Encuentre el área de su superficie.

GC **35.** Dibuje las gráficas de cada una de las siguientes ecuaciones paramétricas.

(a) $x = 3 \cos t, y = 3 \operatorname{sen} t, 0 \leq t \leq 2\pi$

(b) $x = 3 \cos t, y = \operatorname{sen} t, 0 \leq t \leq 2\pi$

(c) $x = t \cos t, y = t \operatorname{sen} t, 0 \leq t \leq 6\pi$

(d) $x = \cos t, y = \operatorname{sen} 2t, 0 \leq t \leq 2\pi$

(e) $x = \cos 3t, y = \operatorname{sen} 2t, 0 \leq t \leq 2\pi$

(f) $x = \cos t, y = \operatorname{sen} \pi t, 0 \leq t \leq 40$

CAS **36.** Encuentre las longitudes de cada una de las curvas del problema 35. Primero tiene que formular la integral apropiada y después utilizar una computadora para evaluarla.

CAS **37.** Con el uso de los mismos ejes dibuje las gráficas de $y = x^n$ en $[0, 1]$ para $n = 1, 2, 4, 10$ y 100. Encuentre la longitud de cada una de estas curvas. Haga una conjetura de la longitud cuando $n = 10{,}000$.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** circunferencia **2.** $x; x^2 + 1$ **3.** $\int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$ **4.** teorema del valor medio para derivadas.

5.5
Trabajo y fuerza de un fluido

En física aprendimos que si un objeto se mueve una distancia d, a lo largo de una línea, mientras se encuentra sujeto a una fuerza *constante* F en la dirección del movimiento, entonces el **trabajo realizado por la fuerza** es

$$\text{Trabajo} = (\text{Fuerza}) \cdot (\text{Distancia})$$

Esto es

$$W = F \cdot D$$

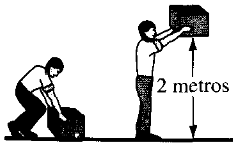


Figura 1

Si la fuerza se mide en newtons (fuerza que se requiere para darle a una masa de 1 kilogramo una aceleración de 1 metro por segundo por segundo), entonces el trabajo está en *newton–metros*, también llamados *joules*. Si la fuerza se mide en libras y la distancia en pies, entonces el trabajo está en *libras–pie*. Por ejemplo, una persona que levanta un peso (fuerza) de 3 newtons una distancia de 2 metros, realiza $3 \cdot 2 = 6$ joules de trabajo (véase la figura 1). (Hablando estrictamente, se necesita una fuerza ligeramente mayor que 3 newtons para una distancia corta a fin de que el paquete se man-

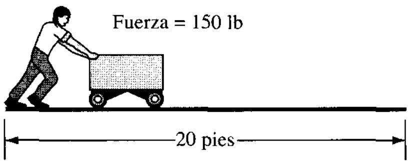


Figura 2

tenga en movimiento hacia arriba; y cuando el paquete está cerca de los 2 metros, se necesita una fuerza un poco menor que 3 newtons para hacer que se detenga en una distancia pequeña. Incluso en este caso, el trabajo es de 6 newtons, pero es difícil de demostrar). De forma análoga, un trabajador que empuja un carro con una fuerza constante de 150 libras (para vencer la fricción) una distancia de 20 pies, realiza 150 · 20 = 3000 libras-pie de trabajo (véase la figura 2).

En muchas situaciones prácticas, la fuerza no es constante, sino que varía conforme el objeto se mueve a lo largo de la línea. Suponga que el objeto se está moviendo a lo largo del eje x desde a hasta b sujeto a una fuerza variable de magnitud $F(x)$ en el punto x, en donde F es una función continua. Entonces, ¿cuánto trabajo se hizo? Una vez más, la estrategia de *rebane, aproxime* e *integre* nos lleva a la respuesta. Aquí, *rebanar* significa dividir el intervalo $[a, b]$ en pedazos pequeños. *Aproximar* significa suponer que, en una parte representativa de x a $x + \Delta x$, la fuerza es constante con valor $F(x)$. Si la fuerza es constante (con valor $F(x_i)$) en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, entonces el trabajo requerido para mover el objeto desde x_{i-1} a x_i es $F(x_i)(x_i - x_{i-1})$ (véase la figura 3). *Integrar* significa sumar todos los pequeños trabajos y después tomar el límite cuando la longitud de los pedazos tiende a cero. De esta manera, el trabajo realizado al mover el objeto desde a hasta b es

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(x_i)\, \Delta x = \int_a^b F(x)\, dx$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta W &\approx F(x)\,\Delta x \\ W &= \int_a^b F(x)\,dx \end{aligned}}$$

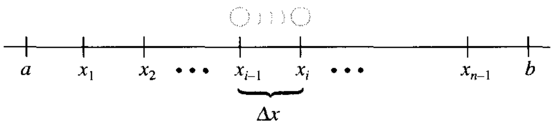


Figura 3

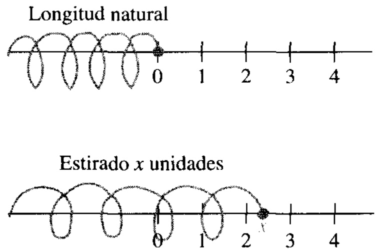


Figura 4

Aplicación a resortes De acuerdo con la Ley de Hooke en física, la fuerza $F(x)$ necesaria para mantener un resorte estirado (o comprimido) x unidades alargado (o acortado) de su longitud natural (véase la figura 4) está dada por

$$F(x) = kx$$

Aquí, la constante k, la *constante del resorte*, es positiva y depende del resorte particular bajo consideración. Entre más rígido sea el resorte mayor será el valor de k.

EJEMPLO 1 Si la longitud natural de un resorte es 0.2 metros y si es necesaria una fuerza de 12 newtons para mantenerlo estirado 0.04 metros, encuentre el trabajo realizado al estirar el resorte de su longitud natural a una longitud de 0.3 metros.

SOLUCIÓN Por la Ley de Hooke, la fuerza requerida para mantener el resorte estirado x pulgadas está dada por $F(x) = kx$. Para evaluar la constante del resorte, k, para este resorte en particular, observamos que $F(0.04) = 12$. Por lo que $k \cdot 0.04 = 12$, o $k = 300$, de modo que

$$F(x) = 300x$$

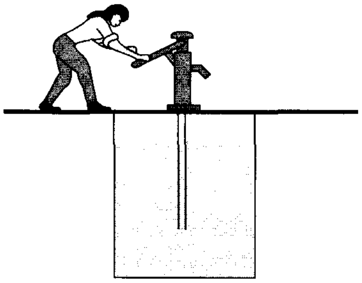


Figura 5

Cuando el resorte tiene su longitud natural de 0.2 metros, $x = 0$; cuando tiene una longitud de 0.3 metros, $x = 0.1$. Por lo tanto, el trabajo hecho al estirar el resorte es

$$W = \int_0^{0.1} 300x\,dx = \left[150x^2\right]_0^{0.1} = 1.5 \text{ joules}$$ ■

Aplicación al bombeo de un líquido Para bombear agua de un tanque se requiere trabajo, como lo sabrá cualquiera que ha utilizado una bomba de mano (véase la figura 5). Pero, ¿cuánto trabajo? La respuesta a esta pregunta tiene como base los mismos principios básicos que se presentaron en el análisis anterior.

EJEMPLO 2 Un depósito, con forma de un cono circular recto (véase la figura 6), está lleno de agua. Si la altura del tanque es de 10 pies y el radio en la parte superior es de 4 pies, encuentre el trabajo hecho (a) al bombear el agua hasta el borde superior del depósito, y (b) al bombear el agua hasta una altura de 10 pies por encima del borde superior del depósito.

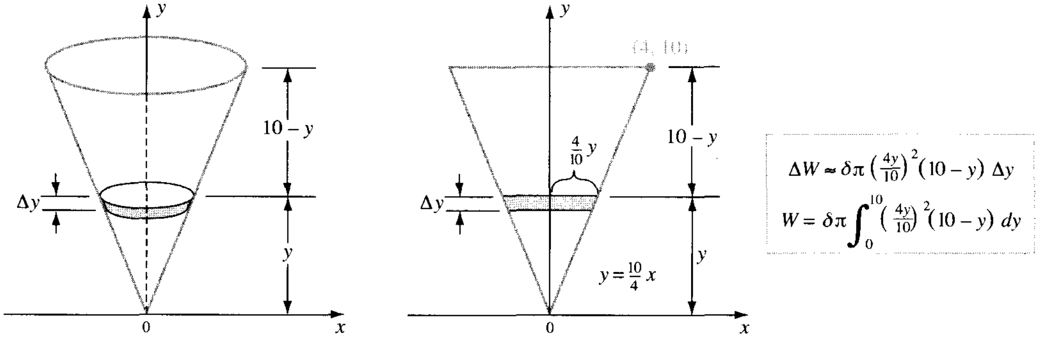

y
10 − y
Δy
y
0
x
y
(4, 10)
$\frac{4}{10}y$
10 − y
Δy
$y = \frac{10}{4}x$
y
0
x
$\Delta W \approx \delta\pi\left(\frac{4y}{10}\right)^2(10-y)\,\Delta y$
$W = \delta\pi\int_0^{10}\left(\frac{4y}{10}\right)^2(10-y)\,dy$

Figura 6

SOLUCIÓN

(a) Coloque el depósito en un sistema de coordenadas, como se muestra en la figura 6. Se muestran las vistas en tres dimensiones y una sección transversal en dos dimensiones. Imagine que se rebana el agua en delgados discos horizontales, cada uno de los cuales debe elevarse al borde del depósito. Un disco de grosor Δy a la altura y tiene radio $4y/10$ (por triángulos semejantes). Así, su volumen es aproximadamente $\pi(4y/10)^2\Delta y$ pies cúbicos, y su peso es alrededor de $\delta\pi(4y/10)^2\Delta y$, en donde $\delta = 62.4$ es la densidad (peso) del agua en libras por pie cúbico. La fuerza necesaria para elevar este disco de agua es igual a su peso, y el disco debe elevarse una distancia de $10 - y$ pies. Así que el trabajo ΔW hecho sobre este disco es aproximadamente

$$\Delta W = (\text{fuerza}) \cdot (\text{distancia}) \approx \delta\pi\left(\frac{4y}{10}\right)^2 \Delta y \cdot (10 - y)$$

Por lo tanto,

$$W = \int_0^{10} \delta\pi\left(\frac{4y}{10}\right)^2 (10 - y)\,dy = \delta\pi\frac{4}{25}\int_0^{10} (10y^2 - y^3)\,dy$$

$$= \frac{(4\pi)(62.4)}{25}\left[\frac{10y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^{10} \approx 26{,}138 \text{ libras-pie}$$

(b) Esta parte es igual a la parte (a), excepto que cada disco de agua ahora debe elevarse una distancia de $20 - y$, en lugar de $10 - y$. Por lo tanto,

$$W = \delta\pi\int_0^{10}\left(\frac{4y}{10}\right)^2 (20 - y)\,dy = \delta\pi\frac{4}{25}\int_0^{10} (20y^2 - y^3)\,dy$$

$$= \frac{(4\pi)(62.4)}{25}\left[\frac{20y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^{10} \approx 130{,}690 \text{ libras-pie}$$

Observe que los límites aún son 0 y 10 (no 0 y 20). ¿Por qué? ■

EJEMPLO 3 Encuentre el trabajo realizado al bombear agua hasta el borde superior de un depósito, que es de 50 pies de largo y tiene extremos semicirculares de radio 10 pies, si el depósito está lleno hasta una profundidad de 7 pies (véase la figura 7).

SOLUCIÓN Colocamos el extremo del tanque en un sistema de coordenadas, como se muestra en la figura 8. Una rebanada horizontal representativa se muestra en este dibujo de dos dimensiones y en la de tres dimensiones de la figura 7. Esta rebanada es aproximadamente una caja delgada, de modo que calculamos su volumen multiplicando su largo, ancho y grosor. Su peso es su densidad, $\delta = 62.4$, por su volumen. Por último, notamos que esta rebanada debe elevarse una distancia de $-y$ (el signo de menos resulta del hecho que, en nuestro diagrama, y es negativa).

$$\begin{aligned} W &= \delta \int_{-10}^{-3} 100\sqrt{100 - y^2}(-y)\, dy \\ &= 50\delta \int_{-10}^{-3} (100 - y^2)^{1/2}(-2y)\, dy \\ &= \left[(50\delta)\left(\tfrac{2}{3}\right)(100 - y^2)^{3/2}\right]_{-10}^{-3} \\ &= \tfrac{100}{3}(91)^{3/2}\delta \approx 1{,}805{,}616 \text{ libras}-\text{pie} \end{aligned}$$

$$\Delta W \approx \delta \cdot 50\,(2\sqrt{100 - y^2})\,(\Delta y)\,(-y)$$
$$W = \delta \int_{-10}^{-3} 100\sqrt{100 - y^2}\,(-y)\,dy$$

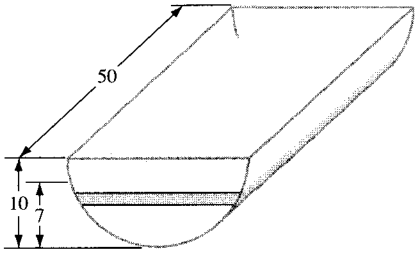


Figura 7

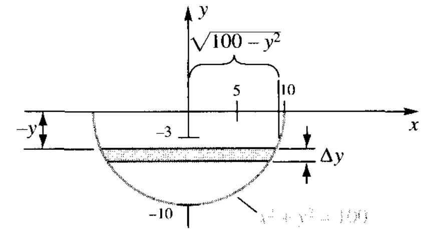


Figura 8 ■

Fuerza de un fluido Imagine que el depósito mostrado en la figura 9 se llenará a una profundidad h con un fluido de densidad δ. Entonces, la fuerza ejercida por el fluido sobre un rectángulo horizontal de área A en la parte inferior es igual al peso de la columna del fluido que está directamente por encima de ese rectángulo (figura 10), esto es $F = \delta h A$.

Es un hecho, que estableció por primera vez Blaise Pascal (1623-1662), que la presión (fuerza por unidad de área) ejercida por un fluido es la misma en todas direcciones. Por lo tanto, la presión en todos los puntos de la superficie, si esa superficie es horizontal, vertical o en otro ángulo, es la misma, siempre que los puntos se encuentren a la misma profundidad. En particular, la fuerza contra cada uno de los tres pequeños

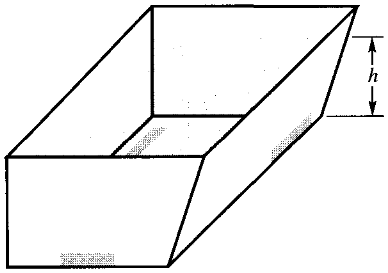


Figura 9

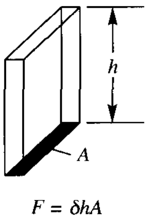


Figura 10

rectángulos de la figura 9 es aproximadamente la misma (suponiendo que tienen la misma área). Decimos "aproximadamente la misma", ya que no todos los puntos de los dos lados de rectángulo están a la misma profundidad; aunque entre más estrechos sean estos rectángulos, esto está más cercano de ser verdadero. Esta aproximación es la que nos permite calcular la fuerza total ejercida por el fluido contra un extremo del depósito.

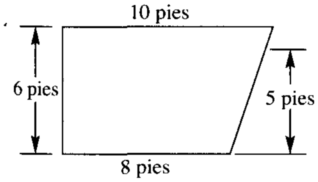
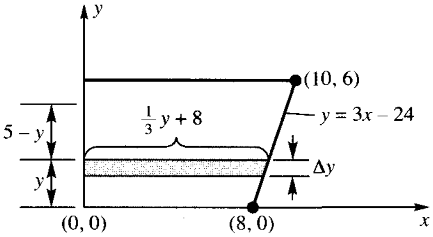


Figura 11

EJEMPLO 4 Suponga que el extremo vertical del depósito en la figura 9 tiene la forma que se muestra en la figura 11 y que el depósito está lleno con agua ($\delta = 62.4$ libras por pie cúbico) con una profundidad de 5 pies. Determine la fuerza total ejercida por el agua contra el extremo del depósito.

SOLUCIÓN Coloque el extremo del depósito en el sistema de coordenadas que se muestra en la figura 12. Observe que el lado recto tiene pendiente 3 y, por lo tanto, tiene ecuación $y - 0 = 3(x - 8)$ o, de forma equivalente, $x = \frac{1}{3}y + 8$. La fuerza en contra de un rectángulo angosto a una profundidad de $5 - y$ es aproximadamente $\delta hA = \delta(5 - y)\left(\frac{1}{3}y + 8\right)\Delta y$.



$$\Delta F \approx \delta\,(5 - y)\left(\tfrac{1}{3}y + 8\right)\Delta y$$
$$F = \int_0^5 \delta\,(5 - y)\left(\tfrac{1}{3}y + 8\right)dy$$

Figura 12

$$F = \delta\int_0^5 \left(40 - \tfrac{19}{3}y - \tfrac{1}{3}y^2\right)dy = \delta\left[40y - \tfrac{19}{6}y^2 - \tfrac{1}{9}y^3\right]_0^5$$
$$= 62.4\left(200 - \tfrac{475}{6} - \tfrac{125}{9}\right) \approx 6673 \text{ libras}$$

■

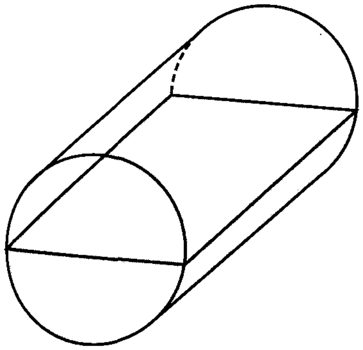


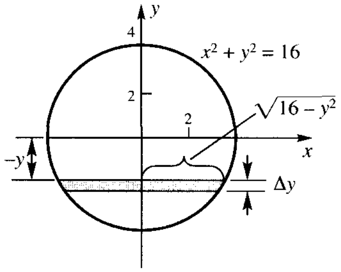
Figura 13

EJEMPLO 5 Un barril lleno de petróleo hasta la mitad descansa de lado (figura 13). Si cada extremo es circular, de 8 pies de diámetro, determine la fuerza total ejercida por el petróleo contra un extremo. Suponga que la densidad de petróleo es $\delta = 50$ libras por pie cúbico.

SOLUCIÓN Coloque el extremo circular en el sistema de coordenadas, como se muestra en la figura 14. Luego proceda como en el ejemplo 4.

$$F = \delta\int_{-4}^{0}(16 - y^2)^{1/2}(-2y\,dy) = \delta\left[\tfrac{2}{3}(16 - y^2)^{3/2}\right]_{-4}^{0}$$
$$= (50)\left(\tfrac{2}{3}\right)(16)^{3/2} \approx 2133 \text{ libras}$$

■



$$\Delta F \approx \delta\,(-y)\,(2\sqrt{16 - y^2})\,\Delta y$$
$$F = \int_{-4}^{0} \delta(-y)\,(2\sqrt{16 - y^2})\,dy$$

Figura 14

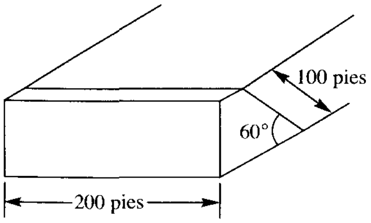


Figura 15

EJEMPLO 6 El lado del agua de una presa es un rectángulo inclinado a 60° respecto a la horizontal, con dimensiones de 200 por 100 pies, como se muestra en la figura 15. Determine la fuerza total ejercida por el agua contra la presa, cuando el nivel del agua llega a la parte superior de la presa.

$$\Delta F \approx \delta(86.6 - y)(200)(1.155\,\Delta y)$$
$$F = \int_0^{86.6} \delta\,(86.6 - y)(200)(1.155)\,dy$$

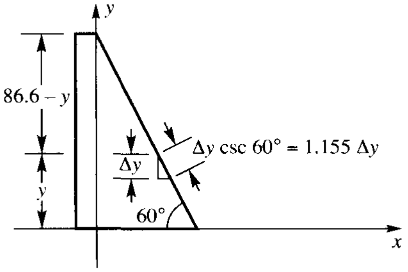


Figura 16

SOLUCIÓN Coloque el extremo de la presa en el sistema de coordenadas, como se muestra en la figura 16. Observe que la altura vertical de la presa es 100 sen 60° ≈ 86.6 pies.

$$
\begin{aligned}
F &= (62.4)(200)(1.155)\int_0^{86.6}(86.6 - y)\,dy \\
&= (62.4)(200)(1.155)\left[86.6y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{86.6} \\
&\approx 54{,}100{,}000 \text{ libras}
\end{aligned}
$$

■

Revisión de conceptos

1. El trabajo realizado por una fuerza F, al mover un objeto a lo largo de una línea recta desde a hasta b, es ________, si F es constante; pero es ________ si $F = F(x)$ es variable.

2. El trabajo realizado al levantar un objeto, que pesa 30 libras, desde el nivel del suelo hasta una altura de 10 pies es ________ libras-pie.

3. La fuerza ejercida sobre una parte pequeña de una superficie dada por un fluido, sólo depende de ________.

4. El peso de una columna de fluido sobre una región con área A a una profundidad de h es ________.

Conjunto de problemas 5.5

1. Se requiere una fuerza de 6 libras para mantener estirado un resorte $\frac{1}{2}$ pie de su longitud normal. Encuentre el valor de la constante del resorte y el trabajo realizado al estirar el resorte $\frac{1}{2}$ pie de su longitud normal.

2. Para el resorte del problema 1, ¿cuánto trabajo se realiza al estirarlo 2 pies?

3. Se requiere una fuerza de 0.6 newtons para mantener un resorte, de longitud natural de 0.08 metros, comprimido a una longitud de 0.07 metros. Encuentre el trabajo realizado para comprimir el resorte de su longitud natural a la longitud de 0.06 metros. (La Ley de Hooke se aplica a la compresión, igual que al estiramiento).

4. Se requieren 0.05 joules (newtons–metro) de trabajo para estirar un resorte desde una longitud de 8 a 9 centímetros, y otros 0.10 joules para estirarlo de 9 a 10 centímetros. Determine la constante del resorte y encuentre la longitud natural del resorte.

5. Para cualquier resorte que cumple la Ley de Hooke, demuestre que el trabajo realizado para estirar el resorte una distancia d está dado por $W = \frac{1}{2}kd^2$.

6. Para cierto tipo de resorte no lineal, la fuerza requerida para mantenerlo estirado una distancia s está dada por la fórmula $F = ks^{4/3}$. Si la fuerza requerida para mantenerlo estirado 8 pulgadas es de 2 libras, ¿cuánto trabajo se realiza para estirar 27 pulgadas este resorte?

7. Un resorte es tal que la fuerza requerida para mantenerlo estirado s pies está dada por $F = 9s$ libras. ¿Cuánto trabajo se hace para estirarlo 2 pies?

8. Dos resortes similares S_1 y S_2, cada uno de 3 pies de longitud, son tales que la fuerza requerida para mantener a cualquiera de ellos estirado una distancia de s pies es $F = 6s$ libras. Un extremo de uno de los resortes se sujeta a un extremo del otro, y la combinación se estira entre las paredes de un cuarto de 10 pies de ancho (véase la figura 17). ¿Cuánto trabajo se hace al mover el punto medio, P, un pie hacia la derecha?

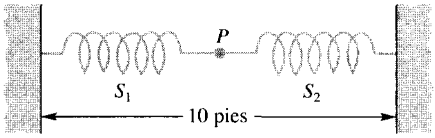
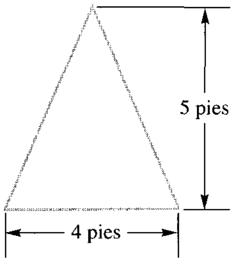


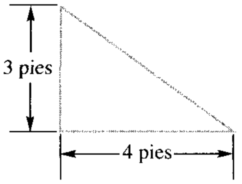
Figura 17

En cada uno de los problemas del 9 al 12 se muestra una sección transversal vertical de un depósito. Supóngase que el depósito tiene 10 pies de largo, está lleno de agua y se bombea este líquido hasta una altura de 5 pies por encima del borde superior del depósito. Encuentre el trabajo hecho para vaciar el tanque.

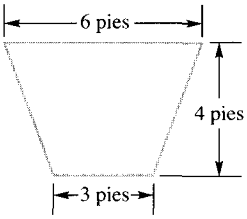
9.



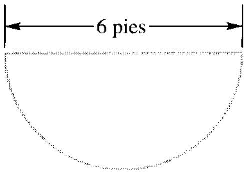
10.



11.



12.



13. Encuentre el trabajo realizado al bombear todo el aceite (densidad $\delta = 50$ libras por pie cúbico) sobre el borde de un depósito cilíndrico que está apoyado sobre una de sus bases. Suponga que el radio de la base es de 4 pies, la altura es de 10 pies y el tanque está lleno de aceite.

14. Resuelva el problema 13, suponiendo que el depósito tiene secciones transversales circulares de radio $4 + x$ pies a la altura de x pies por arriba de la base.

15. Un volumen v de gas está confinado en un cilindro, un extremo del cual está cerrado por medio de un pistón móvil. Si A es el área en pulgadas cuadradas de la cara del pistón y x es la distancia en pulgadas desde la cabeza del cilindro al pistón, entonces $v = Ax$. La presión del gas confinado es una función continua p del volumen, $p(v) = p(Ax)$ se denotará por $f(x)$. Demuestre que el trabajo hecho por el pistón al comprimir el gas desde un volumen $v_1 = Ax_1$ a un volumen $v_2 = Ax_2$ es

$$W = A\int_{x_2}^{x_1} f(x)\,dx$$

Sugerencia: la fuerza total en la cara del pistón es $p(v) \cdot A = p(Ax) \cdot A = A \cdot f(x)$.

[C] **16.** Un cilindro y pistón, cuya área de sección transversal es de 1 pulgada cuadrada, contiene 16 pulgadas cúbicas de gas bajo una presión de 40 libras por pulgada cuadrada. Si la presión y el volumen del gas se relacionan de manera adiabática (es decir, sin pérdida de calor) por la ley $pv^{1.4} = c$ (una constante), ¿cuánto trabajo hace el pistón al comprimir el gas a 2 pulgadas cúbicas?

[C] **17.** Encuentre el trabajo realizado por el pistón del problema 16, si el área de la cara del pistón es de 2 pulgadas cuadradas.

18. Un pie cúbico de aire bajo una presión de 80 libras por pulgada cuadrada se expande adiabáticamente a 4 pies cúbicos, de acuerdo con la ley $pv^{1.4} = c$. Encuentre el trabajo realizado por el gas.

19. Un cable que pesa 2 libras por pie se utiliza para levantar una carga de 200 libras hasta la parte superior de un pozo que tiene 500 pies de profundidad. ¿Cuánto trabajo se realiza?

20. Un mono de 10 libras cuelga del extremo inferior de una cadena de 20 pies, la cual pesa $\frac{1}{2}$ libra por pie. ¿Cuánto trabajo realiza al trepar por la cadena hasta su extremo superior? Suponga que el extremo inferior de la cadena está sujeto al mono.

21. Una cápsula espacial que pesa 5000 libras es impulsada a una altura de 200 millas por arriba de la superficie de la Tierra. ¿Cuánto trabajo se realiza en contra de la fuerza de gravedad? Suponga que la Tierra es una esfera de radio de 4000 millas y que la fuerza de gravedad es $f(x) = -k/x^2$, en donde x es la distancia desde el centro de la Tierra a la cápsula (ley inversa del cuadrado). Por lo tanto, la fuerza de elevación que se requiere es k/x^2, y ésta es igual a 5000 cuando $x = 4000$.

22. De acuerdo con la Ley de Coulomb, dos cargas eléctricas iguales se repelen entre sí con una fuerza que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. Si la fuerza de repulsión es de 10 dinas (1 dina $= 10^{-5}$ newton) cuando están separadas 2 centímetros, encuentre el trabajo realizado para llevar las cargas de una separación de 5 centímetros a una separación de 1 centímetro.

23. Un depósito con peso de 100 libras se llena con arena, la cual pesa 500 libras. Una grúa levanta el depósito desde el piso hasta un punto a 80 pies a una velocidad de 2 pies por segundo, pero al mismo tiempo la arena sale por un agujero a razón de 3 libras por segundo. Sin tomar en cuenta la fricción ni el peso del cable, determine cuánto trabajo se realiza. *Sugerencia:* comience por estimar ΔW, el trabajo requerido para elevar el depósito desde y hasta $y + \Delta y$.

[C] **24.** Ciudad Central acaba de construir una nueva torre de agua (véase la figura 18). Sus elementos principales consisten en un tanque esférico que tiene un radio interno de 10 pies y un tubo de 30 pies de largo para llenar. El tubo para llenar es cilíndrico con diámetro interno de 1 pie. Suponga que se bombea agua desde el nivel del piso hasta el tanque, por medio del tubo. ¿Cuánto trabajo se realiza para llenar el tubo y el tanque con agua?

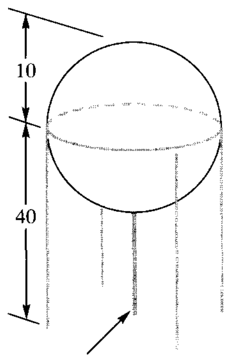
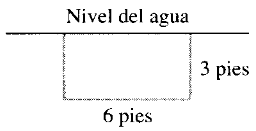


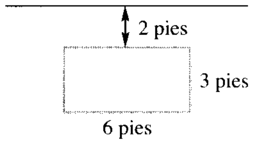
Figura 18

En los problemas del 25 al 30 suponga que la región sombreada es parte de un lado vertical de un depósito con agua ($\delta = 62.4$ libras por pie cúbico) en el nivel que se muestra. Determine la fuerza total ejercida por el agua contra esta región.

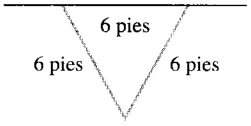
25.



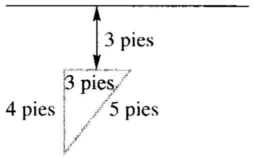
26.



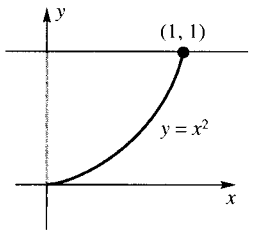
27.



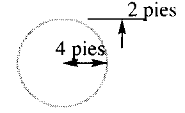
28.



29.



30.



31. Demuestre que si una presa vertical, con forma rectangular, se divide a la mitad, por medio de una diagonal, la fuerza total ejercida por el agua sobre la mitad de la presa es el doble que en la otra mitad. Suponga que el lado superior de la presa está al mismo nivel que la superficie del agua.

32. Determine la fuerza total ejercida por el agua sobre todos los lados de un cubo, con lado de 2 pies de longitud, si su tapa es horizontal y 100 pies debajo de la superficie de un lago.

33. Determine la fuerza total ejercida por el agua contra la parte inferior de la alberca que se muestra en la figura 19, suponiendo que está llena de agua.

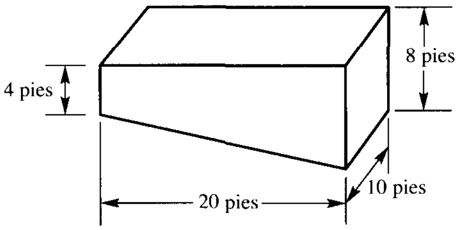


Figura 19

34. Determine la fuerza total ejercida por el fluido contra la superficie lateral de un cilindro circular recto, con altura de 6 pies, que está apoyado sobre su base circular con 5 pies de radio, si está lleno de aceite ($\delta = 50$ libras por pie cúbico).

35. Una boya cónica pesa m libras y flota con su vértice V hacia abajo y h pies por debajo de la superficie del agua (véase la figura 20). Un bote grúa eleva la boya hasta la cubierta, de modo que V está 15 pies por arriba de la superficie del agua. ¿Cuánto trabajo se realiza? Sugerencia: utilice el principio de Arquímedes, el cual dice que la fuerza requerida para mantener la boya y pies por arriba de su posición original ($0 \le y \le h$) es igual a su peso menos el peso del agua desplazada por la boya.

36. Al principio, el depósito inferior en la figura 21 estaba lleno de agua y el tanque de arriba estaba vacío. Encuentre el trabajo realizado al bombear toda el agua al tanque de arriba. Las dimensiones están en pies.

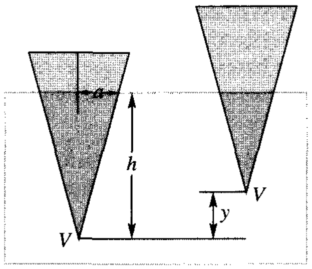


Figura 20

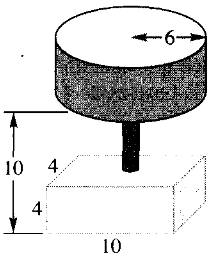


Figura 21

37. En lugar de elevar la boya del problema 35 y figura 20 fuera del agua, suponga que intentamos empujarla hasta que su extremo superior esté al ras del nivel del agua. Suponga que $h = 8$, que el extremo superior originalmente está a 2 pies por arriba del nivel del agua, y que la boya pesa 300 libras. ¿Cuánto trabajo se requiere? *Sugerencia:* no necesita conocer a (el radio al nivel del agua), pero es útil saber que $\delta\left(\frac{1}{3}\pi a^2\right)(8) = 300$. El principio de Arquímedes implica que la fuerza necesaria para mantener la boya z pies ($0 \le z \le 2$) por debajo de su posición de flotación es igual al peso del agua adicional desplazada.

Respuestas a la revisión de conceptos:

1. $F \cdot (b - a)$; $\int_a^b F(x)\,dx$ **2.** 300 **3.** la profundidad de esa parte con respecto a la superficie **4.** $\delta h A$

5.6 Momentos y centro de masa

Supóngase que dos masas de tamaños m_1 y m_2 se colocan en un sube y baja a distancias respectivas d_1 y d_2 del punto de apoyo (fulcro) y en lados opuestos a él (véase la figura 1). El sube y baja se equilibrará si y sólo si $d_1 m_1 = d_2 m_2$.

Un buen modelo matemático para esta situación se obtiene al reemplazar el sube y baja por un eje coordenado horizontal que tenga su origen en el fulcro (véase la figura 2). Entonces la coordenada x (abscisa) de m_1 es $x_1 = -d_1$, la de m_2 es $x_2 = d_2$, y la condición de equilibrio es

$$x_1 m_1 + x_2 m_2 = 0$$

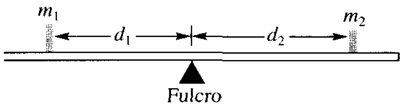


Figura 1

El producto de la masa m de una partícula por su distancia *dirigida* desde un punto (su brazo de palanca) se denomina **momento** de la partícula respecto a ese punto (véase la figura 3). Asimismo, mide la tendencia de la masa a producir una rotación alrededor de ese punto. La condición para que dos masas a lo largo de esta recta estén en equilibrio es que la suma de sus momentos con respecto al punto sea cero.

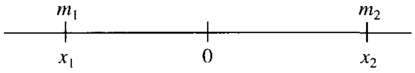
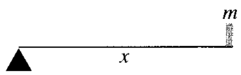


Figura 2



Momento = (brazo de palanca) × (masa)

Figura 3

La situación que se acaba de describir puede generalizarse. El momento total M (con respecto al origen) de un sistema de n masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ubicados en los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a lo largo del eje x es la suma de los momentos individuales; esto es,

$$M = x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_n m_n = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i$$

La condición para el equilibrio en el origen es que $M = 0$. Por supuesto, no debemos esperar equilibrio en el origen, excepto en circunstancias especiales. Pero seguramente un sistema de masas se equilibrará en alguna parte. La pregunta es dónde. ¿Cuál es la abscisa del punto en donde el fulcro debe colocarse para que el sistema en la figura 4 esté en equilibrio?

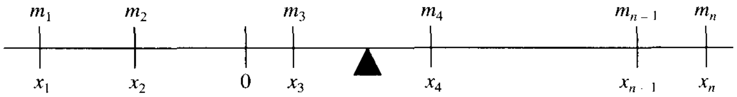


Figura 4

Llámese $\overline{x}$ a la coordenada deseada. El momento total con respecto a ésta debe ser cero; esto es,

$$(x_1 - \overline{x})m_1 + (x_2 - \overline{x})m_2 + \cdots + (x_n - \overline{x})m_n = 0$$

o

$$x_1m_1 + x_2m_2 + \cdots + x_nm_n = \overline{x}m_1 + \overline{x}m_2 + \cdots + \overline{x}m_n$$

Cuando despejamos a $\overline{x}$, obtenemos

$$\boxed{\overline{x} = \frac{M}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_im_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}}$$

El punto $\overline{x}$, que se denomina **centro de masa**, es el punto de equilibrio. Observe que sólo es el momento total con respecto al origen dividido entre la masa total.

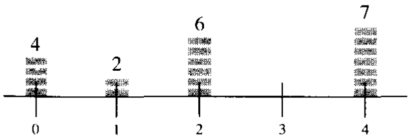


Figura 5

EJEMPLO 1 En los puntos 0, 1, 2 y 4, a lo largo del eje x, hay masas de 4, 2, 6 y 7 kilogramos, respectivamente (véase la figura 5). Encuentre el centro de masa.

SOLUCIÓN

$$\overline{x} = \frac{(0)(4) + (1)(2) + (2)(6) + (4)(7)}{4 + 2 + 6 + 7} = \frac{42}{19} \approx 2.21$$

≈ Su intuición debe confirmarle que $x = 2.21$ es casi el punto de equilibrio correcto. ■

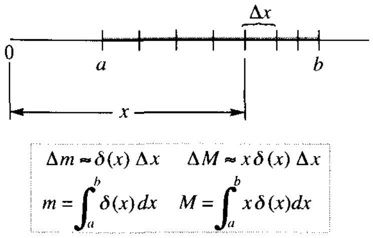

Δx
0
a
b
x
$\Delta m \approx \delta(x)\,\Delta x$
$\Delta M \approx x\delta(x)\,\Delta x$
$m = \int_a^b \delta(x)dx$
$M = \int_a^b x\delta(x)dx$

Figura 6

Distribución continua de masa a lo largo de una recta Ahora considere un segmento recto de un alambre delgado de densidad variable (masa por unidad de longitud) para el que queremos encontrar el punto de equilibrio. Colocamos un eje coordenado a lo largo del alambre y seguimos nuestro procedimiento usual de *rebanar, aproximar* e *integrar*. Suponiendo que la densidad en x es $\delta(x)$, primero obtenemos la masa total m y después el momento total M con respecto al origen (véase la figura 6). Esto lleva a la fórmula

$$\boxed{\overline{x} = \frac{M}{m} = \frac{\int_a^b x\delta(x)\,dx}{\int_a^b \delta(x)\,dx}}$$

Son pertinentes dos comentarios. Primero, recuérdese esta fórmula por analogía con la fórmula para masas puntuales:

$$\frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} \sim \frac{\sum x\,\Delta m}{\sum \Delta m} \sim \frac{\int x\,\delta(x)\,dx}{\int \delta(x)\,dx}$$

Segundo, observe que hemos supuesto que los momentos de todos los pedazos pequeños de alambre se suman para obtener el momento total, tal como en el caso de las masas puntuales. Esto debe parecerle razonable si imagina que la masa del pedazo representativo de longitud Δx está concentrada en el punto x.

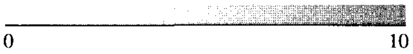


Figura 7

EJEMPLO 2 La densidad $\delta(x)$ de un alambre en el punto a x centímetros de uno de los extremos está dada por $\delta(x) = 3x^2$ gramos por centímetro. Encuentre el centro de masa del pedazo entre $x = 0$ y $x = 10$.

SOLUCIÓN ≈ Esperamos que $\bar{x}$ sea más cercana a 10 que a 0, ya que el alambre es mucho más pesado (denso) hacia el extremo derecho (véase la figura 7).

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{10} x \cdot 3x^2\,dx}{\int_0^{10} 3x^2\,dx} = \frac{\left[3x^4/4\right]_0^{10}}{\left[x^3\right]_0^{10}} = \frac{7500}{1000} = 7.5 \text{ cm} \qquad \blacksquare$$

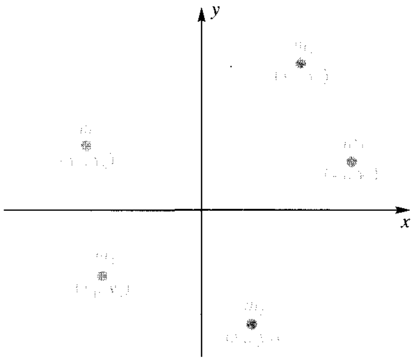


Figura 8

Distribuciones de masa en un plano Considere n masas puntuales de magnitudes $m_1, m_2, \ldots, m_n$ situadas en los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ en el plano coordenado (véase la figura 8). Entonces, los momentos totales M_y y M_x respecto al eje y y al eje x, respectivamente, están dados por

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i \qquad M_x = \sum_{i=1}^{n} y_i m_i$$

Las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centro de masa (punto de equilibrio) son

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

EJEMPLO 3 Cinco partículas de masas 1, 4, 2, 3 y 2 unidades, están colocadas en los puntos $(6, -1), (2, 3), (-4, 2), (-7, 4)$ y $(2, -2)$, respectivamente. Encuentre el centro de masa.

SOLUCIÓN

$$\bar{x} = \frac{(6)(1) + (2)(4) + (-4)(2) + (-7)(3) + (2)(2)}{1 + 4 + 2 + 3 + 2} = -\frac{11}{12}$$

$$\bar{y} = \frac{(-1)(1) + (3)(4) + (2)(2) + (4)(3) + (-2)(2)}{1 + 4 + 2 + 3 + 2} = \frac{23}{12} \qquad \blacksquare$$

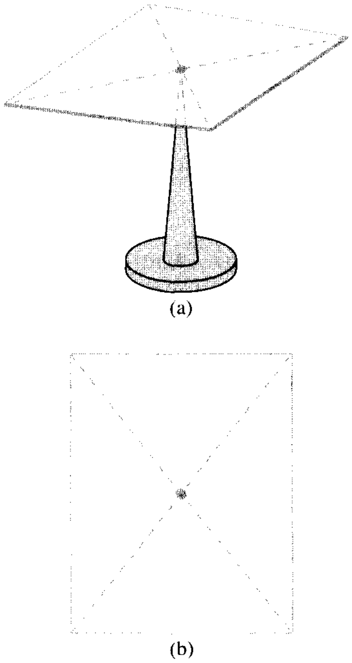
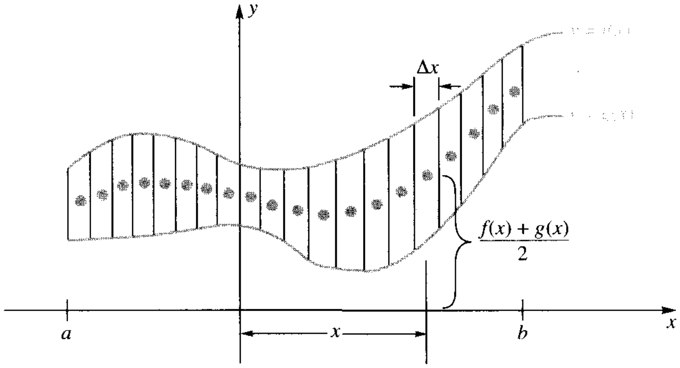


Figura 9

Ahora consideramos el problema de encontrar el centro de masa de una *lámina* (hoja plana delgada). Por simplicidad, suponemos que es homogénea; esto es, tiene densidad constante δ. Para una hoja rectangular homogénea, el centro de masa (en ocasiones denominado centro de gravedad) está en el centro geométrico, como lo sugieren los diagramas (a) y (b) en la figura 9.

Considere la lámina homogénea acotada por $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ y $y = g(x)$, con $g(x) \le f(x)$. *Rebane* esta lámina en delgadas tiras paralelas al eje y, las cuales por lo tanto tienen forma casi rectangular, e imagine la masa de cada tira concentrada en su centro geométrico. Después *aproxime* e *integre* (véase la figura 10). Con base en esto podemos calcular las coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$ del centro de masa utilizando las fórmulas

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} \qquad \overline{y} = \frac{M_x}{m}$$



$\Delta m \approx \delta\,[f(x) - g(x)]\,\Delta x$	$\Delta M_y \approx x\,\delta\,[f(x) - g(x)]\,\Delta x$	$\Delta M_x \approx \frac{\delta}{2}\,[(f(x))^2 - (g(x))^2]\,\Delta x$
$m = \delta \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$	$M_y = \delta \int_a^b x\,[f(x) - g(x)]\,dx$	$M_x = \frac{\delta}{2} \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]\,dx$

Figura 10

Cuando lo hacemos, se cancela el factor δ del numerador y del denominador, y obtenemos

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\int_a^b x[f(x) - g(x)]\,dx}{\displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx}$$

$$\overline{y} = \frac{\displaystyle\int_a^b \frac{f(x) + g(x)}{2}[f(x) - g(x)]\,dx}{\displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx} = \frac{\displaystyle\frac{1}{2}\int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2]\,dx}{\displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx}$$

Algunas veces, rebanar en dirección paralela al eje x funciona mejor que rebanar en dirección paralela al eje y. Esto conduce a fórmulas para $\overline{x}$ y $\overline{y}$ en la que y es la variable de integración. No intente memorizar todas estas fórmulas. Es mucho mejor recordar cómo se dedujeron.

El centro de masa de una lámina homogénea no depende de su masa o densidad, sino sólo de la forma de la región correspondiente en el plano. Así que nuestro problema se convierte en un problema geométrico en lugar de uno físico. En consecuencia, frecuentemente hablamos del **centroide** de una región plana en lugar del centro de masa de una lámina homogénea.

EJEMPLO 4 Encuentre el centroide de la región acotada por las curvas $y = x^3$ y $y = \sqrt{x}$.

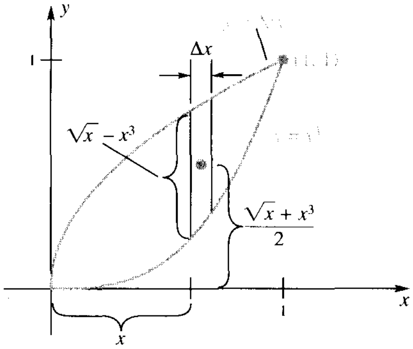


Figura 11

SOLUCIÓN Observe el diagrama en la figura 11.

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\int_0^1 x(\sqrt{x} - x^3)\,dx}{\displaystyle\int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)\,dx} = \frac{\left[\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1}{\left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{5}{12}} = \frac{12}{25}$$

$$\overline{y} = \frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + x^3\right)\left(\sqrt{x} - x^3\right)dx}{\displaystyle\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^3\right)dx} = \frac{\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^1 \left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - (x^3)^2\right]dx}{\displaystyle\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^3\right)dx}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^7}{7}\right]_0^1}{\frac{5}{12}} = \frac{\frac{5}{28}}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{7}$$

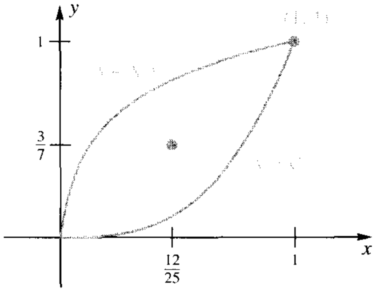


Figura 12

El centroide se muestra en la figura 12. ■

EJEMPLO 5 Encuentre el centroide de la región bajo la curva $y = \operatorname{sen} x, 0 \le x \le \pi$ (véase la figura 13).

SOLUCIÓN Esta región es simétrica respecto a la recta $x = \pi/2$, de lo cual concluimos (sin integrar) que $\overline{x} = \pi/2$. En efecto, es tanto intuitivamente obvio como cierto que si una región tiene una recta vertical u horizontal de simetría, entonces el centroide estará en esa recta.

Su intuición también debe decirle que $\overline{y}$ será menor a $\frac{1}{2}$, ya que una mayor cantidad de la región está por debajo de $\frac{1}{2}$ que por encima de $\frac{1}{2}$. Pero para encontrar de manera exacta este número, debemos calcular

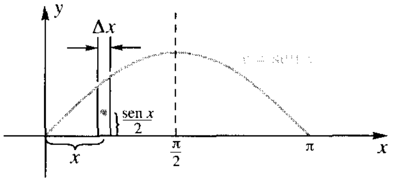


Figura 13

$$\overline{y} = \frac{\displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{2}\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x\,dx}{\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx} = \frac{\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\,dx}{\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx}$$

El denominador es fácil de calcular, tiene valor 2. Para calcular el numerador, utilizamos la fórmula del ángulo medio $\operatorname{sen}^2 x = (1 - \cos 2x)/2$.

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^\pi 1\,dx - \int_0^\pi \cos 2x\,dx\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto,

$$\overline{y} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{8} \approx 0.39$$

■

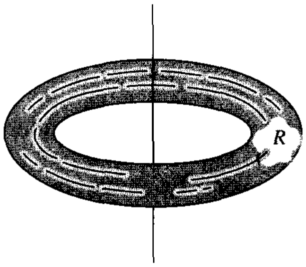


Figura 14

El teorema de Pappus Alrededor de 300 a. C., el geómetra griego Pappus estableció un novedoso resultado, el cual relaciona centroides con volúmenes de sólidos de revolución (véase la figura 14).

Teorema A Teorema de Pappus

Si una región R, que está de un lado de una recta en su plano, se hace girar alrededor de esa recta, el volumen del sólido resultante es igual al área de R multiplicada por la distancia recorrida por su centroide.

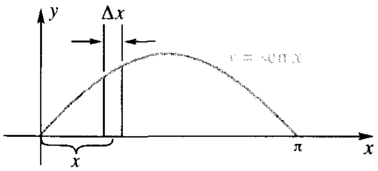


Figura 15

En lugar de demostrar este teorema, que en realidad es muy sencillo (véase el problema 28), lo ilustraremos.

EJEMPLO 6 Verifique el teorema de Pappus para la región bajo $y = \text{sen } x$, $0 \leq x \leq \pi$, cuando se hacer girar alrededor del eje x (véase la figura 15).

SOLUCIÓN Ésta es la región del ejemplo 5, para la cual $\bar{y} = \pi/8$. El área A de esta región es

$$A = \int_0^{\pi} \text{sen } x\, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = 2$$

El volumen V del sólido de revolución correspondiente es

$$V = \pi \int_0^{\pi} \text{sen}^2 x\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} [1 - \cos 2x]\, dx = \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{1}{2}\text{sen } 2x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

Para verificar el teorema de Pappus, debemos demostrar que

$$A \cdot (2\pi\bar{y}) = V$$

Pero esto equivale a demostrar que

$$2\left(2\pi\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi^2}{2}$$

que claramente es cierto. ■

Revisión de conceptos

1. Un objeto de masa 4 está en $x = 1$ y un segundo objeto de masa 6 está en $x = 3$. La simple intuición geométrica nos dice que el centro de masa estará a la ______ de $x = 2$. De hecho, está en $\bar{x} =$ ______.

2. Un alambre homogéneo se encuentra a lo largo del eje x, entre $x = 0$ y $x = 5$, se balanceará en $\bar{x} =$ ________. Sin embargo, si el alambre tiene densidad $\delta(x) = 1 + x$, se equilibrará a la ________ de 2.5. De hecho, se equilibrará en $\bar{x}$, donde $\bar{x} = \int_0^5$ _____ $dx \Big/ \int_0^5$ _____ dx.

3. La lámina homogénea rectangular con vértices en los puntos $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 6)$ y $(0, 6)$ se equilibrará en $\bar{x} =$ _____, $\bar{y} =$ _____.

4. Una lámina rectangular con vértices en $(2, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 2)$ y $(2, 2)$ está sujeta a la lámina de la pregunta 3. Suponiendo que ambas láminas tienen la misma densidad constante, la lámina resultante en forma de L se equilibrará en $\bar{x} =$ _____, $\bar{y} =$ _____.

Conjunto de problemas 5.6

1. Partículas con masas $m_1 = 5$, $m_2 = 7$ y $m_3 = 9$, están ubicadas en $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ y $x_3 = 1$ a lo largo de una recta. ¿En dónde está el centro de masa?

2. Juan y María pesan 180 y 110 libras, respectivamente, se sientan en extremos opuestos de un sube y baja de 12 pies de largo, con el fulcro a la mitad. ¿En dónde debe sentarse su hijo Tom, de 80 libras, para que se equilibre el sube y baja?

3. Un alambre recto de 7 unidades de largo tiene densidad $\delta(x) = \sqrt{x}$ en un punto a x unidades de un extremo. Encuentre la distancia desde este extremo al centro de masa.

4. Resuelva el problema 3 si $\delta(x) = 1 + x^3$.

5. Las masas y las coordenadas de un sistema de partículas en el plano coordenado están dadas por: 2, $(1, 1)$; 3, $(7, 1)$; 4, $(-2, -5)$; 6, $(-1, 0)$; 2, $(4, 6)$. Encuentre los momentos de este sistema respecto a los ejes coordenados y encuentre las coordenadas del centro de masa.

6. Las masas y coordenadas de un sistema de partículas están dadas por: 5, $(-3, 2)$; 6, $(-2, -2)$; 2, $(3, 5)$; 7, $(4, 3)$; 1, $(7, -1)$. Encuentre los momentos de este sistema respecto a los ejes coordenados y encuentre las coordenadas del centro de masa.

7. Verifique las expresiones para ΔM_y, ΔM_x, M_y y M_x en el recuadro que está en la parte inferior de la figura 10.

En los problemas del 8 al 16 encuentre el centroide de la región acotada por las curvas dadas. Haga un dibujo y, cuando sea posible, utilice simetría.

8. $y = 2 - x,\ y = 0,\ x = 0$ **9.** $y = 2 - x^2,\ y = 0$

10. $y = \frac{1}{3}x^2,\ y = 0,\ x = 4$ **11.** $y = x^3,\ y = 0,\ x = 1$

12. $y = \frac{1}{2}(x^2 - 10),\ y = 0$, y entre $x = -2$ y $x = 2$

13. $y = 2x - 4,\ y = 2\sqrt{x},\ x = 1$

14. $y = x^2,\ y = x + 3$ **15.** $x = y^2,\ x = 2$

16. $x = y^2 - 3y - 4,\ x = -y$

17. Para cada lámina homogénea R_1 y R_2 que se muestra en la figura 16, encuentre m, M_y, M_x, $\bar{x}$, y $\bar{y}$.

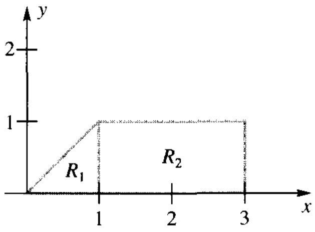


Figura 16

18. Para la lámina homogénea que se muestra en la figura 17, encuentre m, M_y, M_x, $\bar{x}$, y $\bar{y}$.

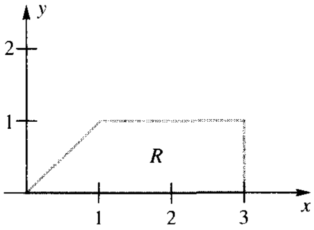


Figura 17

19. Considere las láminas homogéneas R_1 y R_2, que se muestran en la figura 18, y la lámina homogénea R_3, que es la unión de R_1 y R_2. Para $i = 1, 2, 3$, sean $m(R_i)$, $M_y(R_i)$ y $M_x(R_i)$ denote la masa, el momento respecto al eje y y el momento con respecto al eje x, respectivamente, de R_i. Demuestre que

$$m(R_3) = m(R_1) + m(R_2)$$

$$M_y(R_3) = M_y(R_1) + M_y(R_2)$$

$$M_x(R_3) = M_x(R_1) + M_x(R_2)$$

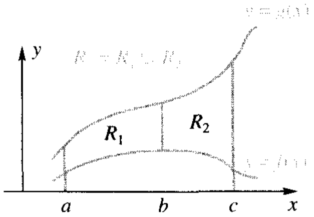


Figura 18

20. Repita el problema 19 para las láminas R_1 y R_2 que se muestran en la figura 19.

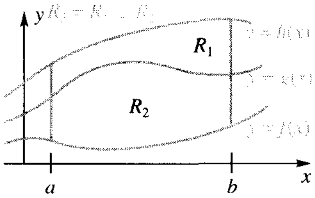
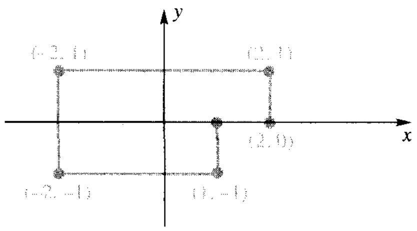


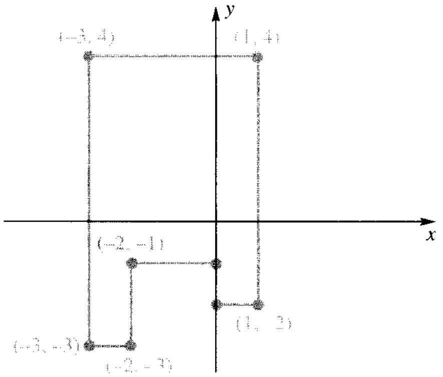
Figura 19

En los problemas del 21 al 24 divida la región que se muestra en piezas rectangulares y suponga que los momentos M_x y M_y de toda la región pueden determinarse sumando los momentos correspondientes de las piezas. (Véanse los problemas 19 y 20.) Utilice esto para determinar el centroide de cada región.

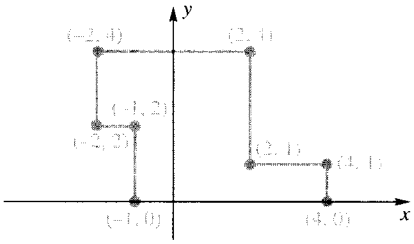
21.



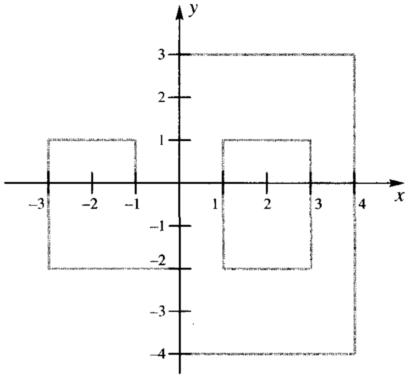
22.



23.



24.



25. Utilice el teorema de Pappus para encontrar el volumen del sólido obtenido cuando la región acotada por $y = x^3$, $y = 0$ y $x = 1$ se hace girar alrededor del eje y (véase el problema 11 para el centroide). Resuelva el mismo problema por medio del método de los cascarones cilíndricos para verificar su respuesta.

26. Utilice el teorema de Pappus para encontrar el volumen del toro que se obtiene cuando la región dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ se hace girar alrededor de la recta $x = 2a$.

27. Utilice el teorema de Pappus junto con el volumen conocido de una esfera para determinar el centroide de una región semicircular de radio a.

28. Demuestre el teorema de Pappus suponiendo que la región de área A, en la figura 20, se hace girar alrededor del eje y. *Sugerencia:* $V = 2\pi \int_a^b xh(x)\,dx$ y $\bar{x} = \int_a^b (xh(x)\,dx)/A$.

29. La región de la figura 20 se hace girar alrededor de la recta $y = K$, generando un sólido.

(a) Utilice cascarones cilíndricos para escribir una fórmula para el volumen en términos de $\omega(y)$.

(b) Demuestre que la fórmula de Pappus, cuando se simplifica, proporciona el mismo resultado.

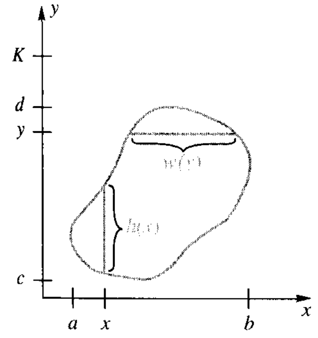


Figura 20

30. Considere el triángulo T de la figura 21.

(a) Demuestre que $\bar{y} = h/3$ (y, por lo tanto, que el centroide de un triángulo está en la intersección de las medianas).

(b) Encuentre el volumen del sólido que se obtiene cuando T se hace girar alrededor de $y = k$ (teorema de Pappus).

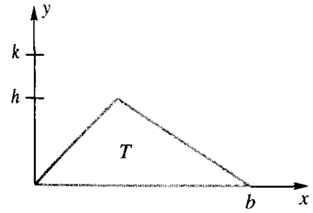


Figura 21

31. Un polígono regular P con $2n$ lados está inscrito en un círculo de radio r.

(a) Encuentre el volumen del sólido que se obtiene cuando P se hace girar alrededor de uno de sus lados.

(b) Verifique su respuesta haciendo $n \to \infty$.

32. Sea f una función continua y no negativa en $[0, 1]$.

(a) Demuestre que $\int_0^{\pi} xf(\operatorname{sen} x)\,dx = (\pi/2)\int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} x)\,dx$.

(b) Utilice la parte (a) para evaluar $\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x \cos^4 x\,dx$.

33. Sea $0 \le f(x) \le g(x)$ para toda x en $[0, 1]$, y sean R y S las regiones bajo las gráficas de f y g, respectivamente. Demuestre o refute que $\bar{y}_R \le \bar{y}_S$.

$\boxed{\text{C}}$ **34.** Aproxime el centroide de la lámina que se muestra en la figura 22. Todas las medidas están en centímetros y las medidas horizontales están separadas 5 centímetros una de la otra.

$\boxed{\text{C}}$ **35.** Se taladra un agujero con radio de 2.5 centímetros en la lámina que se describe en el problema 34. La ubicación del agujero se muestra en la figura 23. Encuentre el centroide de la lámina resultante.

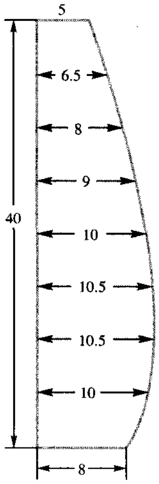


Figura 22

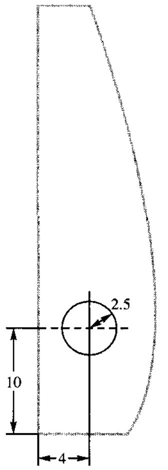


Figura 23

$\boxed{\text{C}}$ **36.** El **centro geográfico** de una región (condado, estado, país) se define como el centroide de esa región. Utilice el mapa de la figura 24 para aproximar el centro geográfico de Illinois. Todas las distancias están aproximadas y están en millas. Las distancias dadas, este-oeste, están separadas 20 millas. También necesitará las distancias entre la frontera este del estado y la línea que va de norte a sur, la cual forma la frontera este en el centro del estado. Comenzando con las dimensiones situadas más al norte, las distancias son de 13 y 10 millas; e iniciando con las dimensiones ubicadas más al sur, las distancias son 85 (en la punta sur), 50, 30, 25, 15 y 10 millas. Suponga que las demás dimensiones este–oeste se miden a partir de la frontera que está más al este.

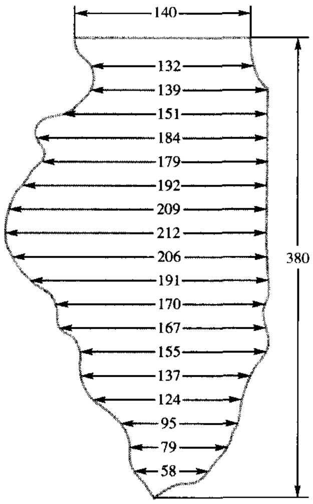


Figura 24

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** derecha; $(4\cdot 1 + 6\cdot 3)/(4 + 6) = 2.2$ **2.** 2.5; derecha; $x(1 + x)$; $(1 + x)$ **3.** 1; 3 **4.** $\frac{24}{16}, \frac{40}{16}$

5.7
Probabilidad y variables aleatorias

En muchas situaciones, el resultado de un experimento varía de un ensayo al siguiente. Por ejemplo, al lanzar una moneda algunas veces caerá cara y otras, cruz; un lanzador de las ligas mayores puede lanzar 2 entradas en un juego y 7 en otro; una batería de un automóvil puede durar 20 meses y otra, 40 meses. Decimos que el resultado de un experimento es **aleatorio** si el resultado varía de un ensayo a otro, pero que a la larga, esto es, después de un número grande de repeticiones, existe una distribución regular de los resultados.

Algunos resultados ocurren de forma frecuente, tal como la llegada segura a su destino después de un vuelo, mientras que algunos eventos ocurren rara vez, como ganar en la lotería. Utilizamos la probabilidad para medir qué tan probables son los resultados o eventos (conjunto de resultados). Un evento que es casi seguro que suceda tiene una probabilidad cercana a 1. Un evento que raramente ocurre tiene probabilidad cercana a cero. Un evento que es tan probable que suceda como de que no ocurra, como obtener una cara en el lanzamiento de una moneda balanceada, tendrá una probabilidad de $\frac{1}{2}$. En general, la probabilidad de un evento es la proporción de veces que el evento ocurrirá en una sucesión grande de ensayos. Si A es un evento, esto es, un conjunto de posibles resultados, entonces denotamos la probabilidad de A por $P(A)$. Las probabilidades deben satisfacer las siguientes propiedades:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ para todo evento A.
2. Si S es el conjunto de todos los resultados posibles, denominado **espacio muestral**, entonces $P(S) = 1$.
3. Si los eventos A y B son **disjuntos**, esto es, no tienen resultados en común, entonces $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$. (En realidad, se requiere una condición más fuerte, pero por ahora esto funcionará).

Con estos enunciados podemos deducir lo siguiente: si A^c denota al complemento del evento A, esto es, el conjunto de todos los resultados en el espacio muestral S que no están en el evento A, entonces $P(A^c) = 1 - P(A)$. Además, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son disjuntos, entonces $P(A_1 \text{ o } A_2 \text{ o } \cdots \text{ o } A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$.

Una regla que asigna un valor numérico al resultado de un experimento se denomina **variable aleatoria**. Es costumbre utilizar letras mayúsculas para denotar a las variables aleatorias y letras minúsculas para denotar valores posibles o reales para las variables aleatorias. Por ejemplo, nuestro experimento podría ser el lanzamiento de tres monedas balanceadas. En este caso, el espacio muestral es el conjunto $\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$. Podríamos definir la variable aleatoria X como el número de caras en los tres lanzamientos. La **distribución de probabilidad** de X, esto es, una lista de todos los valores posibles de X, junto con sus probabilidades correspondientes, se mostrará en una tabla como la siguiente.

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Un concepto importante en probabilidad y estadística es el de la esperanza de una variable aleatoria. Para motivar la definición, que se dará más adelante, considere el siguiente experimento. Imagine el lanzamiento repetido de tres monedas a la vez. Para ilustrar esto, suponga que las tres monedas se lanzarán 10,000 veces. Por medio de nuestra definición de probabilidad, "esperamos" ver cero caras un octavo de las veces en los ensayos, esto es $\frac{1}{8} \cdot 10{,}000 = 1250$ veces en una secuencia de 10,000. De forma análoga, esperaríamos $\frac{3}{8} \cdot 10{,}000 = 3750$ ocurrencias de una cara, $\frac{3}{8} \cdot 10{,}000 = 3750$ ocurrencias de dos caras y $\frac{1}{8} \cdot 10{,}000 = 1250$ ocurrencias de tres caras. ¿Cuántas caras en total esperaríamos ver en 10,000 lanzamientos de 3 monedas? Esperaríamos

cero caras 1250 veces, para un total de 0 caras,
una cara 3750 veces, para un total de 3750 caras,
dos caras 3750 veces, para un total de 7500 caras,
tres caras 1250 veces, para un total de 3750 caras.

En total, esperaríamos 0 + 3759 + 7500 + 3750 = 15,000 caras. Por lo tanto, esperamos 15,000/10,000 = 1.5 caras por ensayo (lanzamiento de tres monedas). Un poco de reflexión sobre los cálculos sugiere que 10,000 es arbitrario y que se eliminará de todos modos. Multiplicamos cada probabilidad por 10,000 para obtener la frecuencia esperada, pero luego dividimos entre 10,000. Esto es,

$$\begin{aligned}1.5 &= \frac{15{,}000}{10{,}000}\\ &= \frac{1}{10{,}000}[0P(X = 0)\ 10{,}000 + 1P(X = 1)\ 10{,}000\\ &\qquad + 2P(X = 2)\ 10{,}000 + 3P(X = 3)\ 10{,}000]\\ &= 0P(X = 0) + 1P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3)\end{aligned}$$

Esta última línea es lo que queremos decir con esperanza.

Definición Esperanza de una variable aleatoria

Si X es una variable aleatoria con distribución de probabilidad

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X = x)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

entonces la **esperanza** de X, denotada por $E(X)$, que también se denomina **media** de X y se denota con μ, es

$$\mu = E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

Como $\sum_{i=1}^{n} p_i$ (todas las probabilidades deben sumar 1), la fórmula para $E(X)$ es la misma para el centro de masa de un conjunto finito de partículas que tienen masas $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ubicadas en las posiciones $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\text{Centro de masa} = \frac{M}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_ip_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_ip_i}{1} = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i = E(X)$$

EJEMPLO 1 Se fabrican 20 piezas de plástico a la vez, por medio de la inyección de plástico a un molde. Se inspeccionan las 20 piezas para buscar defectos tales como huecos (burbujas dentro de la pieza) y fracturas. Suponga que la distribución de probabilidad para el número de piezas defectuosas de las 20 está dada en la siguiente tabla.

x_i	0	1	2	3
p_i	0.90	0.06	0.03	0.01

Determine (a) la probabilidad de que un lote de 20 piezas tenga al menos una pieza defectuosa y (b) el número esperado de piezas defectuosas por lote de 20.

SOLUCIÓN

(a) $P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

$= 0.06 + 0.03 + 0.01 = 0.10$

(b) El valor esperado para el número de piezas defectuosas es

$$E(X) = 0 \cdot 0.90 + 1 \cdot 0.06 + 2 \cdot 0.03 + 3 \cdot 0.01 = 0.15$$

Por lo tanto, en promedio esperaríamos 0.15 piezas defectuosas por lote. ■

Modelos

Una vez, un famoso estadístico dijo: "Ningún modelo es correcto, pero muchos son útiles". Los modelos probabilísticos, como los de esta sección, deben considerarse como aproximaciones al mundo real, no como representaciones perfectamente exactas del mundo real.

Hasta ahora, en esta sección hemos tratado con variables aleatorias en donde el número de valores posibles es finito; esta situación es análoga a tener masas puntuales en la sección anterior. Existen otras situaciones en donde hay un número infinito de posibles resultados. Si el conjunto de valores posibles de una variable aleatoria X es finito, tal como $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, o es infinito, pero puede ponerse en una lista, tal como $\{x_1, x_2, \ldots\}$, entonces se dice que la variable aleatoria X es **discreta**. Si una variable aleatoria X puede tomar cualquier valor en algún intervalo de números reales, entonces decimos que X es una variable aleatoria **continua**. Existe una gran cantidad de situaciones en donde, al menos teóricamente, el resultado puede ser cualquier número real en un intervalo: por ejemplo, el tiempo de espera para la luz de alto, la masa de una pieza moldeada o el tiempo de vida de una batería. En la práctica, por supuesto, cada medida se redondea; por ejemplo, al segundo, miligramo, día, etcétera, más cercano. En situaciones como ésta, la variable aleatoria en realidad es discreta (con muchos posibles resultados), pero, con frecuencia, una variable aleatoria continua es una buena aproximación.

Las variables aleatorias continuas se estudian de una manera análoga a la distribución continua de masa de la sección anterior. Para una variable aleatoria continua debemos especificar la función de densidad de probabilidad (FDP). Una FDP para una variable aleatoria X que toma valores en el intervalo $[A, B]$ es una función que satisface

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_A^B f(x)\,dx = 1$
3. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$ para toda a, b $(a \leq b)$ en el intervalo $[A, B]$

La tercera propiedad dice que podemos determinar probabilidades para una variable aleatoria continua determinando áreas bajo la FDP (véase la figura 1). Es costumbre definir a la FDP como cero fuera del intervalo $[A, B]$.

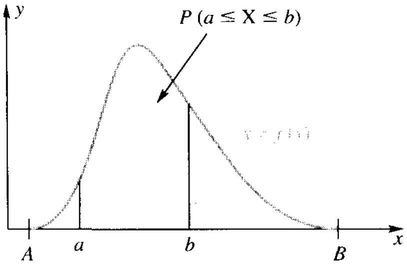


Figura 1

El **valor esperado,** o **media**, de una variable aleatoria continua X es

$$\mu = E(X) = \int_A^B x\,f(x)\,dx$$

Al igual que en el caso de las variables aleatorias discretas, ésta es análoga al centro de masa de un objeto con densidad variable:

$$\text{Centro de masa} = \frac{M}{m} = \frac{\int_A^B x\,f(x)\,dx}{\int_A^B f(x)\,dx} = \frac{\int_A^B x\,f(x)\,dx}{1} = \int_A^B x f(x)\,dx = E(X)$$

EJEMPLO 2 Una variable aleatoria continua X tiene FDP

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & \text{si } 0 \leq x \leq 10 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine (a) $P(1 \leq X \leq 9)$ (b) $P(X \geq 4)$ (c) $E(X)$.

SOLUCIÓN La variable aleatoria X toma valores en $[0, 10]$.

(a) $P(1 \leq X \leq 9) = \int_1^9 \frac{1}{10}\,dx = \frac{1}{10} \cdot 8 = \frac{4}{5}$

(b) $P(X \geq 4) = \int_4^{10} \frac{1}{10}\,dx = \frac{1}{10} \cdot 6 = \frac{3}{5}$

(c) $E(X) = \int_0^{10} x \frac{1}{10}\,dx = \left[\frac{x^2}{20}\right]_0^{10} = 5$

≈ ¿Son razonables estas respuestas? La variable aleatoria X se distribuye de manera uniforme en el intervalo $[0, 10]$, por lo que 80% de la probabilidad debe estar entre 1 y 9, al igual que 80% de la masa de una varilla uniforme estaría entre 1 y 9. Por simetría, esperaríamos que la media, o esperanza, de X sea 5, al igual que esperaríamos que el centro de masa de una barra uniforme de longitud 10 se encuentre a 5 unidades de cualquiera de los extremos. ■

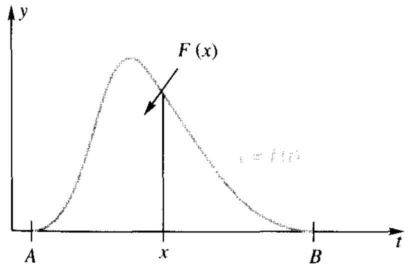


Figura 2

Una función relacionada estrechamente con la FDP es la **función de distribución acumulada** (FDA) que, para una variable aleatoria X, es la función F definida por

$$F(x) = P(X \le x)$$

Esta función está definida tanto para variables aleatorias discretas como continuas. Para una variable aleatoria discreta como la dada en el ejemplo 1, la FDA es una función escalonada que da un salto de $p_i = P(X = x_i)$ en el valor x_i (véase el problema 33). Para una variable aleatoria continua X que toma valores en el intervalo $[A, B]$ y que tiene FDP $f(x)$, la FDA es igual a la integral definida (véase la figura 2),

$$F(x) = \int_A^x f(t)\,dt, \quad A \le x \le B$$

Para $x < A$, la FDA $F(x)$ es cero, ya que la probabilidad de que sea menor o igual a un valor menor que A es cero. De forma análoga, para $x > B$, la FDA es uno, ya que la probabilidad de que sea menor o igual a un valor que es mayor a B es uno.

En el capítulo 4 utilizamos el término *función de acumulación* para referirnos a una función definida de esta manera. La FDA se define como el área acumulada bajo la FDP, por lo que es una función de acumulación. El siguiente teorema da varias propiedades de la FDA. Las demostraciones son sencillas y se dejan como ejercicios. (Véase el problema 19).

Teorema A

Sea X una variable aleatoria continua que toma valores en el intervalo $[A, B]$ y que tiene FDP $f(x)$ y FDA $F(x)$. Entonces

1. $F'(x) = f(x)$
2. $F(A) = 0$ y $F(B) = 1$
3. $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$

EJEMPLO 3 En teoría de confiabilidad, con frecuencia la variable aleatoria es el tiempo de vida de algún artículo, tal como la batería de una laptop. La FDP puede usarse para determinar las probabilidades y esperanzas respecto al tiempo de vida. Entonces, suponga que el tiempo de vida, en horas, de una batería es una variable aleatoria continua X que tiene FDP

$$f(x) = \begin{cases} \frac{12}{625}x^2(5 - x), & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Verifique que esto es una FDP válida y dibuje su gráfica.
(b) Determine la probabilidad de que la batería dure al menos tres horas.
(c) Determine el valor esperado del tiempo de vida.
(d) Determine y dibuje una gráfica de la FDA.

SOLUCIÓN Una calculadora gráfica o un CAS puede ser un auxiliar en la evaluación de las integrales de este problema.

(a) Para toda x, $f(x)$ es no negativa y

$$\int_0^5 \frac{12}{625}x^2(5 - x)\,dx = \frac{12}{625}\int_0^5 (5x^2 - x^3)\,dx = \frac{12}{625}\left[\frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^5 = 1$$

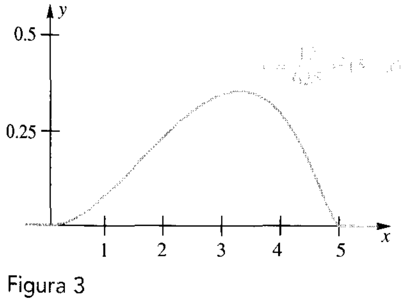


Figura 3

Una gráfica de la FDP se da en la figura 3.

(b) La probabilidad se determina por medio de integración:

$$P(X \ge 3) = \int_3^5 \frac{12}{625}x^2(5 - x)\,dx = \frac{12}{625}\left[\frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_3^5 = \frac{328}{625} = 0.5248$$

(c) El tiempo de vida esperado es

$$E(X) = \int_0^5 x\left[\frac{12}{625}x^2(5 - x)\right] dx$$
$$= \frac{12}{625}\int_0^5 (5x^3 - x^4)\, dx$$
$$= \frac{12}{625}\left[\frac{5}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^5 = 3 \text{ horas}$$

(d) Para x entre 0 y 5,

$$F(x) = \int_0^x \frac{12}{625}t^2(5 - t)\, dt$$
$$= \frac{4}{125}x^3 - \frac{3}{625}x^4$$

Para $x < 0$, $F(x) = 0$ y para $x > 5$, $F(x) = 1$. Se da una gráfica en la figura 4. ■

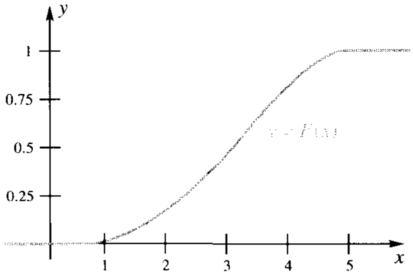


Figura 4

Revisión de conceptos

1. Una variable aleatoria cuyo conjunto de posibles resultados es finito, o puede ponerse en una lista infinita, se denomina variable aleatoria ______. Una variable aleatoria, cuyo conjunto de posibles resultados lo constituye un intervalo de números reales se denomina variable aleatoria ______.

2. Para variables aleatorias discretas, las probabilidades y esperanzas se determinan evaluando un(a) ______, mientras que para variables aleatorias continuas, las probabilidades y esperanzas se determinan mediante la evaluación de un(a) ______.

3. Si una variable aleatoria continua X toma valores en $[0, 20]$ y tiene FDP $f(x)$, entonces $P(X \le 5)$ se determina evaluando ______.

4. La función de acumulación $\int_A^x f(t)\, dt$, que acumula la probabilidad (área bajo la FDP), se denomina la (el) ______.

Conjunto de problemas 5.7

En los problemas del 1 al 8 se da una distribución de probabilidades discretas para una variable aleatoria X. Utilice la distribución dada para determinar (a) $P(X \ge 2)$ y (b) $E(X)$.

1.

x_i	0	1	2	3
p_i	0.80	0.10	0.05	0.05

2.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0.70	0.15	0.05	0.05	0.05

3.

x_i	−2	−1	0	1	2
p_i	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

4.

x_i	−2	−1	0	1	2
p_i	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

5.

x_i	1	2	3	4
p_i	0.4	0.2	0.2	0.2

6.

x_i	−0.1	100	1000
p_i	0.980	0.018	0.002

7. $p_i = (5 - i)/10,\ x_i = i,\ i = 1, 2, 3, 4$

8. $p_i = (2 - i)^2/10,\ x_i = i,\ i = 0, 1, 2, 3, 4$

En los problemas del 9 al 18 se da una FDP para una variable aleatoria continua X. Utilice la FDP para determinar (a) $P(X \ge 2)$, (b) $E(X)$ y (c) la FDA.

9. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}, & \text{si } 0 \le x \le 20 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{40}, & \text{si } -20 \le x \le 20 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{256}x(8 - x), & \text{si } 0 \le x \le 8 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4000}x(20 - x), & \text{si } 0 \le x \le 20 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

13. $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{64}x^2(4 - x), & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

14. $f(x) = \begin{cases} (8 - x)/32, & \text{si } 0 \le x \le 8 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

15. $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{8}\sin(\pi x/4), & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

16. $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{8}\cos(\pi x/8), & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

17. $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}x^{-2}, & \text{si } 1 \le x \le 4 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

18. $f(x) = \begin{cases} \frac{81}{40}x^{-3}, & \text{si } 1 \le x \le 9 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

19. Demuestre las tres propiedades de la FDA en el teorema A.

20. Se dice que una variable aleatoria continua X tiene **distribución uniforme** en el intervalo $[a, b]$, si la FDP tiene la

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{si } a \le x \le b \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Encuentre la probabilidad de que el valor de X sea más cercano a a que a b.

(b) Determine el valor esperado de X.

(c) Determine la FDA de X.

21. La **mediana** de una variable aleatoria continua X es un valor x_0 tal que $P(X \le x_0) = 0.5$. Determine la mediana de una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[a, b]$.

22. Sin realizar integración alguna, determine la mediana de la variable aleatoria que tiene FDP $f(x) = \frac{15}{512}x^2(4 - x)^2$, $0 \le x \le 4$. *Sugerencia:* utilice simetría.

23. Determine el valor de k que hace a $f(x) = kx(5 - x)$, $0 \le x \le 5$, una FDP válida. *Sugerencia:* la FDP debe tener integral igual a 1.

24. Determine el valor de k que hace a $f(x) = kx^2(5 - x)^2$, $0 \le x \le 5$, una FDP válida.

25. El tiempo, en minutos, que le toma a un trabajador completar una tarea es una variable aleatoria con FDP, $f(x) = k(2 - |x - 2|)$, $0 \le x \le 4$.

(a) Determine el valor de k, que hace de $f(x)$ una FDP válida.

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que tarde más de 3 minutos en completar la tarea?

(c) Determine el valor esperado del tiempo en completar la tarea.

(d) Determine la FDA, $F(x)$.

(e) Denótese con Y el tiempo requerido, en segundos, para completar la tarea. ¿Cuál es la FDA de Y? *Sugerencia:* $P(Y \le y) = P(60X \le y)$.

26. El índice diario de calidad del aire en verano (ICA) en San Luis, Missouri, es una variable aleatoria cuya FDP es $f(x) = kx^2(180 - x)$, $0 \le x \le 180$.

(a) Determine el valor de k que hace de $f(x)$ una FDP válida.

(b) Cierto día es de "alerta anaranjada", si el ICA está entre 100 y 150. ¿Cuál es la probabilidad de que un día de verano sea de alerta anaranjada?

(c) Determine el valor esperado del ICA de verano.

CAS **27.** Los agujeros que se perforan por medio de una máquina tienen un diámetro, medido en milímetros, que es una variable aleatoria con FDP $f(x) = kx^6(0.6 - x)^8$, $0 \le x \le 0.6$.

(a) Determine el valor de k para que $f(x)$ sea una FDP válida.

(b) Ciertas especificaciones requieren que el diámetro del agujero esté entre 0.35 y 0.45 mm. Se desechan las unidades que no cumplen con este requisito. ¿Cuál es la probabilidad de que una unidad sea desechada?

(c) Determine el valor esperado del diámetro del agujero.

(d) Determine la FDA, $F(x)$.

(e) Denótese con Y al diámetro del agujero en pulgadas (1 pulgada = 25.4 mm). ¿Cuál es la FDA de Y?

CAS **28.** Una compañía monitorea el total de impurezas en los lotes de productos químicos que recibe. La FDP para el total de impurezas X en un lote, medido en partes por millón (PPM), tiene la FDP $f(x) = kx^2(200 - x)^8$, $0 \le x \le 200$.

(a) Determine el valor de k que hace de $f(x)$ una FDP válida.

(b) La compañía no acepta lotes cuyo total de impurezas sea 100 o superior. ¿Cuál es la probabilidad de que un lote no sea aceptado?

(c) Determine el valor esperado del total de impurezas en PPM.

(d) Determine la FDA, $F(x)$.

(e) Denótese con Y al total de impurezas, en porcentaje, en lugar de PPM. ¿Cuál es la FDA de Y?

29. Suponga que X es una variable aleatoria que tiene distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$. (Véase el problema 20.) Se traza el punto $(1, X)$ en el plano. Sea Y la distancia de $(1, X)$ al origen. Determine la FDA y la FDP de la variable aleatoria Y. *Sugerencia:* primero determine la FDP.

30. Suponga que X es una variable aleatoria continua. Explique por qué $P(X = x) = 0$. ¿Cuáles de las siguientes probabilidades son iguales? Explique.

$$P(a < X < b), \quad P(a \le X \le b),$$
$$P(a < X \le b), \quad P(a \le X < b)$$

31. Demuestre que si A^c es el complemento de A, esto es, el conjunto de todos los resultados en el espacio muestral S que no están en A, entonces $P(A^c) = 1 - P(A)$.

32. Utilice el resultado del problema 31 para determinar $P(X \ge 1)$ en los problemas 1, 2 y 5.

33. Si X es una variable aleatoria discreta, entonces la FDA es una función escalonada. Considerando los valores de x menores que cero, entre 0 y 1, etcétera, determine y grafique la FDA para la variable aleatoria X del problema 1.

34. Determine y grafique la FDA de la variable aleatoria X del problema 2.

35. Suponga que una variable aleatoria Y tiene FDA

$$F(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y < 0 \\ 2y/(y+1), & \text{si } 0 \le y \le 1 \\ 1, & \text{si } y > 1 \end{cases}$$

Determine cada uno de lo siguiente:

(a) $P(Y < 2)$

(b) $P(0.5 < Y < 0.6)$

(c) la FDP de Y

(d) Utilice la regla de la parábola, con $n = 8$, para aproximar $E(Y)$.

36. Suponga que una variable aleatoria Z tiene FDA

$$F(z) = \begin{cases} 0, & \text{si } z < 0 \\ z^2/9, & \text{si } 0 \le z \le 3 \\ 1, & \text{si } z > 3 \end{cases}$$

Determine cada uno de lo siguiente:

(a) $P(Z > 1)$

(b) $P(1 < Z < 2)$

(c) la PDF de Z

(d) $E(Z)$

CAS **37.** El valor esperado de una función $g(X)$ de una variable aleatoria continua X, que tiene FDP $f(x)$, se define como $E[g(X)] = \int_A^B g(x)f(x)\,dx$. Si la FDP de X es $f(x) = \frac{15}{512}x^2(4 - x)^2, 0 \le x \le 4$, determine $E(X)$ y $E(X^2)$.

CAS **38.** Una variable aleatoria continua X tiene FDP $f(x) = \frac{3}{256}x(8 - x), 0 \le x \le 8$. Determine $E(X^2)$ y $E(X^3)$.

CAS **39.** La **varianza** de una variable aleatoria continua, denotada con $V(X)$ o σ^2, se define como $V(X) = E[(X - \mu)^2]$, en donde μ es el valor esperado, o media de la variable aleatoria X. Determine la varianza de la variable aleatoria del problema 37.

CAS **40.** Determine la varianza de la variable aleatoria del problema 38.

41. Demuestre que la varianza de una variable aleatoria es igual a $E(X^2) - \mu^2$ y utilice este resultado para determinar la varianza de la variable aleatoria del problema 37.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** discreta; continua **2.** suma; integral **3.** $\int_0^5 f(x)\,dx$ **4.** función de distribución acumulada

---

5.8 Repaso del capítulo

Examen de conceptos

Responda con verdadero o falso a cada una de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

1. El área de la región acotada por $y = \cos x, y = 0, x = 0$ y $x = \pi$ es $\int_0^{\pi} \cos x\,dx$.

2. El área de un círculo de radio a es $4\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$.

3. El área de la región acotada por $y = f(x), y = g(x), x = a$ y $x = b$ es $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$ o bien su negativo.

4. Todos los cilindros rectos cuyas bases tienen la misma área y cuyas alturas son las mismas tienen volúmenes idénticos.

5. Si dos sólidos con bases en el mismo plano tienen secciones transversales de la misma área en todos los planos paralelos a sus bases, entonces tienen el mismo volumen.

6. Si el radio de la base de un cono se duplica, mientras la altura se divide entre dos, entonces el volumen permanecerá constante.

7. Para calcular el volumen del sólido obtenido al hacer girar la región acotada por $y = -x^2 + x$ y $y = 0$ alrededor del eje y, uno debe utilizar el método de las arandelas, de preferencia sobre del método de los cascarones.

8. Los sólidos que se obtienen al hacer girar la región del problema 7 alrededor de $x = 0$ y $x = 1$ tiene el mismo volumen.

9. Cualquier curva suave en el plano que se encuentre por completo dentro del círculo unitario tendrá longitud finita.

10. El trabajo que se requiere para estirar un resorte 2 pulgadas más de su longitud normal es el doble del que se necesita para estirarlo una pulgada (supóngase que se cumple la Ley de Hooke).

11. Se requerirá la misma cantidad de trabajo para vaciar un depósito de forma cónica y un depósito cilíndrico de agua, bombeándola hasta su borde superior si ambos depósitos tienen la misma altura y volumen.

12. Un bote tiene ventanas circulares de radio de 6 pulgadas que están bajo la superficie del agua. La fuerza ejercida por el agua sobre una ventana es la misma sin importar la profundidad.

13. Si $\bar{x}$ es el centro de masa de un sistema de masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ distribuidas a lo largo de una recta en los puntos con coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, respectivamente, entonces $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})m_i = 0$.

14. El centroide de la región acotada por $y = \cos x, y = 0, x = 0$ y $x = 2\pi$ está en $(\pi, 0)$.

15. De acuerdo con el teorema de Pappus, el volumen del sólido obtenido al hacer girar la región (de área 2) acotada por $y = \operatorname{sen} x$, $y = 0, x = 0$ y $x = \pi$ alrededor del eje y es $2(2\pi)\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi^2$.

16. El área de la región acotada por $y = \sqrt{x}, y = 0, y = 0$ y $x = 9$ es $\int_0^3 (9 - y^2)\,dy$.

17. Si la densidad de un alambre es proporcional al cuadrado de la distancia a su punto medio, entonces su centro de masa está en el punto medio.

18. El centroide de un triángulo con base en el eje x tiene ordenada (coordenada y) igual a un tercio de la altura del triángulo.

19. Una variable aleatoria que toma sólo un número finito de valores es una variable aleatoria discreta.

20. Considere un alambre con densidad $\delta(x), 0 \le x \le a$ y una variable aleatoria con FDP $f(x), 0 \le x \le a$. Si $\delta(x) = f(x)$ para toda x en $[0, a]$, entonces el centro de masa del alambre será igual a la esperanza de la variable aleatoria.

21. Una variable aleatoria que toma el valor 5 con probabilidad uno tendrá esperanza igual a 5.

22. Si $F(x)$ es la FDA de una variable aleatoria continua X, entonces $F'(x)$ es igual a la FDP $f(x)$.

23. Si X es una variable aleatoria continua, entonces $P(X = 1) = 0$.

Problemas de examen

Los problemas del 1 al 7 se refieren a la región plana R acotada por la curva $y = x - x^2$ y el eje x (véase la figura 1).

1. Encuentre el área de R.

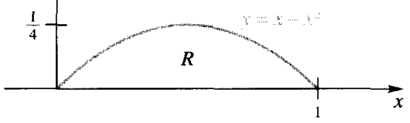


Figura 1

2. Encuentre el volumen del sólido S_1, generado al hacer girar la región R alrededor del eje x.

3. Utilice el método de los cascarones para determinar el volumen del sólido S_2, generado al hacer girar R alrededor del eje y.

4. Encuentre el volumen del sólido S_3, generado al hacer girar R alrededor de la recta $y = -2$.

5. Encuentre el volumen del sólido S_4 generado al hacer girar R alrededor de la recta $x = 3$.

6. Encuentre las coordenadas del centroide de R.

7. Utilice el teorema de Pappus y los problemas del 1 al 6 para determinar los volúmenes de los sólidos S_1, S_2, S_3 y S_4 anteriores.

8. La longitud natural de cierto resorte es de 16 pulgadas, y se requiere de una fuerza de 8 libras para mantenerlo estirado 8 pulgadas. Encuentre el trabajo realizado en cada caso.

(a) Estirarlo desde una longitud de 18 pulgadas a una longitud de 24 pulgadas.

(b) Comprimirlo desde su longitud natural hasta una longitud de 12 pulgadas.

9. Un tanque cilíndrico vertical tiene 10 pies de diámetro y 10 pies de altura. Si el agua del tanque tiene una profundidad de 6 pies, ¿cuánto trabajo se realiza al bombear toda el agua hasta el borde superior del depósito?

10. Un objeto que pesa 200 libras está suspendido desde la parte superior de un edificio por medio de un cable uniforme. Si el cable es de 100 pies de largo y pesa 120 libras, ¿cuánto trabajo se hace al tirar del objeto y del cable hasta lo alto?

11. Una región R está acotada por la recta $y = 4x$ y la parábola $y = x^2$. Encuentre el área de R:

(a) considerando a x como la variable de integración, y

(b) tomando a y como la variable de integración.

12. Encuentre el centroide de R en el problema 11.

13. Determine el volumen del sólido de revolución generado al hacer girar la región R del problema 11 alrededor del eje x. Verifique mediante el teorema de Pappus.

14. Encuentre la fuerza total ejercida por el agua dentro de un cilindro circular recto con altura de 3 pies y radio de 8 pies

(a) sobre la superficie lateral, y

(b) sobre la superficie inferior.

15. Encuentre la longitud del arco de la curva $y = x^3/3 + 1/(4x)$ desde $x = 1$ hasta $x = 3$.

16. Bosqueje la gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2, \qquad y = \tfrac{1}{3}(t^3 - 3t)$$

Después encuentre la longitud del rizo de la curva resultante.

17. Un sólido con base semicircular acotada por $\sqrt{9 - x^2}$ y $y = 0$ tiene secciones transversales perpendiculares al eje x que son cuadrados. Encuentre el volumen de este sólido.

En los problemas del 18 al 23 escriba una expresión que incluya integrales para representar el concepto requerido. Haga referencia a la figura 2.

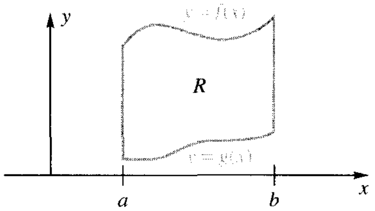


Figura 2

18. El área de R.

19. El volumen del sólido obtenido cuando R se hace girar alrededor del eje x.

20. El volumen del sólido obtenido cuando R se hace girar alrededor de $x = a$.

21. Los momentos M_x y M_y de una lámina homogénea con forma R, suponiendo que su densidad es δ.

22. La longitud *total* de la frontera de R.

23. El área de la superficie *total* del sólido del problema 19.

24. Sea X una variable aleatoria continua con FDP

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{8 - x^3}{12}, & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Determine $P(X \geq 1)$.

(b) Determine la probabilidad de que X esté más cerca de 0 que de 1.

(c) Determine $E(X)$.

(d) Determine la FDA de X.

25. Una variable aleatoria X tiene FDA

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1 - \dfrac{(6 - x)^2}{36}, & \text{si } 0 \leq x \leq 6 \\ 1, & \text{si } x > 6 \end{cases}$$

(a) Determine $P(X \leq 3)$.

(b) Determine la FDP $f(x)$.

(c) Determine $E(X)$.

PROBLEMAS DE REPASO E INTRODUCCIÓN

Determine las siguientes antiderivadas.

1. $\int \frac{1}{x^2}\,dx$

2. $\int \frac{1}{x^{1.5}}\,dx$

3. $\int \frac{1}{x^{1.01}}\,dx$

4. $\int \frac{1}{x^{0.99}}\,dx$

Para los problemas del 5 al 8 defina $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$ *y determine lo siguiente.*

5. $F(1)$

6. $F'(x)$

7. $D_xF(x^2)$

8. $D_xF(x^3)$

En los problemas del 9 al 12 evalúe las expresiones en los valores dados.

9. $(1 + h)^{1/h}; h = 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

10. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; n = 1, 10, 100, 1000$

11. $\left(1 + \frac{h}{2}\right)^{2/h}; h = 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

12. $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n/2}; n = 1, 10, 100, 1000$

En los problemas del 13 al 16 determine todos los valores de x que satisfacen la relación dada.

13. $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$

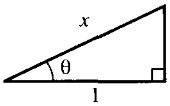
14. $\cos x = -1$

15. $\tan x = 1$

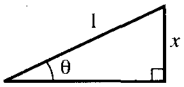
16. $\sec x = 0$

Para los triángulos que se muestran en los problemas del 17 al 20 determine todo lo siguiente, en términos de x: sen θ, cos θ, tan θ, cot θ, sec θ y csc θ.

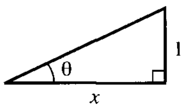
17.



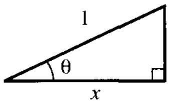
18.



19.



20.



En los problemas 21 y 22 resuelva la ecuación diferencial sujeta a la condición dada.

21. $y' = xy^2, y = 1$ cuando $x = 0$

22. $y' = \frac{\cos x}{y}, y = 4$ cuando $x = 0$

CAPÍTULO 6 Funciones trascendentales

6.1 La función logaritmo natural
6.2 Funciones inversas y sus derivadas
6.3 La función exponencial natural
6.4 Funciones exponencial y logarítmica generales
6.5 Crecimiento y decaimiento exponencial
6.6 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden
6.7 Aproximaciones para ecuaciones diferenciales
6.8 Funciones trigonométricas inversas y sus derivadas
6.9 Funciones hiperbólicas y sus inversas
6.10 Repaso del capítulo

6.1
La función logaritmo natural

La potencia del cálculo, tanto de derivadas como de integrales, ya ha sido demostrada ampliamente. Aunque sólo hemos empezado a tratar el problema de aplicaciones potenciales. Para ahondar, necesitamos expandir la clase de funciones con las que podemos trabajar. Ése es el objetivo de este capítulo.

Comenzamos pidiéndole que observe un vacío peculiar en nuestro conocimiento de derivadas.

$$D_x\left(\frac{x^2}{2}\right) = x^1,\ D_x(x) = x^0,\ D_x(??) = x^{-1},\ D_x\left(-\frac{1}{x}\right) = x^{-2},\ D_x\left(-\frac{x^{-2}}{2}\right) = x^{-3}$$

¿Existe una función cuya derivada sea $1/x$? De manera alternativa, ¿existe una antiderivada $\int 1/x\,dx$? El Primer Teorema Fundamental del Cálculo establece que la función de acumulación

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

es una función cuya derivada es $f(x)$, con tal que f sea continua en un intervalo I que contenga a a y a x. En este sentido, podemos encontrar una antiderivada de *cualquier* función continua. La existencia de una antiderivada no significa que la antiderivada pueda expresarse en términos de funciones que hemos estudiado hasta el momento. En este capítulo introduciremos y estudiaremos varias funciones nuevas.

Nuestra primera función nueva se elige para llenar el hueco observado anteriormente. Le llamamos **función logaritmo natural** y tiene que ver con el logaritmo estudiado en álgebra, pero esta relación sólo aparecerá más adelante. Por el momento, sólo acepte el hecho de que vamos a definir una *nueva* función y estudiaremos sus propiedades.

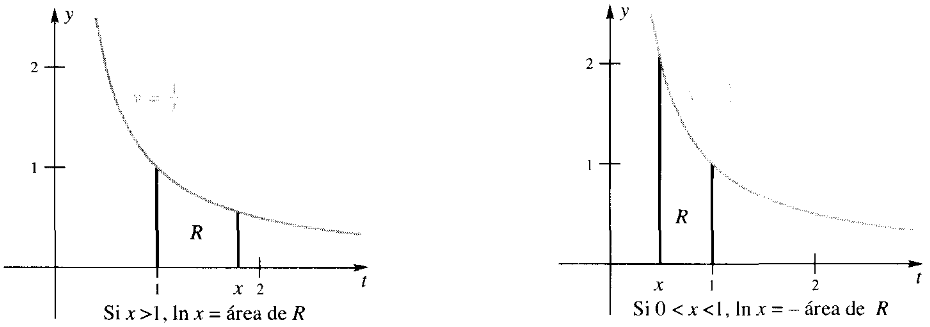
Definición Función logaritmo natural

La **función logaritmo natural**, denotada por ln, se define por

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \qquad x > 0$$

El dominio de la función logaritmo natural es el conjunto de los números reales positivos.

Los diagramas en la figura 1 indican el significado geométrico de ln x. La función logaritmo natural (o log natural) mide el área debajo de la curva $y = 1/t$ entre 1 y x, si $x > 1$ y el negativo del área si $0 < x < 1$. El logaritmo natural es una función de acumulación, ya que acumula el área bajo la curva $y = 1/t$. Claramente, ln x está bien definida



Si $x > 1$, ln x = área de R

Si $0 < x < 1$, ln x = − área de R

Figura 1

para $x > 0$; ln x no está definida para $x \leq 0$ porque esta integral definida no existe en un intervalo que incluya a 0.

¿Y cuál es la derivada de esta nueva función? Esto es exactamente lo que queremos.

Derivada de la función logaritmo natural Con base en el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos

$$\boxed{D_x \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = D_x \ln x = \frac{1}{x}, \qquad x > 0}$$

Esto puede combinarse con la regla de la cadena. Si $u = f(x) > 0$ y si f es derivable, entonces

$$D_x \ln u = \frac{1}{u} D_x u$$

EJEMPLO 1 Encuentre $D_x \ln \sqrt{x}$.

SOLUCIÓN Sea $u = \sqrt{x} = x^{1/2}$. Entonces

$$D_x \ln \sqrt{x} = \frac{1}{x^{1/2}} \cdot D_x(x^{1/2}) = \frac{1}{x^{1/2}} \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2x} \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Encuentre $D_x \ln(x^2 - x - 2)$.

SOLUCIÓN Este problema tiene sentido, siempre que $x^2 - x - 2 > 0$. Ahora $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$, que es positiva con tal que $x < -1$ o $x > 2$. Así, el dominio de $\ln(x^2 - x - 2)$ es $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$. En este dominio,

$$D_x \ln(x^2 - x - 2) = \frac{1}{x^2 - x - 2} D_x(x^2 - x - 2) = \frac{2x - 1}{x^2 - x - 2} \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Demuestre que

$$\boxed{D_x \ln|x| = \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0}$$

SOLUCIÓN Se deben considerar dos casos. Si $x > 0$, $|x| = x$, y

$$D_x \ln|x| = D_x \ln x = \frac{1}{x}$$

Si $x < 0$, $|x| = -x$, y así

$$D_x \ln|x| = D_x \ln(-x) = \frac{1}{-x} D_x(-x) = \left(\frac{1}{-x}\right)(-1) = \frac{1}{x} \qquad \blacksquare$$

Sabemos que para cada fórmula de derivación existe una fórmula correspondiente de integración. Por esto, el ejemplo 3 implica que

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C, \qquad x \neq 0$$

o, con u reemplazando a x,

$$\boxed{\int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| + C, \qquad u \neq 0}$$

Esto llena el viejo hueco en la regla de la potencia: $\int u^r\, du = u^{r+1}/(r+1)$, de la cual habíamos excluido el exponente $r = -1$.

EJEMPLO 4 Encuentre $\int \frac{5}{2x+7}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = 2x + 7$, por lo que $du = 2\,dx$. Entonces

$$\int \frac{5}{2x+7}\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{1}{2x+7}\,2\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{1}{u}\,du$$

$$= \frac{5}{2}\ln|u| + C = \frac{5}{2}\ln|2x+7| + C$$ ■

EJEMPLO 5 Evalúe $\int_{-1}^{3} \frac{x}{10-x^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = 10 - x^2$, por lo que $du = 2x\,dx$. Entonces

$$\int \frac{x}{10-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{10-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|u| + C = -\frac{1}{2}\ln|10-x^2| + C$$

Así, por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\int_{-1}^{3} \frac{x}{10-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}\ln|10-x^2|\right]_{-1}^{3} = -\frac{1}{2}\ln 1 + \frac{1}{2}\ln 9 = \frac{1}{2}\ln 9$$

Para que los cálculos anteriores sean válidos, $10 - x^2$ nunca debe ser cero en el intervalo $[-1, 3]$. Es fácil verificar que esto es cierto. ■

Cuando el integrando es el cociente de dos polinomios (esto es, una función racional) y el numerador es de grado igual o mayor que el denominador, siempre *divida primero el denominador entre el numerador.*

EJEMPLO 6 Determine $\int \frac{x^2 - x}{x+1}\,dx$.

SOLUCIÓN Mediante una división larga (véase la figura 2),

$$\frac{x^2 - x}{x+1} = x - 2 + \frac{2}{x+1}$$

De aquí que,

$$\int \frac{x^2 - x}{x+1}\,dx = \int (x-2)\,dx + 2\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + 2\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + 2\ln|x+1| + C$$ ■

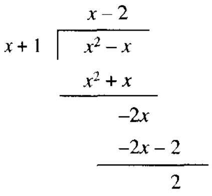


Figura 2

Propiedades del logaritmo natural

El siguiente teorema lista varias propiedades importantes de la función logaritmo natural.

Teorema A

Si a y b son números positivos y r es cualquier número racional, entonces

(i) $\ln 1 = 0$;

(ii) $\ln ab = \ln a + \ln b$;

(iii) $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$;

(iv) $\ln a^r = r \ln a$.

Logaritmos comunes

Las propiedades (ii) y (iii) de los **logaritmos comunes** (logaritmos de base 10) fueron las que motivaron la invención de los logaritmos. John Napier (1550-1617) quería simplificar los complicados cálculos que surgían en astronomía y navegación. Su objetivo era reemplazar multiplicación por suma y división por sustracción, exactamente lo que realizan (ii) y (iii). Durante 350 años, los logaritmos comunes fueron una ayuda esencial en los cálculos, pero ahora, para este propósito utilizamos calculadoras y computadoras. Sin embargo, los logaritmos naturales conservan su importancia por otras razones, como verá.

Demostración

(i) $\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0.$

(ii) Ya que para $x > 0$,

$$D_x \ln ax = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$$

y

$$D_x \ln x = \frac{1}{x}$$

se deduce, con base en el teorema acerca de dos funciones con la misma derivada (teorema 3.6B), que

$$\ln ax = \ln x + C$$

Para determinar C, hágase $x = 1$, obteniéndose $\ln a = C$. Por lo tanto,

$$\ln ax = \ln x + \ln a$$

Por último, sea $x = b$.

(iii) Reemplace a por $1/b$ en (ii) para obtener

$$\ln\frac{1}{b} + \ln b = \ln\left(\frac{1}{b} \cdot b\right) = \ln 1 = 0$$

Así,

$$\ln\frac{1}{b} = -\ln b$$

Aplicando (ii), nuevamente, obtenemos

$$\ln\frac{a}{b} = \ln\left(a \cdot \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\frac{1}{b} = \ln a - \ln b$$

(iv) Como, para $x > 0$,

$$D_x(\ln x^r) = \frac{1}{x^r} \cdot rx^{r-1} = \frac{r}{x}$$

y

$$D_x(r \ln x) = r \cdot \frac{1}{x} = \frac{r}{x}$$

se deduce, por el teorema 3.6B que se utilizó en (ii), que

$$\ln x^r = r \ln x + C$$

Sea $x = 1$, lo cual da $C = 0$. Por lo que

$$\ln x^r = r \ln x$$

Por última, sea $x = a$. ■

EJEMPLO 7 Encuentre dy/dx, si $y = \ln \sqrt[3]{(x-1)/x^2}$, $x > 1$.

SOLUCIÓN Nuestra tarea es más sencilla, si primero utilizamos las propiedades del logaritmo natural para simplificar y.

$$y = \ln\left(\frac{x-1}{x^2}\right)^{1/3} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{x-1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left[\ln(x-1) - \ln x^2\right] = \frac{1}{3}\left[\ln(x-1) - 2\ln x\right]$$

Así,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x}\right] = \frac{2-x}{3x(x-1)}$$ ■

Derivación logarítmica Con frecuencia, el trabajo de derivar expresiones que incluyan cocientes, productos o potencias se puede reducir de manera sustancial aplicando primero la función logaritmo y usando sus propiedades. Este método, denominado **derivación logarítmica**, se ilustra en el ejemplo 8.

EJEMPLO 8 Derive $y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{(x+1)^{2/3}}$.

SOLUCIÓN Primero tomamos logaritmo natural; después derivamos implícitamente con respecto a x (recuerde la sección 2.7).

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln(1-x^2) - \frac{2}{3}\ln(x+1)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2(1-x^2)} - \frac{2}{3(x+1)} = \frac{-(x+2)}{3(1-x^2)}$$

Así,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{-y(x+2)}{3(1-x^2)} = \frac{-\sqrt{1-x^2}\,(x+2)}{3(x+1)^{2/3}(1-x^2)}\\ &= \frac{-(x+2)}{3(x+1)^{2/3}(1-x^2)^{1/2}}\end{aligned}$$ ■

El ejemplo 8 podría haberse hecho de manera directa sin haber tomado logaritmos, y le sugerimos que lo intente. Usted debe ser capaz de hacer que coincidan las dos respuestas.

La gráfica del logaritmo natural El dominio de $\ln x$ consiste en el conjunto de todos los números reales positivos, de modo que la gráfica de $y = \ln x$ está en el semiplano de la derecha. Además, para $x > 0$,

$$D_x \ln x = \frac{1}{x} > 0$$

y

$$D_x^2 \ln x = -\frac{1}{x^2} < 0$$

La primera fórmula nos dice que la función logaritmo natural es continua (¿por qué?) y crece cuando x aumenta; la segunda nos dice que la gráfica es cóncava hacia abajo en todas partes. En los problemas 43 y 44 se le pide demostrar que

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$$

y

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

Por último, $\ln 1 = 0$. Estos hechos implican que la gráfica de $y = \ln x$ sea similar, en forma, a la que se muestra en la figura 3.

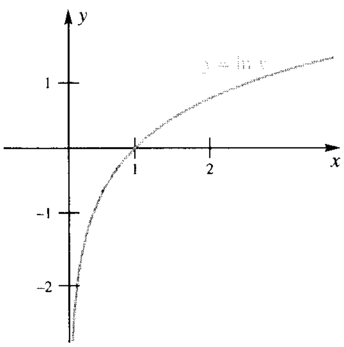


Figura 3

Si su calculadora tiene un botón $\boxed{\ln}$, los valores para el logaritmo natural los tiene al alcance de la mano. Por ejemplo,

$$\ln 2 \approx 0.6931$$
$$\ln 3 \approx 1.0986$$

Integrales trigonométricas Algunas integrales trigonométricas pueden evaluarse por medio de la función logaritmo natural.

EJEMPLO 9 Evalúe $\int \tan x \, dx$.

SOLUCIÓN Como $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, podemos hacer la sustitución $u = \cos x, du = -\operatorname{sen} x\, dx$, para obtener

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = \int \frac{-1}{\cos x}(-\operatorname{sen} x\, dx) = -\ln|\cos x| + C \qquad ■$$

De forma análoga, $\int \cot x\, dx = \ln|\operatorname{sen} x|$.

EJEMPLO 10 Evalúe $\int \sec x \csc x\, dx$.

SOLUCIÓN Para ésta, utilizamos la identidad trigonométrica $\sec x \csc x = \tan x + \cot x$. Entonces

$$\int \sec x \csc x\, dx = \int (\tan x + \cot x)\, dx = -\ln|\cos x| + \ln|\operatorname{sen} x| + C \qquad ■$$

Revisión de conceptos

1. La función ln se define por $\ln x =$ _______. El dominio de esta función es _______ y su rango es _______.

2. Con base en la definición anterior, se deduce que $D_x \ln x =$ _______ para $x > 0$.

3. Con mayor generalidad, para $x \neq 0$, $D_x \ln|x| =$ _______ y así $\int (1/x)\, dx =$ _______.

4. Algunas propiedades comunes de ln son $\ln(xy) =$ _______, $\ln(x/y) =$ _______ y $\ln(x^r) =$ _______.

Conjunto de problemas 6.1

1. Utilice las aproximaciones $\ln 2 \approx 0.693$ y $\ln 3 \approx 1.099$, junto con las propiedades establecidas en el teorema A, para calcular aproximaciones a cada uno de los logaritmos siguientes. Por ejemplo, $\ln 6 = \ln(2 \cdot 3) = \ln 2 + \ln 3 = 0.693 + 1.099 = 1.792$.

(a) $\ln 6$
(b) $\ln 1.5$
(c) $\ln 81$
(d) $\ln \sqrt{2}$
(e) $\ln\left(\frac{1}{36}\right)$
(f) $\ln 48$

2. Utilice su calculadora para hacer los cálculos del problema 1 de manera directa.

En los problemas del 3 al 14 encuentre la derivada que se indica (véanse los ejemplos 1 y 2). En cada caso, suponga que x está restringida de modo que ln está definida.

3. $D_x \ln(x^2 + 3x + \pi)$
4. $D_x \ln(3x^3 + 2x)$
5. $D_x \ln(x - 4)^3$
6. $D_x \ln \sqrt{3x - 2}$
7. $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = 3 \ln x$
8. $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = x^2 \ln x$
9. $\dfrac{dz}{dx}$ si $z = x^2 \ln x^2 + (\ln x)^3$
10. $\dfrac{dr}{dx}$ si $r = \dfrac{\ln x}{x^2 \ln x^2} + \left(\ln \dfrac{1}{x}\right)^3$
11. $g'(x)$ si $g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$
12. $h'(x)$ si $h(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$
13. $f'(81)$ si $f(x) = \ln \sqrt[3]{x}$
14. $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ si $f(x) = \ln(\cos x)$

En los problemas del 15 al 26 encuentre las integrales (véanse los ejemplos 4, 5 y 6).

15. $\displaystyle\int \frac{1}{2x + 1}\, dx$
16. $\displaystyle\int \frac{1}{1 - 2x}\, dx$
17. $\displaystyle\int \frac{6v + 9}{3v^2 + 9v}\, dv$
18. $\displaystyle\int \frac{z}{2z^2 + 8}\, dz$
19. $\displaystyle\int \frac{2 \ln x}{x}\, dx$
20. $\displaystyle\int \frac{-1}{x(\ln x)^2}\, dx$
21. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^4}{2x^5 + \pi}\, dx$
22. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t + 1}{2t^2 + 4t + 3}\, dt$
23. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x - 1}\, dx$
24. $\displaystyle\int \frac{x^2 + x}{2x - 1}\, dx$
25. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x + 4}\, dx$
26. $\displaystyle\int \frac{x^3 + x^2}{x + 2}\, dx$

En los problemas del 27 al 30 utilice el teorema A para escribir las expresiones como el logaritmo de una sola cantidad.

27. $2\ln(x + 1) - \ln x$
28. $\frac{1}{2}\ln(x - 9) + \frac{1}{2}\ln x$
29. $\ln(x - 2) - \ln(x + 2) + 2\ln x$
30. $\ln(x^2 - 9) - 2\ln(x - 3) - \ln(x + 3)$

En los problemas del 31 al 34 encuentre dy/dx por medio de la diferenciación logarítmica (véase el ejemplo 8).

31. $y = \dfrac{x + 11}{\sqrt{x^3 - 4}}$
32. $y = (x^2 + 3x)(x - 2)(x^2 + 1)$
33. $y = \dfrac{\sqrt{x + 13}}{(x - 4)\sqrt[3]{2x + 1}}$
34. $y = \dfrac{(x^2 + 3)^{2/3}(3x + 2)^2}{\sqrt{x + 1}}$

En los problemas del 35 al 38 haga uso de la gráfica conocida de $y = \ln x$ para esbozar las gráficas de las ecuaciones.

35. $y = \ln|x|$

36. $y = \ln\sqrt{x}$

37. $y = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

38. $y = \ln(x - 2)$

39. Haga un dibujo de la gráfica de $y = \ln\cos x + \ln\sec x$ en $(-\pi/2, \pi/2)$, pero piense antes de comenzar.

40. Explique por qué $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$.

41. Encuentre todos los valores extremos locales de $f(x) = 2x^2 \ln x - x^2$ en su dominio.

42. La velocidad de transmisión en un cable telegráfico se observa que es proporcional a $x^2 \ln(1/x)$, donde x es la razón del radio del núcleo al grosor del aislante $(0 < x < 1)$. ¿Qué valor de x da la máxima velocidad de transmisión?

43. Utilice el hecho de que $\ln 4 > 1$ para demostrar que $\ln 4^m > m$ para $m > 1$. Concluya que $\ln x$ puede hacerse tan grande como se quiera seleccionando a x suficientemente grande. ¿Qué implica esto con respecto a $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \ln x$?

44. Utilice el hecho de que $\ln x = -\ln(1/x)$ y el problema 43 para demostrar que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

45. Despeje x de: $\displaystyle\int_{1/3}^{x} \frac{1}{t}\,dt = 2\int_{1}^{x} \frac{1}{t}\,dt$.

46. Demuestre las siguientes proposiciones.

(a) Como $1/t < 1/\sqrt{t}$ para $t > 1$, $\ln x < 2(\sqrt{x} - 1)$ para $x > 1$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (\ln x)/x = 0$.

47. Calcule

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right]$$

escribiendo la expresión entre corchetes como

$$\left[\frac{1}{1+1/n} + \frac{1}{1+2/n} + \cdots + \frac{1}{1+n/n}\right]\frac{1}{n}$$

y reconociendo lo último como una suma de Riemann.

C **48.** Un teorema famoso (el de los números primos) dice que el número de primos menores que n, para n grande, es aproximadamente $n/(\ln n)$. Aproximadamente, ¿cuántos primos menores que 1,000,000 hay?

49. Encuentre y simplifique $f'(1)$.

(a) $f(x) = \ln\left(\dfrac{ax - b}{ax + b}\right)^c$, donde $c = \dfrac{a^2 - b^2}{2ab}$.

(b) $f(x) = \displaystyle\int_1^u \cos^2 t\,dt$, donde $u = \ln(x^2 + x - 1)$.

50. Evalúe $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \tan x\,dx$.

51. Evalúe $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sec x \csc x\,dx$.

52. Evalúe $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}\,dx$.

53. La región acotada por $y = (x^2 + 4)^{-1}$, $y = 0$, $x = 1$ y $x = 4$, se hace girar alrededor del eje y, generando un sólido. Encuentre su volumen.

54. Encuentre la longitud de la curva $y = x^2/4 - \ln\sqrt{x}$, $1 \le x \le 2$.

55. Teniendo como base la gráfica de $y = 1/x$, demuestre que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

56. Demuestre la **desigualdad de Napier**, la cual dice que, para $0 < x < y$,

$$\frac{1}{y} < \frac{\ln y - \ln x}{y - x} < \frac{1}{x}$$

CAS **57.** Sea $f(x) = \ln(1.5 + \operatorname{sen} x)$.

(a) Encuentre los puntos extremos absolutos en $[0, 3\pi]$.

(b) Encuentre los puntos de inflexión que haya en $[0, 3\pi]$.

(c) Evalúe $\displaystyle\int_0^{3\pi} \ln(1.5 + \operatorname{sen} x)\,dx$.

CAS **58.** Sea $f(x) = \cos(\ln x)$.

(a) Encuentre los puntos extremos absolutos en $[0.1, 20]$.

(b) Encuentre los puntos extremos absolutos en $[0.01, 20]$.

(c) Evalúe $\displaystyle\int_{0.1}^{20} \cos(\ln x)\,dx$.

CAS **59.** Dibuje las gráficas de $f(x) = x\ln(1/x)$ y $g(x) = x^2 \ln(1/x)$ en $(0, 1]$.

(a) Encuentre el área de la región entre estas curvas en $(0, 1]$.

(b) Encuentre el valor máximo absoluto de $|f(x) - g(x)|$ en $(0, 1]$.

CAS **60.** Siga las instrucciones del problema 59 para $f(x) = x\ln x$ y $g(x) = \sqrt{x}\ln x$.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $\displaystyle\int_1^x (1/t)\,dt$; $(0, \infty)$; $(-\infty, \infty)$ **2.** $1/x$ **3.** $1/x$; $\ln|x| + C$ **4.** $\ln x + \ln y$; $\ln x - \ln y$; $r\ln x$

6.2

Funciones inversas y sus derivadas

El objetivo de este capítulo es ampliar el número de funciones en nuestro repertorio. Una forma de construir nuevas funciones es tomar las antiguas e "invertirlas". Cuando hacemos esto para la función logaritmo natural, iremos a la función exponencial natural, el tema de la sección 6.3. En esta sección estudiamos el problema general de invertir una función. He aquí la idea.

Una función f toma un número x de su dominio D y le asigna un solo valor y de su rango R. Si tenemos suerte, como en el caso de las dos funciones graficadas en las figuras 1 y 2, podemos invertir a f; esto es, para cualquier y en R, podemos regresar sin ambigüedades y encontrar la x de la cual provino. Esta nueva función que toma a y y le asigna x se denota por f^{-1}. Observe que su dominio es R y su rango es D. Se denomina la **inversa** de f, o simplemente f inversa. Aquí hemos utilizado el superíndice –1 de una manera. El símbolo f^{-1} no denota a $1/f$, como podría haber esperado. Nosotros, y todos los matemáticos, la usamos para nombrar a la función inversa.

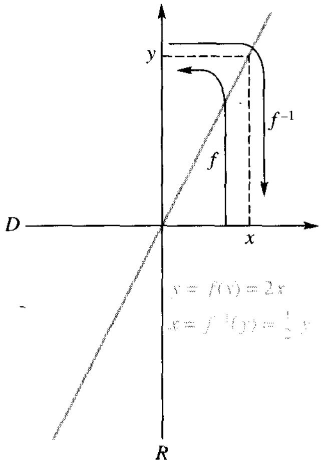


Figura 1

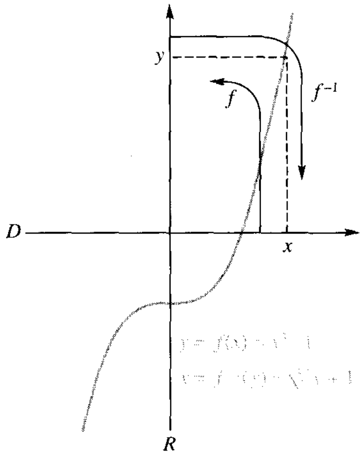
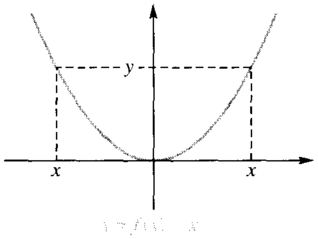


Figura 2

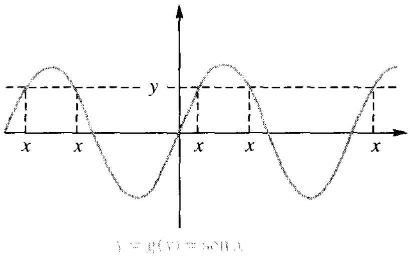
En ocasiones, podemos dar una fórmula para f^{-1}. Si $y = f(x) = 2x$, entonces $x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y$ (véase la figura 1). De manera análoga, si $y = f(x) = x^3 - 1$, entonces $x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y + 1}$ (véase la figura 2). En cada caso, sólo despejamos la ecuación que determina f para x en términos de y. El resultado es $x = f^{-1}(y)$.

Pero la vida es más complicada que estos dos ejemplos. No toda función puede invertirse de una manera carente de ambigüedades. Por ejemplo, considere $y = f(x) = x^2$. Para una y dada existen *dos* x que le corresponden (véase la figura 3). La función $y = g(x) = \operatorname{sen} x$ es aún peor. Para cada y existe una infinidad de x que le corresponden (véase la figura 4). Tales funciones no tienen inversas; no es así, a menos que restrinjamos de algún modo el conjunto de valores de x, un tema que abordaremos más adelante.



No tiene función inversa

Figura 3



No tiene función inversa

Figura 4

Existencia de funciones inversas

Sería bueno tener un criterio sencillo para decidir si una función f tiene inversa. Tal criterio es que la función sea **uno a uno**; es decir, $x_1 \neq x_2$ implica $f(x_1) \neq f(x_2)$. Esto equivale a la condición geométrica de que toda recta horizontal corte a la gráfica de $y = f(x)$ en a lo más un punto. Pero, en una situación dada, este criterio puede ser muy difícil de aplicar, ya que exige que tengamos un conocimiento completo de la gráfica. Un criterio más práctico que cubre la mayoría de los ejemplos que surgen en este texto es que una función sea **estrictamente monótona**. Por esto queremos decir que sea creciente o decreciente en su dominio. (Véanse las definiciones en la sección 3.2).

Teorema A

Si f es estrictamente monótona en su dominio, entonces f tiene una inversa.

Demostración Sean x_1 y x_2 números distintos en el dominio de f, con $x_1 < x_2$. Como f es estrictamente $f(x_1) < f(x_2)$ o bien $f(x_1) > f(x_2)$. De cualquier forma, $f(x_1) \neq f(x_2)$. Por lo tanto, $x_1 \neq x_2$ implica $f(x_1) \neq f(x_2)$, lo cual significa que f es uno a uno y por lo tanto tiene una inversa. ■

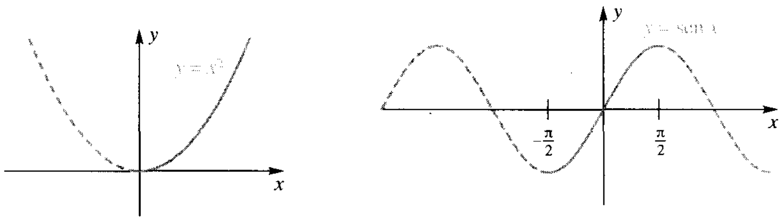
Éste es un resultado práctico, ya que tenemos una manera sencilla de decidir si una función diferenciable f es estrictamente monótona. Sólo examinamos el signo de f'.

EJEMPLO 1 Demuestre que $f(x) = x^5 + 2x + 1$ tiene una inversa.

SOLUCIÓN $f'(x) = 5x^4 + 2 > 0$ para toda x. Así, f es creciente en toda la recta real, de modo que tiene una inversa allí. ■

No afirmamos que siempre podamos dar una fórmula para f^{-1}. En el ejemplo que se acaba de considerar, esto requeriría que fuésemos capaces de despejar a x de $y = x^5 + 2x + 1$. Aunque podríamos utilizar un CAS (del inglés computer algebra sistem: sistema de álgebra computacional) o una calculadora gráfica para despejar a x en esta ecuación, para un valor particular de y, no existe una fórmula simple que nos dé x en términos de y para una y arbitraria.

Existe una manera de salvar la noción de inversa para funciones que no tienen inversas en sus dominios naturales. Simplemente *restringimos el dominio* a un conjunto en el que la gráfica sea creciente o decreciente. Así, para $y = f(x) = x^2$, podemos restringir el dominio a $x \geq 0$ ($x \leq 0$ también funcionaría). Para $y = g(x) = \operatorname{sen} x$, restringimos el dominio al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Entonces, ambas funciones tienen inversas (véase la figura 5) e incluso podemos dar una fórmula para la primera: $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.



Dominio restringido a $x \geq 0$

Dominio restringido a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

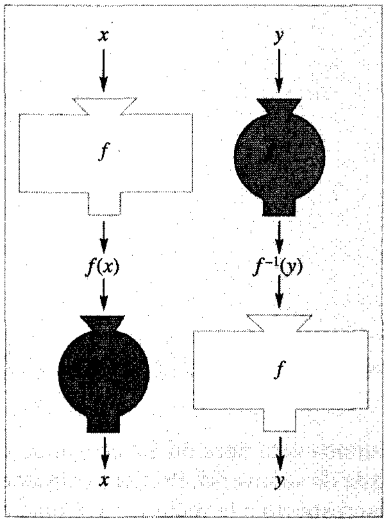
Figura 5

Si f tiene una inversa f^{-1}, entonces f^{-1} también tiene una inversa, a saber, f. Así, podemos llamar a f y f^{-1} un par de funciones inversas. Una función deshace (invierte) lo que la otra hizo; es decir,

$$\boxed{f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{y} \quad f(f^{-1}(y)) = y}$$

Máquinas para deshacer

Podemos visualizar una función como una máquina que acepta una entrada y produce una salida. Si la máquina f y la máquina f^{-1} se colocan en secuencia una junta a la otra, deshacen lo que hizo tanto la una como la otra.



EJEMPLO 2 Demuestre que $f(x) = 2x + 6$ tiene una inversa, encuentre una fórmula para $f^{-1}(y)$, y verifique los resultados del recuadro anterior.

SOLUCIÓN Como f es una función creciente, tiene una inversa. Para encontrar $f^{-1}(y)$, resolvemos $y = 2x + 6$ para x, lo cual da $x = (y - 6)/2 = f^{-1}(y)$. Por último, observe que

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x + 6) = \frac{(2x + 6) - 6}{2} = x$$

y

$$f(f^{-1}(y)) = f\left(\frac{y - 6}{2}\right) = 2\left(\frac{y - 6}{2}\right) + 6 = y$$

■

La gráfica de $y = f^{-1}(x)$ Supóngase que f tiene una inversa. Entonces

$$\boxed{x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)}$$

En consecuencia, $y = f(x)$ y $x = f^{-1}(y)$ determinan el mismo par (x, y) y por lo tanto tienen gráficas idénticas. Sin embargo, es convencional utilizar a x como la variable del dominio para funciones, de modo que ahora preguntaremos por la gráfica de $y = f^{-1}(x)$ (observe que hemos intercambiando los papeles de x y y). Un poco de reflexión nos convence de que intercambiar los papeles de x y y en una gráfica es reflejar la gráfica con respecto a la recta $y = x$. *Por esto, la gráfica de* $y = f^{-1}(x)$ *es sólo la reflexión de la gráfica de* $y = f(x)$ *respecto a la recta* $y = x$ (véase la figura 6).

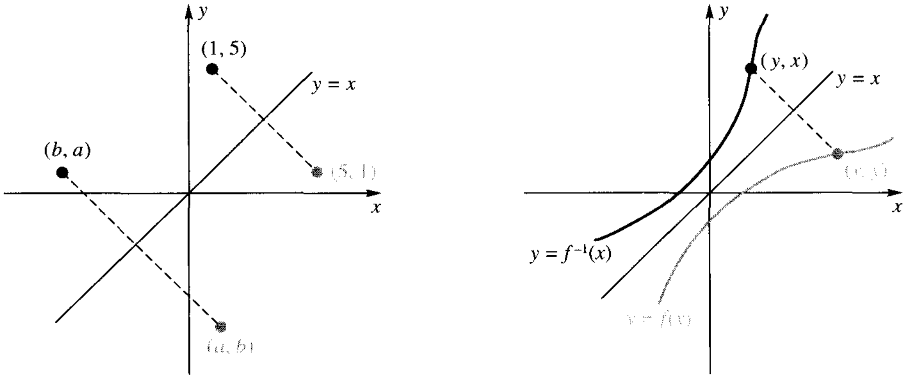


Figura 6

Un tema relacionado es el de encontrar una fórmula para $f^{-1}(x)$. Para hacerlo, primero encontramos $f^{-1}(y)$ y luego reemplazamos y por x en la fórmula resultante. Así, proponemos el siguiente proceso de tres pasos para determinar $f^{-1}(x)$.

Paso 1: Despeje a x en términos de y, de la ecuación $y = f(x)$.

Paso 2: Utilice $f^{-1}(y)$ para denominar a la expresión resultante en y.

Paso 3: Sustituya y por x a fin de obtener la fórmula para $f^{-1}(x)$.

Antes de intentar el proceso de tres pasos en una función particular f, usted podría pensar en que debemos verificar primero que f tenga una inversa. No obstante, si en realidad llevamos a cabo el primer paso y obtenemos una sola x para cada y, entonces f^{-1} existe. (Observe que cuando intentamos esto para $y = f(x) = x^2$ obtuvimos $x = \pm\sqrt{y}$, que de manera inmediata muestra que f^{-1} no existe, a no ser que, por supuesto, hayamos restringido el dominio para eliminar uno de los dos signos + o –).

EJEMPLO 3 Encuentre una fórmula para $f^{-1}(x)$, si $y = f(x) = x/(1 - x)$.

SOLUCIÓN Aquí están los tres pasos para este ejemplo.

Paso 1:

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{1-x} \\ (1-x)y &= x \\ y - xy &= x \\ x + xy &= y \\ x(1+y) &= y \\ x &= \frac{y}{1+y} \end{aligned}$$

Paso 2: $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{1+y}$

Paso 3: $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1+x}$ ■

Derivadas de funciones inversas Concluimos esta sección investigando el vínculo entre la derivada de una función y la derivada de su inversa. Primero considere lo que le sucede a una recta l_1 cuando se refleja con respecto a la recta $y = x$. Como es claro en la mitad izquierda de la figura 7, l_1 se refleja para dar la recta l_2; además, sus pendientes respectivas, m_1 y m_2, están relacionadas por $m_2 = 1/m_1$, siempre que $m_1 \neq 0$. Si sucede que l_1 tiene una recta tangente a la gráfica de f en el punto (c, d), entonces l_2 es la recta tangente a la gráfica de f^{-1} en el punto (d, c) (véase la mitad de la derecha de la figura 7). Llegamos a la conclusión de que

$$(f^{-1})'(d) = m_2 = \frac{1}{m_1} = \frac{1}{f'(c)}$$

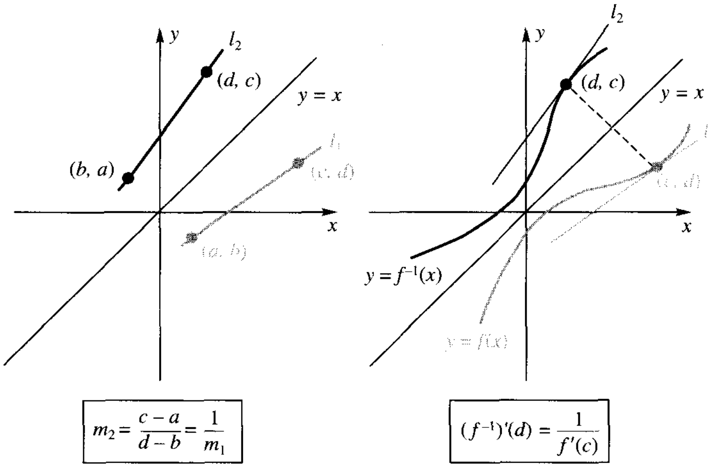


Figura 7

Algunas veces los dibujos son engañosos, de modo que sólo podemos afirmar haber hecho plausible el siguiente resultado. Para una demostración formal, véase cualquier texto de cálculo avanzado.

Teorema B **Teorema de la función inversa**

Sea f derivable y estrictamente monótona en un intervalo I. Si $f'(x) \neq 0$ en cierto x en I, entonces f^{-1} es derivable en el punto correspondiente $y = f(x)$ en el rango de f y

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Con frecuencia, la conclusión del teorema B se escribe de manera simbólica como

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$$

EJEMPLO 4 Sea $y = f(x) = x^5 + 2x + 1$, como en el ejemplo 1. Encuentre $(f^{-1})'(4)$.

SOLUCIÓN Aunque en este caso no podemos encontrar una fórmula para f^{-1}, notamos que $y = 4$ corresponde a $x = 1$, y como $f'(x) = 5x^4 + 2$,

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5+2} = \frac{1}{7} \quad \blacksquare$$

Revisión de conceptos

1. Una función es uno a uno si $x_1 \neq x_2$ implica ________.

2. Una función f, uno a uno, tiene una inversa f^{-1} que satisface $f^{-1}(f(x)) =$ ________ y $f($________$) = y$.

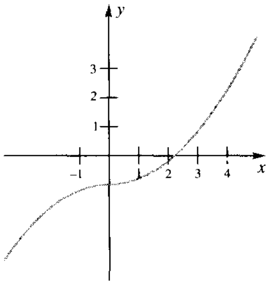
3. Un criterio útil para que f sea uno a uno (y así tenga una inversa) en un dominio, es que f sea estrictamente ________ allí. Esto significa que f es ________ o bien ________.

4. Sea $y = f(x)$, en donde f tiene la inversa f^{-1}. La relación que conecta a las derivadas de f y f^{-1} es ________.

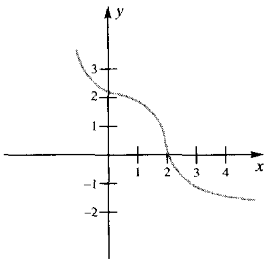
Conjunto de problemas 6.2

En los problemas del 1 al 6 se muestra la gráfica de $y = f(x)$. En cada caso, decida si f tiene una inversa y si es así, estime $f^{-1}(2)$.

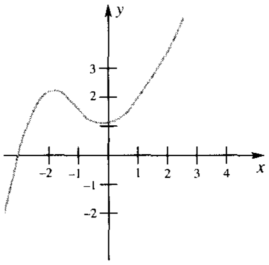
1.



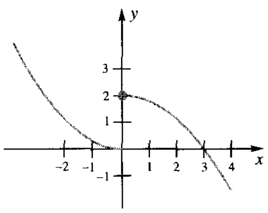
2.



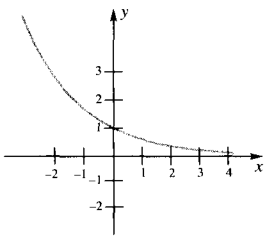
3.



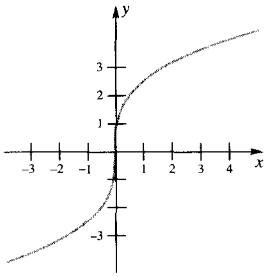
4.



5.



6.



En los problemas del 7 al 14 demuestre que f tiene una inversa revelando que es estrictamente monótona (véase el ejemplo 1).

7. $f(x) = -x^5 - x^3$

8. $f(x) = x^7 + x^5$

9. $f(\theta) = \cos\theta, 0 \le \theta \le \pi$

10. $f(x) = \cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

11. $f(z) = (z - 1)^2, z \ge 1$

12. $f(x) = x^2 + x - 6, x \ge 2$

13. $f(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{t^4 + t^2 + 10}\,dt$

14. $f(r) = \displaystyle\int_r^1 \cos^4 t\,dt$

En los problemas del 15 al 28 encuentre una fórmula para $f^{-1}(x)$ y después verifique que $f^{-1}(f(x)) = x$ y $f(f^{-1}(x)) = x$ (véanse los ejemplos 2 y 3).

15. $f(x) = x + 1$

16. $f(x) = -\dfrac{x}{3} + 1$

17. $f(x) = \sqrt{x + 1}$

18. $f(x) = -\sqrt{1 - x}$

19. $f(x) = -\dfrac{1}{x - 3}$

20. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x - 2}}$

21. $f(x) = 4x^2, x \le 0$

22. $f(x) = (x - 3)^2, x \ge 3$

23. $f(x) = (x - 1)^3$

24. $f(x) = x^{5/2}, x \ge 0$

25. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

26. $f(x) = \left(\dfrac{x - 1}{x + 1}\right)^3$

27. $f(x) = \dfrac{x^3 + 2}{x^3 + 1}$

28. $f(x) = \left(\dfrac{x^3 + 2}{x^3 + 1}\right)^5$

29. Encuentre el volumen, V, de agua en el depósito cónico de la figura 8 como una función de la altura h. Después encuentre la altura h como una función del volumen V.

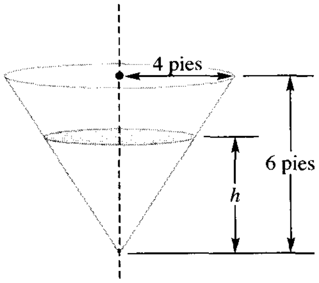


Figura 8

30. Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba con velocidad v_0. Encuentre la altura máxima H de la pelota como una función de v_0. Luego encuentre la velocidad v_0 que se requiere para alcanzar una altura H.

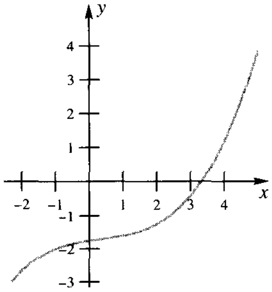
En los problemas 31 y 32 restrinja el dominio de f de modo que f tenga una inversa, pero mantenga su rango tan grande como sea posible. Después encuentre $f^{-1}(x)$. Sugerencia: primero haga una gráfica de f.

31. $f(x) = 2x^2 + x - 4$

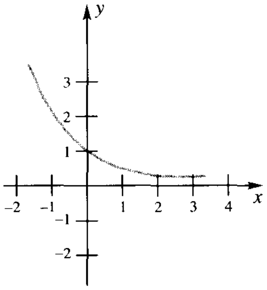
32. $f(x) = x^2 - 3x + 1$

En cada uno de los problemas del 33 al 36 se muestra la gráfica de $y = f(x)$. Haga un bosquejo de la gráfica de $y = f^{-1}(x)$ y estime $(f^{-1})'(3)$.

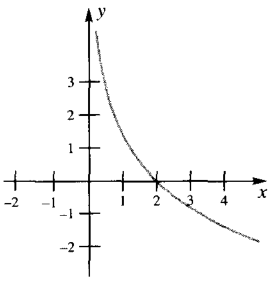
33.



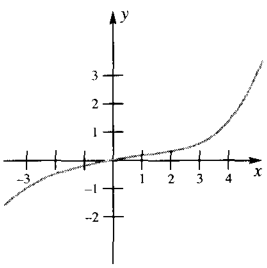
34.



35.



36.



En los problemas del 37 al 40 encuentre $(f^{-1})'(2)$ mediante el teorema B (véase el ejemplo 4). Observe que por inspección usted puede determinar la x correspondiente a $y = 2$.

37. $f(x) = 3x^5 + x - 2$

38. $f(x) = x^5 + 5x - 4$

39. $f(x) = 2\tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

40. $f(x) = \sqrt{x+1}$

41. Suponga que f y g tienen inversas y que $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$. Demuestre que h tiene una inversa dada por $h^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

42. Verifique el resultado del problema 41 para $f(x) = 1/x$, $g(x) = 3x + 2$.

43. Si $f(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \cos^2 t}\, dt$, entonces f tiene una inversa. (¿Por qué?). Sea $A = f(\pi/2)$ y $B = f(5\pi/6)$. Encuentre

(a) $(f^{-1})'(A)$, (b) $(f^{-1})'(B)$,

(c) $(f^{-1})'(0)$.

44. Sea $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ y suponga que $bc - ad \neq 0$.

(a) Encuentre la fórmula para $f^{-1}(x)$.

(b) ¿Por qué es necesaria la condición $bc - ad \neq 0$?

(c) ¿Qué condición sobre a, b, c y d harán que $f = f^{-1}$?

45. Suponga que f es continua y estrictamente creciente en $[0, 1]$ con $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. Si $\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{2}{5}$, calcule $\int_0^1 f^{-1}(y)\, dy$. *Sugerencia:* haga un dibujo.

EXPL **46.** Sea f continua y estrictamente creciente en $[0, \infty)$ con $f(0) = 0$ y $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$. Utilice un razonamiento geométrico para establecer la **desigualdad de Young**. Para $a > 0, b > 0$,

$$ab \leq \int_0^a f(x)\, dx + \int_0^b f^{-1}(y)\, dy$$

¿Cuál es la condición para que se cumpla como igualdad?

EXPL **47.** Sean $p > 1, q > 1$ y $1/p + 1/q = 1$. Demuestre que la inversa de $f(x) = x^{p-1}$ es $f^{-1}(y) = y^{q-1}$ y utilice esto junto con el problema 46 para demostrar la **desigualdad de Minkowski**:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \qquad a > 0, b > 0$$

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $f(x_1) \neq f(x_2)$ **2.** $x; f^{-1}(y)$ **3.** monótona; creciente; decreciente **4.** $(f^{-1})'(y) = 1/f'(x)$

6.3
La función exponencial natural

La gráfica de $y = f(x) = \ln x$ se obtuvo al final de la sección 6.1 y se reproduce en la figura 1. La función logaritmo natural es derivable (y por lo tanto continua) y creciente en su dominio $D = (0, \infty)$; su rango es $R = (-\infty, \infty)$. De hecho, es precisamente la clase de función estudiada en la sección 6.2 y, por lo tanto, tiene una inversa $\ln^{-1}$ con dominio $(-\infty, \infty)$ y rango $(0, \infty)$. Esta función es tan importante que se le da nombre y símbolo especiales.

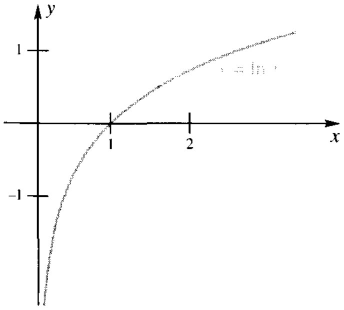


Figura 1

Definición

La inversa de ln se denomina **función exponencial natural** y se denota por exp. Así,

$$x = \exp y \iff y = \ln x$$

De inmediato, de esta definición se deduce que:

1. $\exp(\ln x) = x, \quad x > 0$
2. $\ln(\exp y) = y, \quad$ para toda y

Como exp y ln son funciones inversas, la gráfica de $y = \exp x$ es sólo la gráfica de $y = \ln x$ reflejada respecto a la recta $y = x$ (véase la figura 2).

Pero, ¿a qué se debe el nombre de *función exponencial*? Ya lo verá.

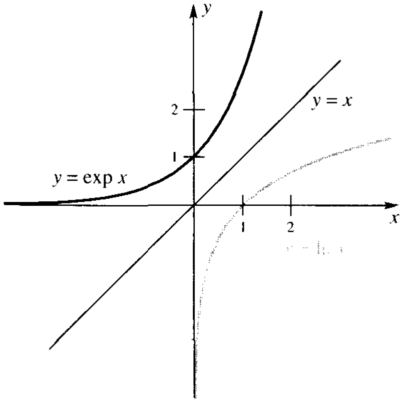


Figura 2

Propiedades de la función exponencial Empezamos por introducir una nuevo número, el cual, al igual que π, es tan importante en matemáticas que tiene un símbolo especial, e. La letra e es adecuada porque Leonardo Euler fue el primero en reconocer la importancia de este número.

Definición

La letra e denota al único número real positivo tal que $\ln e = 1$.

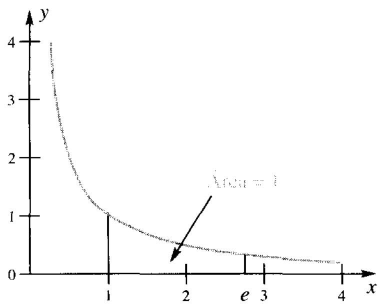


Figura 3

Definiciones de e

Los autores eligen diferentes formas para definir e.

1. $e = \ln^{-1} 1$ (nuestra definición)
2. $e = \lim_{h \to 0} (1 + h)^{1/h}$
3. $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$

En nuestro texto, las definiciones 2 y 3 se vuelven teoremas. (Véase la sección 6.5, teorema A y la sección 9.7, ejemplo 3).

La figura 3 ilustra esta definición; el área bajo la gráfica de $y = 1/x$ entre $x = 1$ y $x = e$ es 1. Ya que $\ln e = 1$ también es cierto que $\exp 1 = e$. El número e, al igual que π, es irracional. Se conocen miles de cifras decimales en su desarrollo decimal; los primeros dígitos son

$$e \approx 2.718281828459045$$

Ahora hacemos una observación crucial, una que depende sólo de hechos ya demostrados: la parte (1) anterior y el teorema 6.1A. Si r es cualquier número racional,

$$e^r = \exp(\ln e^r) = \exp(r \ln e) = \exp r$$

Hagamos énfasis en el resultado. Para r racional, $\exp r$ *es idéntico a* e^r. Lo que se introdujo de una manera más abstracta como la inversa del logaritmo natural, que a su vez se definió como una integral, resultó ser una simple potencia.

¿Pero qué sucede si r es irracional? Aquí le recordamos un hueco en todos los textos de álgebra elemental. Nunca se definen potencias irracionales mediante algún enfoque riguroso. ¿Qué significa $e^{\sqrt{2}}$? Usted tendrá momentos difíciles para precisar ese número con base en álgebra elemental. Pero se debe precisar si vamos a hablar de cosas como $D_x e^x$. Guiados por lo que aprendimos anteriormente, simplemente definimos e^x para toda x (racional e irracional) como

$$e^x = \exp x$$

Obsérvese que (1) y (2) al inicio de esta sección ahora toman la siguiente forma:

$$\boxed{\begin{array}{lll} (1)' & e^{\ln x} = x, & x > 0 \\ (2)' & \ln(e^y) = y, & \text{para toda } y \end{array}}$$

Asimismo, observe que (1)′ dice que $\ln x$ es el *exponente* que necesita ponerle a e para obtener x. Ésta es sólo la definición usual del logaritmo en la base e, como se da en la mayoría de los libros de precálculo.

Ahora, con facilidad podemos demostrar dos leyes conocidas de los exponentes.

Teorema A

Sean a y b cualesquiera números reales. Entonces $e^a e^b = e^{a+b}$ y $e^a/e^b = e^{a-b}$.

Demostración Para demostrar la primera, escribimos

$$\begin{aligned} e^a e^b &= \exp(\ln e^a e^b) && \text{(por (1))} \\ &= \exp(\ln e^a + \ln e^b) && \text{(Teorema 6.1A)} \\ &= \exp(a + b) && \text{(por (2)')} \\ &= e^{a+b} && \text{(ya que } \exp x = e^x\text{)} \end{aligned}$$

El segundo hecho se demuestra de manera análoga. ■

Un ave fénix

El número e aparece a lo largo de las matemáticas, pero su importancia radica seguramente más en su uso como la base para la función exponencial natural. Pero, ¿qué hace a esta función tan importante?

"¿Quién no se ha sorprendido al aprender que la función $y = e^x$, como un ave fénix que renace de sus cenizas, es su propia derivada?".

François Le Lionnais

La derivada de e^x Como exp y ln son inversas, del teorema 6.2B sabemos que $\exp x = e^x$ es derivable. A fin de encontrar una fórmula para $D_x e^x$, podríamos utilizar ese teorema. De manera alternativa, sea $y = e^x$ de modo que

$$x = \ln y$$

Ahora derivamos ambos lados con respecto a x. Al usar la regla de la cadena obtenemos

$$1 = \frac{1}{y} D_x y$$

Con lo que

$$D_x y = y = e^x$$

Hemos demostrado el hecho notable de que e^x es su propia derivada; es decir,

$$\boxed{D_x e^x = e^x}$$

Así, $y = e^x$ es una solución de la ecuación diferencial $y' = y$.

Si $u = f(x)$ es derivable, entonces la regla de la cadena da

$$D_x e^u = e^u D_x u$$

EJEMPLO 1 Encuentre $D_x e^{\sqrt{x}}$.

SOLUCIÓN Por medio de $u = \sqrt{x}$, obtenemos

$$D_x e^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}} D_x\sqrt{x} = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Encuentre $D_x e^{x^2 \ln x}$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} D_x e^{x^2 \ln x} &= e^{x^2 \ln x} D_x(x^2 \ln x) \\ &= e^{x^2 \ln x}\left(x^2 \cdot \frac{1}{x} + 2x \ln x\right) \\ &= x e^{x^2 \ln x}(1 + \ln x^2) \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Sea $f(x) = xe^{x/2}$. Determine en dónde f es creciente y en dónde es decreciente; también, en dónde es cóncava hacia arriba y en dónde es cóncava hacia abajo. Además, identifique todos los valores extremos y los puntos de inflexión. Después haga un bosquejo de la gráfica de f.

SOLUCIÓN

$$f'(x) = \frac{xe^{x/2}}{2} + e^{x/2} = e^{x/2}\left(\frac{x+2}{2}\right)$$

y

$$f''(x) = \frac{e^{x/2}}{2} + \left(\frac{x+2}{2}\right)\frac{e^{x/2}}{2} = e^{x/2}\left(\frac{x+4}{4}\right)$$

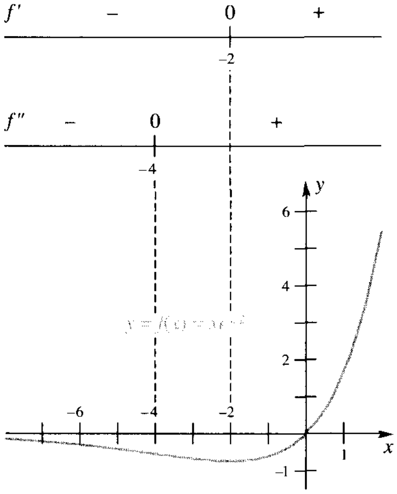


Figura 4

Teniendo en mente que $e^{x/2} > 0$ para toda x, vemos que $f'(x) < 0$ para $x < -2, f'(-2) = 0$ y $f'(x) > 0$ para toda $x > -2$. Por lo que f es decreciente en $(-\infty, -2]$ y creciente en $[-2, \infty)$, y tiene su valor mínimo en $x = -2$, de $f(-2) = -2/e \approx -0.7$.

También, $f''(x) < 0$ para $x < -4, f''(-4) = 0$ y $f''(x) > 0$ para $x > -4$; de modo que la gráfica de f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -4)$ y cóncava hacia arriba en $(-4, \infty)$, y tiene un punto de inflexión en $(-4, -4e^{-2}) \approx (-4, -0.54)$. Como $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x/2} = 0$, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal. Esta información justifica la gráfica de la figura 4. ■

La fórmula de la derivada $D_x e^x = e^x$ de forma automática produce la fórmula de la integral $\int e^x\,dx = e^x + C$, o, con u en lugar de x.

$$\boxed{\int e^u\,du = e^u + C}$$

EJEMPLO 4 Evalúe $\int e^{-4x}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = -4x$, de modo que $du = -4\,dx$. Entonces

$$\int e^{-4x}\,dx = -\frac{1}{4}\int e^{-4x}(-4\,dx) = -\frac{1}{4}\int e^{u}\,du = -\frac{1}{4}e^{u} + C = -\frac{1}{4}e^{-4x} + C$$ ■

EJEMPLO 5 Evalúe $\int x^2 e^{-x^3}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = -x^3$, de modo que $du = -3x^2\,dx$. Entonces

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-x^3}\,dx &= -\frac{1}{3}\int e^{-x^3}(-3x^2\,dx)\\ &= -\frac{1}{3}\int e^{u}\,du = -\frac{1}{3}e^{u} + C\\ &= -\frac{1}{3}e^{-x^3} + C\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 6 Evalúe $\int_1^3 xe^{-3x^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = -3x^2$, por lo que $du = -6x\,dx$. Entonces

$$\begin{aligned}\int xe^{-3x^2}\,dx &= -\frac{1}{6}\int e^{-3x^2}(-6x\,dx) = -\frac{1}{6}\int e^{u}\,du\\ &= -\frac{1}{6}e^{u} + C = -\frac{1}{6}e^{-3x^2} + C\end{aligned}$$

Así, por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\int_1^3 xe^{-3x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{6}e^{-3x^2}\right]_1^3 = -\frac{1}{6}(e^{-27} - e^{-3}) = \frac{e^{-3} - e^{-27}}{6} \approx 0.0082978$$

El último resultado puede obtenerse de manera directa con una calculadora. ■

EJEMPLO 7 Evalúe $\int \frac{6e^{1/x}}{x^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Considere $\int e^u\,du$. Sea $u = 1/x$, por lo que $du = (-1/x^2)dx$. Entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{6e^{1/x}}{x^2}\,dx &= -6\int e^{1/x}\left(\frac{-1}{x^2}\,dx\right) = -6\int e^{u}\,du\\ &= -6e^{u} + C = -6e^{1/x} + C\end{aligned}$$ ■

Aunque el símbolo e^y sustituirá en el resto del libro a exp y, éste aparece con frecuencia en la escritura científica, en especial cuando el exponente y es complicado. Por ejemplo, en estadística, muchas veces uno encuentra la función de densidad normal, que es

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Revisión de conceptos

1. La función ln es ________ en $(0, \infty)$ y así tiene una inversa denotada por $\ln^{-1}$ o por ________.

2. El número e se define en términos de ln por ________; su valor con dos decimales es ________.

3. Como $e^x = \exp x = \ln^{-1} x$, se sigue que $e^{\ln x} =$ ________ para $x > 0$ y $\ln(e^x) =$ ________.

4. Dos hecho notables acerca de e^x son que $D_x(e^x) =$ ________ y $\int e^x\,dx =$ ____.

Conjunto de problemas 6.3

$\boxed{\text{C}}$ **1.** Utilice su calculadora para computar cada una de las siguientes expresiones.
Nota: en algunas calculadoras existe un botón $\boxed{e^x}$. En otras usted debe presionar los botones $\boxed{\text{INV}}$ (o $\boxed{\text{2nd}}$) y $\boxed{\ln x}$.

(a) e^3
(b) $e^{2.1}$
(c) $e^{\sqrt{2}}$
(d) $e^{\cos(\ln 4)}$

$\boxed{\text{C}}$ **2.** Calcule lo siguiente y explique por qué sus respuestas no son sorprendentes.

(a) $e^{3\ln 2}$
(b) $e^{(\ln 64)/2}$

En los problemas del 3 al 10 simplifique la expresión dada.

3. $e^{3\ln x}$
4. $e^{-2\ln x}$
5. $\ln e^{\cos x}$
6. $\ln e^{-2x-3}$
7. $\ln(x^3e^{-3x})$
8. $e^{x-\ln x}$
9. $e^{\ln 3+2\ln x}$
10. $e^{\ln x^2-y\ln x}$

En los problemas del 11 al 22 encuentre D_xy (véanse los ejemplos 1 y 2).

11. $y = e^{x+2}$
12. $y = e^{2x^2-x}$
13. $y = e^{\sqrt{x+2}}$
14. $y = e^{-1/x^2}$
15. $y = e^{2\ln x}$
16. $y = e^{x/\ln x}$
17. $y = x^3e^x$
18. $y = e^{x^3\ln x}$
19. $y = \sqrt{e^{x^2}} + e^{\sqrt{x^2}}$
20. $y = e^{1/x^2} + 1/e^{x^2}$
21. $e^{xy} + xy = 2$ *Sugerencia:* utilice derivación implícita.
22. $e^{x+y} = 4 + x + y$

23. Utilice su conocimiento de la gráfica de $y = e^x$ para hacer un dibujo de las gráficas de (a) $y = -e^x$ y (b) $y = e^{-x}$.

24. Explique por qué $a < b \Rightarrow e^{-a} > e^{-b}$.

En los problemas del 25 al 36 determine, primero, el dominio de la función que se da y luego determine en dónde es creciente, decreciente, y también en dónde es cóncava hacia arriba y en dónde es cóncava hacia abajo. Identifique todos los valores extremos y los puntos de inflexión. Después haga un bosquejo de la gráfica $y = f(x)$.

25. $f(x) = e^{2x}$
26. $f(x) = e^{-x/2}$
27. $f(x) = xe^{-x}$
28. $f(x) = e^x + x$
29. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$
30. $f(x) = \ln(2x - 1)$
31. $f(x) = \ln(1 + e^x)$
32. $f(x) = e^{1-x^2}$
33. $f(x) = e^{-(x-2)^2}$
34. $f(x) = e^x - e^{-x}$
35. $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$
36. $f(x) = \int_0^x te^{-t}\,dt$

En los problemas del 37 al 44 encuentre cada integral.

37. $\int e^{3x+1}\,dx$
38. $\int xe^{x^2-3}\,dx$
39. $\int (x + 3)e^{x^2+6x}\,dx$
40. $\int \frac{e^x}{e^x - 1}\,dx$
41. $\int \frac{e^{-1/x}}{x^2}\,dx$
42. $\int e^{x+e^x}\,dx$
43. $\int_0^1 e^{2x+3}\,dx$
44. $\int_1^2 \frac{e^{3/x}}{x^2}\,dx$

45. Encuentre el volumen del sólido que se genera al hacer girar, alrededor del eje x, la región acotada por $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = \ln 3$.

46. La región acotada por $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, se hace girar con respecto al eje y. Encuentre el volumen del sólido resultante.

47. Encuentre el área de la región acotada por la curva $y = e^{-x}$ y la recta que pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(1, 1/e)$.

48. Demuestre que $f(x) = \frac{x}{e^x - 1} - \ln(1 - e^{-x})$ es decreciente para $x > 0$.

$\boxed{\text{C}}$ **49.** La **fórmula de Stirling** dice que para n grande podemos aproximar $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ por

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

(a) Calcule 10! de manera exacta, luego de forma aproximada mediante la fórmula anterior.
(b) Aproxime 60!.

$\boxed{\text{C}}$ **50.** Más adelante demostraremos (sección 9.9) que para x pequeña

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

Utilice este resultado para aproximar $e^{0.3}$ y compare su resultado con lo que obtiene calculándolo directamente. (Las computadoras y calculadoras utilizan sumas como ésta para aproximar e^x).

51. Encuentre la longitud de la curva dada paramétricamente por $x = e^t \operatorname{sen} t$, $y = e^t \cos t$, $0 \le t \le \pi$.

$\boxed{\text{C}}$ **52.** Si en un contador de registro los clientes llegan a una tasa promedio de k por minuto, entonces (véanse libros sobre teoría de probabilidad) la probabilidad de que exactamente n clientes lleguen en un periodo de x minutos está dado por la fórmula

$$P_n(x) = \frac{(kx)^n e^{-kx}}{n!}, n = 0, 1, 2, \ldots$$

Encuentre la probabilidad de que lleguen exactamente 8 clientes durante un periodo de 30 minutos, si la tasa promedio para este contador de registro es de 1 cliente cada 4 minutos.

53. Sea $f(x) = \frac{\ln x}{1 + (\ln x)^2}$ para x en $(0, \infty)$. Encuentre:

(a) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x)$;
(b) los valores máximo y mínimo de $f(x)$.
(c) $F'(\sqrt{e})$ si $F(x) = \int_1^{x^2} f(t)\,dt$.

54. Sea R la región acotada por $x = 0$, $y = e^x$ y la recta tangente a $y = e^x$ que pasa por el origen. Encuentre:

(a) el área de R;
(b) el volumen del sólido que se obtiene cuando R se hace girar alrededor del eje x.

$\boxed{\text{GC}}$ *Utilice una calculadora gráfica o un CAS para resolver los problemas del 55 al 60.*

55. Evalúe.

(a) $\int_{-3}^{3} \exp(-1/x^2)\,dx$
(b) $\int_0^{8\pi} e^{-0.1x} \operatorname{sen} x\,dx$

56. Evalúe.

(a) $\lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x}$
(b) $\lim_{x\to 0}(1 + x)^{-1/x}$

57. Determine el área de la región entre las gráficas de $y = f(x) = \exp(-x^2)$ y $y = f''(x)$ en $[-3, 3]$.

EXPL **58.** Dibuje las gráficas de $y = x^p e^{-x}$ para diferentes valores de p utilizando los mismos ejes. Haga conjeturas acerca de:

(a) $\lim_{x \to \infty} x^p e^{-x}$.

(b) la abscisa x del punto máximo para $f(x) = x^p e^{-x}$.

59. Describa el comportamiento de $\ln(x^2 + e^{-x})$ para x grandes negativas. Para x grandes positivas.

60. Dibuje las gráficas de f y f', donde $f(x) = 1/(1 + e^{1/x})$. Después determine cada uno de lo siguiente:

(a) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$

(c) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ (d) $\lim_{x \to 0} f'(x)$

(e) Los valores máximo y mínimo de f (si existen).

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** creciente; exp **2.** $\ln e = 1$; 2.72 **3.** x; x **4.** e^x; $e^x + C$

6.4
Funciones exponencial y logarítmica generales

En la sección anterior definimos $e^{\sqrt{2}}$, e^{π}, y todas las demás potencias irracionales de e. Pero, ¿qué hay acerca de $2^{\sqrt{2}}$, π^{π}, π^{e}, y potencias irracionales semejantes de otros números? De hecho, queremos darle significado a a^x para $a > 0$ y x cualquier número real. Ahora, si $r = p/q$ es un número racional, entonces $a^r = (\sqrt[q]{a})^p$. Pero también sabemos que

$$a^r = \exp(\ln a^r) = \exp(r \ln a) = e^{r \ln a}$$

Esto sugiere la definición de la **función exponencial para la base a.**

Definición

Para $a > 0$ y cualquier número real x,

$$a^x = e^{x \ln a}$$

Por supuesto, esta definición será apropiada sólo si las propiedades usuales de los exponentes son válidas para ella, un tema que en breve abordaremos. Para apuntalar nuestra confianza en la definición, la utilizamos para calcular 3^2 (con un poco de ayuda de nuestra calculadora):

$$3^2 = e^{2 \ln 3} \approx e^{2(1.0986123)} \approx 9.000000$$

Su calculadora puede dar un resultado que difiere un poco de 9. Las calculadoras utilizan aproximaciones para e^x y $\ln x$, y redondean a un número fijo de decimales (por lo común, alrededor de 8).

Ahora podemos llenar un pequeño hueco en las propiedades del logaritmo natural que se dejó desde la sección 6.1.

$$\boxed{\ln(a^x) = \ln(e^{x \ln a}) = x \ln a}$$

Así, la propiedad (iv) del teorema 6.1A se cumple para todo real x, no sólo para x racional, como se afirmó allí. Necesitaremos este hecho en la siguiente demostración del teorema A.

Propiedades de a^x El teorema A resume las propiedades conocidas de los exponentes, todas las cuales pueden demostrarse ahora de una manera completamente rigurosa. El teorema B nos muestra cómo derivar e integrar a^x.

Teorema A Propiedades de los exponentes

Si $a > 0$, $b > 0$ y x y y son números reales, entonces

(i) $a^x a^y = a^{x+y}$; (ii) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;

(iii) $(a^x)^y = a^{xy}$; (iv) $(ab)^x = a^x b^x$;

(v) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

¿Qué significa 2^{π}?

En álgebra, 2^n se define primero para enteros positivos n. Así, $2^1 = 2$ y $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. Después, definimos 2^n para cero,

$$2^0 = 1$$

y para enteros negativos:

$$2^{-n} = 1/2^n \quad \text{si} \quad n > 0$$

Esto significa que $2^{-3} = 1/2^3 = 1/8$. Por último, usamos las funciones raíces para definir 2^r para números racionales r. Así,

$$2^{7/3} = \sqrt[3]{2^7}$$

Se requiere del cálculo para ampliar la definición de 2^x al conjunto de los números reales. Una manera de definir 2^{π} sería decir que es el límite de la sucesión

$$2^3, 2^{3.1}, 2^{3.14}, 2^{3.141}, \ldots$$

La definición que usamos es

$$2^{\pi} = e^{\pi \ln 2}$$

Esta definición implica al cálculo, ya que nuestra definición de logaritmo natural incluye la integral definida.

Demostración Demostraremos (ii) y (iii), dejándole las demás a usted.

(ii) $\frac{a^x}{a^y} = e^{\ln(a^x/a^y)} = e^{\ln a^x - \ln a^y}$

$= e^{x \ln a - y \ln a} = e^{(x-y)\ln a} = a^{x-y}$

(iii) $(a^x)^y = e^{y \ln a^x} = e^{yx \ln a} = a^{yx} = a^{xy}$ ■

Teorema B **Reglas de la función exponencial**

$$D_x a^x = a^x \ln a$$

$$\int a^x\, dx = \left(\frac{1}{\ln a}\right) a^x + C, \qquad a \neq 1$$

Demostración

$$D_x a^x = D_x(e^{x \ln a}) = e^{x \ln a} D_x(x \ln a)$$

$$= a^x \ln a$$

La fórmula para la integral se deduce de inmediato a partir de la fórmula para la derivada. ■

EJEMPLO 1 Encuentre $D_x\left(3^{\sqrt{x}}\right)$.

SOLUCIÓN Utilizamos la regla de la cadena con $u = \sqrt{x}$.

$$D_x\left(3^{\sqrt{x}}\right) = 3^{\sqrt{x}} \ln 3 \cdot D_x\sqrt{x} = \frac{3^{\sqrt{x}} \ln 3}{2\sqrt{x}}$$ ■

EJEMPLO 2 Encuentre dy/dx si $y = (x^4 + 2)^5 + 5^{x^4+2}$.

SOLUCIÓN

$$\frac{dy}{dx} = 5(x^4 + 2)^4 \cdot 4x^3 + 5^{x^4+2} \ln 5 \cdot 4x^3$$

$$= 4x^3[5(x^4 + 2)^4 + 5^{x^4+2} \ln 5]$$

$$= 20x^3[(x^4 + 2)^4 + 5^{x^4+1} \ln 5]$$ ■

EJEMPLO 3 Encuentre $\int 2^{x^3} x^2\, dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = x^3$, por lo que $du = 3x^2\, dx$. Entonces

$$\int 2^{x^3} x^2\, dx = \frac{1}{3}\int 2^{x^3}(3x^2\, dx) = \frac{1}{3}\int 2^u\, du$$

$$= \frac{1}{3}\frac{2^u}{\ln 2} + C = \frac{2^{x^3}}{3 \ln 2} + C$$ ■

La función $\log_a$ Por último, estamos preparados para hacer una conexión con los logaritmos que usted estudió en álgebra. Observemos que si $0 < a < 1$, entonces $f(x) = a^x$ es una función decreciente; si $a > 1$, entonces es una función creciente, como puede verificarlo considerando la derivada. En cualquier caso, f tiene una inversa. A esta inversa le llamamos la **función logaritmo de base a**. Esto es equivalente a la siguiente definición.

Definición

Sea a un número positivo distinto de 1. Entonces

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

¿Por qué otras bases?

En realidad, ¿son necesarias otras bases distintas de e? No. Las fórmulas

$$a^x = e^{x \ln a}$$

y

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

nos permite convertir cualquier problema que implica funciones exponenciales o funciones logarítmicas con base a a funciones correspondientes con base e. Esto sustenta nuestra terminología: funciones exponencial *natural* y logarítmica *natural*. También explica el uso universal de estas funciones en trabajo avanzado.

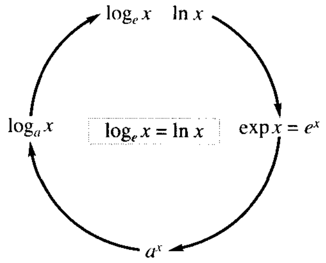


Figura 1

Históricamente, la base 10 fue la más comúnmente utilizada y los logaritmos resultantes fueron denominados **logaritmos comunes**. Pero en cálculo y todas las matemáticas avanzadas, la base importante es e. Observe que $\log_e$, al ser la inversa de $f(x) = e^x$, sólo es otro símbolo para ln; esto es,

$$\log_e x = \ln x$$

Hemos cerrado el círculo (véase la figura 1). La función ln, que introdujimos en la sección 6.1, resultó ser un logaritmo ordinario de una base especial, e.

Ahora, observe que si $y = \log_a x$ de modo que $x = a^y$, entonces

$$\ln x = y \ln a$$

de lo cual concluimos que

$$\boxed{\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}}$$

De esto, se sigue que $\log_a$ satisface las propiedades usuales asociadas con los logaritmos (véase el teorema 6.1A). También,

$$\boxed{D_x \log_a x = \frac{1}{x \ln a}}$$

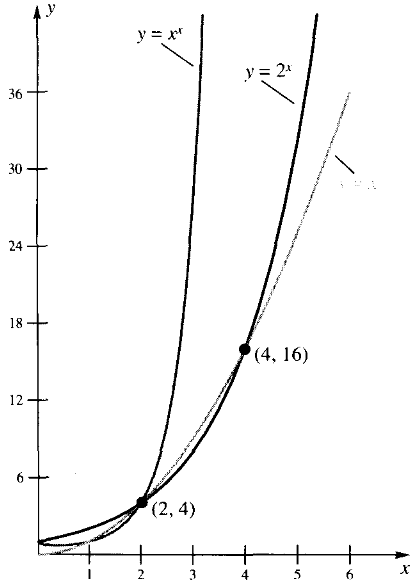


Figura 2

EJEMPLO 4 Si $y = \log_{10}(x^4 + 13)$, encuentre $\frac{dy}{dx}$.

SOLUCIÓN Sea $u = x^4 + 13$ y aplique la regla de la cadena.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x^4 + 13) \ln 10} \cdot 4x^3 = \frac{4x^3}{(x^4 + 13) \ln 10} \qquad \blacksquare$$

Las funciones a^x, x^a, y x^x Iniciamos con la comparación de las tres gráficas de la figura 2. De manera más general, sea a una constante. No confunda $f(x) = a^x$, una *función exponencial*, con $g(x) = x^a$, una *función potencia*. Y no confunda sus derivadas. Acabamos de aprender que

$$\boxed{D_x(a^x) = a^x \ln a}$$

¿Qué hay acerca de $D_x(x^a)$? Para a racional, en el capítulo 2 demostramos la regla de la potencia, la cual dice que

$$D_x(x^a) = ax^{a-1}$$

Ahora, afirmamos que esto es cierto aun si a es irracional. Para ver esto, escríbase

$$\begin{aligned} D_x(x^a) &= D_x(e^{a \ln x}) = e^{a \ln x} \cdot \frac{a}{x} \\ &= x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1} \end{aligned}$$

La regla correspondiente para integrales también se cumple, incluso si a es irracional.

$$\boxed{\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \qquad a \neq -1}$$

Por último, consideramos $f(x) = x^x$, una variable de una potencia variable. Existe una fórmula para $D_x(x^x)$, pero no le recomendamos que la memorice. En lugar de eso, le sugerimos que aprenda dos métodos para encontrarla, como se ilustra a continuación.

EJEMPLO 5 Si $y = x^x$, $x > 0$, encuentre $D_x y$ por medio de dos métodos diferentes.

SOLUCIÓN

Método 1 Podemos escribir

$$y = x^x = e^{x \ln x}$$

Así, por la regla de la cadena y la regla del producto,

$$D_x y = e^{x \ln x} D_x(x \ln x) = x^x\left(x \cdot \frac{1}{x} + \ln x\right) = x^x(1 + \ln x)$$

Método 2 Recuerde la técnica de la *diferenciación logarítmica* de la sección 6.1.

$$\begin{aligned} y &= x^x \\ \ln y &= x \ln x \\ \frac{1}{y} D_x y &= x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \\ D_x y &= y(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x) \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6 Si $y = (x^2 + 1)^{\pi} + \pi^{\sin x}$, encuentre dy/dx.

SOLUCIÓN

$$\frac{dy}{dx} = \pi(x^2 + 1)^{\pi - 1}(2x) + \pi^{\operatorname{sen} x} \ln \pi \cdot \cos x$$

■

De a^x a $[f(x)]^{g(x)}$

Observe la creciente complejidad de las funciones que hemos considerado. La progresión a^x a x^a a x^x es una cadena. Una cadena más complicada es $a^{f(x)}$ a $[f(x)]^a$ a $[f(x)]^{g(x)}$. Ahora sabemos cómo encontrar las derivadas de todas estas funciones. Determinar la derivada de la última de éstas se realiza mejor por medio de diferenciación logarítmica, una técnica introducida en la sección 6.1 e ilustrada en los ejemplos 5 y 7.

EJEMPLO 7 Si $y = (x^2 + 1)^{\operatorname{sen} x}$, encuentre $\dfrac{dy}{dx}$.

SOLUCIÓN Utilizamos la diferenciación logarítmica.

$$\begin{aligned} \ln y &= (\operatorname{sen} x) \ln(x^2 + 1) \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= (\operatorname{sen} x)\frac{2x}{x^2 + 1} + (\cos x) \ln(x^2 + 1) \\ \frac{dy}{dx} &= (x^2 + 1)^{\operatorname{sen} x}\left[\frac{2x \operatorname{sen} x}{x^2 + 1} + (\cos x) \ln(x^2 + 1)\right] \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 8 Evalúe $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{5^{1/x}}{x^2}\, dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = 1/x$, por lo que $du = (-1/x^2)\, dx$. Entonces

$$\begin{aligned} \int \frac{5^{1/x}}{x^2}\, dx &= -\int 5^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\, dx\right) = -\int 5^u\, du \\ &= -\frac{5^u}{\ln 5} + C = -\frac{5^{1/x}}{\ln 5} + C \end{aligned}$$

Por lo tanto, por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo ,

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^{1} \frac{5^{1/x}}{x^2} dx &= \left[-\frac{5^{1/x}}{\ln 5}\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{\ln 5}(5^2 - 5) \\ &= \frac{20}{\ln 5} \approx 12.43 \end{aligned}$$

■

Revisión de conceptos

1. En términos de e y ln, $\pi^{\sqrt{3}} =$ _____. De una forma más general, $a^x =$ _____.

2. $\ln x = \log_a x$, donde $a =$ _____.

3. $\log_a x$ puede expresarse en términos de ln por medio de $\log_a x =$ _____.

4. La derivada de la función potencia $f(x) = x^a$ es $f'(x) =$ _____; la derivada de la función exponencial $g(x) = a^x$ es $g'(x) =$ _____.

Conjunto de problemas 6.4

En los problemas del 1 al 8 despeje x. Sugerencia: $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$.

1. $\log_2 8 = x$

2. $\log_5 x = 2$

3. $\log_4 x = \frac{3}{2}$

4. $\log_x 64 = 4$

5. $2 \log_9\left(\frac{x}{3}\right) = 1$

6. $\log_4\left(\frac{1}{2x}\right) = 3$

7. $\log_2(x + 3) - \log_2 x = 2$

8. $\log_5(x + 3) - \log_5 x = 1$

[C] *Utilice* $\log_a x = (\ln x)/(\ln a)$ *para calcular cada uno de los logaritmos en los problemas del 9 al 12.*

9. $\log_5 12$

10. $\log_7(0.11)$

11. $\log_{11}(8.12)^{1/5}$

12. $\log_{10}(8.57)^7$

[C] *En los problemas del 13 al 16 utilice logaritmos naturales para resolver cada una de las* ecuaciones exponenciales. Sugerencia: *para resolver $3^x = 11$ tome ln de ambos lados, obteniendo $x \ln 3 = \ln 11$; entonces* $x = (\ln 11)/(\ln 3) \approx 2.1827$.

13. $2^x = 17$

14. $5^x = 13$

15. $5^{2s-3} = 4$

16. $12^{1/(\theta-1)} = 4$

En los problemas del 17 al 26 encuentre la derivada o integral que se indica.

17. $D_x(6^{2x})$

18. $D_x(3^{2x^2-3x})$

19. $D_x \log_3 e^x$

20. $D_x \log_{10}(x^3 + 9)$

21. $D_z[3^z \ln(z + 5)]$

22. $D_\theta \sqrt{\log_{10}(3^{\theta^2-\theta})}$

23. $\int x2^{x^2}\, dx$

24. $\int 10^{5x-1}\, dx$

25. $\int_1^4 \frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

26. $\int_0^1 (10^{3x} + 10^{-3x})\, dx$

En los problemas del 27 al 32 encuentre dy/dx. Observación: debe distinguir entre los problemas del tipo a^x, x^a y x^x como en los ejemplos del 5 al 7.

27. $y = 10^{(x^2)} + (x^2)^{10}$

28. $y = \operatorname{sen}^2 x + 2^{\operatorname{sen} x}$

29. $y = x^{\pi+1} + (\pi + 1)^x$

30. $y = 2^{(e^x)} + (2^e)^x$

31. $y = (x^2 + 1)^{\ln x}$

32. $y = (\ln x^2)^{2x+3}$

33. Si $f(x) = x^{\operatorname{sen} x}$, encuentre $f'(1)$.

[C] **34.** Sea $f(x) = \pi^x$ y $g(x) = x^\pi$. ¿Cuál es mayor, $f(e)$ o $g(e)$? ¿$f'(e)$ o $g'(e)$?

En los problemas del 35 al 40 primero determine el dominio de la función f dada y, luego, determine en dónde es creciente y decreciente; también en dónde es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo. Identifique todos los valores extremos y los puntos de inflexión. Luego haga un bosquejo de la gráfica de $y = f(x)$.

35. $f(x) = 2^{-x}$

36. $f(x) = x2^{-x}$

37. $f(x) = \log_2(x^2 + 1)$

38. $f(x) = x \log_3(x^2 + 1)$

39. $f(x) = \int_1^x 2^{-t^2}\, dt$

40. $f(x) = \int_0^x \log_{10}(t^2 + 1)\, dt$

41. ¿Cómo están relacionados $\log_{1/2}x$ y $\log_2 x$?

42. Haga un dibujo de las gráficas de $\log_{1/3}x$ y $\log_3 x$, utilizando los mismos ejes de coordenadas.

[C] **43.** La magnitud M de un terremoto en la **escala de Richter** es

$$M = 0.67 \log_{10}(0.37E) + 1.46$$

donde E es la energía del terremoto en kilowatts–hora. Encuentre la energía de un terremoto de magnitud 7. De magnitud 8.

[C] **44.** La intensidad del sonido se mide en decibeles, en honor de Alejandro Graham Bell (1847–1922), inventor del teléfono. Si la variación en la presión es de P libras por pulgada cuadrada, entonces la intensidad L en decibeles es

$$L = 20 \log_{10}(121.3P)$$

Encuentre la variación en la presión causada por una banda de rock a 115 decibeles.

[C] **45.** En la escala igualmente temperada a la cual se han afinado los instrumentos de teclado desde la época de J. S. Bach (1685–1750), las frecuencias de notas sucesivas C, C#, D, D#, E, F, F#, G, G#, A, A#, B, $\overline{\text{C}}$ (Do, Do sostenido, Re, Re sostenido, Mi, Fa, Fa sostenido, Sol, Sol sostenido, La, La sostenido, Si, Do, respectivamente)¿Cuál es la razón r entre las frecuencias de notas sucesivas? Si la frecuencia de A es 440 vibraciones por segundo, encuentre la frecuencia de $\overline{\text{C}}$.

46. Demuestre que $\log_2 3$ es irracional. *Sugerencia:* use la demostración por contradicción.

[GC] **47.** Usted sospecha que los datos xy que recopiló están en una curva exponencial $y = Ab^x$ o bien en una curva potencia $y = Cx^d$. Para verificar, grafique $\ln y$ contra x en una gráfica, y $\ln y$ contra $\ln x$ en otra. (Las calculadoras gráficas y los CAS tienen opciones para hacer que el eje vertical o ambos ejes, vertical y horizontal tengan escala logarítmica.) Explique cómo le pueden ayudar estas gráficas para que llegue a una conclusión.

48. **(Un pasatiempo)** Dado el problema de encontrar y', si $y = x^x$, el estudiante A hizo lo siguiente:

Error 1

$$\begin{aligned} y &= x^x \\ y' &= x \cdot x^{x-1} \cdot 1 \qquad \left(\begin{array}{l}\text{aplicación errónea de} \\ \text{la regla de la potencia}\end{array}\right) \\ &= x^x \end{aligned}$$

El estudiante B hizo esto:

Error 2

$$\begin{aligned} y &= x^x \\ y' &= x^x \cdot \ln x \cdot 1 \qquad \left(\begin{array}{l}\text{aplicación errónea de} \\ \text{la regla de la función} \\ \text{exponencial}\end{array}\right) \\ &= x^x \ln x \end{aligned}$$

La suma $x^x + x^x \ln x$ es correcta (véase el ejemplo 5), de modo que

ERROR 1 + ERROR 2 = CORRECTO

Demuestre que el mismo procedimiento da una respuesta correcta para $y = f(x)^{g(x)}$.

49. Convénzase usted mismo de que $f(x) = (x^x)^x$ y $f(x) = (x^x)^x$ y $g(x) = x^{(x^x)}$ no son la misma función. Después encuentre $f'(x)$ y $g'(x)$. *Observación:* cuando los matemáticos escriben x^{x^x}, quieren decir $x^{(x^x)}$.

50. Considere $f(x) = \dfrac{a^x - 1}{a^x + 1}$ para a fija, $a > 0, a \neq 1$. Demuestre que f tiene una inversa y encuentre una fórmula para $f^{-1}(x)$.

51. Para $a > 1$ fija, sea $f(x) = x^a/a^x$ en $[0, \infty)$. Demuestre:

(a) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ *Sugerencia:* estudie $\ln f(x)$;

(b) $f(x)$ se maximiza en $x_0 = a/\ln a$;

(c) $x^a = a^x$ tiene dos posibles soluciones si $a \neq e$ y sólo una solución si $a = e$;

(d) $\pi^e < e^\pi$.

52. Sea $f_u(x) = x^u e^{-x}$ para $x \geq 0$. Demuestre que para cualquier $u > 0$ fija:

(a) $f_u(x)$ alcanza su máximo en $x_0 = u$;

(b) $f_u(u) > f_u(u + 1)$ y $f_{u+1}(u + 1) > f_{u+1}(u)$ implican

$$\left(\frac{u+1}{u}\right)^u < e < \left(\frac{u+1}{u}\right)^{u+1}$$

(c) $\dfrac{u}{u+1}\, e < \left(\dfrac{u+1}{u}\right)^u < e.$

De la parte (c) concluya que $\lim\limits_{u \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{u}\right)^u = e.$

GC **53.** Encuentre $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$. También encuentre las coordenadas del punto mínimo para $f(x) = x^x$ en $[0, 4]$.

GC **54.** Dibuje las gráficas de $y = x^3$ y $y = 3^x$ utilizando los mismos ejes y encuentre todos sus puntos de intersección.

CAS **55.** Evalúe $\displaystyle\int_0^{4\pi} x^{\operatorname{sen} x}\, dx.$

CAS **56.** Con referencia al problema 49. Dibuje las gráficas de f y g utilizando los mismos ejes. Después dibuje las gráficas de f' y g' utilizando los mismo ejes.

Hasta ahora, nuestra experiencia al graficar se ha restringido a utilizar espaciamiento estándar (lineal) en las coordenadas. Al trabajar con funciones exponenciales y logarítmicas puede ser más instructivo utilizar escalas logarítmicas y log-log. Exploramos estas técnicas en los problemas 57 y 58.

GC **57.** En un solo conjunto de ejes utilice su calculadora para dibujar las gráficas de $y = 2^x$, $y = 3^x$ y $y = 4^x$, en el intervalo $0 < x < 4$. Haga lo mismo para las funciones inversas $y = \log_2 x$, $y = \log_3 x$ y $y = \log_4 x$. Si utilizamos un programa de graficación por computadora que permita el uso de ejes semilogarítmico (una escala logarítmica en el eje y y una escala normal en el eje x) para graficar las funciones $y = 2^x$, $y = 3^x$ y $y = 4^x$ en la región $-5 < x < 5$ (véase la figura 3), obtenemos tres rectas.

(a) Identifique cada una de las rectas en la figura 3.

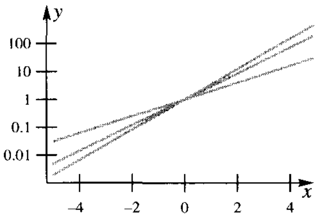


Figura 3

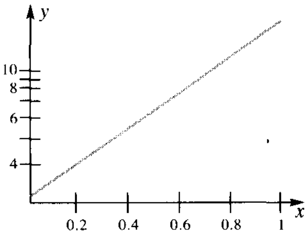


Figura 4

(b) Al observar que si $y = Cb^x$ entonces $\ln y = \ln C + x \ln b$, explique por qué todas las curvas en la figura 3 son rectas que pasan por el punto $(0, 1)$.

(c) Con base en la gráfica semilogarítmica dada en la figura 4, determine C y b en la ecuación $y = Cb^x$.

58. Si utilizamos escala logarítmica tanto en el eje x como en el eje y (denominada gráfica log–log) y graficamos varias funciones potencia, también obtendremos rectas. Utilizando el resultado de que, al tomar logaritmos, $y = Cx^r$ se transforma en $\log y = \log C + r \log x$, identifique las ecuaciones que se graficaron en la figura 5.

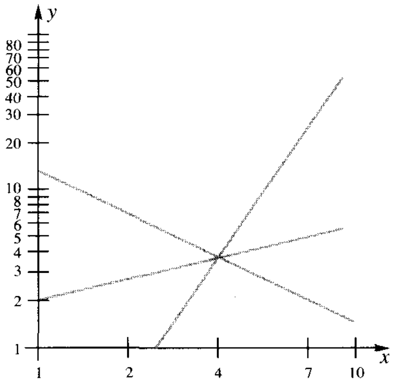


Figura 5

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $e^{\sqrt{3}\ln \pi}$; $e^{x \ln a}$ **2.** e **3.** $(\ln x)/(\ln a)$ **4.** ax^{a-1}; $a^x \ln a$

6.5
Crecimiento y decaimiento exponenciales

Al principio de 2004, la población mundial era de alrededor de 6400 millones. Se dice que para el año 2020, alcanzará 7900 millones. ¿Cómo se hacen tales predicciones?

Para tratar el problema de forma matemática, denótese con $y = f(t)$ al tamaño de la población en el instante t, en donde t es el número de años a partir de 2004. Realmente, $f(t)$ es un entero y su gráfica "da saltos" cuando alguien nace o alguien muere. Sin embargo, para una población grande, estos saltos son tan relativamente pequeños respecto a la población total que no nos equivocaremos mucho si suponemos que f es una función derivable.

Parece razonable suponer que el incremento Δy de la población (nacimientos menos decesos), durante un breve periodo Δt, es proporcional al tamaño de la población al inicio del periodo y a su tamaño. Así, $\Delta y = ky\Delta t$, o

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = ky$$

En su forma de límite, esto da la ecuación diferencial

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = ky}$$

Si $k > 0$, la población está creciendo; si $k < 0$, está disminuyendo. Para la población mundial, la historia indica que k es alrededor de 0.0132 (suponiendo que t se mide en años), aunque algunas agencias reportan una cifra diferente.

Resolución de la ecuación diferencial Iniciamos nuestro estudio de las ecuaciones diferenciales en la sección 3.9, y ahora podría remitirse a esa sección. Queremos resolver $dy/dt = ky$ sujeta a la condición $y = y_0$ cuando $t = 0$. Separando variables e integrando, obtenemos

$$\frac{dy}{y} = k\,dt$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int k\,dt$$

$$\ln y = kt + C$$

La condición $y = y_0$ en $t = 0$ da $C = \ln y_0$. Así,

$$\ln y - \ln y_0 = kt$$

o

$$\ln \frac{y}{y_0} = kt$$

Al cambiar a la forma exponencial se obtiene

$$\frac{y}{y_0} = e^{kt}$$

o, finalmente,

$$\boxed{y = y_0 e^{kt}}$$

Cuando $k > 0$, este tipo de crecimiento se denomina **crecimiento exponencial**, y cuando $k < 0$ se llama **decaimiento exponencial**.

De regreso al problema de la población mundial, elegimos para medir el tiempo t en años después del 1 de enero de 2004, y y en miles de millones de personas. Así, $y_0 = 6.4$ y como $k = 0.0132$,

$$y = 6.4e^{0.0132t}$$

Para el año 2020, cuando $t = 16$, podemos pronosticar que y será alrededor de

$$y = 6.4e^{0.0132(16)} \approx 7.9 \text{ mil millones.}$$

EJEMPLO 1 Bajo las suposiciones anteriores, ¿cuánto tiempo tardará la población mundial en duplicarse?

SOLUCIÓN La interrogante es equivalente a preguntar "¿dentro de cuántos años, a partir de 2004, la población alcanzará 12.8 mil millones? Necesitamos resolver

$$12.8 = 6.4e^{0.0132t}$$
$$2 = e^{0.0132t}$$

para t. Al tomar logaritmos de ambos lados se obtiene

$$\ln 2 = 0.0132t$$
$$t = \frac{\ln 2}{0.0132} \approx 53 \text{ años}$$ ■

Si la población mundial se duplicará en los primeros 53 años a partir de 2004, se duplicará en cualquier periodo de 53 años; así, por ejemplo, se cuadruplicará en 106 años. De forma más general, si una cantidad con crecimiento exponencial se duplica de y_0 a $2y_0$ en un intervalo de longitud T, se duplicará en *cualquier* intervalo de longitud T, ya que

$$\frac{y(t + T)}{y(t)} = \frac{y_0 e^{k(t+T)}}{y_0 e^{kt}} = \frac{y_0 e^{kT}}{y_0} = \frac{2y_0}{y_0} = 2$$

Denominamos al número T el **tiempo de duplicación**.

EJEMPLO 2 El número de bacterias en un cultivo que crece con rapidez se estimó que era de 10,000 al mediodía y 40,000 después de 2 horas. Haga una predicción de cuántas bacterias habrá a las 5 p. m.

SOLUCIÓN Suponemos que la ecuación diferencial $dy/dt = ky$ es aplicable, de modo que $y = y_0e^{kt}$. Ahora tenemos dos condiciones ($y_0 = 10{,}000$ y $y = 40{,}000$ en $t = 2$), de las cuales podemos concluir que

$$40{,}000 = 10{,}000e^{k(2)}$$

o

$$4 = e^{2k}$$

Al tomar logaritmos se obtiene

$$\ln 4 = 2k$$

o

$$k = \tfrac{1}{2}\ln 4 = \ln \sqrt{4} = \ln 2$$

Así,

$$y = 10{,}000e^{(\ln 2)t}$$

y, en $t = 5$, esto da

$$y = 10{,}000e^{0.693(5)} \approx 320{,}000$$ ■

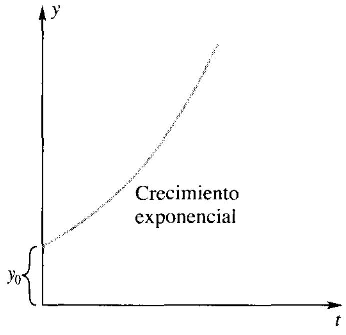


Figura 1

El modelo exponencial $y = y_0e^{kt}$, $k > 0$, para el crecimiento poblacional es erróneo ya que, para el futuro, proyecta un crecimiento cada vez más rápido de manera indefinida (véase la figura 1). En la mayoría de los casos (incluyendo el de la población mundial), la cantidad limitada de espacio y recursos eventualmente forzará un descenso en la tasa de crecimiento. Esto sugiere otro modelo para el crecimiento poblacional, denominado **modelo logístico**, en el cual suponemos que la tasa de crecimiento es proporcional al tamaño de la población y y a la diferencia $L - y$, donde L es la población máxima que puede sostenerse con los recursos. Esto conduce a la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ky(L - y)$$

Observe que para y pequeña, $dy/dt \approx kLy$ sugiere un crecimiento del tipo exponencial. Pero cuando y se acerca a L, el crecimiento se reduce y dy/dt se hace cada vez más pequeña, produciendo una curva de crecimiento parecida al de la figura 2. Este modelo se explora en los problemas 34, 35 y 49 de esta sección y de nueva cuenta en la sección 7.5.

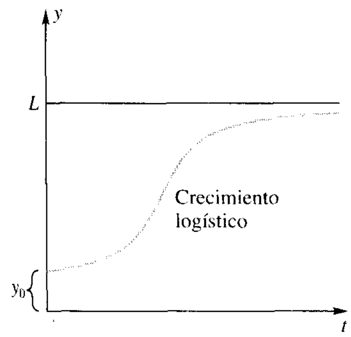


Figura 2

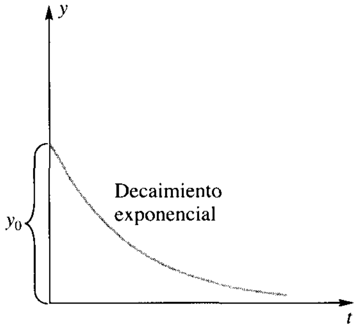


Figura 3

Decaimiento radiactivo No todo crece; algunas cosas disminuyen con el tiempo. Por ejemplo, los elementos radiactivos *decaen*, y lo hacen a una tasa proporcional a la cantidad presente. Así, su cambio también satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

pero ahora con k negativa. Aún es cierto que $y = y_0e^{kt}$ es la solución de esta ecuación. Una gráfica representativa aparece en la figura 3.

EJEMPLO 3 El carbono 14, un isótopo del carbono, es radiactivo y decae a una tasa proporcional a la cantidad presente. Su **vida media** es de 5730 años; es decir, tarda 5730 años para que una cantidad dada de carbono 14 decaiga a un medio de su cantidad original. Si originalmente estaban presentes 10 gramos, ¿cuánto quedará después de 2000 años?

SOLUCIÓN La vida media de 5730 nos permite determinar k, ya que implica que

$$\frac{1}{2} = 1e^{k(5730)}$$

o, después de tomar logaritmos,

$$-\ln 2 = 5730k$$

$$k = \frac{-\ln 2}{5730} \approx -0.000121$$

Así,

$$y = 10e^{-0.000121t}$$

En $t = 2000$, esto da

$$y = 10e^{-0.000121(2000)} \approx 7.85 \text{ gramos}$$ ■

En el problema 17 demostramos cómo el ejemplo 3 puede utilizarse para determinar la edad de fósiles y otros seres, alguna vez, vivos.

Ley de enfriamiento de Newton La ley de enfriamiento de Newton establece que la tasa a la que un objeto se enfría (o calienta) es proporcional a la diferencia de la temperatura entre el objeto y el medio que lo rodea. Para ser específico, suponga que un objeto, que inicialmente se encuentra a una temperatura T_0, se coloca en una habitación donde la temperatura es T_1. Si $T(t)$ representa a la temperatura del objeto en el instante t, entonces la ley de enfriamiento de Newton dice que

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_1)$$

Esta ecuación diferencial es separable y puede resolverse como los problemas de crecimiento y decaimiento en esta sección.

EJEMPLO 4 Un objeto se saca de un horno a 350°F y se deja enfriar en una habitación que está a 70°F. Si la temperatura del objeto desciende a 250°F en una hora, ¿cuál será su temperatura tres horas después de que se sacó del horno?

SOLUCIÓN La ecuación diferencial puede escribirse como

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 70)$$

$$\frac{dT}{T - 70} = k\,dt$$

$$\int \frac{dT}{T - 70} = \int k\,dt$$

$$\ln|T - 70| = kt + C$$

Como la temperatura inicial es mayor que 70, parece razonable que la temperatura del objeto descenderá hacia 70; por lo tanto, $T - 70$ será positivo y el valor absoluto no es necesario. Esto conduce a

$$\begin{aligned} T - 70 &= e^{kt+C} \\ T &= 70 + C_1 e^{kt} \end{aligned}$$

en donde $C_1 = e^C$. Ahora aplicamos la solución inicial, $T(0) = 350$ para determinar C_1:

$$\begin{aligned} 350 &= T(0) = 70 + C_1 e^{k\cdot 0} \\ 280 &= C_1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación diferencial es

$$T(t) = 70 + 280e^{kt}$$

Para determinar k aplicamos la condición que en el tiempo $t = 1$, la temperatura fue $T(1) = 250$.

$$\begin{aligned} 250 &= T(1) = 70 + 280e^{k\cdot 1} \\ 280e^k &= 180 \\ e^k &= \frac{180}{280} \\ k &= \ln\frac{180}{280} \approx -0.44183 \end{aligned}$$

Esto da

$$T(t) = 70 + 280e^{-0.44183t}$$

Véase la figura 4. Al cabo de 3 horas, la temperatura es

$$T(3) = 70 + 280e^{-0.44183\cdot 3} \approx 144.4°\text{F}$$ ■

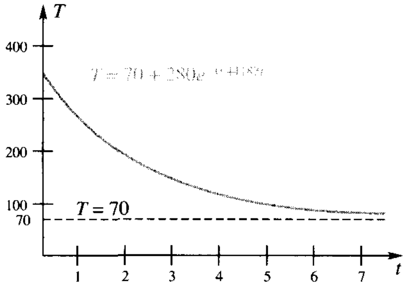


Figura 4

Interés compuesto Si colocamos \$100 en el banco a 12% de interés compuesto mensualmente, al final del primer mes su valor será \$100(1.01); al final de 2 meses, \$100$(1.01)^2$ y al final de 12 meses, un año, de \$100$(1.01)^{12}$. De manera más general, si ponemos A_0 dólares en el banco a $100r$ por ciento compuesto n veces por año, su valor será de $A(t)$ dólares al final de t años, donde

$$A(t) = A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

EJEMPLO 5 Supóngase que Catherine pone \$500 en el banco a 4% de interés compuesto diariamente. ¿Cuánto tendrá al final de 3 años?

SOLUCIÓN Aquí, $r = 0.04$ y $n = 365$, de modo que

$$A = 500\left(1 + \frac{0.04}{365}\right)^{365(3)} \approx \$563.74$$ ■

Ahora consideremos lo que sucede cuando el interés se **compone continuamente**, es decir, cuando n, el número de periodos de composición en un año, tiende a infinito. Entonces afirmamos que

$$\begin{aligned} A(t) &= \lim_{n\to\infty} A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = A_0 \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt} \\ &= A_0\left[\lim_{h\to 0}(1 + h)^{1/h}\right]^{rt} = A_0 e^{rt} \end{aligned}$$

Aquí se reemplazó r/n por h y se observó que $n \to \infty$, corresponde a $h \to 0$. Pero el gran salto es reconocer que la expresión entre corchetes es el número e. Este resultado es suficientemente importante para llamarle teorema.

Teorema A

$$\lim_{h\to 0}(1 + h)^{1/h} = e$$

Otra mirada a la continuidad

Recuerde que decir que una función es continua en x_0 significa que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Esto es,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right)$$

Así, la continuidad para una función significa que podemos meter un límite dentro de la función. Esto es lo que hicimos para la función $f(x) = \exp(x)$ casi al final de la demostración del teorema A.

Demostración Primero recuerde que si $f(x) = \ln x$ entonces $f'(x) = 1/x$ y, en particular, $f'(1) = 1$. Entonces, con base en la definición de la derivada y las propiedades de ln, obtenemos

$$1 = f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1 + h) - \ln 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(1 + h) = \lim_{h\to 0}\ln(1 + h)^{1/h}$$

Así, $\lim_{h\to 0}\ln(1 + h)^{1/h} = 1$, un resultado que utilizaremos en un momento. Ahora, $g(x) = e^x = \exp x$ es una función continua y, por lo tanto, se sigue que podemos pasar el límite dentro de la función exponencial en el siguiente argumento:

$$\lim_{h\to 0}(1 + h)^{1/h} = \lim_{h\to 0}\exp[\ln(1 + h)^{1/h}] = \exp\left[\lim_{h\to 0}\ln(1 + h)^{1/h}\right]$$

$$= \exp 1 = e \qquad \blacksquare$$

Para otra demostración del teorema A, véase el problema 52 de la sección 6.4.

EJEMPLO 6 Suponga que el banco del ejemplo 5 capitaliza de manera continua. ¿Entonces, cuánto tendría Catherine al final de 3 años?

SOLUCIÓN

$$A(t) = A_0 e^{rt} = 500e^{(0.04)(3)} \approx \$563.75$$

Observe que, aunque algunos bancos tratan de sacar mucho provecho al ofrecer interés compuesto continuamente, la diferencia que se obtiene entre interés continuo e interés compuesto diariamente (el cual ofrecen muchos bancos) es minúscula. ■

He aquí otro enfoque al problema de interés compuesto continuamente. Sea A el valor en el instante t de A_0 dólares invertidos a la tasa de interés r. Decir que el interés se compone de manera continua es decir que la tasa instantánea de cambio de A respecto al tiempo es rA; es decir,

$$\frac{dA}{dt} = rA$$

Esta ecuación diferencial se resolvió al inicio de la sección; su solución es $A = A_0e^{rt}$.

Revisión de conceptos

1. La tasa de cambio dy/dt de una cantidad y que crece exponencialmente satisface la ecuación diferencial $dy/dt =$ ______. En contraste, si y crece de manera logística hacia una cota superior L, $dy/dt =$ ______.

2. Si una cantidad que crece exponencialmente se duplica al cabo de T años, será ______ veces mayor después de $3T$ años.

3. El tiempo para que una cantidad y que decae exponencialmente pase de un tamaño y_0 a un tamaño $y_0/2$ se denomina ______.

4. El número e puede expresarse como un límite por $e = \lim_{h\to 0}$ ______.

Conjunto de problemas 6.5

En los problemas del 1 al 4 resuelva la ecuación diferencial dada sujeta a la condición que se da. Observe que $y(a)$ denota el valor de y en $t = a$.

1. $\dfrac{dy}{dt} = -6y,\ y(0) = 4$ **2.** $\dfrac{dy}{dt} = 6y,\ y(0) = 1$

3. $\dfrac{dy}{dt} = 0.005y,\ y(10) = 2$

4. $\dfrac{dy}{dt} = -0.003y,\ y(-2) = 3$

5. Una población de bacterias crece a una tasa proporcional a su tamaño. Al principio, es de 10,000 y después de 10 días es 20,000. ¿Cuál será la población después de 25 días? Véase el ejemplo 2.

6. ¿Cuánto tardará la población del ejercicio 5 en duplicarse? Véase el ejemplo 1.

7. ¿Cuánto tardará la población del ejercicio 5 en triplicarse? Véase el ejemplo 1.

8. La población de Estados Unidos fue de 3.9 millones en 1790 y de 178 millones en 1960. Si se supone que la tasa de crecimiento es proporcional al número presente, ¿qué estimación daría para la población en el año 2000? (Compare su respuesta con la población real de 2000, que es 275 millones).

9. La población de cierto país crece 3.2% por año; esto es, si es A al inicio de un año es $1.032A$ al final de ese año. Si se supone que ahora es de 4.5 millones, ¿cuál será al final de 1 año? ¿De 2 años? ¿De 10 años? ¿De 100 años?

10. Determine la constante de proporcionalidad k en $dy/dt = ky$ para el problema 9. Después utilice $y = 4.5e^{kt}$ para encontrar la población al cabo de 100 años.

11. Una población que crece a una tasa proporcional a su tamaño. Al cabo de 5 años, el tamaño de la población fue 164,000. Después de 12 años, el tamaño de la población fue 235,000. ¿Cuál fue el tamaño original de la población?

12. La masa de un tumor crece a una tasa proporcional a su tamaño. La primera medida de su tamaño fue de 4.0 gramos. Cuatro meses después su masa fue 6.76 gramos. ¿De qué tamaño era el tumor seis meses antes de la primera medición? Si el instrumento puede detectar los tumores de masa de 1 gramo o mayores, ¿se hubiese detectado el tumor en ese momento?

13. Una sustancia radiactiva tiene una vida media de 700 años. Si al inicio había 10 gramos, ¿cuánto quedará después de 300 años?

14. Si una sustancia radiactiva pierde 15% de su radiactividad en 2 días, ¿cuál es su vida media?

15. El cesio 137 y el estroncio 90 son dos elementos químicos radiactivos que fueron liberados en el reactor nuclear de Chernobyl en abril de 1986. La vida media del cesio 137 es de 30.22 años, y la del estroncio 90 es de 28.8 años. ¿En qué año la cantidad de cesio 137 será igual a 1% de la cantidad que fue liberada? Responda esta pregunta para el estroncio 90.

16. Se estudia una cantidad desconocida de una sustancia radiactiva. Después de dos días, la masa es 15.231 gramos. Al cabo de ocho días, la masa es 9.086 gramos. ¿Qué cantidad había inicialmente? ¿Cuál es la vida media de esta sustancia?

17. **(Fechado con carbono)** Todos los seres vivos contienen carbono 12, que es estable, y carbono 14, que es radiactivo. Mientras una planta o un animal están vivos, la razón de estos dos isótopos de carbono permanece sin cambio, ya que el carbono 14 se renueva de manera constante; al morir, ya no se absorbe más carbono 14. La vida media del carbono 14 es de 5370 años. Si los troncos carbonizados de una vieja fortaleza sólo muestran 70% del carbono 14 esperado en la materia viva, ¿cuándo fue incendiada la fortaleza? Suponga que la fortaleza se quemó tan pronto como fue construida con troncos recién cortados.

18. Se probó que el cabello humano de una tumba en África sólo tenía 51% del carbono 14 del tejido viviente. ¿Cuándo fue sepultado el cuerpo?

19. Un objeto se saca de un horno a 300°F, y se deja enfriar en una habitación a 75°F. Si la temperatura descendió a 200°F en $\frac{1}{2}$ hora, ¿cuál será la temperatura del objeto después de 3 horas?

20. Un termómetro registró –20°C en el exterior y después se introdujo a la casa en donde la temperatura era de 24°C. Después de 5 minutos, el termómetro registró 0°C. ¿Cuándo marcará 20°C?

21. Un objeto que es encontraba inicialmente a 26°C se coloca en agua, cuya temperatura es de 90°C. Si la temperatura del objeto se elevó a 70°C en 5 minutos, ¿cuál será la temperatura al cabo de 10 minutos?

22. Un conjunto de bizcochos se saca de un horno a 350°F; enseguida se coloca en un refrigerador a 40°F y se deja enfriar. Después de 15 minutos, los bizcochos han descendido a 250°F. ¿Cuándo tendrán los bizcochos una temperatura de 110°F?

23. Un cadáver se encuentra a las 10 p. m., y tiene una temperatura de 82°F. Una hora después la temperatura fue de 76°F. La temperatura de la habitación se mantuvo constante a 70°F. Suponiendo que la temperatura del cuerpo era 98.6°F cuando estaba vivo, estime la hora de la muerte.

24. Resuelva la ecuación diferencial para ley de enfriamiento de Newton, para T_0, T_1 y k arbitrarias, suponiendo que $T_0 > T_1$. Demuestre que $\lim\limits_{t \to \infty} T(t) = T_1$.

25. Si hoy se ponen $375 en el banco, ¿cuál será su valor al final de 2 años, si el interés es de 3.5% y se compone como se especifica?

(a) Anualmente (b) Mensualmente

(c) Diariamente (d) Continuamente

26. Resuelva el problema 25 suponiendo que la tasa de interés es 4.6%.

27. ¿Cuánto tarda el dinero en duplicar su valor para las tasas de interés que se especifican?

(a) 6% compuesto mensualmente

(b) 6% compuesto de manera continua

28. La inflación entre 1999 y 2004 fue de alrededor de 2.5% anual. Con esta base, ¿cuánto esperaría usted que costase en 2004 un automóvil que en 1999 costó $20,000?

29. Se dice que Peter Minuit compró la isla de Manhattan por $24 en 1626. Suponga que Minuit hubiese puesto los $24 en el banco a 6% de interés compuesto de manera continua. ¿Cuál sería el valor de esos $24 en el año 2000?

30. Si los padres de Matusalén hubiesen puesto para él $100 en el banco cuando nació y los hubiesen dejado allí, ¿cuánto hubiese tenido Matusalén al morir (969 años después), si el interés fuese de 4% compuesto por año?

31. Determine el valor de \$1000 al final de 1 año, cuando el interés de 5% se compone (o capitaliza) de manera continua. Esto se denomina **valor futuro**.

32. Suponga que al cabo de 1 año, usted tiene \$1000 en un banco. Si el interés se capitalizó de manera continua a 5%, ¿cuánto dinero depositó en el banco un año antes? Esto se denomina **valor presente**.

33. Más adelante se demostrará para x pequeñas que $\ln(1+x) \approx x$. Utilice este hecho para demostrar que el tiempo de duplicación para el dinero invertido al p por ciento compuesto cada año es alrededor de $70/p$ años.

34. La ecuación para el crecimiento logístico es

$$\frac{dy}{dt} = ky(L - y)$$

Demuestre que esta ecuación diferencial tiene la solución

$$y = \frac{Ly_0}{y_0 + (L - y_0)e^{-Lkt}}$$

Sugerencia: $\dfrac{1}{y(L-y)} = \dfrac{1}{Ly} + \dfrac{1}{L(L-y)}$.

35. Bosqueje la gráfica de la solución del problema 34 cuando $y_0 = 6.4$, $L = 16$ y $k = 0.00186$ (un *modelo logístico* para la población mundial; véase el estudio al inicio de esta sección). Observe que $\lim\limits_{t\to\infty} y = 16$.

36. Encuentre cada uno de los siguientes límites

(a) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + x)^{1000}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}(1)^{1/x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1 + \varepsilon)^{1/x}, \varepsilon > 0$ (d) $\lim\limits_{x\to 0^-}(1 + \varepsilon)^{1/x}, \varepsilon > 0$

(e) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + x)^{1/x}$

37. Utilice el hecho de que $e = \lim\limits_{h\to 0}(1 + h)^{1/h}$ para encontrar cada límite.

(a) $\lim\limits_{x\to 0}(1 - x)^{1/x}$ *Sugerencia:* $(1 - x)^{1/x} = [(1 - x)^{1/(-x)}]^{-1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + 3x)^{1/x}$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{n}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{2n}$

38. Demuestre que la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ay + b$$

tiene solución

$$y = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)e^{at} - \frac{b}{a}$$

Suponga que $a \neq 0$.

39. Considere un país con una población de 10 millones en 1985, una tasa de crecimiento de 1.2% anual y una inmigración de otros países de 60,000 por año. Utilice la ecuación diferencial del problema 38 para modelar esta situación y predecir la población en 2010. Tome $a = 0.012$.

40. Se dice que una noticia importante se difunde en una población adulta de tamaño fijo L a una tasa de tiempo proporcional al número de personas que no han escuchado la noticia. Cinco días después de un escándalo en la ciudad, una encuesta mostró que la mitad de las personas lo habían escuchado. ¿Cuánto tardará para que 99% de las personas lo oigan?

EXPL *Además de proporcionar una forma fácil de derivar producto, la derivación logarítmica también proporciona una medida de la* ***tasa de cambio relativa*** *o* ***fraccionaria****, definida como y'/y. En los problemas 41 a 44 exploramos estos conceptos.*

41. Demuestre que la tasa de cambio relativa de e^{kt} como una función de t es k.

42. Demuestre que la tasa de cambio relativa de cualquier polinomio tiende a cero cuando la variable independiente tiende a infinito.

43. Demuestre que si la tasa de cambio relativa es una constante positiva, entonces la función debe representar crecimiento exponencial.

44. Demuestre que si la tasa de cambio relativa es una constante negativa, entonces la función debe representar decaimiento exponencial.

45. Supóngase que (1) la población mundial continúa creciendo de forma exponencial con constante de crecimiento $k = 0.0132$, (2) se necesita $\frac{1}{2}$ acre de tierra para proporcionar alimento a una persona y (3) en el mundo existen 13,500,000 millas cuadradas de tierra cultivable. ¿Cuánto tiempo pasará antes de que el mundo alcance la población máxima? *Nota:* en el año 2004 había 6.4 mil millones de personas y 1 milla cuadrada es igual a 640 acres.

GC **46.** La oficina de censos estima que la tasa de crecimiento k de la población mundial disminuirá aproximadamente 0.0002 por año, durante las siguientes décadas. En 2004, k fue 0.0132.

(a) Exprese k como una función del tiempo t, en donde t se mide en años, a partir de 2004.

(b) Encuentre una ecuación diferencial que modele la población y para este problema.

(c) Resuelva la ecuación diferencial con la condición adicional de que la población mundial en 2004 ($t = 0$) era 6.4 mil millones.

(d) Haga una gráfica de la población y para los siguientes 300 años.

(e) Con este modelo, ¿Cuándo alcanzará un máximo la población? ¿Cuándo la población descenderá por debajo del nivel de 2004?

GC **47.** Repita el ejercicio 46 bajo la hipótesis de que k disminuirá 0.0001 por año.

EXPL **48.** Sea E una función derivable que satisface $E(u + v) = E(u)E(v)$ para toda u y v. Encuentre una fórmula para $E(x)$. *Sugerencia:* primero determine $E'(x)$.

GC **49.** Utilizando los mismos ejes, dibuje las gráficas para $0 \le t \le 100$ de los siguientes dos modelos para el crecimiento de la población mundial (ambos descritos en esta sección).

(a) Crecimiento exponencial: $y = 6.4e^{0.0132t}$

(b) Crecimiento logístico: $y = 102.4/(6 + 10e^{-0.030t})$

Compare lo que predicen los dos modelos para la población mundial en 2010, 2040 y 2090. *Nota:* ambos modelos suponen que la población mundial era de 6.4 mil millones en 2004 ($t = 0$).

GC **50.** Evalúe:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + x)^{1/x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}(1 - x)^{1/x}$

El límite en la parte (a) determina e. ¿Qué número especial determina el límite de la parte (b)?

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $ky; ky(L - y)$ **2.** 8 **3.** vida media **4.** $(1 + h)^{1/h}$

6.6

Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

En la sección 3.9 resolvimos por primera vez ecuaciones diferenciales. Allí desarrollamos el método de separación de variables para determinar una solución. En la sección anterior utilizamos el método de separación de variables para resolver ecuaciones diferenciales que incluyen crecimiento y decaimiento.

No todas las ecuaciones son *separables*. Por ejemplo, en la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 3y$$

no existe forma de separar las variables para que se tengan dy y todas las expresiones que incluyan a y en un lado y a dx, y a todas las expresiones que incluyan a x en el otro lado. Sin embargo, esta ecuación puede ponerse en la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones sólo de x. Se dice que una ecuación diferencial de esta forma es una **ecuación diferencial lineal de primer orden**. *Primer orden* se refiere al hecho de que la única derivada es una primera derivada. *Lineal* se refiere al hecho de que la ecuación puede escribirse en la forma $D_x y + P(x)Iy = Q(x)$, en donde D_x es el operador derivada, e I es el operador identidad (esto es, $Iy = y$). Ambos, D_x e I, son *operadores lineales*.

La familia de todas las soluciones de una ecuación diferencial se denomina **solución general**. Muchos problemas requieren que la solución satisfaga la condición $y = b$ cuando $x = a$, en donde se dan a y b. Tal condición se llama **condición inicial** y una función que satisface la ecuación diferencial y la condición inicial se denomina **solución particular**.

Resolución de ecuaciones lineales de primer orden

Para resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden, primero multiplicamos ambos lados por el **factor de integración (o integrante)**

$$e^{\int P(x)\,dx}$$

(En breve, la razón para este paso se volverá claro.) Entonces, la ecuación diferencial es

$$e^{\int P(x)\,dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)\,dx}P(x)y = e^{\int P(x)\,dx}Q(x)$$

El lado izquierdo es la derivada del producto $y \cdot e^{\int P(x)\,dx}$, de modo que la ecuación toma la forma

$$\frac{d}{dx}\left(y \cdot e^{\int P(x)\,dx}\right) = e^{\int P(x)\,dx}Q(x)$$

La integración de ambos lados da

$$ye^{\int P(x)\,dx} = \int \left(Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\right) dx$$

Así, la solución general es

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\int \left(Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\right) dx$$

No es bueno memorizar este resultado final; es fácil recordar el proceso de obtención y es lo que ilustramos.

EJEMPLO 1 Resuelva

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = \frac{\operatorname{sen} 3x}{x^2}$$

SOLUCIÓN Nuestro factor integrante es

$$e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int (2/x)\,dx} = e^{2\ln|x|} = e^{\ln x^2} = x^2$$

(Hemos tomado la constante arbitraria de la integración $\int P(x)\,dx$ igual a cero. La elección de la constante no afecta la respuesta. Véanse los problemas 27 y 28.) Al multiplicar ambos lados de la ecuación original por x^2, obtenemos

$$x^2\frac{dy}{dx} + 2xy = \operatorname{sen} 3x$$

El lado izquierdo de esta ecuación es la derivada del producto x^2y. Así,

$$\frac{d}{dx}(x^2y) = \operatorname{sen} 3x$$

La integración de ambos miembros da

$$x^2y = \int \operatorname{sen} 3x\,dx = -\tfrac{1}{3}\cos 3x + C$$

o

$$y = \left(-\tfrac{1}{3}\cos 3x + C\right)x^{-2}$$ ■

EJEMPLO 2 Encuentre la solución particular de

$$\frac{dy}{dx} - 3y = xe^{3x}$$

que satisface $y = 4$ cuando $x = 0$.

SOLUCIÓN El factor integrante apropiado es

$$e^{\int(-3)\,dx} = e^{-3x}$$

Al multiplicar por este factor, nuestra ecuación adquiere la forma

$$\frac{d}{dx}(e^{-3x}y) = x$$

o

$$e^{-3x}y = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

Así, la solución general es

$$y = \frac{1}{2}x^2e^{3x} + Ce^{3x}$$

La sustitución de $y = 4$ cuando $x = 0$ hace $C = 4$. La solución particular deseada es

$$y = \frac{1}{2}x^2e^{3x} + 4e^{3x}$$ ■

Aplicaciones

Comenzamos con un problema de mezcla, típico de muchos problemas que surgen en química.

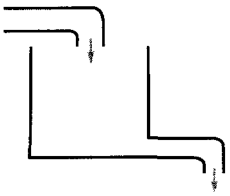


Figura 1

EJEMPLO 3 Un depósito contiene 120 galones de salmuera, con 75 libras de sal disuelta en solución. Agua con sal que contiene 1.2 libras de sal por galón se introduce al depósito a razón de 2 galones por minuto y la salmuera sale a la misma velocidad (véase la figura 1). Si la mezcla se mantiene uniforme mediante una agitación constante, encuentre la cantidad de sal en el tanque al cabo de una hora.

Un principio general

En problemas de flujo, tal como en el ejemplo 3, aplicamos un principio general. Suponga que y mide la cantidad de interés que está en el depósito en el instante t. Entonces, la tasa de cambio de y respecto al tiempo es la tasa de entrada menos la tasa de salida; esto es,

$$\frac{dy}{dt} = \text{tasa de entrada} - \text{tasa de salida}$$

SOLUCIÓN Sea y el número de libras de sal en el tanque al final de t minutos. De la salmuera que entra, el tanque gana 2.4 libras de sal por minuto; de la que sale, pierde $\frac{2}{120}y$ libras por minuto. Así,

$$\frac{dy}{dt} = 2.4 - \frac{1}{60}y$$

sujeta a la condición $y = 75$ cuando $t = 0$. La ecuación equivalente

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{60}y = 2.4$$

tiene el factor integrante $e^{t/60}$ y así

$$\frac{d}{dt}[ye^{t/60}] = 2.4e^{t/60}$$

Concluimos que

$$ye^{t/60} = \int 2.4e^{t/60}\,dt = (60)(2.4)e^{t/60} + C$$

Al sustituir $y = 75$ cuando $t = 0$ se obtiene $C = -69$, y así

$$y = e^{-t/60}[144e^{t/60} - 69] = 144 - 69e^{-t/60}$$

Al final de una hora ($t = 60$),

$$y = 144 - 69e^{-1} \approx 118.62 \text{ libras}$$

Observe que el valor límite para y cuando $t \to \infty$ es 144. Esto corresponde al hecho de que el tanque tomará finalmente la configuración de la salmuera que entra al depósito. Ciento veinte galones de salmuera con una concentración de 1.2 libras de sal por galón contendrán 144 libras de sal. ■

Ahora volvemos a un ejemplo de electricidad. De acuerdo con la **Ley de Kirchhoff**, un circuito eléctrico simple (véase la figura 2) que contiene un resistor con un aguante de R ohms y un inductor con una inductancia de L henrys en serie, con una fuerza electromotriz (una batería o un generador) que proporciona un voltaje de $E(t)$ voltios en el instante t, satisface

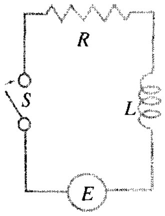


Figura 2

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

en donde I es la corriente medida en amperes. Ésta es una ecuación lineal que se resuelve con facilidad por medio del método de esta sección.

EJEMPLO 4 Considere un circuito (véase la figura 2) con $L = 2$ henrys, $R = 6$ ohms y una batería que proporciona un voltaje constante de 12 voltios. Si $I = 0$ en $t = 0$ (cuando se cierra el interruptor S, encuentre I en el instante t.

SOLUCIÓN La ecuación diferencial es

$$2\frac{dI}{dt} + 6I = 12 \quad \text{o} \quad \frac{dI}{dt} + 3I = 6$$

Siguiendo nuestro procedimiento estándar (multiplicar por el factor integrante e^{3t}, integrar y multiplicar por e^{-3t}), obtenemos

$$I = e^{-3t}(2e^{3t} + C) = 2 + Ce^{-3t}$$

La condición inicial, $I = 0$ en $t = 0$, da $C = -2$; de aquí que

$$I = 2 - 2e^{-3t}$$

Cuando aumenta t, la corriente tiende hacia una corriente de 2 amps. ■

Revisión de conceptos

1. La ecuación diferencial lineal general de primer orden tiene la forma $dy/dx + P(x)y = Q(x)$. Un factor integrante para esta ecuación es ________.

2. Al multiplicar ambos lados de la ecuación diferencial lineal de primer orden de la pregunta 1 por su factor integrante hace el lado izquierdo $\frac{d}{dx}$ (________).

3. El factor integrante para $dy/dx - (1/x)y = x$, en donde $x > 0$, es _____. Cuando multiplicamos ambos lados por este factor, la ecuación toma la forma ______. La solución general para esta ecuación es $y =$ ______.

4. La solución para la ecuación diferencial en la pregunta 1, que satisface $y(a) = b$ se denomina solución ______.

Conjunto de problemas 6.6

En los problemas del 1 al 14 resuelva la ecuación diferencial.

1. $\dfrac{dy}{dx} + y = e^{-x}$

2. $(x + 1)\dfrac{dy}{dx} + y = x^2 - 1$

3. $(1 - x^2)\dfrac{dy}{dx} + xy = ax, |x| < 1$

4. $y' + y \tan x = \sec x$

5. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = xe^x$

6. $y' - ay = f(x)$

7. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x}$

8. $y' + \dfrac{2y}{x + 1} = (x + 1)^3$

9. $y' + yf(x) = f(x)$

10. $\dfrac{dy}{dx} + 2y = x$ *Sugerencia:* $\int xe^{2x}\,dx = \dfrac{x}{2}e^{2x} - \dfrac{1}{4}e^{2x} + C$

11. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = 3x^3$; $y = 3$ cuando $x = 1$.

12. $y' = e^{2x} - 3y$; $y = 1$ cuando $x = 0$.

13. $xy' + (1 + x)y = e^{-x}$; $y = 0$ cuando $x = 1$.

14. $\operatorname{sen} x \dfrac{dy}{dx} + 2y \cos x = \operatorname{sen} 2x$; $y = 2$ cuando $x = \dfrac{\pi}{6}$.

15. Un depósito contiene 20 galones de una solución, con 10 libras de químico A en la solución. En un cierto instante, empezamos a agregar una solución que contiene el mismo químico en una concentración de 2 libras por galón. Vertimos a una velocidad de 3 galones por minuto mientras se drena la solución resultante (perfectamente mezclada) a la misma velocidad. Encuentra la cantidad de químico A en el depósito después de 20 minutos.

16. Al principio, un tanque contiene 200 galones de salmuera, con 50 libras de sal en solución. Al tanque entra salmuera que contiene 2 libras de sal por galón a una tasa de 4 galones por minuto, y sale a la misma tasa. Si la mezcla en el tanque se mantiene uniforme por agitación constante, encuentre la cantidad de sal en el tanque al final de 40 minutos.

17. Al inicio, un tanque contiene 120 galones de agua pura. 4 galones por minuto de salmuera con una libra de sal por galón entran al tanque, y la solución bien mezclada sale a una tasa de 6 galones por minuto. ¿Cuánta sal hay en el tanque después de t minutos, $0 \leq t \leq 60$?

18. Al principio, un tanque contiene 50 galones de salmuera, con 30 libras de sal en solución. Entra agua al tanque a 3 galones por minuto y la solución bien mezclada sale a 2 galones por minuto. ¿Cuánto tiempo pasará para que haya 25 libras de sal en el tanque?

19. Encuentre la corriente I como función del tiempo para el circuito de la figura 3, si el interruptor S se cierra cuando $I = 0$ en $t = 0$.

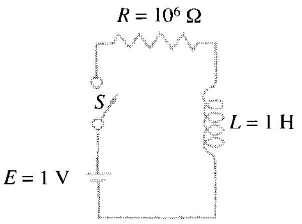


Figura 3

20. Encuentre I como función del tiempo para el circuito de la figura 4; suponga que el interruptor se cierra e $I = 0$ en $t = 0$.

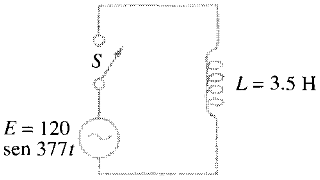


Figura 4

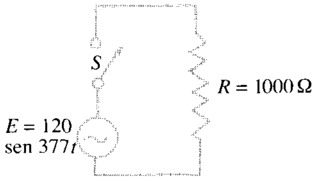


Figura 5

21. Encuentre I como función del tiempo para el circuito de la figura 5; suponga que el interruptor se cierra e $I = 0$ en $t = 0$.

22. Suponga que al principio el tanque 1 contiene 100 galones de solución con 50 libras de sal disuelta, y el tanque 2 contiene 200 galones con 150 libras de sal disuelta. Al tanque 1 entra agua pura a razón de 2 galones por minuto, la solución bien mezclada sale y entra al tanque 2 a la misma tasa, y finalmente la solución en el tanque 2 se drena también a la misma tasa. Denótense con $x(t)$ y $y(t)$ las cantidades de sal en los tanques 1 y 2, respectivamente, en el instante t. Encuentre $y(t)$. *Sugerencia:* primero encuentre $x(t)$ y utilícela para plantear la ecuación diferencial para el tanque 2.

23. Al principio, un depósito con capacidad de 100 galones está lleno con alcohol puro. La tasa de flujo por el tubo de salida es de 5 galones por minuto; la tasa de flujo del tubo que llena puede ajustarse a c galones por minuto. Una cantidad ilimitada de solución de alcohol al 25% puede introducirse a través del tubo que llena. Nuestra meta es reducir la cantidad de alcohol en el tanque, de modo que contenga 100 galones de solución al 50%. Sea T el número de minutos requeridos para realizar el cambio deseado.

(a) Evalúe T, si $c = 5$ y ambos tubos están abiertos.

(b) Evalúe T, si $c = 5$ y primero dejamos salir una cantidad suficiente de alcohol puro y luego cerramos el tubo de salida y abrimos el tubo que llena.

(c) ¿Para qué valores de c (si existen) la estrategia (b) daría un tiempo más rápido que (a)?

(d) Suponga que $c = 4$. Determine la ecuación para T, si al principio abrimos ambos tubos y luego cerramos el que drena.

EXPL **24.** La ecuación diferencial para un cuerpo que cae cerca de la superficie de la Tierra con resistencia al aire proporcional a la velocidad v es $dv/dt = -g - av$, donde $g = 32$ pies por segundo por segundo es la aceleración debida a la gravedad y $a > 0$ es el *coeficiente de resistencia*. Demuestre cada uno de lo siguiente:

(a) $v(t) = (v_0 - v_\infty)e^{-at} + v_\infty$, donde $v_0 = v(0)$, y

$$v_\infty = -g/a = \lim_{t\to\infty} v(t)$$

la llamada velocidad terminal.

(b) Si $y(t)$ denota la altura, entonces

$$y(t) = y_0 + tv_\infty + (1/a)(v_0 - v_\infty)(1 - e^{-at})$$

25. Una pelota se lanza directamente hacia arriba desde el nivel del suelo con una velocidad inicial $v_0 = 120$ pies por segundo. Suponiendo un coeficiente de resistencia de $a = 0.05$, determine cada uno de lo siguiente:

(a) la altura máxima

(b) una ecuación para T, el tiempo cuando la pelota llega al suelo

26. María saltó en paracaídas desde su aeroplano a una altura de 8000 pies, durante 15 segundos descendió en caída libre y después abrió su paracaídas. Suponga que los coeficientes de resistencia son $a = 0.10$ para caída libre y $a = 1.6$ con el paracaídas. ¿Cuánto tardó en llegar al suelo?

27. Para la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = x^2$, $x > 0$, el factor integrante es $e^{\int(-1/x)\,dx}$. La antiderivada general $\displaystyle\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx$ es igual a $-\ln x + C$.

(a) Multiplique ambos lados de la ecuación diferencial por $\exp\left(\displaystyle\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx\right) = \exp(-\ln x + C)$, y demuestre que $\exp(-\ln x + C)$ es un factor integrante para todo valor de C.

(b) Resuelva la ecuación resultante para y, y demuestre que la solución coincide con la solución obtenida cuando suponemos que $C = 0$ en el factor integrante.

28. Multiplique ambos lados de la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx}$ $P(x)y = Q(x)$ por el factor $e^{\int P(x)\,dx + C}$.

(a) Demuestre que $e^{\int P(x)\,dx + C}$ es un factor integrante para todo valor de C.

(b) Resuelva la ecuación resultante para y, y demuestre que coincide con la solución general dada antes del ejemplo 1.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $\exp\left(\int P(x)\,dx\right)$ **2.** $y\exp\left(\int P(x)\,dx\right)$ **3.** $1/x$; $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y}{x}\right) = 1$; $x^2 + Cx$ **4.** particular

---

6.7

Aproximaciones para ecuaciones diferenciales

En la sección anterior estudiamos varias ecuaciones diferenciables que surgen de aplicaciones físicas. Para cada ecuación, pudimos encontrar una **solución analítica**; es decir, encontramos una función explícita que satisface la ecuación. Muchas ecuaciones diferenciales no tienen tales soluciones analíticas, de modo que para estas ecuaciones debemos buscar aproximaciones. En esta sección estudiaremos dos formas de aproximar una solución de una ecuación diferencial: un método es gráfico y el otro numérico.

Una función de dos variables

La función f depende de dos variables. Como $y'(x) = f(x, y)$, la pendiente de una solución depende de *ambas* coordenadas x y y. Las funciones de dos o más variables se introdujeron en la sección 0.5. Las estudiaremos en el capítulo 12 con mayor detalle.

Campos de pendientes Considere una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$y' = f(x, y)$$

Esta ecuación dice que, en el punto (x, y), la pendiente de una solución está dada por $f(x, y)$. Por ejemplo, la ecuación diferencial $y' = y$ dice que la pendiente de la curva que pasa por el punto (x, y) es igual a y.

Para la ecuación diferencial $y' = \frac{1}{5}xy$, la pendiente de la solución en el punto $(5, 3)$ es $y' = \frac{1}{5}\cdot 5\cdot 3 = 3$; en el punto $(1, 4)$ la pendiente es $y' = \frac{1}{5}\cdot 1\cdot 4 = \frac{4}{5}$. Podemos indicar gráficamente este último resultado al trazar un pequeño segmento de recta por el punto $(1, 4)$ que tenga pendiente $\frac{4}{5}$ (véase la figura 1).

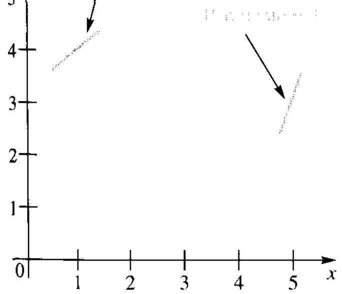


Figura 1

Si repetimos este proceso para varias parejas ordenadas (x, y), obtenemos un **campo de pendientes**. Como la graficación de un campo de pendientes es una tarea tediosa si se realiza a mano, esta tarea es más adecuada para las computadoras; *Mathematica* y *Maple* pueden graficar campos de pendientes. La figura 2 muestra un campo de pendientes para la ecuación diferencial $y' = \frac{1}{5}xy$. Dada una condición inicial, podemos seguir las pendientes para obtener una aproximación gruesa a la solución particular. Con frecuencia, el campo de pendientes nos permite ver el comportamiento de todas las soluciones de la ecuación diferencial.

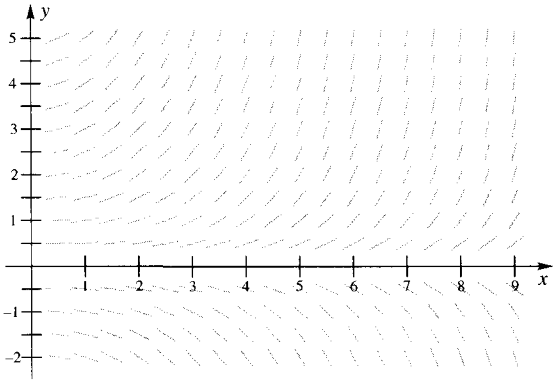


Figura 2

EJEMPLO 1 Suponga que el tamaño y de una población satisface la ecuación diferencial $y' = 0.2y(16 - y)$. El campo de pendientes para esta ecuación diferencial aparece en la figura 3.

(a) Bosqueje la solución que satisface la condición inicial $y(0) = 3$.

Describa el comportamiento de las soluciones cuando

(b) $y(0) > 16$, y (c) $0 < y(0) < 16$.

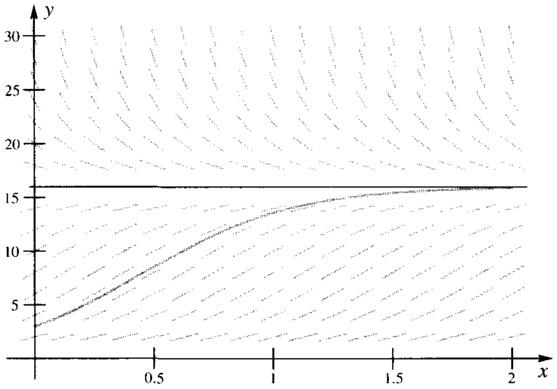


Figura 3

SOLUCIÓN

(a) La solución que satisface la condición inicial $y(0) = 3$ contiene al punto $(0, 3)$. A partir de ese punto y hacia la derecha, la solución sigue las líneas de pendientes. La curva de la figura 3 muestra una gráfica de la solución.

(b) Si $y(0) > 16$, entonces la solución decrece hacia la asíntota horizontal $y = 16$.

(c) Si $0 < y(0) < 16$, entonces la solución crece hacia la asíntota horizontal $y = 16$.

Las partes (b) y (c) indican que el tamaño de la población convergerá hacia el valor 16 para cualquier tamaño de población inicial. ■

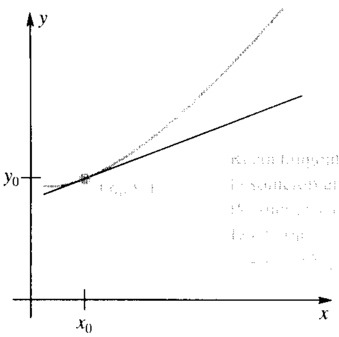


Figura 4

Método de Euler De nuevo, consideremos ecuaciones diferenciales de la forma $y' = f(x, y)$ con condición inicial $y(x_0) = y_0$. Recuerde que y es una función de x, sin importar que escribamos esto en forma explícita o no. La condición inicial $y(x_0) = y_0$ nos dice que la pareja ordenada (x_0, y_0) es un punto de la gráfica de la solución. También sabemos un poco más acerca de la solución desconocida: la pendiente de la recta tangente a la solución, en x_0, es $f(x_0, y_0)$. Esta información se resume en la figura 4.

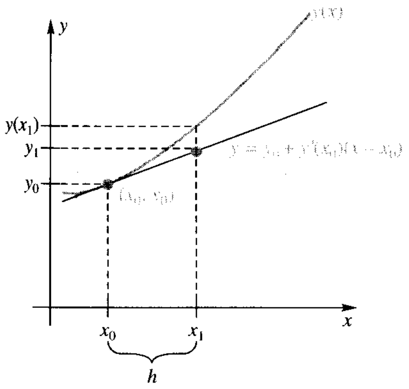


Figura 5

Si h es positiva, pero pequeña, es de esperar que la recta tangente, cuya ecuación es

$$P_1(x) = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

esté "cerca" de la solución y(x) en el intervalo $[x_0, x_0 + h]$. Sea $x_1 = x_0 + h$. Entonces, en x_1 tenemos

$$P_1(x_1) = y_0 + hy'(x_0) = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

Al hacer $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$, tenemos una aproximación para la solución en x_1. La figura 5 ilustra el método que acabamos de describir.

Como $y' = f(x, y)$, sabemos que la pendiente de la solución cuando $x = x_1$ es $f(x_1, y(x_1))$. En este punto no conocemos $y(x_1)$, pero tenemos su aproximación, y_1. Así, repetimos el proceso para obtener la estimación $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$ para la solución en el punto $x_2 = x_1 + h$. Este proceso, cuando continúa de esta forma, se llama **Método de Euler**, en honor del matemático suizo Leonhard Euler (1707–1783). (Euler se pronuncia "oiler"). El parámetro h se conoce con frecuencia como el **tamaño de paso**.

Algoritmo **Método de Euler**

Para aproximar la solución de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ con condición inicial $y(x_0) = y_0$, elija un tamaño de paso h y repita los siguientes pasos para $n = 1, 2, \ldots$

1. Haga $x_n = x_{n-1} + h$.
2. Haga $y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$.

Recuerde que la solución de una ecuación diferencial es una *función*. El Método de Euler no proporciona una función, sino que da un conjunto de parejas ordenadas que aproximan la solución y. Con frecuencia, este conjunto de parejas ordenadas basta para describir la solución de la ecuación diferencial.

Observe la diferencia entre $y(x_n)$ y y_n; $y(x_n)$ (por lo general desconocido) es el valor de la solución exacta en x_n y y_n es nuestra aproximación a la solución exacta en x_n. En otras palabras, y_n es nuestra aproximación de $y(x_n)$.

EJEMPLO 2 Utilice el Método de Euler con $h = 0.2$ para aproximar la solución de

$$y' = y, \qquad y(0) = 1$$

en el intervalo $[0, 1]$.

SOLUCIÓN Para este problema, $f(x, y) = y$. Comenzamos con $x_0 = 0$ y $y_0 = 1$, tenemos

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0.2 \cdot 1 = 1.2$$

$$y_2 = 1.2 + 0.2 \cdot 1.2 = 1.44$$

$$y_3 = 1.44 + 0.2 \cdot 1.44 = 1.728$$

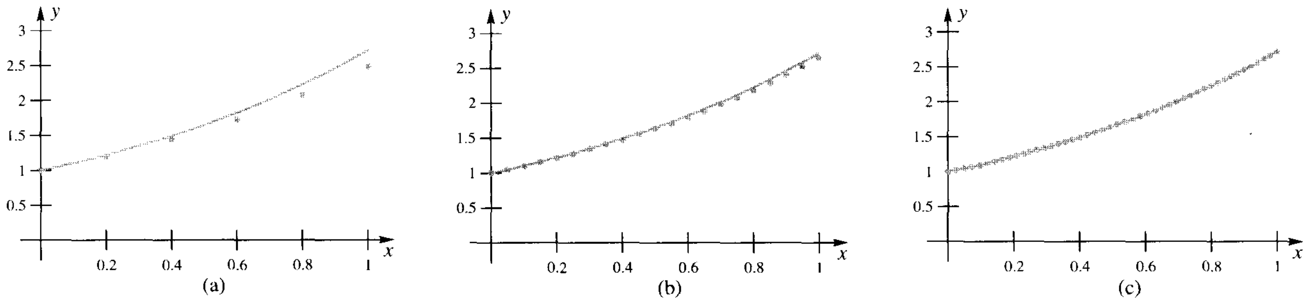
$$y_4 = 1.728 + 0.2 \cdot 1.728 = 2.0736$$

$$y_5 = 2.0736 + 0.2 \cdot 2.0736 = 2.48832$$ ■

La ecuación diferencial $y' = y$ dice que y es su propia derivada. Así, sabemos que una solución es $y(x) = e^x$, y de hecho $y(x) = e^x$ es la *solución*, pues sabemos que $y(0)$ debe ser 1. En este caso, podemos comparar los cinco valores de y estimados mediante el Método de Euler con los valores exactos de y, como se muestran en la tabla al margen. La figura 6a muestra las cinco aproximaciones (x_1, y_1), i = 1, 2, 3, 4, 5, para la solución y; la figura 6a también muestra la solución exacta $y(x) = e^x$. Al elegir un valor menor de h,

n	x_n	y_n	e^{x_n}
0	0.0	1.0	1.00000
1	0.2	1.2	1.22140
2	0.4	1.44	1.49182
3	0.6	1.728	1.82212
4	0.8	2.0736	2.22554
5	1.0	2.48832	2.71828

por lo general obtenemos una aproximación más precisa. Por supuesto, si elegimos una h menor, necesitaremos más pasos para llegar hasta $x = 1$.



(a) (b) (c)

Figura 6

EJEMPLO 3 Use el Método de Euler con $h = 0.05$ y $h = 0.01$ para aproximar la solución de

$$y' = y, \qquad y(0) = 1$$

en el intervalo $[0, 1]$.

SOLUCIÓN Procedemos como en el ejemplo 1, pero reducimos el tamaño de paso h a 0.05 y obtenemos la siguiente tabla

n	x_n	y_n	n	x_n	y_n
0	0.00	1.000000	11	0.55	1.710339
1	0.05	1.050000	12	0.60	1.795856
2	0.10	1.102500	13	0.65	1.885649
3	0.15	1.157625	14	0.70	1.979932
4	0.20	1.215506	15	0.75	2.078928
5	0.25	1.276282	16	0.80	2.182875
6	0.30	1.340096	17	0.85	2.292018
7	0.35	1.407100	18	0.90	2.406619
8	0.40	1.477455	19	0.95	2.526950
9	0.45	1.551328	20	1.00	2.653298
10	0.50	1.628895			

La figura 6b muestra la aproximación de la solución al usar el Método de Euler con $h = 0.05$.

Los cálculos son similares para el caso $h = 0.01$. Los resultados se resumen en la tabla al margen y en la figura 6c. ■

n	x_n	y_n
0	0.00	1.000000
1	0.01	1.010000
2	0.02	1.020100
3	0.03	1.030301
⋮	⋮	⋮
99	0.99	2.678033
100	1.00	2.704814

En el ejemplo 1, observe que al disminuir el tamaño de paso h, la aproximación a $y(1)$ (que en este caso es $e^1 \approx 2.718282$) mejora. Cuando $h = 0.2$, el error es aproximadamente $e - y_5 = 2.718282 - 2.488320 = 0.229962$. Las aproximaciones del error para otros tamaños de paso aparecen en la siguiente tabla:

h	Aproximación de Euler para $y(1)$	Error = Valor exacto – Valor Estimado
0.2	2.488320	0.229962
0.1	2.593742	0.124540
0.05	2.653298	0.064984
0.01	2.704814	0.013468
0.005	2.711517	0.006765

Observe en la tabla que al dividir *a la mitad* el tamaño de paso h, el error también *se divide a la mitad* (aproximadamente). Por lo tanto, el error en un punto dado es aproximadamente proporcional al tamaño de paso h. En la sección 4.6 encontramos un resultado similar con la integración numérica. Ahí vimos que el error para la suma de Riemann del punto izquierdo o del punto derecho es proporcional a $h = 1/n$ y que el error para la regla del trapecio es proporcional a $h^2 = 1/n^2$, donde n es el número de subintervalos. La regla parabólica es aún mejor, con un error proporcional a $h^4 = 1/n^4$. Esto hace surgir la pregunta de si hay un mejor método para aproximar la solución de $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. De hecho, varios métodos son mejores que el de Euler, en el sentido de que el error es proporcional a una potencia mayor de h. Estos métodos son conceptualmente similares al de Euler: son “métodos de un paso”de **Runge-Kutta de cuarto orden**, tiene un error que es proporcional a $h^4 = 1/n^4$.

Revisión de conceptos

1. Para la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ una gráfica de segmentos de recta cuyas pendientes son iguales a $f(x, y)$ se llama ______.

2. La base para el Método de Euler es que la ______ a la solución en x_0 será una buena aproximación a la solución en el intervalo $[x_0, x_0 + h]$.

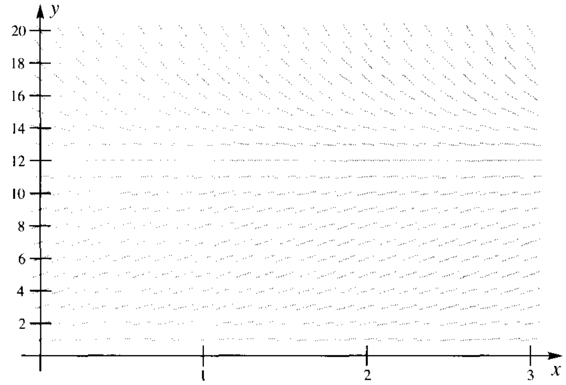
3. La fórmula recursiva para la aproximación de la solución de una ecuación diferencial mediante el Método de Euler es $y_n =$ ______.

4. Si la solución de una ecuación diferencial es cóncava hacia arriba, entonces el Método de Euler ______ (subestimará o sobreestimará) la solución.

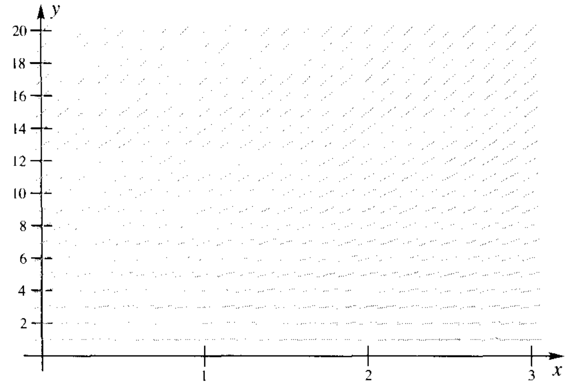
Conjunto de problemas 6.7

En los problemas del 1 al 4 se da un campo de pendientes para una ecuación diferencial de la forma $y = f(x, y)$. *Use el campo de pendientes para bosquejar la solución que satisfaga la condición inicial dada. En cada caso, determine* $\lim_{x\to\infty} y(x)$ *y aproxime* $y(2)$.

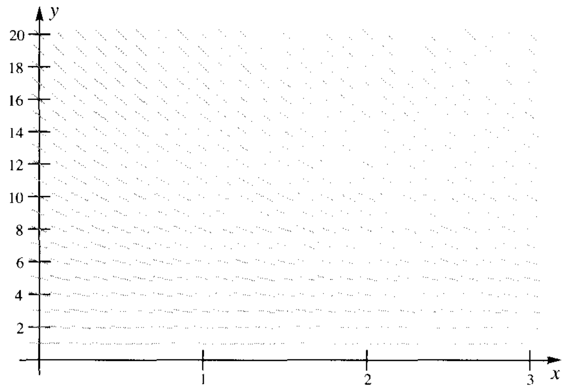
1. $y(0) = 5$



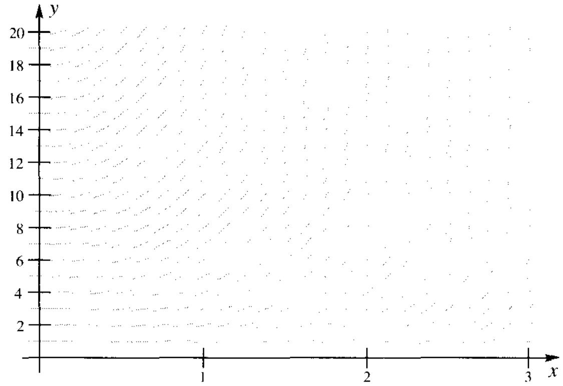
2. $y(0) = 6$



3. $y(0) = 16$

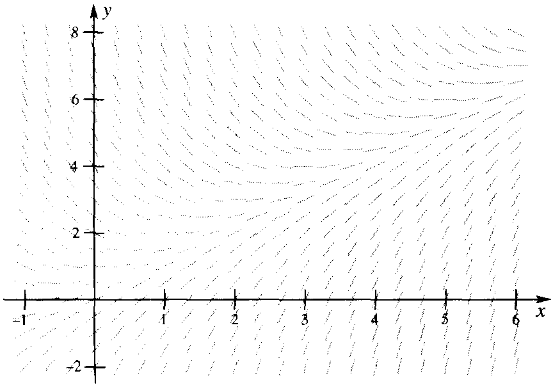


4. $y(1) = 3$

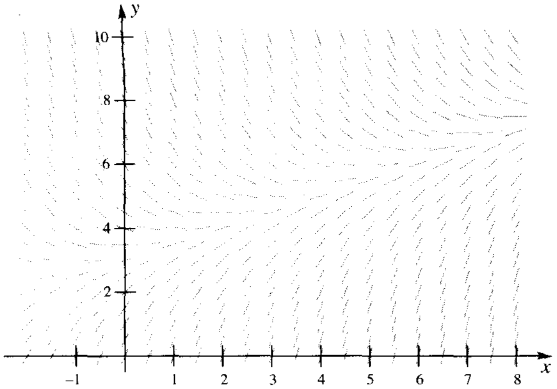


En los problemas 5 y 6 se da un campo de pendientes para una ecuación diferencial de la forma $y' = f(x, y)$. *En ambos casos, cada solución* *tiene la misma asíntota oblicua (véase la sección 3.5). Bosqueje la solución que satisface la condición inicial dada y determine la ecuación de la asíntota oblicua.*

5. $y(0) = 6$



6. $y(0) = 8$



CAS *En los problemas 7 al 10 grafique un campo de pendientes para cada ecuación diferencial. Utilice el método de separación de variables (sección 3.9) o un factor integrante (sección 6.6) para determinar una solución particular de la ecuación diferencial que satisfaga la condición inicial dada, y grafique la solución particular.*

7. $y' = \frac{1}{2}y;\ y(0) = \frac{1}{2}$

8. $y' = -y;\ y(0) = 4$

9. $y' = x - y + 2;\ y(0) = 4$

10. $y' = 2x - y + \frac{3}{2};\ y(0) = 3$

C *En los problemas 11 al 16 use el Método de Euler con $h = 0.2$ para aproximar la solución en el intervalo indicado.*

11. $y' = 2y,\ y(0) = 3,\ [0, 1]$

12. $y' = -y,\ y(0) = 2,\ [0, 1]$

13. $y' = x,\ y(0) = 0,\ [0, 1]$

14. $y' = x^2,\ y(0) = 0,\ [0, 1]$

15. $y' = xy,\ y(1) = 1,\ [1, 2]$

16. $y' = -2xy,\ y(1) = 2,\ [1, 2]$

17. Aplique el Método de Euler a la ecuación $y' = y, y(0) = 1$ con un tamaño de paso arbitrario $h = 1/N$, donde N es un entero positivo.

(a) Deduzca la relación $y_n = y_0(1 + h)^n$.

(b) Explique por qué y_N es una aproximación de e.

18. Suponga que la función $f(x, y)$ depende sólo de x. La ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ se puede escribir entonces como

$$y' = f(x), \qquad y(x_0) = 0$$

Explique la forma de aplicar el método de Euler a esta ecuación diferencial, si $y_0 = 0$.

19. Considere la ecuación diferencial $y' = f(x), y(x_0) = 0$ del problema 18. Para este problema, sean $f(x) = \text{sen}\, x^2, x_0 = 0$ y $h = 0.1$.

(a) Integre ambos lados de la ecuación desde x_0 hasta $x_1 = x_0 + h$. Para aproximar la integral use una suma de Riemann con un solo intervalo, evaluando el integrando en el punto extremo izquierdo.

(b) Integre ambos lados de x_0 a $x_2 = x_0 + 2h$. De nuevo, para aproximar la integral use una suma de Riemann con base en los extremos izquierdos, pero con dos intervalos.

(c) Continúe el proceso descrito en las partes (a) y (b) hasta que $x_n = 1$. Use una suma de Riemann con base en los extremos izquierdos de diez intervalos para aproximar la integral.

(d) Describa la forma en que se relaciona este método con el Método de Euler.

20. Repita los pasos desde (a) hasta (c) del problema 19 para la ecuación diferencial $y' = \sqrt{x + 1}, y(0) = 0$.

21. (Método de Euler mejorado) Considere el cambio Δy en la solución entre x_0 y x_1. Con base en el Método de Euler se obtiene una aproximación: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x_1) - y_0}{h} \approx \frac{\hat{y}_1 - y_0}{h} = f(x_0, y_0)$. (Aquí hemos utilizado $\hat{y}_1$ para indicar la aproximación de Euler a la solución en x_1). Se obtiene otra aproximación determinando una aproximación a la pendiente de la solución en x_1:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x_1) - y_0}{h} \approx f(x_1, y_1) \approx f(x_1, \hat{y}_1)$$

(a) Promedie estas dos soluciones para obtener una sola aproximación para $\Delta y/\Delta x$.

(b) Resuelva para $y = y(x_1)$ para obtener

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}[f(x_0, y_0) + f(x_1, \hat{y}_1)]$$

(c) Éste es el primer paso en el Método de Euler mejorado. Los pasos siguientes tienen el mismo patrón. Llene las líneas en blanco para el siguiente algoritmo de tres pasos que da lugar al Método de Euler mejorado:

1. Haga $x_n =$ ______________
2. Haga $\hat{y}_n =$ ________________
3. Haga $y_n =$ __________________

C *Para los problemas del 22 al 27 utilice el Método de Euler mejorado con $h = 0.2$ en las mismas ecuaciones de los problemas del 11 al 16. Compare sus respuestas con las obtenidas mediante el Método de Euler.*

CAS **28.** Aplique el Método de Euler mejorado a la ecuación $y' = y$, $y(0) = 1$, con $h = 0.2, 0.1, 0.05, 0.01$ y 0.005, para aproximar la solución en el intervalo $[0, 1]$. (Observe que la solución exacta es $y = e^x$, por lo que $y(1) = e$). Calcule el error en la aproximación de $y(1)$ (véanse el ejemplo 3 y el análisis subsiguiente) y llene la tabla siguiente. Para el Método de Euler mejorado, ¿el error es proporcional a h, h^2 o alguna otra potencia de h?

h	Error del Método de Euler	Error del Método de Euler mejorado
0.2	0.229962	0.015574
0.1	0.124540	
0.05	0.064984	0.001091
0.01	0.013468	0.000045
0.005	0.006765	

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** campo de pendientes **2.** recta tangente **3.** $y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$ **4.** subestima

6.8
Funciones trigonométricas inversas y sus derivadas

Las seis funciones trigonométricas fundamentales (seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante) se definieron en la sección 0.7, y en ocasiones las hemos utilizado en ejemplos y problemas. Con respecto a la noción de inversa, son funciones con problemas, ya que para cada y en su rango existe un número infinito de x que le corresponden (véase la figura 1). No obstante, vamos a introducir una noción de inversa para ellas. Que esto sea posible tiene como base un procedimiento denominado **restricción del dominio**, que se analizó brevemente en la sección 6.2.

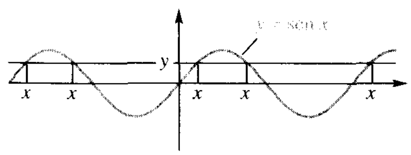


Figura 1

Seno inverso y coseno inverso En el caso de seno y coseno restringimos el dominio, manteniendo el rango tan grande como sea posible, mientras insistimos en que la función resultante tenga una inversa. Esto puede hacerse de muchas formas, pero el procedimiento acordado se sugiere por medio de las figuras 2 y 3. También mostramos la gráfica de la función inversa correspondiente, obtenida, como es usual, reflejando con respecto a la recta $y = x$.

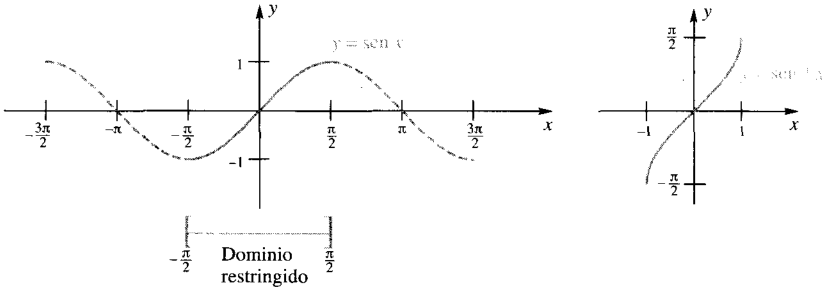


Figura 2

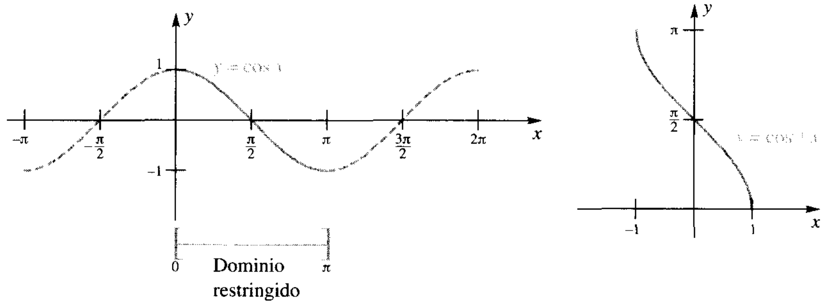


Figura 3

En una definición, formalizamos lo que hemos mostrado.

Definición

Para obtener inversas para seno y coseno restringimos sus dominios a $[-\pi/2, \pi/2]$ y $[0, \pi]$, respectivamente. Así,

$$x = \mathrm{sen}^{-1}\, y \iff y = \mathrm{sen}\, x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$x = \cos^{-1} y \iff y = \cos x, 0 \leq x \leq \pi$$

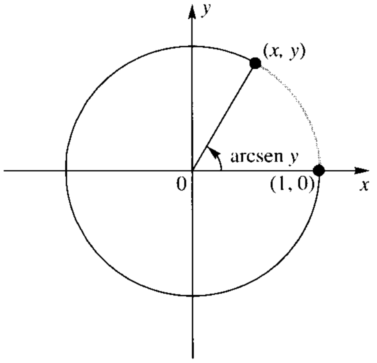


Figura 4

A veces se utiliza el símbolo arcsen para sen^{-1} y, de manera análoga, arccos se utiliza para $\cos^{-1}$. Considere arcsen como "el arco cuyo seno es" o "el ángulo cuyo seno es" (véase la figura 4). En lo que resta del libro utilizaremos ambas formas.

EJEMPLO 1 Calcule

(a) $\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{2}/2)$, (b) $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$,

(c) $\cos(\cos^{-1} 0.6)$, and (d) $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} 3\pi/2)$

SOLUCIÓN

(a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ (b) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

(c) $\cos(\cos^{-1} 0.6) = 0.6$ (d) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$

La única complicada de éstas es (d). Observe que sería incorrecto dar $3\pi/2$ como respuesta, ya que $\operatorname{sen}^{-1} y$ siempre está en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Resuelva el problema por pasos, como sigue.

$$\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}^{-1}(-1) = -\pi/2$$ ■

EJEMPLO 2 Use una calculadora para encontrar

(a) $\cos^{-1}(-0.61)$, (b) $\operatorname{sen}^{-1}(1.21)$, (c) $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} 4.13)$

SOLUCIÓN Utilice una calculadora en modo de radianes. Ésta ha sido programada para dar respuestas consistentes con las definiciones que hemos dado.

(a) $\cos^{-1}(-0.61) = 2.2268569$

(b) Su calculadora debe indicar un error, ya que $\operatorname{sen}^{-1}(1.21)$ no existe.

(c) $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} 4.13) = -0.9884073$ ■

Tangente inversa y secante inversa En la figura 5 mostramos la gráfica de la función tangente, su dominio restringido y la gráfica de $y = \tan^{-1} x$.

Existe un método estándar para restringir el dominio de la función cotangente, es decir, a $(0, \pi)$, de modo que tenga una inversa. Sin embargo, esta función no desempeña un papel importante en cálculo.

Otra manera de decirlo

$\operatorname{sen}^{-1} y$

es el número en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuyo seno es y.

$\cos^{-1} y$

es el número en el intervalo $[0, \pi]$ cuyo coseno es y.

$\tan^{-1} y$

es el número en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ cuya tangente es y.

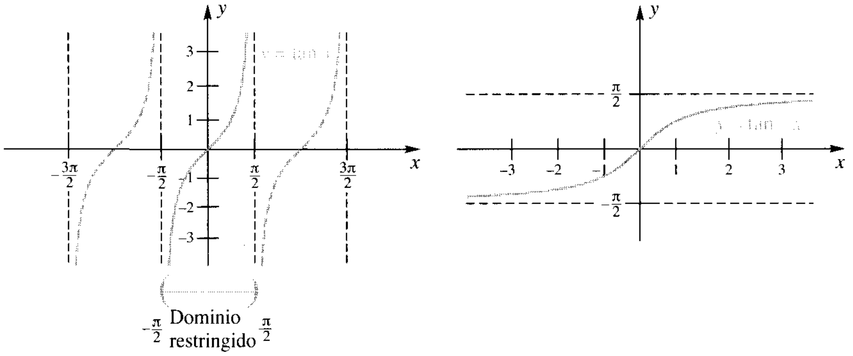


Figura 5

Para obtener una inversa de la secante, graficamos $y = \sec x$, restringimos su dominio de manera adecuada y después graficamos $y = \sec^{-1}x$ (véase la figura 6).

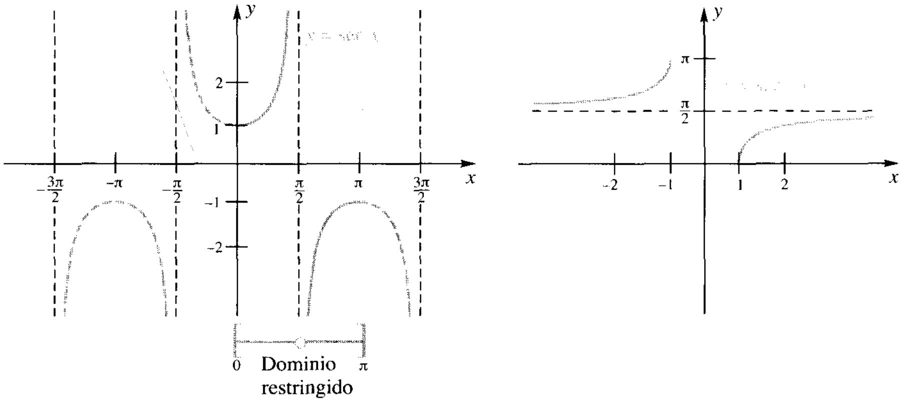


Figura 6

Definición

Para obtener inversas de la tangente y la secante, restringimos sus dominios a $(-\pi/2, \pi/2)$ y $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$, respectivamente. Así,

$$x = \tan^{-1} y \quad \Leftrightarrow \quad y = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$x = \sec^{-1} y \quad \Leftrightarrow \quad y = \sec x, 0 \le x \le \pi, x \ne \frac{\pi}{2}$$

Algunos autores restringen el dominio de la secante de una manera diferente. Así, si usted consulta otro texto, debe verificar la definición del autor. No tendremos necesidad de definir $\csc^{-1}$, aunque también puede hacerse.

EJEMPLO 3 Calcule

(a) $\tan^{-1}(1)$,
(b) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$,
(c) $\tan^{-1}(\tan 5.236)$,
(d) $\sec^{-1}(-1)$,
(e) $\sec^{-1}(2)$, and
(f) $\sec^{-1}(-1.32)$

SOLUCIÓN

(a) $\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$
(b) $\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

(c) $\tan^{-1}(\tan 5.236) = -1.0471853$

La mayoría de nosotros tiene problemas para recordar la secante; además, muchas calculadoras no tienen un botón para ella. Por lo tanto, le sugerimos que recuerde que $\sec x = 1/\cos x$. Con base en esto, se sigue que

$$\boxed{\sec^{-1} y = \cos^{-1}\left(\frac{1}{y}\right)}$$

y esto nos permite utilizar hechos conocidos acerca del coseno.

(d) $\sec^{-1}(-1) = \cos^{-1}(-1) = \pi$

(e) $\sec^{-1}(2) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

(f) $\sec^{-1}(-1.32) = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{1.32}\right) = \cos^{-1}(0.7575758)$

$= 2.4303875$ ■

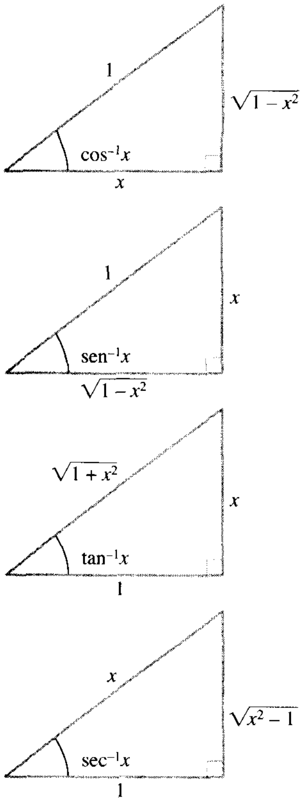


Figura 7

Cuatro identidades útiles El teorema A da algunas identidades útiles. Usted puede recordarlas en relación con los triángulos en la figura 7.

Teorema A

(i) $\operatorname{sen}(\cos^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$

(ii) $\cos(\operatorname{sen}^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$

(iii) $\sec(\tan^{-1} x) = \sqrt{1 + x^2}$

(iv) $\tan(\sec^{-1} x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1}, & \text{si } x \geq 1 \\ -\sqrt{x^2 - 1}, & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$

Demostración Para demostrar (i), recuérdese que $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$. Si $0 \leq \theta \leq \pi$, entonces

$$\operatorname{sen} \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

Ahora aplicamos esto con $\theta = \cos^{-1}x$ y utilizamos el hecho de que $\cos(\cos^{-1} x) = x$ para obtener

$$\operatorname{sen}(\cos^{-1} x) = \sqrt{1 - \cos^2(\cos^{-1} x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

La identidad (ii) se demuestra de una manera completamente similar. Para demostrar (iii) y (iv) utilice la identidad $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$, en lugar de $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$. ■

EJEMPLO 4 Calcule $\operatorname{sen}\left[2 \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]$.

SOLUCIÓN Recuerde la identidad del ángulo doble, $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$. Así,

$$\operatorname{sen}\left[2 \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right] = 2 \operatorname{sen}\left[\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right] \cos\left[\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]$$

$$= 2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$ ■

Derivadas de funciones trigonométricas Aprendimos en la sección 2.4 las fórmulas de las derivadas para las seis funciones trigonométricas. Deben memorizarse.

$D_x \operatorname{sen} x = \cos x$ $\quad D_x \cos x = -\operatorname{sen} x$

$D_x \tan x = \sec^2 x$ $\quad D_x \cot x = -\csc^2 x$

$D_x \sec x = \sec x \tan x$ $\quad D_x \csc x = -\csc x \cot x$

Podemos combinar las reglas anteriores con la regla de la cadena. Por ejemplo, si $u = f(x)$ es derivable, entonces

$$D_x \operatorname{sen} u = \cos u \cdot D_x u$$

Funciones trigonométricas inversas A partir del teorema de la función inversa (teorema 6.2B), concluimos que sen^{-1}, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$ y $\sec^{-1}$ son derivables. Nuestro objetivo es encontrar fórmulas paras sus derivadas. Establecemos los resultados y luego mostramos cómo pueden deducirse.

Teorema B **Derivadas de cuatro funciones trigonométricas inversas**

(i) $D_x \operatorname{sen}^{-1} x = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad -1 < x < 1$

(ii) $D_x \cos^{-1} x = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad -1 < x < 1$

(iii) $D_x \tan^{-1} x = \dfrac{1}{1 + x^2}$

(iv) $D_x \sec^{-1} x = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}, \qquad |x| > 1$

Demostración Nuestras demostraciones siguen el mismo patrón en cada caso. Para demostrar (i), sea $y = \operatorname{sen}^{-1} x$, de modo que

$$x = \operatorname{sen} y$$

Ahora derivamos ambos lados con respecto a x, utilizando la regla de la cadena en el lado derecho. Entonces

$$\begin{aligned} 1 &= \cos y\, D_x y = \cos(\operatorname{sen}^{-1} x)\, D_x(\operatorname{sen}^{-1} x) \\ &= \sqrt{1 - x^2}\, D_x(\operatorname{sen}^{-1} x) \end{aligned}$$

En el último paso usamos el teorema A(ii). Concluimos que $D_x(\operatorname{sen}^{-1} x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$.

Los resultados (ii), (iii) y (iv) se demuestran de manera análoga, pero (iv) tiene una pequeña peculiaridad. Sea $y = \sec^{-1} x$, de modo que

$$x = \sec y$$

Derivando ambos lados con respecto a x y utilizando el teorema A(iv), obtenemos

$$\begin{aligned} 1 &= \sec y \tan y\, D_x y \\ &= \sec(\sec^{-1} x) \tan(\sec^{-1} x)\, D_x(\sec^{-1} x) \\ &= \begin{cases} x\sqrt{x^2 - 1}\, D_x(\sec^{-1} x), & \text{si } x \geq 1 \\ x\left(-\sqrt{x^2 - 1}\right) D_x(\sec^{-1} x), & \text{si } x \leq -1 \end{cases} \\ &= |x|\sqrt{x^2 - 1}\, D_x(\sec^{-1} x) \end{aligned}$$

El resultado deseado se sigue de manera inmediata. ■

$D_x \sec^{-1} x$

He aquí otra forma de deducir la fórmula para la derivada de $\sec^{-1} x$.

$$\begin{aligned} D_x \sec^{-1} x &= D_x \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1 - 1/x^2}} \cdot \frac{-1}{x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2}}{x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{|x|}{x^2} \\ &= \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Encuentre $D_x \operatorname{sen}^{-1}(3x - 1)$.

SOLUCIÓN Utilizamos el teorema B(i) y la regla de la cadena.

$$\begin{aligned} D_x \operatorname{sen}^{-1}(3x - 1) &= \frac{1}{\sqrt{1 - (3x - 1)^2}} D_x(3x - 1) \\ &= \frac{3}{\sqrt{-9x^2 + 6x}} \end{aligned}$$

■

Por supuesto, cada fórmula de derivación lleva a una fórmula de integración, un tema acerca del cual diremos mucho más en el capítulo siguiente. En particular,

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \operatorname{sen}^{-1} x + C$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + C$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1}|x| + C$

Estas fórmulas de integración se pueden generalizar un poco (véanse los problemas del 81 al 84) a lo siguiente:

1′. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

2′. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

3′. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{|x|}{a}\right) + C$

EJEMPLO 6 Evalúe $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$.

SOLUCIÓN

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \left[\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^1 = \operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2} - \operatorname{sen}^{-1} 0 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$$ ■

EJEMPLO 7 Evalúe $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{5-9x^2}}\,dx$.

SOLUCIÓN Considere $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$. Haga $u = 3x$, por lo que $du = 3\,dx$. Entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{\sqrt{5-9x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{5-u^2}}\,du = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right) + C\\ &= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3x}{\sqrt{5}}\right) + C\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 8 Evalúe $\displaystyle\int \frac{e^x}{4+9e^{2x}}\,dx$.

SOLUCIÓN Considere $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+u^2}\,du$. Haga $u = 3\,e^x$, por lo que $du = 3e^x\,dx$. Entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{4+9e^{2x}}\,dx &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{4+9e^{2x}}(3e^x\,dx) = \frac{1}{3}\int \frac{1}{4+u^2}\,du\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C = \frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{3e^x}{2}\right) + C\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 9 Evalúe $\displaystyle\int_6^{18} \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}}\,dx$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\int_6^{18} \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}}\,dx &= \frac{1}{3}\left[\sec^{-1}\frac{|x|}{3}\right]_6^{18}\\ &= \frac{1}{3}\left(\sec^{-1}\frac{|18|}{3} - \sec^{-1}\frac{|6|}{3}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\sec^{-1} 6 - \frac{\pi}{3}\right) \approx 0.1187\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 10 Un hombre que está parado en la cima de un acantilado está 200 pies por arriba de un lago. Observa un bote que se aleja directamente del pie del acantilado a una velocidad de 25 pies por segundo. ¿Qué tan rápido cambia el ángulo de depresión de su visual cuando el bote está a 150 pies del pie del acantilado?

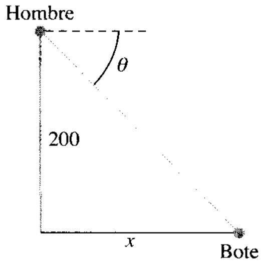


Figura 8

SOLUCIÓN Los detalles esenciales se muestran en la figura 8. Observe que θ, el ángulo de depresión, es

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{200}{x}\right)$$

Así,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1 + (200/x)^2}\cdot\frac{-200}{x^2}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{-200}{x^2 + 40{,}000}\cdot\frac{dx}{dt}$$

Cuando sustituimos $x = 150$ y $dx/dt = 25$, obtenemos $d\theta/dt = -0.08$ radianes por segundo. ■

Manipulación del integrando Antes de que haga una sustitución, puede encontrar útil reescribir el integrando de una forma más conveniente. Con frecuencia, las integrales con expresiones cuadráticas en el denominador se pueden reducir a formas estándar *completando el cuadrado*. Recuerde que $x^2 + bx$ se transforma en un cuadrado perfecto, al sumarle $(b/2)^2$.

EJEMPLO 11 Evalúe $\displaystyle\int \frac{7}{x^2 - 6x + 25}\,dx$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\int \frac{7}{x^2 - 6x + 25}\,dx &= \int \frac{7}{x^2 - 6x + 9 + 16}\,dx\\ &= 7\int \frac{1}{(x-3)^2 + 4^2}\,dx\\ &= \frac{7}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x-3}{4}\right) + C\end{aligned}$$

En el último paso hicimos la sustitución $u = x - 3$, en forma mental. ■

Revisión de conceptos

1. Para obtener una inversa de la función seno restringimos su dominio a _______. La función inversa resultante se denota por sen^{-1} o por _______.

2. Para obtener una inversa de la función tangente restringimos su dominio a _______. La función inversa resultante se denota por $\tan^{-1}$ o por _______.

3. $D_x\,\text{sen}(\text{arcsen}\,x) =$ _____.

4. Como $D_x \arctan x = 1/(1 + x^2)$, se sigue que $4\int_0^1 1/(1 + x^2)\,dx = =$ _____.

Conjunto de problemas 6.8

En los problemas del 1 al 10, sin utilizar una calculadora, encuentre el valor exacto.

1. $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
2. $\text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
3. $\text{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
4. $\text{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
5. $\arctan(\sqrt{3})$
6. $\text{arcsec}\,(2)$
7. $\text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$
8. $\tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
9. $\text{sen}(\text{sen}^{-1}\,0.4567)$
10. $\cos(\text{sen}^{-1}\,0.56)$

En los problemas del 11 al 18 aproxime cada valor.

11. $\operatorname{sen}^{-1}(0.1113)$ **12.** $\arccos(0.6341)$

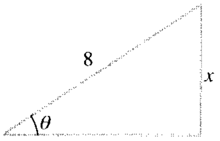
13. $\cos(\operatorname{arccot} 3.212)$ **14.** $\sec(\arccos 0.5111)$

15. $\sec^{-1}(-2.222)$ **16.** $\tan^{-1}(-60.11)$

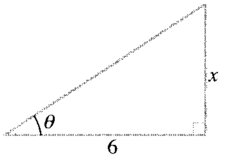
17. $\cos(\operatorname{sen}(\tan^{-1} 2.001))$ **18.** $\operatorname{sen}^2(\ln(\cos 0.5555))$

En los problemas del 19 al 24 exprese θ en términos de x utilizando las funciones trigonométricas inversas sen^{-1}, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$ *y* $\sec^{-1}$.

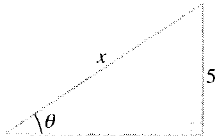
19.



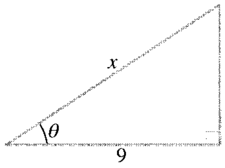
20.



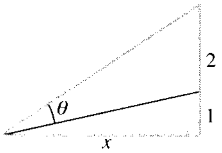
21.



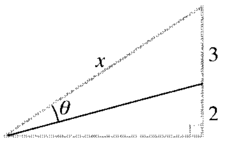
22.



23.



24.



En los problemas del 25 al 28 encuentre cada valor sin utilizar una calculadora (véase el ejemplo 4).

25. $\cos\left[2\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)\right]$ **26.** $\tan\left[2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]$

27. $\operatorname{sen}\left[\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)+\cos^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)\right]$

28. $\cos\left[\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)+\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)\right]$

En los problemas del 29 al 32 demuestre que cada ecuación es una identidad.

29. $\tan(\operatorname{sen}^{-1} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

30. $\operatorname{sen}(\tan^{-1} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

31. $\cos(2\operatorname{sen}^{-1} x) = 1 - 2x^2$

32. $\tan(2\tan^{-1} x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$

33. Encuentre cada límite.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \tan^{-1} x$ (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \tan^{-1} x$

34. Encuentre cada límite.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \sec^{-1} x$ (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sec^{-1} x$

35. Encuentre cada límite.

(a) $\lim\limits_{x\to1^-} \operatorname{sen}^{-1} x$ (b) $\lim\limits_{x\to-1^+} \operatorname{sen}^{-1} x$

36. ¿Existe $\lim\limits_{x\to1} \operatorname{sen}^{-1} x$? Explique.

37. Describa lo que sucede a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ en el punto c, si c se aproxima a 1 por la izquierda.

38. Bosqueje de la gráfica de $y = \cot^{-1} x$, suponiendo que se ha obtenido al restringir el dominio de la cotangente a $(0, \pi)$.

En los problemas del 39 al 54 encuentre dy/dx.

39. $y = \ln(2 + \operatorname{sen} x)$ **40.** $y = e^{\tan x}$

41. $y = \ln(\sec x + \tan x)$ **42.** $y = -\ln(\csc x + \cot x)$

43. $y = \operatorname{sen}^{-1}(2x^2)$ **44.** $y = \arccos(e^x)$

45. $y = x^3 \tan^{-1}(e^x)$ **46.** $y = e^x \operatorname{arcsen} x^2$

47. $y = (\tan^{-1} x)^3$ **48.** $y = \tan(\cos^{-1} x)$

49. $y = \sec^{-1}(x^3)$ **50.** $y = (\sec^{-1} x)^3$

51. $y = (1 + \operatorname{sen}^{-1} x)^3$ **52.** $y = \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{1}{x^2+4}\right)$

53. $y = \tan^{-1}(\ln x^2)$ **54.** $y = x \operatorname{arcsec}(x^2 + 1)$

En los problemas del 55 al 72 evalúe cada integral.

55. $\displaystyle\int \cos 3x\, dx$ **56.** $\displaystyle\int x \operatorname{sen}(x^2)\, dx$

57. $\displaystyle\int \operatorname{sen} 2x \cos 2x\, dx$ **58.** $\displaystyle\int \tan x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx$

59. $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}\cos(e^{2x})\, dx$ **60.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx$

61. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ **62.** $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

63. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\, dx$ **64.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos^2\theta}\, d\theta$

65. $\displaystyle\int \frac{1}{1+4x^2}\, dx$ **66.** $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx$

67. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{12-9x^2}}\, dx$ **68.** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{12-9x^2}}\, dx$

69. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-6x+13}\, dx$ **70.** $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2+8x+25}\, dx$

71. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2-9}}\, dx$ **72.** $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{4-9x^2}}\, dx$

C **73.** Una pintura de 5 pies de altura está colgada en una pared de modo que su parte inferior está a 8 pies del piso, como se muestra en la figura 9. Una observadora, con el nivel de sus ojos a 5.4 pies, está parada a b pies de la pared. Exprese θ, el ángulo vertical subtendido por la pintura a su ojo, en términos de b, y después encuentre θ, si $b = 12.9$ pies.

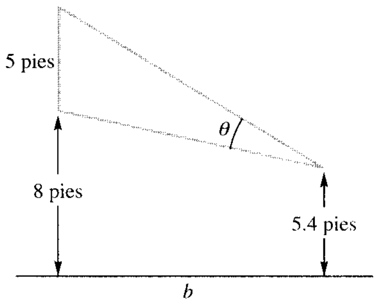


Figura 9

74. Encuentre fórmulas para $f^{-1}(x)$ para cada una de las siguientes funciones f, primero indique cómo restringiría el dominio de modo que f tenga una inversa. Por ejemplo, si $f(x) = 3 \operatorname{sen} 2x$, y restringimos el dominio a $-\pi/4 \le x \le \pi/4$, entonces $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}(x/3)$.

(a) $f(x) = 3 \cos 2x$

(b) $f(x) = 2 \operatorname{sen} 3x$

(c) $f(x) = \frac{1}{2} \tan x$

(d) $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

75. Por medio del uso repetido de la fórmula para la suma,

$$\tan(x + y) = (\tan x + \tan y)/(1 - \tan x \tan y)$$

demuestre que

$$\frac{\pi}{4} = 3 \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{5}{99}\right)$$

76. Verifique que

$$\frac{\pi}{4} = 4 \tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)$$

un resultado descubierto por John Machin en 1706 y utilizado por él para calcular los primeros 100 lugares decimales de π.

77. Sin utilizar cálculo, encuentre una fórmula para el área de la región sombreada en la figura 10 en términos de a y b. Observe que el centro del círculo mayor está en el borde del más pequeño.

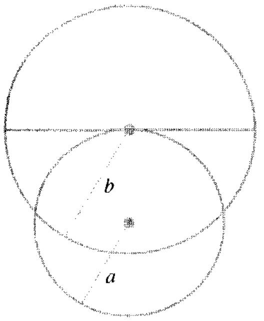


Figura 10

GC **78.** Dibuje las gráficas de

$$y = \operatorname{arcsen} x \qquad \text{y} \qquad y = \arctan\left(x/\sqrt{1 - x^2}\right)$$

utilizando los mismos ejes. Formule una conjetura. Demuéstrela.

GC **79.** Dibuje la gráfica de $y = \pi/2 - \operatorname{arcsen} x$. Haga una conjetura. Demuéstrela.

GC **80.** Dibuje la gráfica de $y = \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)$ en $[-1, 1]$. Después dibuje la gráfica de $y = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$ en $[-2\pi, 2\pi]$. Explique las diferencias que observe.

81. Demuestre que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} + C, \qquad a > 0$$

escribiendo $a^2 - x^2 = a^2[1 - (x/a)^2]$ y haciendo la sustitución $u = x/a$.

82. Demuestre el resultado del problema 81 derivando el lado derecho para obtener el integrando.

83. Demuestre que

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C, \qquad a \neq 0$$

84. Demuestre que

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{|x|}{a} + C, \qquad a > 0$$

85. Demuestre, derivando el lado derecho, que

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} + C, \qquad a > 0$$

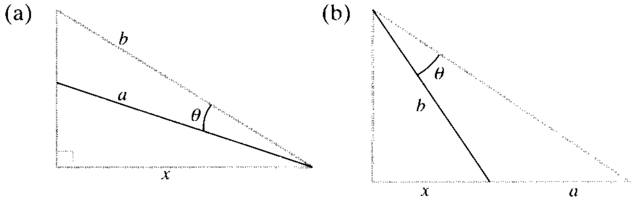
86. Utilice el resultado del problema 85 para demostrar que

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi a^2}{2}$$

¿Por qué éste es el resultado esperado?

87. El borde inferior de un mural, de 10 pies de alto, está 2 pies por encima del nivel del ojo del observador. Encuentre la distancia ideal b a la que debe alejarse de la pared para ver el mural; esto es, encuentre b que maximiza el ángulo subtendido por el ojo del observador. (Véase el problema 73).

88. Exprese $d\theta/dt$ en términos de x, dx/dt, y las constantes a y b.



89. Se ha terminado el trabajo estructural de acero de un nuevo edificio de oficinas. Cruzando la calle, a 60 pies de la planta baja del elevador de carga en el edificio, un espectador está de pie y observa el elevador de carga que sube a una velocidad constante de 15 pies por segundo. ¿Qué tan rápido aumenta el ángulo de elevación de la visual del espectador al elevador después de 6 segundos que su visual pasa la horizontal?

90. Un aeroplano vuela a una altura constante de 2 millas y a una velocidad constante de 600 millas por hora, en línea recta que pasará directamente por encima de una observadora, que está en el piso. ¿Qué tan rápido está aumentando el ángulo de elevación de la visual de la observadora cuando la distancia de ella al aeroplano está a 3 millas? Proporcione su resultado en radianes por minuto.

91. La luz giratoria de un faro está ubicada en una isla y se encuentra a 2 millas del punto más cercano P de una playa recta en tierra firme. El faro lanza un rayo de luz que se mueve a lo largo de la playa conforme gira. Si la velocidad del rayo de luz sobre la playa es de 5π millas por minuto cuando el punto iluminado está a 1 milla de P, ¿a qué velocidad está girando el faro?

92. Un hombre en un muelle jala una cuerda atada a un bote de remos, a una velocidad de 5 pies por segundo. Si las manos del hombre están 8 pies por arriba del punto en donde la cuerda está sujeta al bote, ¿qué tan rápido está cambiando el ángulo de depresión de la cuerda cuando aún quedan 17 pies de cuerda por recoger?

C **93.** Una visitante del espacio exterior se aproxima a la Tierra (radio = 6376 kilómetros) a 2 kilómetros por segundo. ¿A qué velocidad aumenta el ángulo θ subtendido por la Tierra a su ojo cuando ella está a 3000 kilómetros de la superficie?

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $[-\pi/2, \pi/2]$; arcsen **2.** $(-\pi/2, \pi/2)$; arctan **3.** 1 **4.** π

6.9

Funciones hiperbólicas y sus inversas

En matemáticas y ciencias aparecen, tan frecuentemente, ciertas combinaciones de e^x y e^{-x} que se les da nombres especiales.

Definición Funciones hiperbólicas

El seno hiperbólico, coseno hiperbólico y cuatro funciones relacionadas se definen por

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$$

La terminología sugiere que debe haber alguna relación con las funciones trigonométricas; la hay. Primera, la identidad fundamental para las funciones hiperbólicas (en reminiscencia de $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ en trigonometría) es

$$\boxed{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1}$$

Para verificarla, escribimos

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1$$

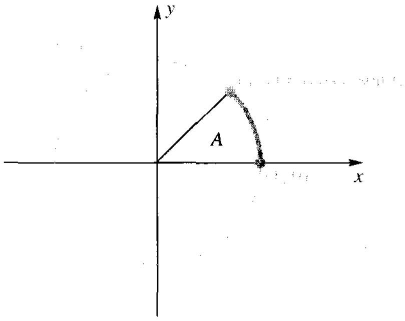


Figura 1

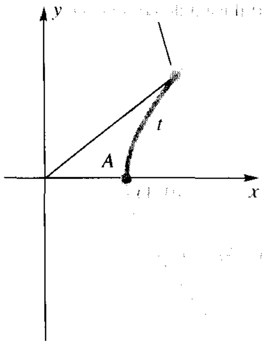


Figura 2

Segunda, recuerde que las funciones trigonométricas están íntimamente relacionadas con el círculo trigonométrico (véase la figura 1), de modo que, en ocasiones se les llama *funciones circulares*. En efecto, las ecuaciones paramétricas $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ describen a la circunferencia unitaria. De una forma semejante, las ecuaciones paramétricas $x = \cosh t$, $y = \operatorname{senh} t$, describen la rama derecha de la hipérbola unitaria $x^2 - y^2 = 1$ (véase la figura 2). Además, en ambos casos el parámetro t está relacionado con el área sombreada A mediante $t = 2A$, aunque no es obvio en el segundo caso (véase el problema 56).

Ya que $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh}(x)$, senh es una función impar; $\cosh(-x) = \cosh x$, de modo que cosh es una función par. De manera correspondiente, la gráfica de $y = \operatorname{senh} x$ es simétrica con respecto al origen y la gráfica de $y = \cosh x$ es simétrica con respecto al eje y. De manera análoga, tanh es una función impar y sech es una función par. Las gráficas se muestran en la figura 3.

Derivadas de funciones hiperbólicas Podemos encontrar $D_x \operatorname{senh} x$ y $D_x \cosh x$ de manera directa a partir de las definiciones

$$D_x \operatorname{senh} x = D_x\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

y

$$D_x \cosh x = D_x\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh} x$$

Observe que estos hechos confirman el carácter de las gráficas de la figura 3. Por ejemplo, ya que $D_x(\operatorname{senh} x) = \cosh x > 0$, la gráfica de seno hiperbólico siempre está ascendiendo. De manera análoga, $D_x^2(\cosh x) = \cosh x > 0$, lo cual significa que la gráfica del coseno hiperbólico es cóncava hacia arriba.

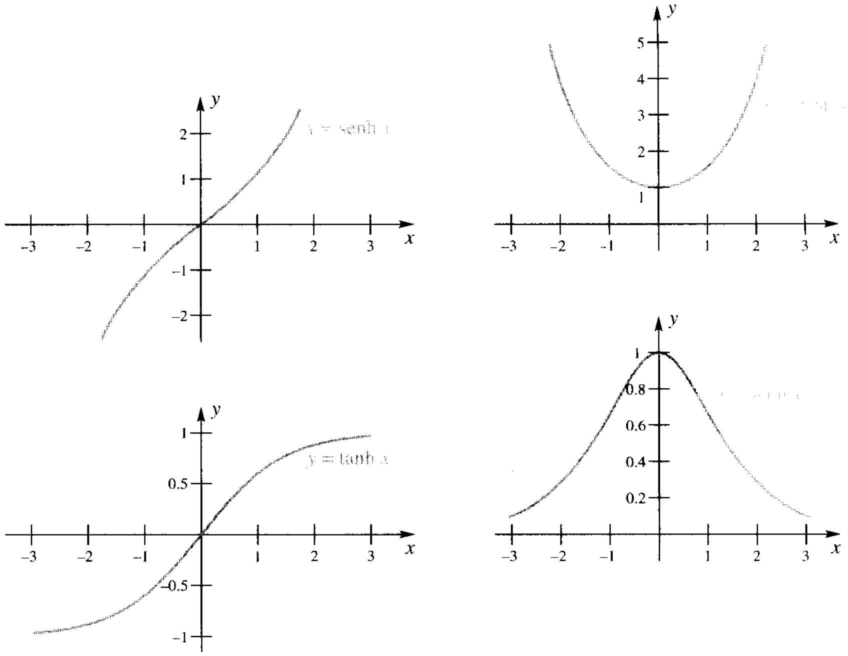


Figura 3

Las derivadas de las otras cuatro funciones hiperbólicas se deducen de las correspondientes a las otras dos, combinadas con la regla del cociente. Los resultados se resumen en el teorema A.

Teorema A **Derivadas de las funciones hiperbólicas**

$$D_x \operatorname{senh} x = \cosh x \qquad D_x \cosh x = \operatorname{senh} x$$

$$D_x \tanh x = \operatorname{sech}^2 x \qquad D_x \coth x = -\operatorname{csch}^2 x$$

$$D_x \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x \qquad D_x \operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x$$

Otra forma en la que las funciones trigonométricas y las hiperbólicas están relacionadas concierne a ecuaciones diferenciales. Las funciones sen x y cos x son soluciones de la ecuación diferencial de segundo orden $y'' = -y$, y senh x y cosh x son soluciones de la ecuación diferencial $y'' = y$.

EJEMPLO 1 Encuentre $D_x \tanh(\operatorname{sen} x)$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} D_x \tanh(\operatorname{sen} x) &= \operatorname{sech}^2(\operatorname{sen} x)\, D_x(\operatorname{sen} x) \\ &= \cos x \cdot \operatorname{sech}^2(\operatorname{sen} x) \end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 2 Encuentre $D_x \cosh^2(3x - 1)$.

SOLUCIÓN Aplicamos dos veces la regla de la cadena.

$$\begin{aligned} D_x \cosh^2(3x - 1) &= 2\cosh(3x - 1)\, D_x \cosh(3x - 1) \\ &= 2\cosh(3x - 1)\operatorname{senh}(3x - 1)\, D_x(3x - 1) \\ &= 6\cosh(3x - 1)\operatorname{senh}(3x - 1) \end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 3 Encuentre $\int \tanh x\, dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = \cosh x$, por lo que $du = \operatorname{senh} x\, dx$.

$$\int \tanh x\, dx = \int \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}\, dx = \int \frac{1}{u}\, du$$

$$= \ln|u| + C = \ln|\cosh x| + C = \ln(\cosh x) + C$$

Podríamos quitar los signos de valor absoluto, ya que $\cosh x > 0$. ■

Funciones hiperbólicas inversas Como seno hiperbólico y tangente hiperbólico tienen derivadas positivas, son funciones crecientes y de manera automática tienen inversas. Para obtener inversas para coseno hiperbólico y secante hiperbólica, restringimos sus dominios a $x \geq 0$. Así,

$$x = \operatorname{senh}^{-1} y \iff y = \operatorname{senh} x$$

$$x = \cosh^{-1} y \iff y = \cosh x \quad \text{y} \quad x \geq 0$$

$$x = \tanh^{-1} y \iff y = \tanh x$$

$$x = \operatorname{sech}^{-1} y \iff y = \operatorname{sech} x \quad \text{y} \quad x \geq 0$$

Como las funciones hiperbólicas están definidas en términos de e^x y e^{-x}, no es sorprendente que las funciones hiperbólicas inversas puedan expresarse en términos de logaritmos naturales. Por ejemplo, considere $y = \cosh x$ para $x \geq 0$; esto es, considere

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad x \geq 0$$

Nuestra meta es resolver esta ecuación para x, la cual dará $\cosh^{-1} y$. Al multiplicar ambos miembros por $2e^x$, obtenemos $2ye^x = e^{2x} + 1$, o

$$(e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0, \qquad x \geq 0$$

Si resolvemos esta ecuación cuadrática en e^x, obtenemos

$$e^x = \frac{2y + \sqrt{(2y)^2 - 4}}{2} = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

La fórmula cuadrática da dos soluciones, la dada antes y $\left(2y - \sqrt{(2y)^2 - 4}\right)/2$. Esta última solución es extraña porque es menor que uno, mientras que e^x es mayor que 1 para toda $x > 0$. Así, $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$, de modo que

$$x = \cosh^{-1} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

Argumentos similares se aplican a cada una de las funciones hiperbólicas inversas. Obtenemos los siguientes resultados (observe que los papeles de x y y se han intercambiado). La figura 3 sugiere las restricciones necesarias del dominio. Las gráficas de las funciones hiperbólicas inversas se muestran en la figura 4.

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \qquad x \geq 1$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}, \qquad -1 < x < 1$$

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right), \qquad 0 < x \leq 1$$

Cada una de estas funciones es derivable. De hecho,

$$D_x \operatorname{senh}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$D_x \cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \qquad x > 1$$

$$D_x \tanh^{-1} x = \frac{1}{1-x^2}, \qquad -1 < x < 1$$

$$D_x \operatorname{sech}^{-1} x = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}, \qquad 0 < x < 1$$

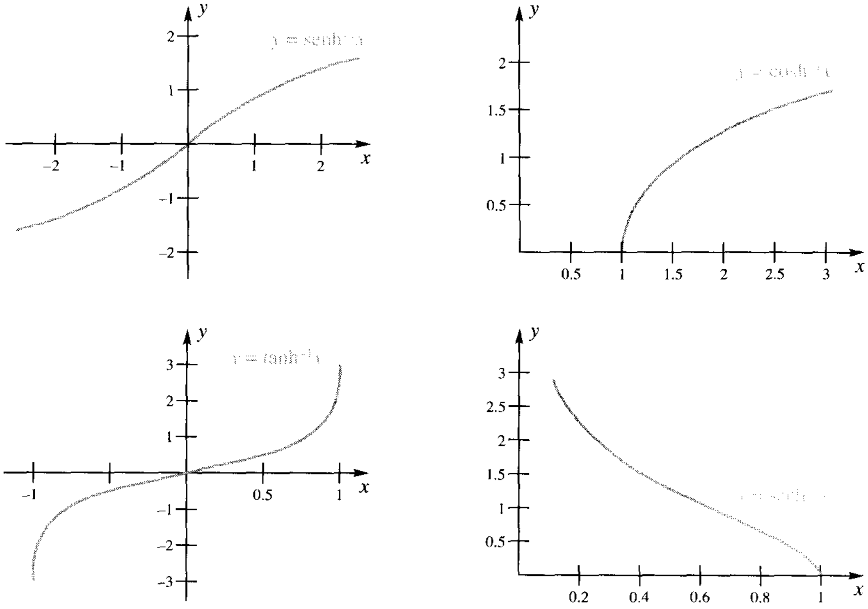


Figura 4

EJEMPLO 4 Demuestre que $D_x \operatorname{senh}^{-1} x = 1/\sqrt{x^2+1}$ por medio de dos métodos diferentes.

SOLUCIÓN

Método 1 Sea $y = \operatorname{senh}^{-1} x$, de modo que

$$x = \operatorname{senh} y$$

Ahora derive ambos lados respecto a x

$$1 = (\cosh y)\, D_x y$$

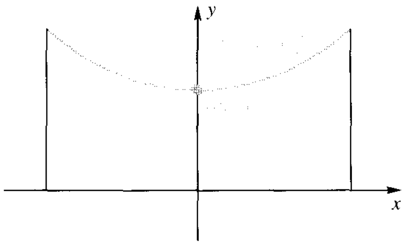
Así,

$$D_x y = D_x(\operatorname{senh}^{-1} x) = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{senh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Método 2 Utilice la expresión logarítmica para $\operatorname{senh}^{-1} x$.

$$\begin{aligned} D_x(\operatorname{senh}^{-1} x) &= D_x \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} D_x\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

■



La catenaria

Figura 5

Aplicaciones: la catenaria Si un cable, o cadena, flexible homogéneo se suspende entre dos puntos fijos a la misma altura, forma una curva denominada **catenaria** (figura 5). Además (véase el problema 53), una catenaria puede colocarse en un sistema de coordenadas de modo que su ecuación tome la forma

$$y = a \cosh \frac{x}{a}$$

EJEMPLO 5 Encuentre la longitud de la catenaria $y = a\cosh(x/a)$ entre $x = -a$ y $x = a$.

SOLUCIÓN La longitud deseada (véase la sección 5.4) está dada por

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx &= \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{a}\right)}\, dx \\
&= \int_{-a}^{a} \sqrt{\cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)}\, dx \\
&= 2\int_{0}^{a} \cosh\left(\frac{x}{a}\right) dx \\
&= 2a\int_{0}^{a} \cosh\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{1}{a}\, dx\right) \\
&= \left[2a \operatorname{senh} \frac{x}{a}\right]_0^a \\
&= 2a \operatorname{senh} 1 \approx 2.35a
\end{aligned}$$

■

Una catenaria invertida

Revisión de conceptos

1. senh y cosh están definidos por senh $x =$ ______ y cosh $x =$ ______.

2. En trigonometría *hiperbólica*, la identidad correspondiente a $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ es ______.

3. A consecuencia de la identidad de la pregunta 2, la gráfica de las ecuaciones paramétricas $x = \cosh t$, $y = \operatorname{senh} t$ es ______.

4. La gráfica de $y = a\cosh(x\ /\ a)$ es una curva denominada ______; esta curva es importante como un modelo para ______.

Conjunto de problemas 6.9

En los problemas del 1 al 12 verifique que las ecuaciones que se dan son identidades.

1. $e^x = \cosh x + \operatorname{senh} x$
2. $e^{2x} = \cosh 2x + \operatorname{senh} 2x$
3. $e^{-x} = \cosh x - \operatorname{senh} x$
4. $e^{-2x} = \cosh 2x - \operatorname{senh} 2x$
5. $\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$
6. $\operatorname{senh}(x - y) = \operatorname{senh} x \cosh y - \cosh x \operatorname{senh} y$
7. $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$
8. $\cosh(x - y) = \cosh x \cosh y - \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$
9. $\tanh(x + y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$
10. $\tanh(x - y) = \dfrac{\tanh x - \tanh y}{1 - \tanh x \tanh y}$
11. $\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$
12. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$

En los problemas del 13 al 36 encuentre $D_x y$.

13. $y = \operatorname{senh}^2 x$
14. $y = \cosh^2 x$
15. $y = 5 \operatorname{senh}^2 x$
16. $y = \cosh^3 x$
17. $y = \cosh(3x + 1)$
18. $y = \operatorname{senh}(x^2 + x)$
19. $y = \ln(\operatorname{senh} x)$
20. $y = \ln(\coth x)$
21. $y = x^2 \cosh x$
22. $y = x^{-2} \operatorname{senh} x$
23. $y = \cosh 3x \operatorname{senh} x$
24. $y = \operatorname{senh} x \cosh 4x$
25. $y = \tanh x \operatorname{senh} 2x$
26. $y = \coth 4x \operatorname{senh} x$
27. $y = \operatorname{senh}^{-1}(x^2)$
28. $y = \cosh^{-1}(x^3)$
29. $y = \tanh^{-1}(2x - 3)$
30. $y = \coth^{-1}(x^5)$
31. $y = x \cosh^{-1}(3x)$
32. $y = x^2 \operatorname{senh}^{-1}(x^5)$
33. $y = \ln(\cosh^{-1} x)$
34. $y = \cosh^{-1}(\cos x)$
35. $y = \tanh(\cot x)$
36. $y = \coth^{-1}(\tanh x)$

37. Encuentre el área de la región acotada por $y = \cosh 2x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = \ln 3$.

En los problemas del 38 al 45 evalúe cada integral.

38. $\int \operatorname{senh}(3x + 2)\, dx$

39. $\int x \cosh(\pi x^2 + 5)\, dx$

40. $\int \frac{\cosh \sqrt{z}}{\sqrt{z}}\, dz$

41. $\int \frac{\operatorname{senh}(2z^{1/4})}{\sqrt[4]{z^3}}\, dz$

42. $\int e^x \operatorname{senh} e^x\, dx$

43. $\int \cos x \operatorname{senh}(\operatorname{sen} x)\, dx$

44. $\int \tanh x \ln(\cosh x)\, dx$

45. $\int x \coth x^2 \ln(\operatorname{senh} x^2)\, dx$

46. Encuentre el área de la región acotada por $y = \cosh 2x$, $y = 0$, $x = -\ln 5$ y $x = \ln 5$.

47. Encuentre el área de la región acotada por $y = \operatorname{senh} x$, $y = 0$ y $x = \ln 2$.

48. Encuentre el área de la región acotada por $y = \tanh x$, $y = 0$, $x = -8$ y $x = 8$.

49. La región acotada por $y = \cosh x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$ se hace girar alrededor del eje x. Encuentre el volumen del sólido resultante. *Sugerencia:* $\cosh^2 x = (1 + \cosh 2x)/2$.

50. La región acotada por $y = \operatorname{senh} x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = \ln 10$ se hace girar alrededor del eje x. Encuentre el volumen del sólido resultante.

51. El curva $y = \cosh x$, $0 \le x \le 1$, se hace girar alrededor del eje x. Encuentre el área de la superficie resultante.

52. La curva $y = \operatorname{senh} x$, $0 \le x \le 1$, se hace girar alrededor del eje x. Encuentre el área de la superficie resultante.

53. Para deducir la ecuación del cable colgante (catenaria), consideremos la sección AP desde el punto más bajo A hasta un punto general $P(x, y)$ (véase la figura 6) e imagine que el resto del cable se ha retirado.

Las fuerzas que actúan sobre el cable son:

1. H = tensión horizontal que tira en A;
2. T = tensión tangencial que tira en P;
3. $W = \delta s$ = peso de s pies de cable de densidad δ libras por pie.

Para estar en equilibrio, las componentes horizontal y vertical de T deben equilibrar H y W, respectivamente. Así, $T \cos \phi = H$ y $T \operatorname{sen} \phi = W = \delta s$, y así

$$\frac{T \operatorname{sen} \phi}{T \cos \phi} = \tan \phi = \frac{\delta s}{H}$$

Pero como $\tan \phi = dy/dx$, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\delta s}{H}$$

y por lo tanto

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\delta}{H}\frac{ds}{dx} = \frac{\delta}{H}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Ahora demuéstrese que $y = a \cosh(x/a) + C$ satisface esta ecuación diferencial con $a = H/\delta$.

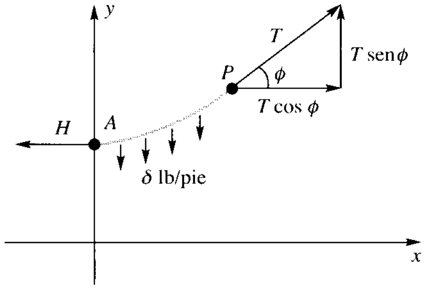


Figura 6

C **54.** Llame a la gráfica de $y = b - a \cosh(x/a)$ una catenaria invertida e imagínela descansando sobre el eje x. Demuestre que si el ancho de este arco, a lo largo del eje x, es $2a$, entonces cada una de las afirmaciones es verdadera.

(a) $b = a \cosh 1 \approx 1.54308a$.

(b) La altura del arco es aproximadamente $0.54308a$.

(c) La altura de un arco de ancho 48 es aproximadamente 13.

C **55.** Un granjero construyó un gran pajar de 100 pies de largo y 48 pies de ancho. Una sección transversal tiene la forma de una catenaria invertida (véase el problema 54) con ecuación $y = 37 - 24 \cosh(x/24)$.

(a) Haga un dibujo de este pajar.

(b) Encuentre el volumen del pajar.

(c) Encuentre el área de la superficie de la bóveda del pajar.

56. Demuestre que $A = t/2$, en donde A denota el área en la figura 2 de esta sección. *Sugerencia:* en algún momento necesitará utilizar la fórmula 44 de las guardas del libro.

57. Demuestre que para cualquier número real r:

(a) $(\operatorname{senh} x + \cosh x)^r = \operatorname{senh} rx + \cosh rx$

(b) $(\cosh x - \operatorname{seinh} x)^r = \cosh rx - \operatorname{senh} rx$

(c) $(\cos x + i \operatorname{sen} x)^r = \cos rx + i \operatorname{sen} rx$

(d) $(\cos x - i \operatorname{sen} x)^r = \cos rx - i \operatorname{sen} rx$

58. El **gudermanniano** de t se define por

$$\operatorname{gd}(t) = \tan^{-1}(\operatorname{senh} t)$$

Demuestre que:

(a) gd es impar y creciente con un punto de inflexión en el origen;

(b) $\operatorname{gd}(t) = \operatorname{sen}^{-1}(\tanh t) = \int_0^t \operatorname{sech} u\, du$.

59. Demuestre que el área debajo de la curva $y = \cosh t$, $0 \le t \le x$, es numéricamente igual a su longitud de arco.

60. Encuentre la ecuación del Gateway Arch en San Luis, Missouri, dado que es una catenaria invertida. Suponga que descansa sobre el eje x, que es simétrico con respecto al eje y y que tiene 630 pies de ancho en la base y 630 pies de alto en el centro.

GC **61.** Dibuje las gráficas de $y = \operatorname{senh} x$, $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$, utilizando los mismos ejes y escalados de modo que $-3 \le x \le 3$ y $-3 \le y \le 3$. ¿Qué demuestra esto?

CAS **62.** Con referencia al problema 58. Deduzca una fórmula para $\text{gd}^{-1}(x)$. Dibuje su gráfica y también la de $\text{gd}(x)$ mediante los mismos ejes y con esto confirme su fórmula.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $(e^x - e^{-x})/2$; $(e^x + e^{-x})/2$ **2.** $\cosh^2 x - \text{senh}^2\, x = 1$ **3.** la gráfica de $x^2 - y^2 = 1$ (una hipérbola) **4.** catenaria; un cable (cadena) colgante

6.10 Repaso del capítulo

Examen de conceptos

Responda con verdadero o falso a cada una de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

1. $\ln|x|$ está definido para todo real x.

2. La gráfica de $y = \ln x$ no tiene puntos de inflexión.

3. $\displaystyle\int_1^{e^3} \frac{1}{t}\, dt = 3$

4. La gráfica de una función invertible $y = f(x)$ es intersecada exactamente una vez por toda recta horizontal.

5. El dominio de $\ln^{-1}$ es el conjunto de todos los números reales.

6. $\ln x/\ln y = \ln x - \ln y$

7. $(\ln x)^4 = 4 \ln x$

8. $\ln(2e^{x+1}) - \ln(2e^x) = 1$ para todo número real x.

9. Las funciones $f(x) = 4 + e^x$ y $g(x) = \ln(x - 4)$ son inversas entre sí.

10. $\exp x + \exp y = \exp(x + y)$.

11. Si $x > y > 0$, entonces $\ln x > \ln y$.

12. Si $a \ln x < b \ln x$, entonces $a < b$.

13. Si $a < b$, entonces $ae^x < be^x$.

14. Si $a < b$, entonces $e^a < e^b$.

15. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\ln \text{sen}\, x - \ln x) = 0$.

16. $\pi^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln \pi}$

17. $\dfrac{d}{dx}(\ln \pi) = \dfrac{1}{\pi}$

18. $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \ln 3|x| + C$

19. $D_x(x^e) = ex^{e-1}$

20. Si $f(x) \cdot \exp[g(x)] = 0$ para $x = x_0$, entonces $f(x_0) = 0$.

21. $D_x(x^x) = x^x \ln x$.

22. $y = \tan x + \sec x$ es una solución de $2y' - y^2 = 1$.

23. Un factor integrante para $y' + \dfrac{4}{x}y = e^x$ es x^4.

24. La solución de la ecuación diferencial $y' = 2y$ que pasa por el punto $(2, 1)$, tiene pendiente 2 en ese punto.

25. El Método de Euler siempre sobrestimará la solución de la ecuación diferencial $y' = 2y$ con condición inicial $y(0) = 1$.

26. $\text{sen}(\text{arcsen}\, x) = x$ para todos los números reales x.

27. $\text{arcsen}(\text{sen}\, x) = x$ para todos los números reales x.

28. Si $a < b$, entonces $\text{senh}\, a < \text{senh}\, b$.

29. Si $a < b$, entonces $\cosh a < \cosh b$.

30. $\cosh x \le e^{|x|}$

31. $|\text{senh}\, x| \le e^{|x|}/2$

32. $\tan^{-1} x = \text{sen}^{-1} x/\cos^{-1} x$

33. $\cosh(\ln 3) = \frac{5}{6}$

34. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{\text{sen}\, x}{x}\right) = 1$

35. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2}$

36. $\text{senh}^{-1}(\cosh x)$ está definida para todos los números reales x.

37. $f(x) = \tanh x$ es una función impar.

38. Tanto $y = \text{senh}\, x$ como $y = \cosh x$ satisfacen la ecuación diferencial $y'' + y = 0$.

39. $\ln(3^{100}) > 100$.

40. $\ln(2x^2 - 18) - \ln(x - 3) - \ln(x + 3) = \ln 2$ para todos los números reales x.

41. Si y crece de manera exponencial y si y se triplica entre $t = 0$ y $t = t_1$, entonces y también se triplicará entre $t = 2t_1$ y $t = 3t_1$.

42. El tiempo necesario para que $x(t) = Ce^{-kt}$ caiga a la mitad de su valor es $\dfrac{\ln 2}{\ln k}$.

43. Si $y'(t) = ky(t)$ y $z'(t) = kz(t)$, entonces $(y(t) + z(t))' = k(y(t) + z(t))$.

44. Si $y_1(t)$ y $y_2(t)$ satisfacen $y'(t) = ky(t) + C$, entonces también lo hace $(y_1(t) + y_2(t))$.

45. $\displaystyle\lim_{h\to 0}(1 - h)^{-1/h} = e^{-1}$.

46. Para un ahorrador, es una ventaja tener dinero invertido a 5% compuesto continuamente, en lugar de a 6% compuesto cada mes.

47. Si $D_x(a^x) = a^x$ con $a > 0$, entonces $a = e$.

Problemas de examen

En los problemas del 1 al 24 derive cada función.

1. $\ln\dfrac{x^4}{2}$

2. $\text{sen}^2(x^3)$

3. e^{x^2-4x}

4. $\log_{10}(x^5 - 1)$

5. $\tan(\ln e^x)$

6. $e^{\ln \cot x}$

7. $2 \tanh \sqrt{x}$

8. $\tanh^{-1}(\text{sen}\, x)$

9. $\text{senh}^{-1}(\tan x)$

10. $2\, \text{sen}^{-1}\sqrt{3x}$

11. $\sec^{-1} e^x$

12. $\ln \text{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$

13. $3 \ln(e^{5x} + 1)$

14. $\ln(2x^3 - 4x + 5)$

15. $\cos e^{\sqrt{x}}$

16. $\ln(\tanh x)$

17. $2 \cos^{-1}\sqrt{x}$

18. $4^{3x} + (3x)^4$

19. $2 \csc e^{\ln \sqrt{x}}$

20. $(\log_{10} 2x)^{2/3}$

21. $4 \tan 5x \sec 5x$

22. $x \tan^{-1}\dfrac{x^2}{2}$

23. x^{1+x}

24. $(1 + x^2)^e$

En los problemas del 25 al 34 encuentre una antiderivada de cada función y verifique su resultado por medio de derivación.

25. e^{3x-1}

26. $6 \cot 3x$

27. $e^x \operatorname{sen} e^x$

28. $\dfrac{6x+3}{x^2+x-5}$

29. $\dfrac{e^{x+2}}{e^{x+3}+1}$

30. $4x \cos x^2$

31. $\dfrac{4}{\sqrt{1-4x^2}}$

32. $\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}$

33. $\dfrac{-1}{x+x(\ln x)^2}$

34. $\operatorname{sech}^2(x-3)$

En los problemas 35 y 36 encuentre los intervalos en los que f es creciente y los intervalos en los que f es decreciente. Encuentre en dónde la gráfica de f es cóncava hacia arriba y en dónde es cóncava hacia abajo. Encuentre los valores extremos y los puntos de inflexión. Después bosqueje la gráfica de f.

35. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$

36. $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}, -\infty < x < \infty$

37. Sea $f(x) = x^5 + 2x^3 + 4x, -\infty < x < \infty$.

(a) Demuestre que f tiene una inversa $g = f^{-1}$.

(b) Evalúe $g(7) = f^{-1}(7)$.

(c) Evalúe $g'(7)$.

38. Cierta sustancia radiactiva tiene una vida media de 10 años. ¿Cuánto tiempo pasará para que 100 gramos decaigan a 1 gramo?

$\boxed{\text{C}}$ **39.** Utilice el Método de Euler, con $h = 0.2$, para aproximar la solución a la ecuación diferencial $y' = xy$ con condición inicial $y(1) = 2$ en el intervalo $[1, 2]$.

40. Un aeroplano que vuela de manera horizontal a una altura de 500 pies, con una velocidad de 300 pies por segundo, se aleja directamente de un faro buscador en tierra. El faro se mantiene dirigido hacia el aeroplano. ¿A qué tasa está cambiando el ángulo entre el haz de luz y el piso cuando este ángulo es de 30°?

41. Encuentre la ecuación de la recta tangente para $y = (\cos x)^{\operatorname{sen} x}$ en $(0, 1)$.

42. Un pueblo creció de manera exponencial de 10,000 en el año 1990 a 14,000 en el 2000. Suponiendo que continúa el mismo tipo de crecimiento, ¿cuál será la población en 2010?

En los problemas del 43 al 47 resuelva cada ecuación diferencial.

43. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = 0$

44. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{x^2-2y}{x} = 0$

45. $\dfrac{dy}{dx} + 2x(y-1) = 0; y = 3$ cuando $x = 0$

46. $\dfrac{dy}{dx} - ay = e^{ax}$

47. $\dfrac{dy}{dx} - 2y = e^x$

48. Suponga que se infunde glucosa en el torrente sanguíneo de un paciente a una tasa de 3 gramos por minuto, pero que el cuerpo del paciente convierte y elimina la glucosa de su sangre a una tasa proporcional a la cantidad que esté presente (con constante de proporcionalidad 0.02). Sea $Q(t)$ la cantidad presente en el instante t, con $Q(0) = 120$.

(a) Escriba la ecuación diferencial para Q.

(b) Resuelva esta ecuación diferencial.

(c) Determine qué le sucede a Q a la larga.

PROBLEMAS DE REPASO E INTRODUCCIÓN

Evalúe las integrales en los problemas del 1 el 8.

1. $\int \operatorname{sen} 2x\, dx$

2. $\int e^{3t}\, dt$

3. $\int x \operatorname{sen} x^2\, dx$

4. $\int x e^{3x^2}\, dx$

5. $\int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\, dt$

6. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx$

7. $\int x\sqrt{x^2+2}\, dx$

8. $\int \frac{x}{x^2+1}\, dx$

Determine y simplifique las derivadas de las funciones en los problemas del 9 al 12.

9. $f(x) = x \ln x - x$

10. $f(x) = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2}$

11. $f(x) = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x$

12. $f(x) = e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)$

13. Utilice una de las identidades del ángulo doble (de la sección 0.7) para determinar una expresión para $\operatorname{sen}^2 x$ que incluya a $\cos 2x$.

14. Utilice una de las identidades del ángulo doble para determinar una expresión para $\cos^2 x$ que incluya a $\cos 2x$.

15. Utilice una de las identidades del ángulo doble para determinar una expresión para $\cos^4 x$ que incluya a $\cos 2x$.

16. Utilice una de las identidades del producto (de la sección 0.7) para expresar $\operatorname{sen} 3x \cos 4x$ sólo en términos de la función seno, de tal manera que ningún par de funciones trigonométricas esté multiplicado.

17. Utilice una de las identidades del producto para expresar $\cos 3x \cos 5x$ sólo en términos de la función coseno, de tal manera que ningún par de funciones trigonométricas esté multiplicado.

18. Utilice una de las identidades del producto para expresar $\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x$ sólo en términos de la función coseno, de tal manera que ningún par de funciones trigonométricas esté multiplicado.

19. Evalúe $\sqrt{a^2 - x^2}$, cuando $x = a \operatorname{sen} t$, si $-\pi/2 \le t \le \pi/2$.

20. Evalúe $\sqrt{a^2 + x^2}$, cuando $x = a \tan t$, si $-\pi/2 < t < \pi/2$.

21. Evalúe $\sqrt{x^2 - a^2}$, cuando $x = a \sec t$, si $0 \le t \le \pi$ y $t \ne \pi/2$.

22. Despeje a a en la ecuación $\int_0^a e^{-x}\, dx = \frac{1}{2}$.

En los problemas del 23 al 26 determine un común denominador, sume las dos fracciones y simplifique.

23. $\frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}$

24. $\frac{7/5}{x+2} + \frac{8/5}{x-3}$

25. $-\frac{1}{x} - \frac{1/2}{x+1} + \frac{3/2}{x-3}$

26. $\frac{1}{y} + \frac{1}{2000-y}$

CAPÍTULO 7 Técnicas de integración

7.1 Reglas básicas de integración
7.2 Integración por partes
7.3 Algunas integrales trigonométricas
7.4 Sustituciones para racionalizar
7.5 Integración de funciones racionales por medio de fracciones parciales
7.6 Estrategias de integración
7.7 Repaso del capítulo

7.1

Reglas básicas de integración

Ahora, nuestro repertorio de funciones incluye a todas las funciones elementales. Éstas son las funciones constantes, las funciones potencias, las funciones algebraicas, las funciones logarítmica y exponencial, las funciones trigonométricas y trigonométricas inversas y todas las funciones obtenidas a partir de ellas por medio de suma, resta, multiplicación, división y composición. Así,

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$g(x) = (1 + \cos^4 x)^{1/2}$$

$$h(x) = \frac{3^{x^2-2x}}{\ln(x^2 + 1)} - \operatorname{sen}[\cos(\cosh x)]$$

son funciones elementales.

La derivación de una función elemental es directa, sólo requiere de un uso sistemático de las reglas que hemos aprendido. Y el resultado siempre es una función elemental. La integración (antiderivación) es un asunto muy diferente. Implica unas cuantas técnicas y una gran cantidad de trucos; y lo que es peor, no siempre se obtiene una función elemental. Por ejemplo, se sabe que las antiderivadas de e^{-x^2} y $(\operatorname{sen} x)/x$ no son funciones elementales.

Las dos principales técnicas para integración son *sustitución* e *integración por partes*. El método de sustitución se introdujo en la sección 4.4; que en varias ocasiones hemos usado en los capítulos anteriores.

Formas estándar El uso eficaz del método de sustitución depende de la pronta disponibilidad de una lista de integrales conocidas. Una de tales listas (pero demasiado grande para memorizarla) aparece dentro de la contraportada de este libro. La lista más breve, que se muestra a continuación, es tan útil que pensamos que todo estudiante de cálculo debe memorizarla.

Formas integrales estándar

Constantes, potencias

1. $\int k\,du = ku + C$

2. $\int u^r\,du = \begin{cases} \dfrac{u^{r+1}}{r+1} + C & r \neq -1 \\ \ln|u| + C & r = -1 \end{cases}$

Exponenciales

3. $\int e^u\,du = e^u + C$

4. $\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C, a \neq 1, a > 0$

Funciones trigonométricas

5. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

6. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

7. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$

8. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

9. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$

10. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$

11. $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$

12. $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

Funciones algebraicas

13. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C$

14. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C$

15. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{|u|}{a}\right) + C = \frac{1}{a}\cos^{-1}\left(\frac{a}{|u|}\right) + C$

Funciones hiperbólicas

16. $\displaystyle\int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C$

17. $\displaystyle\int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C$

Sustitución en integrales indefinidas Suponga que se enfrenta a una integral indefinida. Si es una forma estándar, basta con escribir la respuesta. Si no, busque una sustitución que la cambie a una forma estándar. Si la primera sustitución que intente no funciona, pruebe con otra. Tener habilidad en esto, al igual que en la mayoría de las actividades que valen la pena, depende de la práctica.

El método de sustitución se dio en el teorema 4.4B y se vuelve a establecer aquí para una fácil referencia.

Teorema A Sustitución en integrales indefinidas

Sea g una función derivable y supóngase que F es una antiderivada de f. Entonces, si $u = g(x)$,

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

EJEMPLO 1 Encuentre $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2(x^2)}\,dx$.

SOLUCIÓN Analice esta integral por unos momentos. Como $1/\cos^2 x = \sec^2 x$, puede recordarla de la forma estándar $\int \sec^2 u\, du$. Sea $u = x^2$, $du = 2x\,dx$. Entonces

$$\int \frac{x}{\cos^2(x^2)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2(x^2)}\cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \sec^2 u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\tan u + C = \frac{1}{2}\tan(x^2) + C$$ ■

EJEMPLO 2 Encuentre $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{5-9x^2}}\,dx$.

SOLUCIÓN Considere $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$. Sea $u = 3x$, por lo que $du = 3dx$. Entonces,

$$\int \frac{3}{\sqrt{5-9x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{5-u^2}}\,du = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right) + C$$

$$= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3x}{\sqrt{5}}\right) + C$$ ■

EJEMPLO 3 Encuentre $\displaystyle\int \frac{6e^{1/x}}{x^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Considere $\int e^u\,du$. Sea $u = 1/x$, así $du\ (-1/x^2)\,dx$. Entonces,

$$\int \frac{6e^{1/x}}{x^2}\,dx = -6\int e^{1/x}\left(\frac{-1}{x^2}\,dx\right) = -6\int e^u\,du$$

$$= -6e^u + C = -6e^{1/x} + C$$ ■

EJEMPLO 4 Encuentre $\int \frac{e^x}{4 + 9e^{2x}}\,dx$.

SOLUCIÓN Considere $\int \frac{1}{a^2 + u^2}\,du$. Sea $u = 3e^x$, por lo que $du = 3e^x\,dx$. Entonces,

$$\int \frac{e^x}{4 + 9e^{2x}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{4 + 9e^{2x}}(3e^x\,dx) = \frac{1}{3}\int \frac{1}{4 + u^2}\,du$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C = \frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{3e^x}{2}\right) + C \quad ■$$

Ninguna ley dice que usted tiene que escribir de manera explícita la sustitución de *u*. Si usted puede hacerla mentalmente, está bien. He aquí dos ilustraciones.

EJEMPLO 5 Encuentre $\int x\cos x^2\,dx$

SOLUCIÓN Mentalmente, sustituya $u = x^2$.

$$\int x\cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos x^2)(2x\,dx) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x^2 + C \quad ■$$

EJEMPLO 6 Encuentre $\int \frac{a^{\tan t}}{\cos^2 t}\,dt$.

SOLUCIÓN Mentalmente, sustituya $u = \tan t$.

$$\int \frac{a^{\tan t}}{\cos^2 t}\,dt = \int a^{\tan t}(\sec^2 t\,dt) = \frac{a^{\tan t}}{\ln a} + C \quad ■$$

Sustitución en integrales definidas Este tema se cubrió en la sección 4.4. Es igual al de la sustitución en integrales indefinidas, pero debemos recordar llevar a cabo el cambio apropiado en los límites de integración.

EJEMPLO 7 Evalúe $\int_2^5 t\sqrt{t^2 - 4}\,dt$.

SOLUCIÓN Sea $u = t^2 - 4$, con lo que $du = 2t\,dt$; observe que cuando $t = 2$, $u = 0$, y cuando $t = 5$, $u = 21$. Así,

$$\int_2^5 t\sqrt{t^2 - 4}\,dt = \frac{1}{2}\int_2^5 (t^2 - 4)^{1/2}(2t\,dt)$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{21} u^{1/2}\,du$$
$$= \left[\frac{1}{3}u^{3/2}\right]_0^{21} = \frac{1}{3}(21)^{3/2} \approx 32.08 \quad ■$$

EJEMPLO 8 Determine $\int_1^3 x^3\sqrt{x^4 + 11}\,dx$.

SOLUCIÓN En forma mental sustituya $u = x^4 + 11$.

$$\int_1^3 x^3\sqrt{x^4 + 11}\,dx = \frac{1}{4}\int_1^3 (x^4 + 11)^{1/2}(4x^3\,dx)$$
$$= \left[\frac{1}{6}(x^4 + 11)^{3/2}\right]_1^3$$
$$= \frac{1}{6}[92^{3/2} - 12^{3/2}] \approx 140.144 \quad ■$$

Revisión de conceptos

1. La diferenciación de una función elemental es directa, pero existen casos en donde la antiderivada de una función elemental no puede expresarse como un(a) _______.

2. La sustitución $u = 1 + x^3$ transforma $\int 3x^2(1 + x^3)^5\,dx$ en _______.

3. La sustitución $u =$ _______ transforma $\int e^x/(4 + e^{2x})\,dx$ a $\int 1/(4 + u^2)\,du$.

4. La sustitución $u = 1 + \operatorname{sen} x$ transforma $\int_0^{\pi/2} (1 + \operatorname{sen} x)^3 \cos x\,dx$ en _______.

Conjunto de problemas 7.1

En los problemas del 1 al 54 realice las integraciones indicadas.

1. $\int (x - 2)^5\,dx$

2. $\int \sqrt{3x}\,dx$

3. $\int_0^2 x(x^2 + 1)^5\,dx$

4. $\int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}\,dx$

5. $\int \frac{dx}{x^2 + 4}$

6. $\int \frac{e^x}{2 + e^x}\,dx$

7. $\int \frac{x}{x^2 + 4}\,dx$

8. $\int \frac{2t^2}{2t^2 + 1}\,dt$

9. $\int 6z\sqrt{4 + z^2}\,dz$

10. $\int \frac{5}{\sqrt{2t + 1}}\,dt$

11. $\int \frac{\tan z}{\cos^2 z}\,dz$

12. $\int e^{\cos z} \operatorname{sen} z\,dz$

13. $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$

14. $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{1 - x^4}}$

15. $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}\,dx$

16. $\int_0^{3/4} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 - x}}\,dx$

17. $\int \frac{3x^2 + 2x}{x + 1}\,dx$

18. $\int \frac{x^3 + 7x}{x - 1}\,dx$

19. $\int \frac{\operatorname{sen}(\ln 4x^2)}{x}\,dx$

20. $\int \frac{\sec^2(\ln x)}{2x}\,dx$

21. $\int \frac{6e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}\,dx$

22. $\int \frac{x}{x^4 + 4}\,dx$

23. $\int \frac{3e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}\,dx$

24. $\int \frac{x^3}{x^4 + 4}\,dx$

25. $\int_0^1 t\,3^{t^2}\,dt$

26. $\int_0^{\pi/6} 2^{\cos x} \operatorname{sen} x\,dx$

27. $\int \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx$

28. $\int \frac{\operatorname{sen}(4t - 1)}{1 - \operatorname{sen}^2(4t - 1)}\,dt$

29. $\int e^x \sec e^x\,dx$ *Sugerencia:* véase el problema 56.

30. $\int e^x \sec^2(e^x)\,dx$

31. $\int \frac{\sec^3 x + e^{\operatorname{sen} x}}{\sec x}\,dx$

32. $\int \frac{(6t - 1)\operatorname{sen}\sqrt{3t^2 - t - 1}}{\sqrt{3t^2 - t - 1}}\,dt$

33. $\int \frac{t^2\cos(t^3 - 2)}{\operatorname{sen}^2(t^3 - 2)}\,dt$

34. $\int \frac{1 + \cos 2x}{\operatorname{sen}^2 2x}\,dx$

35. $\int \frac{t^2\cos^2(t^3 - 2)}{\operatorname{sen}^2(t^3 - 2)}\,dt$

36. $\int \frac{\csc^2 2t}{\sqrt{1 + \cot 2t}}\,dt$

37. $\int \frac{e^{\tan^{-1} 2t}}{1 + 4t^2}\,dt$

38. $\int (t + 1)e^{-t^2 - 2t - 5}\,dt$

39. $\int \frac{y}{\sqrt{16 - 9y^4}}\,dy$

40. $\int \cosh 3x\,dx$

41. $\int x^2 \operatorname{senh} x^3\,dx$

42. $\int \frac{5}{\sqrt{9 - 4x^2}}\,dx$

43. $\int \frac{e^{3t}}{\sqrt{4 - e^{6t}}}\,dt$

44. $\int \frac{dt}{2t\sqrt{4t^2 - 1}}$

45. $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{16 + \cos^2 x}\,dx$

46. $\int_0^1 \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}\,dx$

47. $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5}\,dx$

48. $\int \frac{1}{x^2 - 4x + 9}\,dx$

49. $\int \frac{dx}{9x^2 + 18x + 10}$

50. $\int \frac{dx}{\sqrt{16 + 6x - x^2}}$

51. $\int \frac{x + 1}{9x^2 + 18x + 10}\,dx$

52. $\int \frac{3 - x}{\sqrt{16 + 6x - x^2}}\,dx$

53. $\int \frac{dt}{t\sqrt{2t^2 - 9}}$

54. $\int \frac{\tan x}{\sqrt{\sec^2 x - 4}}\,dx$

55. Encuentre la longitud de la curva $y = \ln(\cos x)$ entre $x = 0$ y $x = \pi/4$.

56. Establezca la identidad

$$\sec x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$$

y después utilícela para deducir la fórmula

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

57. Evalúe $\int_0^{2\pi} \frac{x|\operatorname{sen} x|}{1 + \cos^2 x}\,dx$. *Sugerencia:* haga la sustitución $u = x - \pi$ en la integral definida y después utilice propiedades de la simetría.

58. Sea R la región acotada por $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ entre $x = -\pi/4$ y $x = 3\pi/4$. Encuentre el volumen del sólido obtenido cuando se hace girar R alrededor de $x = -\pi/4$. *Sugerencia:* use cascarones cilíndricos para escribir una sola integral, haga la sustitución $u = x - \pi/4$ y aplique propiedades de la simetría.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** función elemental **2.** $\int u^5\,du$ **3.** e^x **4.** $\int_1^2 u^3\,du$

7.2

Integración por partes

Si la integración por sustitución falla, es posible utilizar una doble sustitución, mejor conocida como *integración por partes*. Este método tiene como base la integración de la fórmula para la derivada de un producto de dos funciones.

Sean $u = u(x)$ y $v = v(x)$. Entonces

$$D_x[u(x)v(x)] = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$$

o

$$u(x)v'(x) = D_x[u(x)v(x)] - v(x)u'(x)$$

Al integrar ambos miembros de esta ecuación, obtenemos

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$$

Ya que $dv = v'(x)dx$ y $du = u'(x)dx$, por lo común, la ecuación anterior se escribe de manera simbólica como sigue:

Integración por partes: integrales indefinidas

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

La fórmula correspondiente para integrales definidas es

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx$$

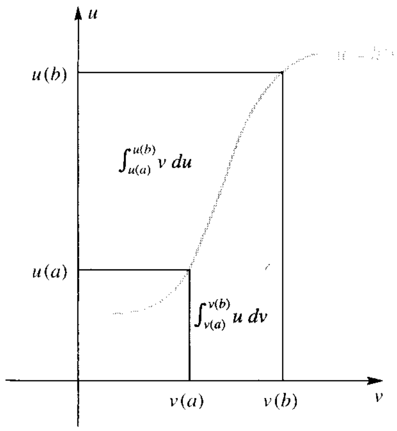
La figura 1 ilustra una interpretación geométrica de la integración por partes. Abreviamos esto como sigue:

Integración por partes: integrales definidas

$$\int_a^b u\,dv = \left[uv\right]_a^b - \int_a^b v\,du$$

Estas fórmulas nos permiten transformar el problema de integrar $u\,dv$ al de integrar $v\,du$. El éxito depende de la elección apropiada de u y dv, la cual viene con la práctica.

Integración por partes



$\int_{v(a)}^{v(b)} u\,dv = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_{u(a)}^{u(b)} v\,du$

Figura 1

EJEMPLO 1 Encuentre $\int x \cos x\,dx$.

SOLUCIÓN Deseamos escribir $x \cos x\,dx$ como $u\,dv$. Una posibilidad es hacer $u = x$ y $dv = \cos x\,dx$. Entonces, $du = dx$ y $v = \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$ (en este paso podemos omitir la constante arbitraria). He aquí un resumen de esta doble sustitución en un formato conveniente.

$$u = x \qquad dv = \cos x\,dx$$
$$du = dx \qquad v = \operatorname{sen} x$$

La fórmula para integración por partes da

$$\int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\cos x\,dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\operatorname{sen} x}_{v} - \int \underbrace{\operatorname{sen} x}_{v}\,\underbrace{dx}_{du}$$
$$= x \operatorname{sen} x + \cos x + C$$

Tuvimos éxito en nuestro primer intento. Otra sustitución sería

$$u = \cos x \qquad dv = x\,dx$$

$$du = -\operatorname{sen} x\,dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

Esta vez la fórmula para la integración por partes da

$$\int \underbrace{(\cos x)}_{u}\,\underbrace{x\,dx}_{dv} = \underbrace{(\cos x)}_{u}\,\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v} - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v}\,\underbrace{(-\operatorname{sen} x\,dx)}_{du}$$

lo cual es correcto pero no es útil. La nueva integral del lado derecho es más complicada que la original. Así, vemos la importancia de una buena elección para u y dv. ■

EJEMPLO 2 Encuentre $\displaystyle\int_1^2 \ln x\,dx$.

SOLUCIÓN Hacemos las sustituciones siguientes:

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

$$du = \left(\frac{1}{x}\right)dx \qquad v = x$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_1^2 \ln x\,dx &= [x \ln x]_1^2 - \int_1^2 x\frac{1}{x}dx\\ &= 2\ln 2 - \int_1^2 dx\\ &= 2\ln 2 - 1 \approx 0.386\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 3 Encuentre $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x\,dx$.

SOLUCIÓN Hacemos las sustituciones

$$u = \operatorname{arcsen} x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad v = x$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arcsen} x\,dx &= x \operatorname{arcsen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\\ &= x \operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1/2}(-2x\,dx)\\ &= x \operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2}\cdot 2(1-x^2)^{1/2} + C\\ &= x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 4 Determine $\displaystyle\int_1^2 t^6 \ln t\,dt$.

SOLUCIÓN Hacemos las siguientes sustituciones

$$u = \ln t \qquad dv = t^6\,dt$$
$$du = \frac{1}{t}dt \qquad v = \frac{1}{7}t^7$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_1^2 t^6 \ln t\,dt &= \left[\frac{1}{7}t^7 \ln t\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{7}t^7\left(\frac{1}{t}dt\right)\\ &= \frac{1}{7}(128 \ln 2 - \ln 1) - \frac{1}{7}\int_1^2 t^6\,dt\\ &= \frac{128}{7}\ln 2 - \frac{1}{49}[t^7]_1^2\\ &= \frac{128}{7}\ln 2 - \frac{127}{49} \approx 10.083\end{aligned}$$ ■

Integración repetida por partes Algunas veces es necesario aplicar la integración por partes varias veces.

EJEMPLO 5 Encuentre $\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx$.

SOLUCIÓN Sea

$$u = x^2 \qquad dv = \operatorname{sen} x\,dx$$
$$du = 2x\,dx \qquad v = -\cos x$$

Entonces

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx$$

Hemos mejorado nuestra situación (el exponente en x ha bajado de 2 a 1), lo cual sugiere volver a aplicar la integración por partes a la integral de la derecha. En realidad, hicimos esta integración en el ejemplo 1, de modo que haremos uso del resultado obtenido allí.

$$\begin{aligned}\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx &= -x^2\cos x + 2(x\operatorname{sen} x + \cos x + C)\\ &= -x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x + 2\cos x + K\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 6 Encuentre $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$.

SOLUCIÓN Tome $u = e^x$ y $dv = \operatorname{sen} x\,dx$. Entonces $du = e^x\,dx$ y $v = -\cos x$. Así,

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx$$

que no parece haber mejorado las cosas, aunque no nos deja algo peor. Así que no lo desechemos e intentemos otra vez la integración por partes. En la integral de la derecha, sea $u = e^x$ y $dv = \cos x\,dx$, de modo que $du = e^x\,dx$ y $v = \operatorname{sen} x$. Entonces,

$$\int e^x\cos x\,dx = e^x\operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

Cuando sustituimos esto en nuestro primer resultado, obtenemos

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx$$

Pasando el último término al lado izquierdo y reduciendo términos, obtenemos

$$2\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$

de la cual

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + K$$ ■

El hecho de que la integral que queríamos encontrar vuelva a aparecer en el lado derecho es lo que hace que funcione el ejemplo 6.

Fórmulas de reducción Una fórmula de la forma

$$\int f^n(x)g(x)\, dx = h(x) + \int f^k(x)\, g(x)\, dx$$

donde $k < n$, se denomina **fórmula de reducción** (el exponente en f se reduce). Con frecuencia, tales fórmulas pueden obtenerse por medio de la integración por partes.

EJEMPLO 7 Deduzca una fórmula de reducción para $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = \operatorname{sen}^{n-1} x$ y $dv = \operatorname{sen} x\, dx$. Entonces

$$du = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2} x \cos x\, dx \quad \text{y} \quad v = -\cos x$$

de lo cual

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x\, dx$$

Si reemplazamos $\cos^2 x$ por $1 - \operatorname{sen}^2 x$ en la última integral, obtenemos

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx - (n-1)\int \operatorname{sen}^n x\, dx$$

Después de combinar las integrales primera y última y despejando a $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$, obtenemos la fórmula de reducción (válida para $n \geq 2$),

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = \frac{-\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$$ ■

EJEMPLO 8 Utilice la fórmula de reducción anterior para evaluar $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^8 x\, dx$.

SOLUCIÓN Observe primero que

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\, dx &= \left[\frac{-\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{n}\right]_0^{\pi/2} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx \\ &= 0 + \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^8 x\,dx &= \frac{7}{8}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6 x\,dx\\ &= \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x\,dx\\ &= \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\,dx\\ &= \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 1\,dx\\ &= \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{35}{256}\pi\end{aligned}$$ ■

La fórmula general para $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx$ puede encontrarse de una manera análoga (fórmula 113 en la parte posterior del libro).

Revisión de conceptos

1. La fórmula de integración por partes dice que $\int u\,dv =$ ____.

2. Para aplicar esta fórmula a $\int x \operatorname{sen} x\,dx$, se hace $u =$ ____ y $dv =$ ____.

3. Al aplicar la fórmula de integración por partes se obtiene el valor ______ para $\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x\,dx$.

4. Una fórmula que expresa $\int f^n(x)\,g(x)\,dx$ en términos de $\int f^k(x)\,g(x)\,dx$, donde $k < n$, se denomina fórmula de _____.

Conjunto de problemas 7.2

En los problemas del 1 al 36 utilice la integración por partes para evaluar cada integral.

1. $\int xe^x\,dx$ **2.** $\int xe^{3x}\,dx$

3. $\int te^{5t+\pi}\,dt$ **4.** $\int (t+7)e^{2t+3}\,dt$

5. $\int x\cos x\,dx$ **6.** $\int x \operatorname{sen} 2x\,dx$

7. $\int (t-3)\cos(t-3)\,dt$ **8.** $\int (x-\pi)\operatorname{sen} x\,dx$

9. $\int t\sqrt{t+1}\,dt$ **10.** $\int t\sqrt[3]{2t+7}\,dt$

11. $\int \ln 3x\,dx$ **12.** $\int \ln(7x^5)\,dx$

13. $\int \arctan x\,dx$ **14.** $\int \arctan 5x\,dx$

15. $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ **16.** $\int_2^3 \frac{\ln 2x^5}{x^2}\,dx$

17. $\int_1^e \sqrt{t}\ln t\,dt$ **18.** $\int_1^5 \sqrt{2x}\ln x^3\,dx$

19. $\int z^3\ln z\,dz$ **20.** $\int t\arctan t\,dt$

21. $\int \arctan(1/t)\,dt$ **22.** $\int t^5\ln(t^7)\,dt$

23. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} x\csc^2 x\,dx$ **24.** $\int_{\pi/6}^{\pi/4} x\sec^2 x\,dx$

25. $\int x^5\sqrt{x^3+4}\,dx$ **26.** $\int x^{13}\sqrt{x^7+1}\,dx$

27. $\int \frac{t^7}{(7-3t^4)^{3/2}}\,dt$ **28.** $\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx$

29. $\int \frac{z^7}{(4-z^4)^2}\,dz$ **30.** $\int x\cosh x\,dx$

31. $\int x\operatorname{senh} x\,dx$ **32.** $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

33. $\int x(3x+10)^{49}\,dx$ **34.** $\int_0^1 t(t-1)^{12}\,dt$

35. $\int x\,2^x\,dx$ **36.** $\int z\,a^z\,dz$

En los problemas del 37 al 48 aplique dos veces la integración por partes para evaluar cada integral (véanse los ejemplos 5 y 6).

37. $\int x^2e^x\,dx$ **38.** $\int x^5e^{x^2}\,dx$

39. $\int \ln^2 z\,dz$ **40.** $\int \ln^2 x^{20}\,dx$

41. $\int e^t\cos t\,dt$ **42.** $\int e^{at}\operatorname{sen} t\,dt$

43. $\int x^2\cos x\,dx$ **44.** $\int r^2\operatorname{sen} r\,dr$

45. $\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$ **46.** $\int \cos(\ln x)\,dx$

47. $\int (\ln x)^3\,dx$ *Sugerencia:* use el problema 39.

48. $\int (\ln x)^4\,dx$ *Sugerencia:* utilice los problemas 39 y 47.

En los problemas del 49 al 54 utilice integración por partes para deducir la fórmula que se da.

49. $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x\,dx =$

$$-\tfrac{3}{8}\operatorname{sen} x \cos 3x + \tfrac{1}{8}\cos x \operatorname{sen} 3x + C$$

50. $\int \cos 5x \operatorname{sen} 7x\,dx =$

$$-\tfrac{7}{24}\cos 5x \cos 7x - \tfrac{5}{24}\operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 7x + C$$

51. $\int e^{\alpha z} \operatorname{sen} \beta z\,dz = \dfrac{e^{\alpha z}(\alpha \operatorname{sen} \beta z - \beta \cos \beta z)}{\alpha^2 + \beta^2} + C$

52. $\int e^{\alpha z} \cos \beta z\,dz = \dfrac{e^{\alpha z}(\alpha \cos \beta z + \beta \operatorname{sen} \beta z)}{\alpha^2 + \beta^2} + C$

53. $\int x^\alpha \ln x\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x - \dfrac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + C, \alpha \neq -1$

54. $\int x^\alpha (\ln x)^2\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\ln x)^2$

$$- 2\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}\ln x + 2\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^3} + C, \alpha \neq -1$$

En los problemas del 55 al 61 deduzca la fórmula de reducción que se da utilizando integración por partes.

55. $\int x^\alpha e^{\beta x}\,dx = \dfrac{x^\alpha e^{\beta x}}{\beta} - \dfrac{\alpha}{\beta}\int x^{\alpha-1} e^{\beta x}\,dx$

56. $\int x^\alpha \operatorname{sen} \beta x\,dx = -\dfrac{x^\alpha \cos \beta x}{\beta} + \dfrac{\alpha}{\beta}\int x^{\alpha-1} \cos \beta x\,dx$

57. $\int x^\alpha \cos \beta x\,dx = \dfrac{x^\alpha \operatorname{sen} \beta x}{\beta} - \dfrac{\alpha}{\beta}\int x^{\alpha-1} \operatorname{sen} \beta x\,dx$

58. $\int (\ln x)^\alpha\,dx = x(\ln x)^\alpha - \alpha\int (\ln x)^{\alpha-1}\,dx$

59. $\int (a^2 - x^2)^\alpha\,dx =$

$$x(a^2 - x^2)^\alpha + 2\alpha\int x^2(a^2 - x^2)^{\alpha-1}\,dx$$

60. $\int \cos^\alpha x\,dx = \dfrac{\cos^{\alpha-1} x \operatorname{sen} x}{\alpha} + \dfrac{\alpha-1}{\alpha}\int \cos^{\alpha-2} x\,dx$

61. $\int \cos^\alpha \beta x\,dx =$

$$\frac{\cos^{\alpha-1} \beta x \operatorname{sen} \beta x}{\alpha\beta} + \frac{\alpha-1}{\alpha}\int \cos^{\alpha-2} \beta x\,dx$$

62. Utilice el problema 55 para deducir

$$\int x^4 e^{3x}\,dx = \tfrac{1}{3}x^4 e^{3x} - \tfrac{4}{9}x^3 e^{3x} + \tfrac{4}{9}x^2 e^{3x} - \tfrac{8}{27}x e^{3x} + \tfrac{8}{81}e^{3x} + C$$

63. Utilice los problemas 56 y 57 para deducir

$$\int x^4 \cos 3x\,dx = \tfrac{1}{3}x^4 \operatorname{sen} 3x + \tfrac{4}{9}x^3 \cos 3x - \tfrac{4}{9}x^2 \operatorname{sen} 3x$$
$$- \tfrac{8}{27}x \cos 3x + \tfrac{8}{81}\operatorname{sen} 3x + C.$$

64. Utilice el problema 61 para deducir

$$\int \cos^6 3x\,dx = \tfrac{1}{18}\operatorname{sen} 3x \cos^5 3x + \tfrac{5}{72}\operatorname{sen} 3x \cos^3 3x$$
$$+ \tfrac{5}{48}\operatorname{sen} 3x \cos 3x + \tfrac{5}{16}x + C.$$

≈ **65.** Encuentre el área de la región acotada por la curva $y = \ln x$, el eje x y la recta $x = e$.

≈ **66.** Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región del problema 65 alrededor del eje x.

≈ **67.** Encuentre el área de la región acotada por las curvas $y = 3e^{-x/3}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 9$. Haga un dibujo.

≈ **68.** Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región descrita en el problema 67, alrededor del eje x.

≈ **69.** Encuentre el área de la región acotada por las gráficas de $y = x \operatorname{sen} x$ y $y = x \cos x$, desde $x = 0$ hasta $x = \pi/4$.

≈ **70.** Encuentre el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región bajo la gráfica de $y = \operatorname{sen}(x/2)$ desde $x = 0$ hasta $x = 2\pi$ alrededor del eje y.

≈ **71.** Encuentre el centroide (véase la sección 5.6) de la región acotada por $y = \ln x^2$ y el eje x desde $x = 1$ hasta $x = e$.

72. Evalúe la integral $\int \cot x \csc^2 x\,dx$ por partes de dos maneras diferentes:

(a) Derivando $\cot x$ (b) Derivando $\csc x$

(c) Demuestre que los dos resultados son equivalentes, salvo por una constante.

73. Si $p(x)$ es un polinomio de grado n y $G_1, G_2, \ldots, G_{n+1}$ son antiderivadas sucesivas de una función g, entonces por medio de repetidas integraciones por partes,

$$\int p(x)g(x)\,dx = p(x)G_1(x) - p'(x)G_2(x) + p''(x)G_3(x) - \cdots$$
$$+ (-1)^n p^{(n)}(x)G_{n+1}(x) + C$$

Utilice este resultado para encontrar cada una de las siguientes integrales:

(a) $\int (x^3 - 2x)e^x\,dx$ (b) $\int (x^2 - 3x + 1) \operatorname{sen} x\,dx$

≈ **74.** La gráfica de $y = x \operatorname{sen} x$ para $x \geq 0$ se bosqueja en la figura 2.

(a) Encuentre una fórmula para el área de n-ésimo arco.

(b) El segundo arco se hace girar alrededor del eje y. Encuentre el volumen del sólido resultante.

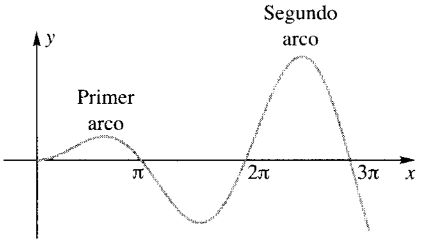


Figura 2

75. La cantidad $a_n = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\,dx$ desempeña un papel importante en matemáticas aplicadas. Demuestre que si $f'(x)$ es continua en $[-\pi, \pi]$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Sugerencia:* integración por partes.

76. Sea $G_n = \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$.. Demuestre que $\lim_{n\to\infty}(G_n/n) = 4/e$. *Sugerencia:* considere $\ln(G_n/n)$, identifíquela como una suma de Riemann y utilice el ejemplo 2.

77. Encuentre el error en la siguiente "demostración" de que $0 = 1$. En $\int(1/t)\,dt$, haga $u = 1/t$ y $dv = dt$. Entonces $du = -t^{-2}\,dt$ y $uv = 1$. La integración por partes da

$$\int (1/t)\,dt = 1 - \int (-1/t)\,dt$$

o $0 = 1$.

78. Suponga que quiere evaluar la integral

$$\int e^{5x}(4\cos 7x + 6\,\text{sen}\,7x)\,dx$$

y por su experiencia sabe que el resultado será de la forma $e^{5x}(C_1 \cos 7x + C_2\,\text{sen}\,7x) + C_3$. Calcule C_1 y C_2 derivando el resultado y hágala igual al integrando.

Muchos resultados teóricos sorprendentes pueden deducirse mediante el uso de integración por partes. En todos los casos, uno inicia con una integral. Aquí exploramos dos de estos resultados.

79. *Demuestre que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = [xf(x)]_a^b - \int_a^b xf'(x)\,dx$$
$$= [(x-a)f(x)]_a^b - \int_a^b (x-a)f'(x)\,dx$$

80. Utilice el problema 79 y reemplace f por f' para demostrar que

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx$$
$$= f'(b)(b-a) - \int_a^b (x-a)f''(x)\,dx$$
$$= f'(a)(b-a) - \int_a^b (x-b)f''(x)\,dx$$

81. Demuestre que

$$f(t) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(t-a)^i + \int_a^t \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,dx,$$

siempre que f pueda derivarse $n+1$ veces.

82. La *función beta*, que es importante en muchas ramas de las matemáticas, está definida como

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx,$$

con la condición de que $\alpha \geq 1$ y $\beta \geq 1$.

(a) Por medio de un cambio de variables, demuestre que

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{\alpha-1}\,dx = B(\beta, \alpha)$$

(b) Integrando por partes demuestre que

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\alpha-1}{\beta}B(\alpha-1, \beta+1) = \frac{\beta-1}{\alpha}B(\alpha+1, \beta-1)$$

(c) Ahora, suponga que $\alpha = n$ y $\alpha = m$ y que n y m son enteros positivos. Utilizando, de manera repetida, el resultado de la parte (b) demuestre que

$$B(n, m) = \frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(n+m-1)!}$$

Este resultado es válido incluso para el caso en donde n y m no son enteros, con tal que podamos dar significado a $(n-1)!$, $(m-1)!$ y $(n+m-1)!$

83. Suponga que $f(t)$ tiene la propiedad de que $f'(a) = f'(b) = 0$ y que $f(t)$ tiene dos derivadas continuas. Utilice integración por partes para demostrar que $\int_a^b f''(t)f(t)\,dt \leq 0$. *Sugerencia:* use integración por partes derivando $f(t)$ e integrando $f''(t)$. Este resultado tiene muchas aplicaciones en el campo de las matemáticas aplicadas y en ecuaciones diferenciales parciales.

84. Deduzca la fórmula

$$\int_0^x \left(\int_0^t f(z)\,dz \right) dt = \int_0^x f(t)(x-t)\,dt$$

utilizando la integración por partes.

85. Generalice la fórmula dada en el problema 84 a una para una integral iterada n–veces

$$\int_0^x \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n)\,dt_n \ldots dt_1 =$$
$$\frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f(t_1)(x-t_1)^{n-1}\,dt_1$$

86. Si $P_n(x)$ es un polinomio de grado n, demuestre que

$$\int e^x P_n(x)\,dx = e^x \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{d^j P_n(x)}{dx^j}$$

87. Utilice el resultado del problema 86 para evaluar

$$\int (3x^4 + 2x^2)e^x\,dx$$

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $uv - \int v\,du$ **2.** x; sen $x\,dx$ **3.** 1 **4.** reducción

---

7.3

Algunas integrales trigonométricas

Cuando hemos combinado el método de sustitución con un uso adecuado de identidades trigonométricas, podemos integrar una gran variedad de formas trigonométricas. Consideremos tres tipos encontrados comúnmente.

1. $\int \text{sen}^n x\,dx$ y $\int \cos^n x\,dx$
2. $\int \text{sen}^m x \cos^n x\,dx$
3. $\int \text{sen}\,mx \cos nx\,dx$, $\int \text{sen}\,mx\,\text{sen}\,nx\,dx$, $\int \cos mx \cos nx\,dx$
4. $\int \tan^n x\,dx$, $\int \cot^n x\,dx$
5. $\int \tan^m x \sec^n x\,dx$, $\int \cot^m x \csc^n x\,dx$

Identidades útiles

Algunas identidades trigonométricas que se necesitan en esta sección son las siguientes.

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Identidades del ángulo medio

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Tipo 1 $\left(\int \operatorname{sen}^n x\, dx,\ \int \cos^n x\, dx\right)$ Primero considere el caso en donde n es un entero positivo. Después factorice el factor sen x o cos x, utilice la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

EJEMPLO 1 **(n impar)** Encuentre $\int \operatorname{sen}^5 x\, dx$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^5 x\, dx &= \int \operatorname{sen}^4 x \operatorname{sen} x\, dx \\
&= \int (1 - \cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x\, dx \\
&= \int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \operatorname{sen} x\, dx \\
&= -\int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)(-\operatorname{sen} x\, dx) \\
&= -\cos x + \tfrac{2}{3}\cos^3 x - \tfrac{1}{5}\cos^5 x + C
\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 **(n par)** Encuentre $\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$ y $\int \cos^4 x\, dx$.

SOLUCIÓN Aquí hemos utilizado las identidades del medio ángulo.

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x\, dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4}\int (\cos 2x)(2\, dx) \\
&= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x\, dx &= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx \\
&= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{4}\int (\cos 2x)(2)\, dx + \frac{1}{8}\int (1 + \cos 4x)\, dx \\
&= \frac{3}{8}\int dx + \frac{1}{4}\int \cos 2x(2\, dx) + \frac{1}{32}\int \cos 4x(4\, dx) \\
&= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C
\end{aligned}$$

■

Tipo 2 $\left(\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx\right)$ Si m o n son enteros impares positivos y el otro exponente es cualquier número, factorizamos sen x o cos x y utilizamos la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

EJEMPLO 3 **(m o n impares)** Encuentre $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^{-4} x\, dx$.

SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^3 x \cos^{-4} x \, dx &= \int (1 - \cos^2 x)(\cos^{-4} x)(\operatorname{sen} x)\, dx \\
&= -\int (\cos^{-4} x - \cos^{-2} x)(-\operatorname{sen} x \, dx) \\
&= -\left[\frac{(\cos x)^{-3}}{-3} - \frac{(\cos x)^{-1}}{-1}\right] + C \\
&= \frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C
\end{aligned}
$$

■

Si m y n son enteros positivos pares, utilizamos las identidades para el medio ángulo a fin de reducir el grado del integrando. El ejemplo 4 proporciona una ilustración.

EJEMPLO 4 **(m y n pares)** Encuentre $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx$.

SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
&\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx \\
&\quad = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx \\
&\quad = \frac{1}{8}\int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x)\, dx \\
&\quad = \frac{1}{8}\int \left[1 + \cos 2x - \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) - (1 - \operatorname{sen}^2 2x)\cos 2x\right] dx \\
&\quad = \frac{1}{8}\int \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x + \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x\right] dx \\
&\quad = \frac{1}{8}\left[\int \frac{1}{2}dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x(4\, dx) + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}^2 2x(2\cos 2x\, dx)\right] \\
&\quad = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{6}\operatorname{sen}^3 2x\right] + C
\end{aligned}
$$

■

¿Son diferentes?

Las integraciones indefinidas pueden llevar a respuestas que parecen diferentes. Por un método

$$
\begin{aligned}
&\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx \\
&\quad = -\int \cos x(-\operatorname{sen} x)\, dx \\
&\quad = -\tfrac{1}{2}\cos^2 x + C
\end{aligned}
$$

Por un segundo método

$$
\begin{aligned}
\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx &= \int \operatorname{sen} x(\cos x)\, dx \\
&= \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C
\end{aligned}
$$

Pero las dos respuestas deben diferir por, a lo más, en una constante. Sin embargo, observe que

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C &= \tfrac{1}{2}(1 - \cos^2 x) + C \\
&= -\tfrac{1}{2}\cos^2 x + \left(\tfrac{1}{2} + C\right)
\end{aligned}
$$

Ahora compare estas respuestas con una tercera respuesta.

$$
\begin{aligned}
\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx &= \tfrac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2x \, dx \\
&= -\tfrac{1}{4}\cos 2x + C
\end{aligned}
$$

Tipo 3 ($\int \operatorname{sen} mx \cos nx \, dx$, $\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx$, $\int \cos mx \cos nx \, dx$)

Las integrales de este tipo aparecen en muchos problemas de aplicaciones de física e ingeniería. Para manejar estas integrales utilizamos las identidades para la multiplicación.

1. $\operatorname{sen} mx \cos nx = \dfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(m + n)x + \operatorname{sen}(m - n)x]$
2. $\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = -\dfrac{1}{2}[\cos(m + n)x - \cos(m - n)x]$
3. $\cos mx \cos nx = \dfrac{1}{2}[\cos(m + n)x + \cos(m - n)x]$

EJEMPLO 5 Encuentre $\int \operatorname{sen} 2x \cos 3x \, dx$.

SOLUCIÓN Aplique la identidad 1 para el producto.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} 2x \cos 3x\,dx &= \frac{1}{2}\int [\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen}(-x)]\,dx\\ &= \frac{1}{10}\int \operatorname{sen} 5x(5\,dx) - \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} x\,dx\\ &= -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 6 Si m y n son enteros positivos, demuestre que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \end{cases}$$

SOLUCIÓN Aplique la identidad 2 para el producto. Si $m \neq n$, entonces

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\,dx &= -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)x - \cos(m-n)x]\,dx\\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n}\operatorname{sen}(m+n)x - \frac{1}{m-n}\operatorname{sen}(m-n)x\right]_{-\pi}^{\pi}\\ &= 0\end{aligned}$$

Si $m = n$,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\,dx &= -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos 2mx - 1]\,dx\\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2m}\operatorname{sen} 2mx - x\right]_{-\pi}^{\pi}\\ &= -\frac{1}{2}[-2\pi] = \pi\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 7 Si m y n son enteros positivos, encuentre

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

SOLUCIÓN Sean $u = \pi x/L$, $du = \pi dx/L$. Si $x = -L$, entonces $u = -\pi$, y si $x = L$, entonces $u = \pi$. Por lo que

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx &= \frac{L}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nu\,du\\ &= \begin{cases} \dfrac{L}{\pi}\cdot 0 & \text{si } m \neq n \\ \dfrac{L}{\pi}\cdot \pi & \text{si } m = n \end{cases}\\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ L & \text{si } m = n \end{cases}\end{aligned}$$

Aquí hemos utilizado el resultado del ejemplo 6. ■

Varias veces en este texto hemos sugerido que debe ver las cosas desde el punto de vista algebraico y desde el punto de vista geométrico. Hasta el momento, esta sección ha sido completamente algebraica, pero con integrales definidas como las de los ejemplos 6 y 7, tenemos la oportunidad de ver cosas geométricamente.

La figura 1 muestra las gráficas de $y = \operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(2x)$ y $y = \operatorname{sen}(3\pi x/10)\operatorname{sen}(2\pi x/10)$. Las gráficas sugieren que las áreas por arriba y por abajo del eje x son iguales, llevando a $A_{\text{rriba}} - A_{\text{bajo}} = 0$. Los ejemplos 6 y 7 confirman esto.

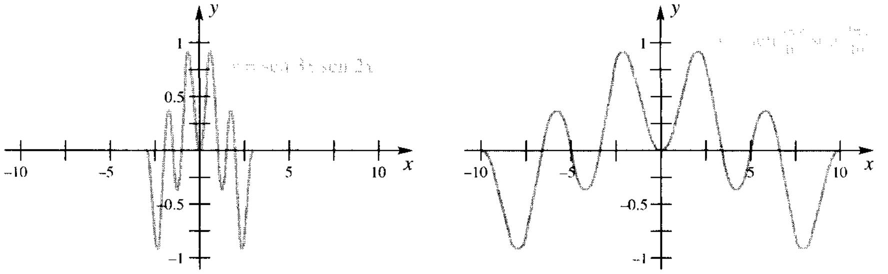


Figura 1

La figura 2 muestra las gráficas de $y = \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen}^2 2x, -\pi \leq x \leq \pi$, y $y = \operatorname{sen}(2\pi x/10) \operatorname{sen}(2\pi x/10) = \operatorname{sen}^2(2\pi x/10), -10 \leq x \leq 10$. Estas dos gráficas se ven iguales, salvo que la de la derecha se ha estirado en el sentido horizontal por un factor $10/\pi$, ¿entonces tiene sentido que el área aumentará por este mismo factor? Esto haría que el área sombreada en la figura de la derecha fuese igual a $10/\pi$ veces el área sombreada en la figura de la izquierda; esto es, el área de la derecha debería ser $(10/\pi) \cdot \pi = 10$, lo cual corresponde al resultado del ejemplo 7 con $L = 10$.

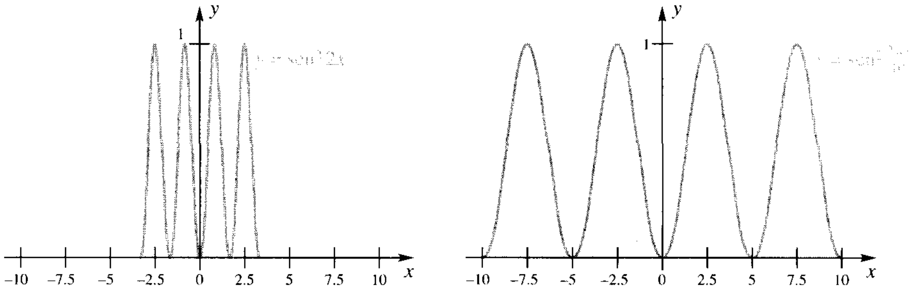


Figura 2

Tipo 4 $\left(\int \tan^n x\, dx, \int \cot^n x\, dx\right)$ En el caso de la tangente, utilice $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$; en el caso de cotangente, utilice $\cot^2 x = \csc^2 - 1$.

EJEMPLO 8 Determine $\int \cot^4 x\, dx$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\int \cot^4 x\, dx &= \int \cot^2 x\,(\csc^2 x - 1)\, dx \\ &= \int \cot^2 x \csc^2 x\, dx - \int \cot^2 x\, dx \\ &= -\int \cot^2 x\,(-\csc^2 x\, dx) - \int (\csc^2 x - 1)\, dx \\ &= -\tfrac{1}{3}\cot^3 x + \cot x + x + C\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 9 Determine $\int \tan^5 x\, dx$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\int \tan^5 x\,dx &= \int \tan^3 x\,(\sec^2 x - 1)\,dx\\ &= \int \tan^3 x \sec^2 x\,dx - \int \tan^3 x\,dx\\ &= \int \tan^3 x\,(\sec^2 x\,dx) - \int \tan x\,(\sec^2 x - 1)\,dx\\ &= \int \tan^3 x\,(\sec^2 x\,dx) - \int \tan x\,(\sec^2 x\,dx) + \int \tan x\,dx\\ &= \tfrac{1}{4}\tan^4 x - \tfrac{1}{2}\tan^2 x - \ln|\cos x| + C\end{aligned}$$ ■

Tipo 5 $\left(\int \tan^m x \sec^n x\,dx,\ \int \cot^m x \csc^n x\,dx\right)$

EJEMPLO 10 **(n par, m cualquier número)** Determine $\int \tan^{-3/2} x \sec^4 x\,dx$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\int \tan^{-3/2} x \sec^4 x\,dx &= \int (\tan^{-3/2} x)(1 + \tan^2 x)\sec^2 x\,dx\\ &= \int (\tan^{-3/2} x)\sec^2 x\,dx + \int (\tan^{1/2} x)\sec^2 x\,dx\\ &= -2\tan^{-1/2} x + \tfrac{2}{3}\tan^{3/2} x + C\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 11 **(m impar, n cualquier número)** Determine $\int \tan^3 x \sec^{-1/2} x\,dx$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x \sec^{-1/2} x\,dx &= \int (\tan^2 x)(\sec^{-3/2} x)(\sec x \tan x)\,dx\\ &= \int (\sec^2 x - 1)\sec^{-3/2} x\,(\sec x \tan x\,dx)\\ &= \int \sec^{1/2} x\,(\sec x \tan x\,dx) - \int \sec^{-3/2} x\,(\sec x \tan x\,dx)\\ &= \tfrac{2}{3}\sec^{3/2} x + 2\sec^{-1/2} x + C\end{aligned}$$ ■

Revisión de conceptos

1. Para calcular $\int \cos^2 x\,dx$, primero la escribimos como _____.

2. Para manejar $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\,dx$, primero la escribimos como _____.

3. Para obtener $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\,dx$, primero la reescribimos como _____.

4. Para resolver $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx$, donde $m \neq n$, utilizamos la identidad trigonométrica _____.

Conjunto de problemas 7.3

En los problemas del 1 al 28 realice las integraciones que se indican.

1. $\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$

2. $\int \operatorname{sen}^4 6x\, dx$

3. $\int \operatorname{sen}^3 x\, dx$

4. $\int \cos^3 x\, dx$

5. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 \theta\, d\theta$

6. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6 \theta\, d\theta$

7. $\int \operatorname{sen}^5 4x \cos^2 4x\, dx$

8. $\int (\operatorname{sen}^3 2t)\sqrt{\cos 2t}\, dt$

9. $\int \cos^3 3\theta \operatorname{sen}^{-2} 3\theta\, d\theta$

10. $\int \operatorname{sen}^{1/2} 2z \cos^3 2z\, dz$

11. $\int \operatorname{sen}^4 3t \cos^4 3t\, dt$

12. $\int \cos^6 \theta \operatorname{sen}^2 \theta\, d\theta$

13. $\int \operatorname{sen} 4y \cos 5y\, dy$

14. $\int \cos y \cos 4y\, dy$

15. $\int \operatorname{sen}^4\left(\frac{w}{2}\right)\cos^2\left(\frac{w}{2}\right) dw$

16. $\int \operatorname{sen} 3t \operatorname{sen} t\, dt$

17. $\int x \cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx$. *Sugerencia:* utilice integración por partes.

18. $\int x \operatorname{sen}^3 x \cos x\, dx$

19. $\int \tan^4 x\, dx$

20. $\int \cot^4 x\, dx$

21. $\int \tan^3 x\, dx$

22. $\int \cot^3 2t\, dt$

23. $\int \tan^5\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$

24. $\int \cot^5 2t\, dt$

25. $\int \tan^{-3} x \sec^4 x\, dx$

26. $\int \tan^{-3/2} x \sec^4 x\, dx$

27. $\int \tan^3 x \sec^2 x\, dx$

28. $\int \tan^3 x \sec^{-1/2} x\, dx$

29. Encuentre $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx$, $m \neq n$; m, n enteros.

30. Determine $\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L} \cos\frac{n\pi x}{L} dx$, $m \neq n$, m, n enteros.

$\boxed{\approx}$ **31.** La región acotada por $y = x + \operatorname{sen} x$, $y = 0$, $x = \pi$ se hace girar alrededor del eje x. Encuentre el volumen del sólido resultante.

$\boxed{\approx}$ **32.** La región acotada por $y = \operatorname{sen}^2(x^2)$; $y = 0$ y $x = \sqrt{\pi/2}$ se hace girar con respecto al eje y. Encuentre el volumen del sólido resultante.

33. Sea $f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \operatorname{sen}(nx)$. Utilice el ejemplo 6 para demostrar cada una de las siguientes proposiciones para un entero positivo m.

(a) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(mx)\, dx = \begin{cases} a_m & \text{si } m \leq N \\ 0 & \text{si } m > N \end{cases}$

(b) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = \sum_{n=1}^{N} a_n^2$

Nota: las integrales de este tipo aparecen en un tema llamado *series de Fourier*, que tiene aplicación en calor, cuerdas vibrantes y otros fenómenos físicos.

34. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

completando los siguientes pasos.

(a) $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n} =$

$$\left[\cos\frac{1}{2^n}x + \cos\frac{3}{2^n}x + \cdots + \cos\frac{2^n - 1}{2^n}x\right]\frac{1}{2^{n-1}}$$

(Véase el problema 46 de la sección 0.7.)

(b) Identifique una suma de Riemann que lleve a una integral definida.

(c) Evalúe esta integral definida.

35. Utilice el resultado del problema 34 para obtener la famosa fórmula de François Viète (1540–1603):

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$$

36. La región sombreada (véase la figura 3) entre un arco de $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq \pi$ y la recta $y = k$, $0 \leq k \leq 1$, se hace girar alrededor de la recta $y = k$, generando un sólido S. Determine k de modo que S tenga

(a) volumen mínimo y

(b) volumen máximo.

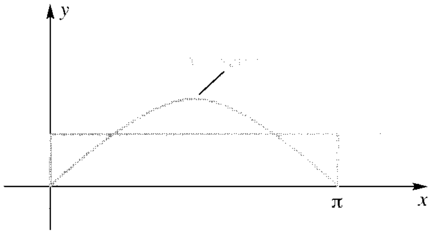


Figura 3

Respuestas a la revisión de conceptos:

1. $\int[(1 + \cos 2x)/2]\, dx$ **2.** $\int(1 - \operatorname{sen}^2 x)\cos x\, dx$

3. $\int \operatorname{sen}^2 x(1 - \operatorname{sen}^2 x)\cos x\, dx$

4. $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m + n)x + \cos(m - n)x]$

7.4
Sustituciones para racionalizar

Los radicales en un integrando siempre son problemáticos y por lo común tratamos de librarnos de ellos. Con frecuencia, una sustitución apropiada racionalizará el integrando.

Integrandos que incluyen $\sqrt[n]{ax+b}$ Si $\sqrt[n]{ax+b}$ aparece en una integral, la sustitución $u = \sqrt[n]{ax+b}$ eliminará el radical.

EJEMPLO 1 Encuentre $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$.

SOLUCIÓN Sea $u = \sqrt{x}$, de modo que $u^2 = x$ y $2u\,du = dx$. Entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}} &= \int \frac{2u}{u^2-u}\,du = 2\int \frac{1}{u-1}\,du \\ &= 2\ln|u-1| + C = 2\ln|\sqrt{x}-1| + C\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 2 Encuentre $\displaystyle\int x\sqrt[3]{x-4}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = \sqrt[3]{x-4}$, por lo que $u^3 = x-4$ y $3u^2du = dx$. Entonces

$$\begin{aligned}\int x\sqrt[3]{x-4}\,dx &= \int (u^3+4)u\cdot(3u^2\,du) = 3\int (u^6+4u^3)\,du \\ &= 3\left[\frac{u^7}{7}+u^4\right] + C = \frac{3}{7}(x-4)^{7/3} + 3(x-4)^{4/3} + C\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 3 Encuentre $\displaystyle\int x\sqrt[5]{(x+1)^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = (x+1)^{1/5}$, de modo que $u^5 = x+1$ y $5u^4\,du = dx$. Entonces,

$$\begin{aligned}\int x(x+1)^{2/5}\,dx &= \int (u^5-1)u^2\cdot 5u^4\,du \\ &= 5\int (u^{11}-u^6)\,du = \tfrac{5}{12}u^{12} - \tfrac{5}{7}u^7 + C \\ &= \tfrac{5}{12}(x+1)^{12/5} - \tfrac{5}{7}(x+1)^{7/5} + C\end{aligned}$$ ■

Integrandos que incluyen $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$ y $\sqrt{x^2-a^2}$ Para racionalizar estas tres expresiones, podemos suponer que a es positiva y hacer las siguientes sustituciones trigonométricas.

	Radical	Sustitución	Restricción sobre t
1.	$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\operatorname{sen} t$	$-\pi/2 \le t \le \pi/2$
2.	$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a\tan t$	$-\pi/2 < t < \pi/2$
3.	$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\sec t$	$0 \le t \le \pi, t \ne \pi/2$

Ahora observe las simplificaciones que realizan estas sustituciones.

1. $\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{a^2\cos^2 t} = |a\cos t| = a\cos t$
2. $\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+a^2\tan^2 t} = \sqrt{a^2\sec^2 t} = |a\sec t| = a\sec t$
3. $\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\sec^2 t-a^2} = \sqrt{a^2\tan^2 t} = |a\tan t| = \pm a\tan t$

Las restricciones sobre t nos permitieron eliminar los signos de valor absoluto en los primeros dos casos, pero también realizan algo más. Estas restricciones son exactamente las mismas que introdujimos en la sección 6.7 para hacer que fuesen invertibles seno, tangente y secante. Esto significa que, en cada caso, podemos resolver las ecuaciones de las sustituciones para t y esto nos permitirá escribir nuestras respuestas finales en los ejemplos siguientes en términos de x.

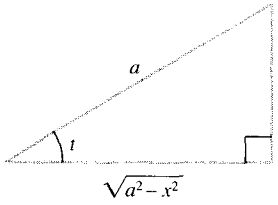
EJEMPLO 4 Encuentre $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Hacemos la sustitución

$$x = a \operatorname{sen} t, \qquad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$$

Entonces, $dx = a \cos t\,dt$ y $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$. Así,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx &= \int a \cos t \cdot a \cos t\,dt = a^2 \int \cos^2 t\,dt \\ &= \frac{a^2}{2}\int (1 + \cos 2t)\,dt \\ &= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right) + C \\ &= \frac{a^2}{2}(t + \operatorname{sen} t \cos t) + C\end{aligned}$$



$x = a \operatorname{sen} t$

Figura 1

Ahora, $x = a \operatorname{sen} t$ es equivalente a $x/a = \operatorname{sen} t$ y, como t estaba restringida a hacer invertible a la función seno,

$$t = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

Utilizando el triángulo rectángulo de la figura 1 (como lo hicimos en la sección 6.8), vemos que

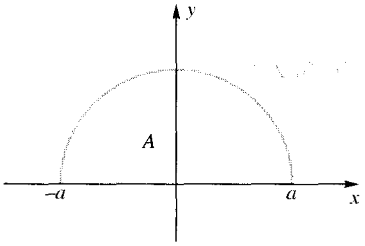
$$\cos t = \cos\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right] = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Por lo que

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

El resultado en el ejemplo 4 nos permite calcular la siguiente integral definida que representa el área de un semicírculo (véase la figura 2). Así, el cálculo confirma un resultado que ya conocíamos.

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \left[\frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}\right]_{-a}^{a} = \frac{a^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi a^2}{2}$$



$A = \int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{\pi a^2}{2}$

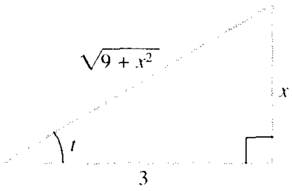
Figura 2

EJEMPLO 5 Encuentre $\int \frac{dx}{\sqrt{9 + x^2}}$.

SOLUCIÓN Sea $x = 3 \tan t$, $-\pi/2 < t < \pi/2$. Entonces $dx = 3 \sec^2 t\,dt$ y $\sqrt{9 + x^2} = 3 \sec t$.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{9 + x^2}} &= \int \frac{3 \sec^2 t}{3 \sec t}\,dt = \int \sec t\,dt \\ &= \ln|\sec t + \tan t| + C\end{aligned}$$

El último paso, la integral de $\sec t$, fue resuelto en el problema 56 de la sección 7.1. Ahora, $\tan t = x/3$, que genera el triángulo en la figura 3, con base en el cual concluimos que $\sec t = \sqrt{9 + x^2}/3$. Así,



$x = 3 \tan t$

Figura 3

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{9 + x^2}} &= \ln\left|\frac{\sqrt{9 + x^2} + x}{3}\right| + C \\ &= \ln|\sqrt{9 + x^2} + x| - \ln 3 + C \\ &= \ln|\sqrt{9 + x^2} + x| + K\end{aligned}$$

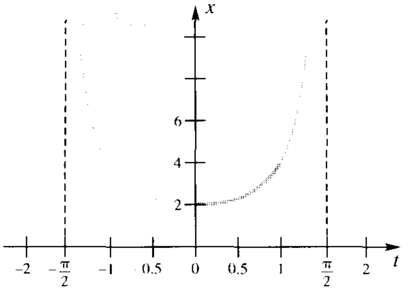


Figura 4

EJEMPLO 6 Calcule $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $x = 2 \sec t$, donde $0 \leq t < \pi/2$. Observe que es aceptable la restricción de t a este intervalo, ya que x está en el intervalo $2 \leq x \leq 4$ (véase la figura 4). Eso es importante porque nos permite eliminar el signo de valor absoluto que normalmente aparece cuando simplificamos $\sqrt{x^2 - a^2}$. En nuestro caso,

$$\sqrt{x^2-4} = \sqrt{4\sec^2 t - 4} = \sqrt{4\tan^2 t} = 2|\tan t| = 2\tan t$$

Ahora utilizamos el teorema sobre la sustitución en una integral definida (que requiere cambiar los límites de integración) para escribir

$$\begin{aligned}\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx &= \int_0^{\pi/3} \frac{2\tan t}{2\sec t}\, 2\sec t \tan t\, dt \\ &= \int_0^{\pi/3} 2\tan^2 t\, dt = 2\int_0^{\pi/3} (\sec^2 t - 1)\, dt \\ &= 2\Big[\tan t - t\Big]_0^{\pi/3} = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} \approx 1.37\end{aligned}$$

■

Completando cuadrados Cuando aparece una expresión cuadrática del tipo $x^2 + Bx + C$ bajo un radial, completar el cuadrado la preparará para una sustitución trigonométrica.

EJEMPLO 7 Encuentre (a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+26}}$ y (b) $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+26}}\,dx$.

SOLUCIÓN

(a) $x^2 + 2x + 26 = x^2 + 2x + 1 + 25 = (x+1)^2 + 25$. Sean $u = x + 1$ y $du = dx$. Entonces

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+26}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2+25}}$$

Ahora, sea $u = 5 \tan t$, $-\pi/2 < t < \pi/2$. Entonces $du = 5\sec^2 t\, dt$ y $\sqrt{u^2+25} = \sqrt{25(\tan^2 t + 1)} = 5\sec t$, así que

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+25}} &= \int \frac{5\sec^2 t\, dt}{5\sec t} = \int \sec t\, dt \\ &= \ln|\sec t + \tan t| + C \\ &= \ln\left|\frac{\sqrt{u^2+25}}{5} + \frac{u}{5}\right| + C \qquad \text{(por la figura 5)} \\ &= \ln\left|\sqrt{u^2+25} + u\right| - \ln 5 + C \\ &= \ln\left|\sqrt{x^2+2x+26} + x + 1\right| + K\end{aligned}$$

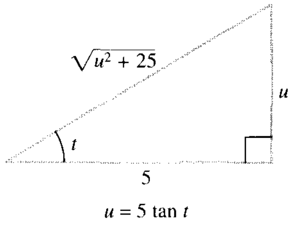


Figura 5

(b) Para calcular la segunda integral escribimos

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+26}}\,dx = \int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+26}}\,dx - 2\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+26}}\,dx$$

La primera de las integrales de la derecha se resuelve por medio de la sustitución $u = x^2 + 2x + 26$; la segunda es la que recientemente se hizo. Obtenemos

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+26}}\,dx = 2\sqrt{x^2+2x+26} - 2\ln\left|\sqrt{x^2+2x+26} + x + 1\right| + K$$

■

Revisión de conceptos

1. Para resolver $\int x\sqrt{x-3}\,dx$, se hace la sustitución $u =$ ____.

2. Para resolver una integral que incluya $\sqrt{4-x^2}$, se hace la sustitución $x =$ ________.

3. Para resolver una integral que incluya $\sqrt{4+x^2}$, se hace la sustitución $x =$ ________.

4. Para resolver una integral que incluya $\sqrt{x^2-4}$, se hace la sustitución $x =$ ________.

Conjunto de problemas 7.4

En los problemas del 1 al 16 evalúe las integrales que se indican.

1. $\int x\sqrt{x+1}\,dx$

2. $\int x\sqrt[3]{x+\pi}\,dx$

3. $\int \frac{t\,dt}{\sqrt{3t+4}}$

4. $\int \frac{x^2+3x}{\sqrt{x+4}}\,dx$

5. $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t}+e}$

6. $\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{t+1}\,dt$

7. $\int t(3t+2)^{3/2}\,dt$

8. $\int x(1-x)^{2/3}\,dx$

9. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx$

10. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{16-x^2}}$

11. $\int \frac{dx}{(x^2+4)^{3/2}}$

12. $\int_2^3 \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-1}}$

13. $\int_{-2}^{-3} \frac{\sqrt{t^2-1}}{t^3}\,dt$

14. $\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

15. $\int \frac{2z-3}{\sqrt{1-z^2}}\,dz$

16. $\int_0^{\pi} \frac{\pi x-1}{\sqrt{x^2+\pi^2}}\,dx$

En los problemas del 17 al 26 utilice el método de completar el cuadrado, junto con una sustitución trigonométrica, si es necesaria, para evaluar cada integral.

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$

19. $\int \frac{3x}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx$

20. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+4x+5}}\,dx$

21. $\int \sqrt{5-4x-x^2}\,dx$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{16+6x-x^2}}$

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

24. $\int \frac{x}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$

25. $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}\,dx$

26. $\int \frac{2x-1}{x^2-6x+18}\,dx$

27. La región acotada por $y = 1/(x^2+2x+5)$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$, se hace girar alrededor del eje x. Encuentre el volumen del sólido resultante.

28. La región del problema 27 se hace girar alrededor del eje y. Encuentre el volumen del sólido resultante.

29. Encuentre $\int \frac{x\,dx}{x^2+9}$ por medio de

(a) una sustitución algebraica y

(b) una sustitución trigonométrica. Después compare sus respuestas.

30. Encuentre $\int_0^3 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{9+x^2}}$ haciendo las sustituciones

$$u = \sqrt{9+x^2},\quad u^2 = 9+x^2,\quad 2u\,du = 2x\,dx$$

31. Encuentre $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx$ por medio de

(a) la sustitución $u = \sqrt{4-x^2}$ y

(b) una sustitución trigonométrica. Después compare sus resultados. *Sugerencia:* $\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$.

32. Dos círculos de radio b se intersecan como se muestra en la figura 6 con sus centros $2a$ unidades separados $(0 \le a \le b)$. Encuentre el área de la región en que se traslapan.

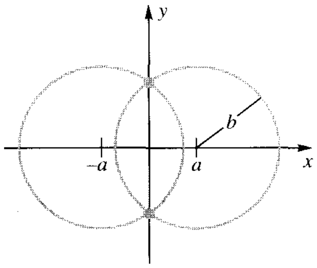


Figura 6

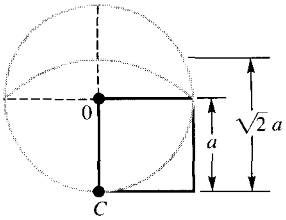


Figura 7

33. Hipócrates de Quios (aproximadamente 430 a. C.) demostró que las dos regiones sombreadas en la figura 7 tienen la misma área (él cuadró la Luna). Obsérvese que C es el centro del arco inferior de la Luna. Demuestre el resultado de Hipócrates.

(a) por medio de cálculo y (b) sin cálculo.

34. Generalice la idea del problema 33 encontrando una fórmula para el área de la región sombreada de la Luna que se muestra en la figura 8.

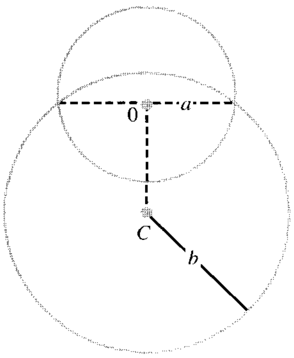


Figura 8

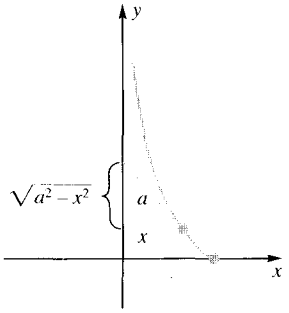


Figura 9

35. Comenzando en $(a, 0)$ se jala un objeto por medio de una cuerda de longitud a, con el extremo que se jala moviéndose a lo largo de la parte positiva del eje y (véase la figura 9). La trayectoria del objeto es una curva denominada **tractriz** y tiene la propiedad de que la cuerda siempre es tangente a la curva. Establezca una ecuación diferencial para la curva y resuélvala.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $\sqrt{x-3}$ **2.** $2 \operatorname{sen} t$ **3.** $2 \tan t$ **4.** $2 \sec t$

7.5 Integración de funciones racionales por medio de fracciones parciales

Una **función racional**, por definición, es el cociente de dos funciones polinómicas. Ejemplos son

$$f(x)=\frac{2}{(x+1)^3}, \qquad g(x)=\frac{2x+2}{x^2-4x+8}, \qquad h(x)=\frac{x^5+2x^3-x+1}{x^3+5x}$$

De éstas, f y g son **funciones racionales propias**, lo cual quiere decir que el grado del numerador es menor que el del denominador. Una función racional impropia (no propia) siempre puede escribirse como una suma de una función polinomial y una función racional propia. Así, por ejemplo,

$$h(x)=\frac{x^5+2x^3-x+1}{x^3+5x}=x^2-3+\frac{14x+1}{x^3+5x}$$

un resultado obtenido por medio de división larga (véase la figura 1). Los polinomios son fáciles de integrar, el problema de integrar funciones racionales realmente es la de integrar funciones racionales propias. Pero, ¿siempre podemos integrar funciones racionales propias? En teoría, la respuesta es sí, aunque los detalles prácticos pueden llegar a abrumarnos. Primero considere las integrales de las f y g anteriores.

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 3 \\
\hline
x^3+5x & x^5 + 2x^3 - x + 1 \\
 & \underline{x^5 + 5x^3} \\
 & -3x^3 - x \\
 & \underline{-3x^3 - 15x} \\
 & 14x + 1
\end{array}$$

Figura 1

EJEMPLO 1 Encuentre $\displaystyle\int \frac{2}{(x+1)^3}\,dx$.

SOLUCIÓN Considere la sustitución $u=x+1$.

$$\int \frac{2}{(x+1)^3}\,dx = 2\int (x+1)^{-3}\,dx = \frac{2(x+1)^{-2}}{-2}+C$$

$$= -\frac{1}{(x+1)^2}+C$$

EJEMPLO 2 Encuentre $\displaystyle\int \frac{2x+2}{x^2-4x+8}\,dx$.

SOLUCIÓN Primero considere la sustitución $u=x^2-4x+8$ para la cual $du=(2x-4)\,dx$. Entonces escriba la integral dada como una suma de dos integrales.

$$\int \frac{2x+2}{x^2-4x+8}\,dx = \int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}\,dx + \int \frac{6}{x^2-4x+8}\,dx$$

$$= \ln|x^2-4x+8| + 6\int \frac{1}{x^2-4x+8}\,dx$$

En la segunda integral, complete el cuadrado.

$$\int \frac{1}{x^2-4x+8}\,dx = \int \frac{1}{x^2-4x+4+4}\,dx = \int \frac{1}{(x-2)^2+4}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{(x-2)^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)+C$$

Concluimos que

$$\int \frac{2x+2}{x^2-4x+8}\,dx = \ln|x^2-4x+8| + 3\tan^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)+K$$

Un hecho destacado es que cualquier función racional propia puede escribirse como una suma de funciones racionales propias *simples*, como las que se ilustran en los ejemplos 1 y 2. Debemos ser más precisos.

Descomposición en fracciones parciales (factores lineales) Sumar fracciones es un ejercicio algebraico sencillo: encuentre un común denominador y sume. Por ejemplo,

$$\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{2(x+1)+3(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{5x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{5x-1}{x^2-1}$$

El proceso inverso de descomponer una fracción en una suma de fracciones más simples es el que ahora nos interesa. Centramos nuestra atención en el denominador y consideramos casos.

EJEMPLO 3 **Factores lineales simples** Descomponga $(3x-1)/(x^2-x-6)$ y luego encuentre su integral indefinida.

SOLUCIÓN Ya que el denominador se factoriza como $(x+2)(x-3)$, parece razonable esperar una descomposición de la forma siguiente:

$$\frac{3x-1}{(x+2)(x-3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3} \tag{1}$$

Por supuesto, nuestro trabajo es determinar A y B de modo que (1) sea una identidad, una tarea que encontramos más fácil después de que hemos multiplicado ambos lados por $(x+2)(x-3)$. Obtenemos

$$3x-1=A(x-3)+B(x+2) \tag{2}$$

o de manera equivalente,

$$3x-1=(A+B)x+(-3A+2B) \tag{3}$$

Sin embargo, (3) es una identidad si y sólo si los coeficientes de potencias iguales de x en ambos lados son iguales; esto es,

$$\begin{aligned}A+B&=3\\-3A+2B&=-1\end{aligned}$$

Al resolver este par de ecuaciones para A y B, obtenemos $A=\frac{7}{5}$, $B=\frac{8}{5}$. En consecuencia,

$$\frac{3x-1}{x^2-x-6}=\frac{3x-1}{(x+2)(x-3)}=\frac{\frac{7}{5}}{x+2}+\frac{\frac{8}{5}}{x-3}$$

y

$$\begin{aligned}\int\frac{3x-1}{x^2-x-6}\,dx&=\frac{7}{5}\int\frac{1}{x+2}\,dx+\frac{8}{5}\int\frac{1}{x-3}\,dx\\&=\frac{7}{5}\ln|x+2|+\frac{8}{5}\ln|x-3|+C\end{aligned}$$ ■

Si hubo alguna dificultad en este proceso, fue la determinación de A y B. Encontramos sus valores usando la "fuerza bruta", pero existe una manera más sencilla. En (2), la cual queremos que sea una identidad (es decir, verdadera para *todos* los valores de x), sustituya los valores convenientes de $x=3$ y $x=-2$, obteniendo

$$\begin{aligned}8&=A\cdot 0+B\cdot 5\\-7&=A\cdot(-5)+B\cdot 0\end{aligned}$$

De inmediato esto da $B=\frac{8}{5}$ y $A=\frac{7}{5}$.

Acabamos de ser testigos de una extraña pero correcta maniobra matemática. La ecuación (1) se vuelve una identidad (cierta para toda x, excepto -2 y 3) si y sólo si la esencialmente equivalente ecuación (2) es cierta en -2 y 3. Pregúntese por qué esto

Resuelva esta ecuación diferencial

"Con frecuencia, hay poco parecido entre una ecuación diferencial y su solución. Quién supondría que una ecuación tan sencilla como

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{a^2-x^2}$$

podría transformarse en

$$y=\frac{1}{2a}\log_e\left(\frac{a+x}{a-x}\right)+C$$

Esto parece la transformación de una crisálida en una mariposa".

Silvanus P. Thompson

El método de fracciones parciales hace de esto una transformación sencilla. ¿Ve cómo se hizo?

es así. En última instancia, depende del hecho de que dos lados de la ecuación (2), ambos polinomios lineales, son idénticos si tienen los mismos valores en cualesquiera dos puntos.

EJEMPLO 4 **Factores lineales distintos** Encuentre $\displaystyle\int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}\,dx$.

SOLUCIÓN Ya que el denominador se factoriza como $x(x+1)(x-3)$, escribimos

$$\frac{5x+3}{x(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3}$$

y buscamos determinar A, B y C. La eliminación de las fracciones produce

$$5x+3 = A(x+1)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x+1)$$

Al sustituir los valores $x=0$, $x=-1$ y $x=3$ se obtiene

$$\begin{aligned} 3 &= A(-3) \\ -2 &= B(4) \\ 18 &= C(12) \end{aligned}$$

o $A=-1$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=\frac{3}{2}$. Así,

$$\begin{aligned} \int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}\,dx &= -\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-3}\,dx \\ &= -\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{3}{2}\ln|x-3| + C \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 5 **Factores lineales repetidos** Encuentre $\displaystyle\int \frac{x}{(x-3)^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Ahora la descomposición toma la forma

$$\frac{x}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}$$

con A y B por determinar. Después de quitar fracciones, obtenemos

$$x = A(x-3) + B$$

Si ahora sustituimos el valor conveniente $x=3$ y cualquier otro valor, tal como $x=0$, obtenemos $B=3$ y $A=1$. Así,

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x-3)^2}\,dx &= \int \frac{1}{x-3}\,dx + 3\int \frac{1}{(x-3)^2}\,dx \\ &= \ln|x-3| - \frac{3}{x-3} + C \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6 **Factores lineales, algunos distintos y otros repetidos** Encuentre

$$\int \frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2}\,dx$$

SOLUCIÓN Descomponemos el integrando de la siguiente manera:

$$\frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

Quitando las fracciones esto cambia a

$$3x^2-8x+13 = A(x-1)^2 + B(x+3)(x-1) + C(x+3)$$

Al sustituir $x = 1, x = -3$ y $x = 0$ se obtiene $C = 2, A = 4$ y $B = -1$. Por lo tanto,

$$\int \frac{3x^2 - 8x + 13}{(x+3)(x-1)^2}\,dx = 4\int \frac{dx}{x+3} - \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= 4\ln|x+3| - \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + C \qquad \blacksquare$$

Asegúrese de observar la inclusión, en la descomposición anterior, de las dos fracciones $B/(x-1)$ y $C/(x-1)^2$. La regla general para descomponer fracciones con factores lineales repetidos en el denominador es ésta: por cada factor $(ax+b)^k$ en el denominador, existen k términos en la descomposición en fracciones parciales:

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \cdots + \frac{A_k}{(ax+b)^k}$$

Descomposición en fracciones parciales (factores cuadráticos) Al factorizar el denominador de una fracción, bien podríamos obtener algunos factores cuadráticos (tal como $x^2 + 1$), que no pueden factorizarse en factores lineales sin introducir números complejos.

EJEMPLO 7 **Un solo factor cuadrático** Descomponga $\dfrac{6x^2 - 3x + 1}{(4x+1)(x^2+1)}$ y después encuentre su integral indefinida.

SOLUCIÓN Lo mejor que podemos desear es una descomposición de la forma

$$\frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{4x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Para determinar las constantes A, B y C multiplicamos ambos miembros por $(4x + 1)(x^2 + 1)$ y obtenemos

$$6x^2 - 3x + 1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(4x+1)$$

Al sustituir $x = -\frac{1}{4}$, $x = 0$ y $x = 1$ se obtiene

$$\frac{6}{16} + \frac{3}{4} + 1 = A\left(\frac{17}{16}\right) \quad \Rightarrow \quad A = 2$$

$$1 = 2 + C \quad \Rightarrow \quad C = -1$$

$$4 = 4 + (B-1)5 \quad \Rightarrow \quad B = 1$$

Así,

$$\int \frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x+1)(x^2+1)}\,dx = \int \frac{2}{4x+1}\,dx + \int \frac{x-1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{4\,dx}{4x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|4x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \tan^{-1} x + C \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 8 **Un factor cuadrático repetido** Encuentre $\displaystyle\int \frac{6x^2 - 15x + 22}{(x+3)(x^2+2)^2}dx$.

SOLUCIÓN En este caso, la descomposición apropiada es

$$\frac{6x^2 - 15x + 22}{(x+3)(x^2+2)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2)^2}$$

Después de un considerable trabajo, descubrimos que $A = 1, B = -1, C = 3$ y $D = -5$ y $E = 0$. Así,

$$\begin{aligned}
&\int \frac{6x^2 - 15x + 22}{(x + 3)(x^2 + 2)^2}\, dx \\
&\quad = \int \frac{dx}{x + 3} - \int \frac{x - 3}{x^2 + 2}\, dx - 5\int \frac{x}{(x^2 + 2)^2}\, dx \\
&\quad = \int \frac{dx}{x + 3} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2 + 2}\, dx + 3\int \frac{dx}{x^2 + 2} - \frac{5}{2}\int \frac{2x\, dx}{(x^2 + 2)^2} \\
&\quad = \ln|x + 3| - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2) + \frac{3}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{5}{2(x^2 + 2)} + C \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Resumen Para descomponer una función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ en fracciones parciales, procedemos como sigue:

Paso 1: Si $f(x)$ es impropia, esto es, si $p(x)$ es de un grado mayor o igual al de $q(x)$, divida $p(x)$ entre $q(x)$, para obtener

$$f(x) = \text{un polinomio} + \frac{N(x)}{D(x)}$$

Paso 2: Factorice $D(x)$ en un producto de factores lineales y cuadráticos irreducibles con coeficientes reales. Por un teorema de álgebra, esto siempre es posible (teóricamente).

Paso 3: Por cada factor de la forma $(ax + b)^k$, se espera que la descomposición tenga los términos

$$\frac{A_1}{(ax + b)} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax + b)^k}$$

Paso 4: Por cada factor de la forma $(ax^2 + bx + c)^m$, se espera que la descomposición tenga los términos

$$\frac{B_1 x + C_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{B_2 x + C_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{B_m x + C_m}{(ax^2 + bx + c)^m}$$

Paso 5: Iguale $N(x)/D(x)$ a la suma de todos los términos determinados en los pasos 3 y 4. El número de constantes por determinarse debe ser igual al grado del denominador, $D(x)$.

Paso 6: Multiplique ambos miembros de la ecuación encontrada en el paso 5 por $D(x)$ y despeje las constantes desconocidas. Esto puede hacerse por dos métodos: (1) Iguale coeficientes de términos del mismo grado, o (2) asigne valores convenientes a la variable x.

Ecuación diferencial logística En el último capítulo vimos que la hipótesis de que la tasa de crecimiento de una población es proporcional a su tamaño, es decir, $y' = ky$, conduce al crecimiento exponencial. Esta hipótesis puede ser realista hasta que los recursos disponibles en el sistema son insuficientes para sostener a la población. En tal caso, suposiciones más razonables son que existe una capacidad máxima, L, que el sistema puede sostener, y que la tasa de crecimiento es proporcional al producto del tamaño de la población y y el "espacio disponible" $L - y$. Estas hipótesis conducen a la ecuación diferencial

$$y' = ky(L - y)$$

Ésta se denomina **ecuación diferencial logística**. Es separable y ahora que hemos estudiado el método de fracciones parciales, podemos realizar la integración necesaria para resolverla.

EJEMPLO 9 Una población crece de acuerdo con la ecuación diferencial logística $y' = 0.0003y(2000 - y)$. El tamaño de la población inicial es de 800. Resuelva esta ecuación diferencial para predecir el tamaño de la población en el instante $t = 2$.

≈ Una cota para la respuesta

El tamaño de la población inicial es de 800 y la tasa de cambio en el tamaño de la población, y', es positiva, así que la población crece. Cuando es cercana a 2000, la tasa de cambio se aproxima a cero, así que cuando $t \to \infty$, tenemos que $y \to 2000$. La población en el instante $t = 2$ debe estar entre 800 y 2000.

SOLUCIÓN Al escribir y' como dy/dt, vemos que la ecuación diferencial puede escribirse como

$$\frac{dy}{dt} = 0.0003y(2000 - y)$$

$$\frac{dy}{y(2000 - y)} = 0.0003\,dt$$

$$\int \frac{dy}{y(2000 - y)} = \int 0.0003\,dt$$

La integral del lado izquierdo puede evaluarse mediante el método de fracciones parciales. Escribimos

$$\frac{1}{y(2000 - y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{2000 - y}$$

que lleva a

$$1 = A(2000 - y) + By$$

Al sustituir $y = 0$ y $y = 2000$ se obtiene

$$1 = 2000A$$

$$1 = 2000B$$

Así, $A = \dfrac{1}{2000}$ y $B = \dfrac{1}{2000}$, lleva a

$$\int \left(\frac{1}{2000y} + \frac{1}{2000(2000 - y)} \right) dy = 0.0003t + C$$

$$\frac{1}{2000}\ln y - \frac{1}{2000}\ln(2000 - y) = 0.0003t + C$$

$$\ln \frac{y}{2000 - y} = 0.6t + 2000C$$

$$\frac{y}{2000 - y} = e^{0.6t + 2000C}$$

$$\frac{y}{2000 - y} = C_1 e^{0.6t}$$

Aquí, $C_1 = e^{2000C}$. En este punto podemos utilizar la condición inicial $y(0) = 800$ para determinar C_1.

$$\frac{800}{2000 - 800} = C_1 e^{0.6 \cdot 0}$$

$$C_1 = \frac{800}{1200} = \frac{2}{3}$$

Por lo tanto,

$$\frac{y}{2000 - y} = \frac{2}{3}e^{0.6t}$$

$$y = \frac{2}{3}(2000 - y)e^{0.6t}$$

$$y + \frac{2}{3}ye^{0.6t} = \frac{4000}{3}\,e^{0.6t}$$

$$y = \frac{(4000/3)e^{0.6t}}{1 + (2/3)e^{0.6t}} = \frac{4000/3}{2/3 + e^{-0.6t}}$$

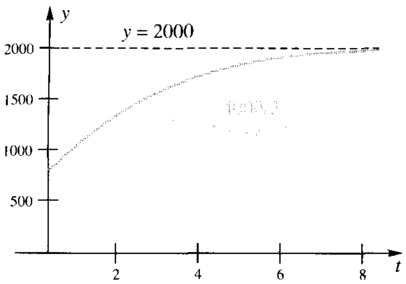


Figura 2

Así que la población en el instante $t = 2$ es

$$y = \frac{4000/3}{2/3 + e^{-0.6 \cdot 2}} \approx 1378$$

En la figura 2 se muestra un bosquejo del tamaño de la población. ■

Revisión de conceptos

1. Si el grado del polinomio $p(x)$ es menor que el grado de $q(x)$, entonces $f(x) = p(x)/q(x)$ se denomina función racional ______.

2. Para integrar la función racional impropia $f(x) = (x^2 + 4)/(x + 1)$, primero la reescribimos como $f(x) =$ ______.

3. Si $(x - 1)(x + 1) + 3x + x^2 = ax^2 + bx + c$, entonces $a =$ ______, $b =$ ______ y $c =$ ______.

4. $(3x + 1)/[(x - 1)^2(x^2 + 1)]$ puede descomponerse en la forma ______.

Conjunto de problemas 7.5

En los problemas del 1 al 40 utilice el método de la descomposición en fracciones parciales para realizar la integración que se pide.

1. $\int \frac{1}{x(x + 1)}\,dx$

2. $\int \frac{2}{x^2 + 3x}\,dx$

3. $\int \frac{3}{x^2 - 1}\,dx$

4. $\int \frac{5x}{2x^3 + 6x^2}\,dx$

5. $\int \frac{x - 11}{x^2 + 3x - 4}\,dx$

6. $\int \frac{x - 7}{x^2 - x - 12}\,dx$

7. $\int \frac{3x - 13}{x^2 + 3x - 10}\,dx$

8. $\int \frac{x + \pi}{x^2 - 3\pi x + 2\pi^2}\,dx$

9. $\int \frac{2x + 21}{2x^2 + 9x - 5}\,dx$

10. $\int \frac{2x^2 - x - 20}{x^2 + x - 6}\,dx$

11. $\int \frac{17x - 3}{3x^2 + x - 2}\,dx$

12. $\int \frac{5 - x}{x^2 - x(\pi + 4) + 4\pi}\,dx$

13. $\int \frac{2x^2 + x - 4}{x^3 - x^2 - 2x}\,dx$

14. $\int \frac{7x^2 + 2x - 3}{(2x - 1)(3x + 2)(x - 3)}\,dx$

15. $\int \frac{6x^2 + 22x - 23}{(2x - 1)(x^2 + x - 6)}\,dx$

16. $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{4x^3 - 28x^2 + 56x - 32}\,dx$

17. $\int \frac{x^3}{x^2 + x - 2}\,dx$

18. $\int \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 5x + 6}\,dx$

19. $\int \frac{x^4 + 8x^2 + 8}{x^3 - 4x}\,dx$

20. $\int \frac{x^6 + 4x^3 + 4}{x^3 - 4x^2}\,dx$

21. $\int \frac{x + 1}{(x - 3)^2}\,dx$

22. $\int \frac{5x + 7}{x^2 + 4x + 4}\,dx$

23. $\int \frac{3x + 2}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}\,dx$

24. $\int \frac{x^6}{(x - 2)^2(1 - x)^5}\,dx$

25. $\int \frac{3x^2 - 21x + 32}{x^3 - 8x^2 + 16x}\,dx$

26. $\int \frac{x^2 + 19x + 10}{2x^4 + 5x^3}\,dx$

27. $\int \frac{2x^2 + x - 8}{x^3 + 4x}\,dx$

28. $\int \frac{3x + 2}{x(x + 2)^2 + 16x}\,dx$

29. $\int \frac{2x^2 - 3x - 36}{(2x - 1)(x^2 + 9)}\,dx$

30. $\int \frac{1}{x^4 - 16}\,dx$

31. $\int \frac{1}{(x - 1)^2(x + 4)^2}\,dx$

32. $\int \frac{x^3 - 8x^2 - 1}{(x + 3)(x^2 - 4x + 5)}\,dx$

33. $\int \frac{(\operatorname{sen}^3 t - 8\operatorname{sen}^2 t - 1)\cos t}{(\operatorname{sen} t + 3)(\operatorname{sen}^2 t - 4\operatorname{sen} t + 5)}\,dt$

34. $\int \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^4 t - 16}\,dt$

35. $\int \frac{x^3 - 4x}{(x^2 + 1)^2}\,dx$

36. $\int \frac{(\operatorname{sen} t)(4\cos^2 t - 1)}{(\cos t)(1 + 2\cos^2 t + \cos^4 t)}\,dt$

37. $\int \frac{2x^3 + 5x^2 + 16x}{x^5 + 8x^3 + 16x}\,dx$

38. $\int_4^6 \frac{x - 17}{x^2 + x - 12}\,dx$

39. $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos\theta}{(1 - \operatorname{sen}^2\theta)(\operatorname{sen}^2\theta + 1)^2}\,d\theta$

40. $\int_1^5 \frac{3x + 13}{x^2 + 4x + 3}\,dx$

En los problemas del 41 al 44 resuelva la ecuación diferencial logística que representa el crecimiento de la población con la condición inicial dada. Después utilice la solución para predecir el tamaño de la población en el instante $t = 3$.

41. $y' = y(1 - y),\ y(0) = 0.5$

42. $y' = \frac{1}{10}y(12 - y),\ y(0) = 2$

43. $y' = 0.0003y\,(8000 - y),\ y(0) = 1000$

44. $y' = 0.001y\,(4000 - y),\ y(0) = 100$

45. Resuelva la ecuación logística para una constante arbitraria de proporcionalidad k, capacidad L y condición inicial $y(0) = y_0$.

46. Explique qué le sucede a la solución de la ecuación diferencial logística, si el tamaño de la población inicial es *mayor* que la capacidad máxima.

47. Sin resolver la ecuación logística ni hacer referencia a su solución, explique cómo sabe que si $y_0 < L$, entonces el tamaño de la población está creciendo.

48. Suponiendo que $y_0 < L$, ¿para qué valores de t la gráfica del tamaño de la población $y(t)$ es cóncava hacia arriba?

49. Suponga que la Tierra no puede mantener una población mayor a 16 mil millones de personas y que había 2 mil millones de personas en 1925 y 4 mil millones en 1975. Entonces, si y es la población t años después de 1925, un modelo aproximado es la ecuación diferencial logística

$$\frac{dy}{dt} = ky(16 - y)$$

(a) Resuelva la ecuación diferencial.

(b) Pronostique el tamaño de la población en 2015.

(c) ¿Cuándo la población será de 9 mil millones?

50. Resuelva el problema 49 suponiendo que el límite superior para la población es de 10 mil millones.

51. La ley de acción de masas en química resulta en la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x), \qquad k > 0,\quad a > 0,\quad b > 0$$

en donde x es la cantidad de una sustancia en el instante t como resultado de la reacción de otras dos. Suponga que $x = 0$ cuando $t = 0$.

(a) Resuelva la ecuación diferencial en el caso $b > a$.

(b) Demuestre que $x \to a$ cuando $t \to \infty$ (si $b > a$).

(c) Suponga que $a = 2$ y $b = 4$ y que 1 gramo de sustancia se formó en 20 minutos. ¿Cuánta habrá en 1 hora?

(d) Resuelva la ecuación diferencial si $a = b$.

52. La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = k(y - m)(M - y)$$

con $k > 0$ y $0 \le m < y_0 < M$ se utiliza para modelar algunos problemas de crecimiento. Resuelva la ecuación y encuentre $\lim_{t \to \infty} y$.

53. Como un modelo para la producción de la tripsina, a partir del tripsinógeno en la digestión, los bioquímicos han propuesto el modelo

$$\frac{dy}{dt} = k(A - y)(B + y)$$

donde $k > 0$, A es la cantidad límite de tripsinógeno y B es la cantidad original de tripsina. Resuelva esta ecuación diferencial.

54. Evalúe

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x(\operatorname{sen}^2 x + 1)^2}\,dx$$

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** propia **2.** $x - 1 + \frac{5}{x + 1}$ **3.** 2; 3; −1 **4.** $\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$

7.6 Estrategias de integración

A lo largo de este capítulo hemos presentado varias técnicas para determinar una antiderivada (o integral indefinida) de una función dada. Ahora debe ser claro que mientras la derivación es un proceso directo, la antiderivación no. La regla de la suma, la regla del producto, la regla del cociente y la regla de la cadena pueden utilizarse para determinar la derivada de casi cualquier función, pero no existe un método infalible para la determinación de antiderivadas. Sólo existe un conjunto de técnicas que uno podría aplicar. Así, en gran medida, la antiderivación es un proceso de prueba y error; cuando un método no funciona, hay que buscar otro. Sin embargo, podemos dar las siguientes estrategias para la determinación de antiderivadas.

1. Buscar una *sustitución* que haga que la integral se vea como una de las fórmulas de integración básicas de la primera sección de este capítulo. Por ejemplo,

$$\int \operatorname{sen} 2x\,dx, \quad \int xe^{-x^2}\,dx, \quad \int x\sqrt{x^2 - 1}\,dx$$

puede evaluarse utilizando sustituciones sencillas.

2. Busque situaciones en donde tenga el producto de dos funciones, y donde la derivada de una de ellas por la antiderivada de la otra sea una de las fórmulas básicas de integración de la sección 7.1. Para estas integrales se puede utilizar la *integración*

por partes. Por ejemplo, $\int xe^x\,dx$ y $\int x \operatorname{senh} x\,dx$ pueden evaluarse utilizando la integración por partes.

3. *Sustituciones trigonométricas*

   Si el integrando tiene $\sqrt{a^2 - x^2}$, considere la sustitución $x = a \operatorname{sen} t$.
   Si el integrando tiene $\sqrt{x^2 + a^2}$, considere la sustitución $x = a \tan t$.
   Si el integrando tiene $\sqrt{x^2 - a^2}$, considere la sustitución $x = a \sec t$.

4. Si el integrando es una función racional propia, es decir, el grado del numerador es menor que el del denominador, entonces descomponga el integrando por medio del método de *fracciones parciales*. Con frecuencia, los términos en la suma resultante pueden integrase de uno en uno. Si el integrando es una función racional impropia, realice la división larga para escribirla como la suma de un polinomio y una función racional propia. Luego aplique el método de fracciones parciales a la función racional propia.

Estas sugerencias, junto con un poco de ingenio, le harán recorrer un gran camino en la evaluación de antiderivadas.

Tablas de integrales Al interior de la contraportada de este libro hay 110 fórmulas de integración (indefinida). Existen tablas grandes, tal como las que se encuentran en *CRC Standard Mathematical Tables and Formulae* (publicado por CRC Press) y *Handbook of Mathematical Functions* (editado por Abramowitz y Stegun, publicado por Dover), pero la lista de 110 será suficiente para nuestros propósitos. Lo importante que se debe tener en cuenta es que, con frecuencia, usted debe utilizar estas fórmulas junto con el método de sustitución para evaluar una integral indefinida. Por esto, muchas tablas de integrales, incluyendo las del final del libro, utilizan u como la variable de integración, en lugar de x. Debe considerar a u como alguna función de x (puede ser x misma). El ejemplo siguiente muestra cómo una fórmula puede utilizarse para evaluar varias integrales por medio del método de sustitución.

EJEMPLO 1 Utilice la fórmula (54)

$$(54) \qquad \int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$$

para evaluar las siguientes integrales:

(a) $\int \sqrt{9 - x^2}\,dx$ (b) $\int \sqrt{16 - 4y^2}\,dy$

(c) $\int y\sqrt{1 - 4y^4}\,dy$ (d) $\int e^t\sqrt{100 - e^{2t}}\,dt$

SOLUCIÓN

(a) En esta integral tenemos $a = 3$ y $u = x$, por lo que

$$\int \sqrt{9 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{9 - x^2} + \frac{9}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{3} + C$$

Para la parte (b) hemos identificado $4y^2$ como $(2y)^2$, así que la sustitución adecuada es $u = 2y$ y $du = 2\,dy$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{16 - 4y^2}\,dy &= \frac{1}{2}\int \sqrt{4^2 - (2y)^2}\,(2\,dy)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2y}{2}\sqrt{4^2 - (2y)^2} + \frac{4^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{2y}{4}\right) + C\\ &= \frac{y}{2}\sqrt{16 - 4y^2} + 4\operatorname{sen}^{-1}\frac{y}{2} + C\end{aligned}$$

La parte (c) requiere un poco más de trabajo. Podría intentarse la sustitución $u = 1 - 4y^4$, pero entonces $du = -16y^3\,dy$. La presencia de y^3 en la expresión du es problemática porque sólo tenemos a y en el resto del integrando. Para esta parte debemos ver el radical como $\sqrt{1-(2y^2)^2}$ haciendo que se pueda aplicar la fórmula (54) con la sustitución $u = 2y^2$ y $du = 4y\,dy$. Así,

$$\begin{aligned}\int y\sqrt{1-4y^4}\,dy &= \frac{1}{4}\int\sqrt{1-(2y^2)^2}\,(4y\,dy)\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{2y^2}{2}\sqrt{1-(2y^2)^2}+\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{2y^2}{1}\right)+C\\ &= \frac{y^2}{4}\sqrt{1-4y^4}+\frac{1}{8}\operatorname{sen}^{-1}2y^2+C\end{aligned}$$

Tablas y sustitución

En el ejemplo 1 fuimos capaces de evaluar cuatro integrales, aparentemente no relacionadas, por medio de la misma fórmula de la tabla de integrales. Cada una necesitó una sustitución diferente. Cuando utilice una tabla de integrales para ayudarse a evaluar una integral, tenga en cuenta el método de sustitución.

Para la parte (d) debemos identificar que el radical puede escribirse como $\sqrt{100-(e^t)^2}$ y que debemos realizar la sustitución $u = e^t$ y $du = e^t dt$. Así,

$$\begin{aligned}\int e^t\sqrt{100-e^{2t}}\,dt &= \int\sqrt{10^2-(e^t)^2}\,(e^t\,dt)\\ &= \frac{e^t}{2}\sqrt{10^2-(e^t)^2}+\frac{10^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{e^t}{10}+C\\ &= \frac{e^t}{2}\sqrt{100-e^{2t}}+50\operatorname{sen}^{-1}\frac{e^t}{10}+C\end{aligned}$$

■

Sistemas de álgebra computacional y calculadoras Hoy día, un sistema de álgebra computacional, como *Maple*, *Mathematica* o *Derive*, puede utilizarse para evaluar integrales indefinidas o definidas. Muchas calculadoras también son capaces de evaluar integrales. Si tales sistemas los utiliza para evaluar *integrales definidas*, es importante distinguir si el sistema le proporciona una respuesta *exacta*, por lo común obtenida con la aplicación del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, o si le da una *aproximación* (utilizando algo similar al método de la parábola de la sección 4.6, aunque quizás un poco más sofisticado). Podría parecer que las dos son igualmente buenas en aplicaciones prácticas, y si tuviéramos que evaluar sólo una integral, esto podría ser correcto. Sin embargo, en muchos casos, el resultado de la integral definida se utilizará en cálculos subsecuentes. En un caso como éste es más preciso, y con frecuencia más sencillo, determinar la respuesta precisa y luego utilizar la respuesta exacta en cálculos posteriores. Por ejemplo, si $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ se necesita en cálculos subsecuentes, sería mejor determinar una antiderivada y utilizar el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo para obtener

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\tan^{-1}x]_0^1 = \tan^{-1}1 - \tan^{-1}0 = \frac{\pi}{4}$$

En cálculos posteriores, el uso de $\pi/4$ sería preferible a 0.785398, que es lo que proporciona *Mathematica* como una aproximación numérica a la integral.

Sin embargo, en algunos casos no es posible evaluar una integral definida aplicando el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, ya que algunas funciones no tienen antiderivadas que puedan expresarse en términos de funciones elementales. Nuestra falta de habilidad para determinar una fórmula sencilla para una antiderivada no nos absuelve de la tarea de determinar el valor de la integral definida. Significa que debemos utilizar un método numérico para *aproximar* la integral definida. Muchos problemas prácticos conducen a esta situación, en donde la integral necesaria no es tratable y debemos recurrir a un método numérico. Analizamos la integración numérica en la sección 4.6. Por lo común, un CAS utilizará un método similar al de la regla de la parábola, pero con un poco más de sofisticación.

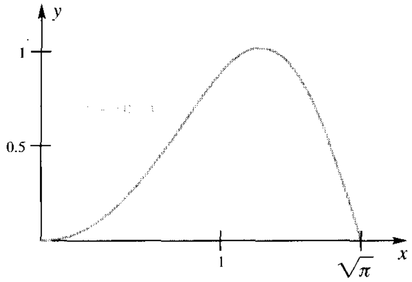


Figura 1

EJEMPLO 2 Determine el centro de masa de la lámina homogénea que se muestra en la figura 1.

SOLUCIÓN Al aplicar la fórmula de la sección 5.6, tenemos

$$m = \delta \int_0^{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} x^2 \, dx$$

$$M_y = \delta \int_0^{\sqrt{\pi}} x \operatorname{sen} x^2 \, dx$$

$$M_x = \frac{\delta}{2} \int_0^{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}^2 x^2 \, dx$$

Entre estas integrales, sólo la segunda puede evaluarse por medio del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo. Para la primera y la tercera no existen antiderivadas que puedan expresarse en términos de funciones elementales. Por lo tanto, debemos recurrir a una aproximación para las integrales. Un CAS proporciona los siguientes valores para estas integrales

$$m = \delta \int_0^{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} x^2 \, dx \approx 0.89483\,\delta$$

$$M_y = \delta \int_0^{\sqrt{\pi}} x \operatorname{sen} x^2 \, dx = \delta \left[-\frac{1}{2} \cos x^2 \right]_0^{\sqrt{\pi}} = \delta$$

$$M_x = \frac{\delta}{2} \int_0^{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}^2 x^2 \, dx \approx 0.33494\,\delta$$

Observe que el CAS fue capaz de proporcionar un valor exacto para la segunda integral y aproximaciones para la primera y la tercera. Con base en estos resultados, podemos calcular

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \approx \frac{\delta}{0.89483\,\delta} \approx 1.1175$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} \approx \frac{0.33494\,\delta}{0.89483\,\delta} \approx 0.3743$$

■

También existen situaciones en donde el límite superior de una integral es desconocido. Si éste es el caso, entonces el uso del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo se prefiere sobre el uso de una aproximación numérica. Los dos ejemplos siguientes ilustran esto. Los dos problemas, en principio son lo mismo, pero los métodos de solución son, por necesidad, diferentes.

EJEMPLO 3 Una varilla tiene densidad igual a $\delta(x) = \exp(-x/4)$ para $x > 0$. ¿En dónde debe cortarse la varilla de modo que la masa desde 0 hasta el corte sea igual a 1?

SOLUCIÓN Sea a el punto de corte. Entonces necesitamos que

$$1 = \int_0^a \delta(x)\, dx = \int_0^a \exp(-x/4)\, dx = 4 - 4e^{-a/4}$$

Al resolver para a se obtiene

$$1 = 4 - 4e^{-a/4}$$

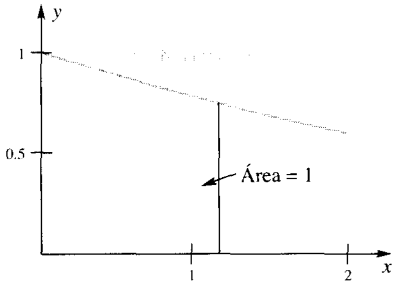
$$4e^{-a/4} = 3$$

$$a = -4 \ln \frac{3}{4} \approx 1.1507$$

Aquí obtuvimos la respuesta exacta, $a = -4 \ln(3/4)$, que pudimos aproximar como 1.1507, si necesitásemos una aproximación. ■

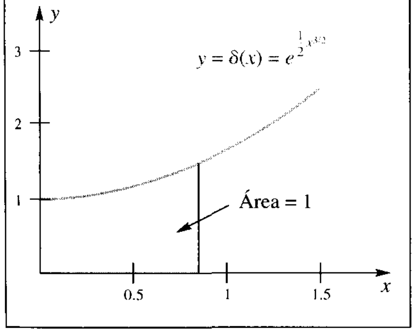
≈ Una respuesta aproximada

La masa es la integral de la densidad, así que la masa puede considerarse como el área bajo la curva de la densidad. En la posición $x = 0$, la densidad es 1 y disminuye lentamente conforme x aumenta. Para hacer que el área bajo la curva de la densidad sea igual a 1, esperaríamos tener que elegir el punto de corte un poco más adelante de 1.



≈ Otra aproximación

Utilizando el hecho de que la masa es el área bajo la curva de la densidad, con base en la siguiente figura vemos que el corte debe hacerse en algún punto entre 0.5 y 1. Esto nos proporciona un punto de inicio para aproximar la respuesta.



EJEMPLO 4 Una varilla tiene densidad igual a $\delta(x) = \exp\left(\frac{1}{2}x^{3/2}\right)$, para $x > 0$. ¿En dónde debe cortarse la varilla para que la masa desde 0 hasta el punto de corte sea igual a uno?

Utilice el método de bisección para aproximar el punto de corte, con una precisión de dos decimales.

SOLUCIÓN Nuevamente, sea a la posición del corte. Entonces necesitamos que

$$1 = \int_0^a \delta(x)\,dx = \int_0^a \exp\left(\frac{1}{2}x^{3/2}\right)dx$$

La antiderivada de $\exp\left(\frac{1}{2}x^{3/2}\right)$ no puede expresarse en términos de funciones elementales, por lo que no podemos utilizar el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo para evaluar la integral definida. Estamos forzados a aproximar la integral por medio de métodos numéricos. El problema es que debemos tener fijos los límites superior e inferior para aproximarla; pero en este caso el límite superior es la variable a. Un poco de ensayo y error, junto con un programa para aproximar integrales definidas, conduce a lo siguiente:

$a = 1$; $\quad \int_0^1 \exp\left(\frac{1}{2}x^{3/2}\right)dx \approx 1.2354$ $\quad a = 1$ es demasiado grande

$a = 0.5$; $\quad \int_0^{0.5} \exp\left(\frac{1}{2}x^{3/2}\right)dx \approx 0.5374$ $\quad a = 0.5$ es demasiado pequeño

En este momento sabemos que el valor buscado de a está entre 0.5 y 1.0. El punto medio de [0.5, 1.0] es 0.75, por lo que intentamos con 0.75:

$a = 0.75$; $\quad \int_0^{0.75} \exp\left(\frac{1}{2}x^{3/2}\right)dx \approx 0.85815$ $\quad a = 0.75$ es demasiado pequeño

Continuando de esta manera,

$a = 0.875$; $\quad \int_0^{0.875} \exp\left(\frac{1}{2}x^{3/2}\right)dx \approx 1.0385$ $\quad a = 0.875$ es demasiado grande

$a = 0.8125$; $\quad \int_0^{0.8125} \exp\left(\frac{1}{2}x^{3/2}\right)dx \approx 0.94643$ $\quad a = 0.8125$ es demasiado pequeño

$a = 0.84375$; $\quad \int_0^{0.84375} \exp\left(\frac{1}{2}x^{3/2}\right)dx \approx 0.99198$ $\quad a = 0.84375$ es demasiado pequeño

$a = 0.859375$; $\quad \int_0^{0.859375} \exp\left(\frac{1}{2}x^{3/2}\right)dx \approx 1.0151$ $\quad a = 0.859375$ es demasiado grande

$a = 0.8515625$; $\quad \int_0^{0.8515625} \exp\left(\frac{1}{2}x^{3/2}\right)dx \approx 1.0035$ $\quad a = 0.8515625$ es demasiado grande

$a = 0.84765625$; $\quad \int_0^{0.84765625} \exp\left(\frac{1}{2}x^{3/2}\right)dx \approx 0.99775$ $\quad a = 0.84765625$ es demasiado pequeño

En este punto, hemos atrapado a a entre 0.84765625 y 0.8515625, por lo que el punto de corte con dos decimales correctos debe ser $a = 0.85$. ■

EJEMPLO 5 Utilice el método de Newton para aproximar la solución de la ecuación del ejemplo 4.

SOLUCIÓN La ecuación que se resolverá puede escribirse como

$$\int_0^a \exp\left(\frac{1}{2}x^{3/2}\right) dx - 1 = 0$$

Sea $F(a)$ el lado izquierdo de esta ecuación. Entonces pedimos una aproximación para la solución de $F(a) = 0$. Recuerde que el método de Newton es un método iterativo definido mediante

$$a_{n+1} = a_n - \frac{F(a_n)}{F'(a_n)}$$

En este caso, podemos utilizar el Primer Teorema Fundamental del Cálculo para obtener

$$F'(a) = \exp\left(\frac{1}{2}a^{3/2}\right)$$

Iniciamos con $a_1 = 1$, como nuestra aproximación inicial (que, por la solución del ejemplo 3, sabemos que es alta). Entonces

$$a_2 = 1 - \frac{\int_0^1 \exp\left(\frac{1}{2}x^{3/2}\right) dx - 1}{\exp\left(\frac{1}{2}1^{3/2}\right)} \approx 0.857197$$

$$a_3 = 0.857197 - \frac{\int_0^{0.857197} \exp\left(\frac{1}{2}x^{3/2}\right) dx - 1}{\exp\left(\frac{1}{2}0.857197^{3/2}\right)} \approx 0.849203$$

$$a_4 = 0.849203 - \frac{\int_0^{0.849203} \exp\left(\frac{1}{2}x^{3/2}\right) dx - 1}{\exp\left(\frac{1}{2}0.849203^{3/2}\right)} \approx 0.849181$$

$$a_5 = 0.849181 - \frac{\int_0^{0.849181} \exp\left(\frac{1}{2}x^{3/2}\right) dx - 1}{\exp\left(\frac{1}{2}0.849181^{3/2}\right)} \approx 0.849181$$

Nuestra aproximación para el punto de corte es 0.849181. Observe que el método de Newton requirió menos trabajo y proporcionó una respuesta más exacta. ■

Funciones definidas por medio de tablas Ahora es común tener datos recolectados en una computadora a partir de un sistema de puntos periódicos en el tiempo, a menudo muy frecuentemente, tanto como una vez por segundo. Cuando los datos recolectados representan una función que debe integrarse, en realidad no podemos utilizar el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo. En lugar de eso, debemos aplicar un método numérico que sólo utilice los puntos muestreados.

EJEMPLO 6 Con frecuencia, a los automóviles se les instalan dispositivos que hacen un seguimiento instantáneo del consumo de gasolina (medido en millas por galón). Suponga que una computadora está conectada al automóvil de modo que recolecta el consumo instantáneo de gasolina así como la velocidad instantánea. En la figura 2 aparece una gráfica que muestra la velocidad (millas por hora) y consumo de gasolina (en millas por galón) para un viaje de 2 horas. La curva superior (negra) muestra la velocidad, mientras que la curva inferior (gris) muestra el consumo de gasolina. El consumo varía mucho, dependiendo principalmente de si el automóvil sube o baja una colina. Parte de la información se muestra en la siguiente tabla. ¿Qué distancia recorrió el automóvil en este viaje de dos horas y cuánto consumió de gasolina?

Tiempo (minutos)	Velocidad (millas/h)	Consumo de gasolina (millas/gal)	Velocidad/ consumo de gasolina
0	36	20.00	1.80
1	37	22.35	1.66
2	36	23.67	1.52
3	36	28.75	1.25
⋮	⋮	⋮	⋮
118	42	24.30	1.73
119	40	24.83	1.61
120	41	26.19	1.57

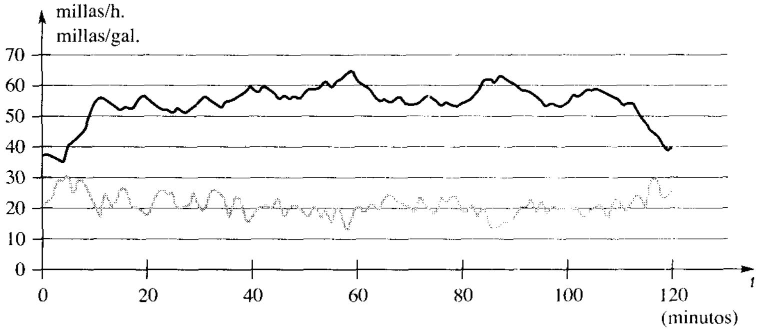


Figura 2

Una aproximación burda

La figura sugiere que el consumo promedio de gasolina es de alrededor de 20 millas por galón y que la velocidad promedio es de aproximadamente 50 millas por hora. Al cabo de 2 horas (120 minutos) el automóvil habría recorrido alrededor de 100 millas, y más o menos a 20 millas por galón, se habrían consumido

$$\frac{100 \text{ millas}}{20 \text{ millas por galón}} = 5 \text{ galones.}$$

Esperamos que nuestra respuesta esté cerca de 5 galones.

SOLUCIÓN Utilizaremos la regla del trapecio para aproximar las integrales. La distancia recorrida es la integral definida de la velocidad instantánea, así que

$$D = \int_0^2 \frac{ds}{dt}dt \approx \frac{2-0}{2 \cdot 120}[36 + 2(37 + 36 + \cdots + 40) + 41] = 109.4 \text{ millas}$$

La cantidad total de gasolina consumida es la integral de $\frac{df}{dt}$, donde $f(t)$ es la cantidad de gasolina en el tanque del automóvil en el instante t. Observe que el consumo de gasolina está dado en millas por galón, que es ds/df. La última columna en la tabla anterior es la velocidad ds/dt dividida entre ds/df. Por lo tanto, la gasolina consumida es

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{df}{dt}\,dt &= \int_0^2 \frac{ds/dt}{ds/df}\,dt \\ &\approx \frac{2-0}{2 \cdot 120}[1.80 + 2(1.66 + 1.52 + \cdots + 1.61) + 1.57] \\ &\approx 5.30 \text{ galones}\end{aligned}$$

■

Funciones especiales Muchas integrales definidas que no pueden evaluarse por medio del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, surgen con tanta frecuencia en matemáticas aplicadas que reciben nombres especiales. A continuación están algunas de estas funciones de acumulación, junto con sus nombres comunes y abreviaturas:

la función error	$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$
la integral del seno	$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$
la integral seno de Fresnel	$S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)dt$
la integral coseno de Fresnel	$C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)dt$

Existen otras; véase *Handbook of Mathematical Functions* para muchas más. Los algoritmos, que con frecuencia incluyen series infinitas (un tema que trataremos en el capítulo 9), se han desarrollado para aproximar estas funciones. Por lo común, estos algoritmos son precisos y eficientes. De hecho, no es más difícil (para una computadora) aproximar la integral de Fresnel $S(1)$ que aproximar el seno de 1. Debido a que muchos problemas prácticos llegan a incluir tales funciones, es importante conocer que existen y cómo determinar aproximaciones para ellas.

EJEMPLO 7 Exprese la masa de la lámina del ejemplo 2 en términos de la integral seno de Fresnel.

SOLUCIÓN Se determinó que la masa es

$$m = \delta \int_0^{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} x^2\, dx$$

Si hacemos la sustitución $x = t\sqrt{\pi/2}$, entonces $x^2 = t^2\,\pi/2$ y $dx = \sqrt{\pi/2}\, dt$. Los límites en la integral definida también deben transformarse

$$x = 0 \Rightarrow t = 0$$
$$x = \sqrt{\pi} \Rightarrow t = \sqrt{2}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} m &= \delta \int_0^{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{t^2\pi}{2}\right)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, dt \\ &= \delta\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt \\ &= \delta\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, S\left(\sqrt{2}\right) \approx 0.895\,\delta \end{aligned}$$

■

Revisión de conceptos

1. Las tablas de integrales son muy útiles cuando se utilizan junto con el método de ______.

2. Tanto $\int (x^2 + 9)^{3/2}\, dx$ y $\int (\operatorname{sen}^2 x + 1)^{3/2} \cos x\, dx$ pueden evaluarse mediante la fórmula número ______.

3. Al utilizar un CAS para evaluar una integral definida es importante saber si el sistema nos proporciona una respuesta exacta o un(a) ______.

4. La integral del seno evaluada en $t = 0$ es $S(0) =$ ______.

Conjunto de problemas 7.6

En los problemas del 1 al 12 evalúe la integral dada.

1. $\int xe^{-5x}\, dx$

2. $\int \frac{x}{x^2 + 9}\, dx$

3. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\, dx$

4. $\int \frac{x}{x^2 - 5x + 6}\, dx$

5. $\int \cos^4 2x\, dx$

6. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos x\, dx$

7. $\int_1^2 \frac{1}{x^2 + 6x + 8}\, dx$

8. $\int_0^{1/2} \frac{1}{1 - t^2}\, dt$

9. $\int_0^5 x\sqrt{x + 2}\, dx$

10. $\int_3^4 \frac{1}{t - \sqrt{2t}}\, dt$

11. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx$

12. $\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen} 2x|\, dx$

En los problemas del 13 al 30 utilice la tabla de integrales de la cubierta interior al final del libro, quizá combinada con una sustitución, para evaluar las integrales dadas.

13. (a) $\int x\sqrt{3x + 1}\, dx$ (b) $\int e^x\sqrt{3e^x + 1}\, e^x\, dx$

14. (a) $\int 2t\sqrt{3 - 4t}\, dt$ (b) $\int \cos t\sqrt{3 - 4\cos t}\, \operatorname{sen} t\, dt$

15. (a) $\int \frac{dx}{9 - 16x^2}$ (b) $\int \frac{e^x}{9 - 16e^{2x}}\, dx$

16. (a) $\int \frac{dx}{5x^2 - 11}$ (b) $\int \frac{x}{5x^4 - 11}\, dx$

17. (a) $\int x^2\sqrt{9 - 2x^2}\, dx$

(b) $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\sqrt{9 - 2\operatorname{sen}^2 x}\, dx$

18. (a) $\int \frac{\sqrt{16 - 3t^2}}{t}\, dt$ (b) $\int \frac{\sqrt{16 - 3t^6}}{t}\, dt$

19. (a) $\int \frac{dx}{\sqrt{5 + 3x^2}}$ (b) $\int \frac{x}{\sqrt{5 + 3x^4}}\, dx$

20. (a) $\int t^2\sqrt{3 + 5t^2}\, dt$ (b) $\int t^8\sqrt{3 + 5t^6}\, dt$

21. (a) $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 2t - 3}}$ (b) $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 3t - 5}}$

22. (a) $\int \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x + 1}\, dx$ (b) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 4x}}{x - 2}\, dx$

23. (a) $\int \frac{y}{\sqrt{3y + 5}}\, dy$ (b) $\int \frac{\operatorname{sen} t \cos t}{\sqrt{3\operatorname{sen} t + 5}}\, dt$

24. (a) $\int \frac{dz}{z\sqrt{5 - 4z}}$ (b) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x\sqrt{5 - 4\cos x}}\, dx$

25. $\int \operatorname{senh}^2 3t\, dt$

26. $\int \frac{\operatorname{sech}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

27. $\displaystyle\int \frac{\cos t \operatorname{sen} t}{\sqrt{2\cos t + 1}}\,dt$

28. $\displaystyle\int \cos t \operatorname{sen} t \sqrt{4\cos t - 1}\,dt$

29. $\displaystyle\int \frac{\cos^2 t \operatorname{sen} t}{\sqrt{\cos t + 1}}\,dt$ **30.** $\displaystyle\int \frac{1}{(9 + x^2)^3}\,dx$

Utilice un CAS para evaluar las integrales definidas en los problemas del 31 al 40. Si el CAS no proporciona una respuesta exacta en términos de funciones elementales, proporcione una aproximación numérica.

31. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{sen} x}\,dx$ **32.** $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sech}\sqrt[3]{x}\,dx$

33. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{12} x\,dx$ **34.** $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^4 \frac{x}{2}\,dx$

35. $\displaystyle\int_1^4 \frac{\sqrt{t}}{1 + t^8}\,dt$ **36.** $\displaystyle\int_0^3 x^4 e^{-x/2}\,dx$

37. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + 2\cos^5 x}\,dx$ **38.** $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{x^3}{4 + \tan x}\,dx$

39. $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2x + 1}\,dx$ **40.** $\displaystyle\int_1^3 \frac{du}{u\sqrt{2u - 1}}$

En los problemas del 41 al 48 se da la densidad de una varilla. Determine c de modo que la masa de 0 hasta c sea igual a 1. Siempre que sea posible encuentre una solución exacta. Si no es posible, determine una aproximación para c. (Véanse los ejemplos 4 y 5.)

41. $\delta(x) = \dfrac{1}{x + 1}$ **42.** $\delta(x) = \dfrac{2}{x^2 + 1}$

43. $\delta(x) = \ln(x + 1)$ **44.** $\delta(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

45. $\delta(x) = 2e^{-x^{3/2}}$ **46.** $\delta(x) = \ln(x^3 + 1)$

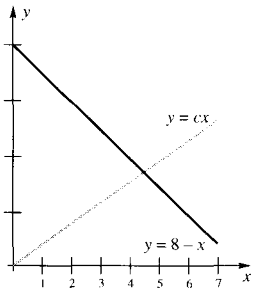
47. $\delta(x) = 6\cos\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$ **48.** $\delta(x) = 4\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

49. Determine c de modo que $\displaystyle\int_0^c \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} x^{3/2} e^{-x/2}\,dx = 0.90$.

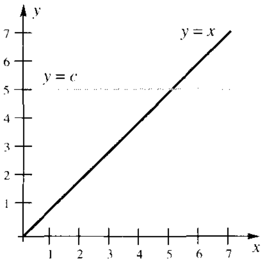
50. Determine c de modo que $\displaystyle\int_{-c}^{c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx = 0.95$. *Sugerencia:* use simetría.

En los problemas del 51 al 54 se da la gráfica de $y = f(x)$ junto con la gráfica de una recta. Determine c de modo que el componente x del centro de masa de la lámina homogénea sombreada sea igual a 2.

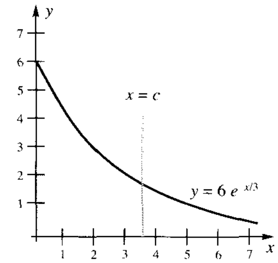
51.



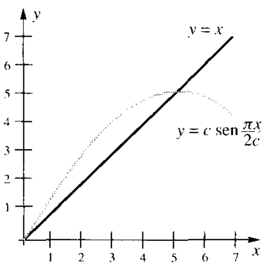
52.



53.



54.



55. Determine las siguientes derivadas.

(a) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{erf}(x)$ (b) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{Si}(x)$

56. Determine las derivadas de las funciones de Fresnel

(a) $\dfrac{d}{dx}S(x)$ (b) $\dfrac{d}{dx}C(x)$

57. ¿En qué intervalos (en el lado no negativo de la recta real) la función error es creciente? ¿Es cóncava hacia arriba?

58. ¿En qué subintervalos de $[0, 2]$ la función de Fresnel $S(x)$ es creciente? ¿Es cóncava hacia arriba?

59. ¿En qué subintervalos de $[0, 2]$, la función de Fresnel $C(x)$ es creciente? ¿Es cóncava hacia arriba?

60. Determine las coordenadas del primer punto de inflexión de la función de Fresnel $S(x)$ que se encuentra a la derecha del origen.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** sustitución **2.** 53 **3.** aproximación **4.** 0

7.7 Repaso del capítulo

Examen de conceptos

Responda con verdadero o falso a cada una de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

1. Para evaluar $\displaystyle\int x \operatorname{sen}(x^2)\,dx$, se hace la sustitución $u = x^2$.

2. Para evaluar $\displaystyle\int \frac{x}{9 + x^4}\,dx$, se hace la sustitución $u = x^2$.

3. Para evaluar $\displaystyle\int \frac{x^3}{9 + x^4}\,dx$, se hace la sustitución $u = x^2$.

4. Para evaluar $\displaystyle\int \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 5}\,dx$, se inicia completando el cuadrado del denominador.

5. Para evaluar $\displaystyle\int \frac{3}{x^2 - 3x + 5}\,dx$, se inicia completando el cuadrado del denominador.

6. Para evaluar $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4 - 5x^2}}\,dx$, se hace la sustitución $u = \sqrt{5}x$.

7. Para evaluar $\int \frac{t+2}{t^3-9t}\,dt$, se utilizan fracciones parciales.

8. Para evaluar $\int \frac{t^4}{t^2-1}\,dt$, se utiliza integración por partes.

9. Para evaluar $\int \operatorname{sen}^6 x \cos^2 x\,dx$, se usan fórmulas para el medio ángulo.

10. Para evaluar $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$, se utiliza integración por partes.

11. Para evaluar $\int \frac{x+2}{\sqrt{-x^2-4x}}\,dx$, se utiliza una sustitución trigonométrica.

12. Para evaluar $\int x^2\sqrt[3]{3-2x}\,dx$, se hace $u=\sqrt[3]{3-2x}$.

13. Para evaluar $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^5 x\,dx$, se reescribe el integrando como $\operatorname{sen}^2 x(1-\operatorname{sen}^2 x)^2\cos x$.

14. Para evaluar $\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}\,dx$, se hace una sustitución trigonométrica.

15. Para evaluar $\int x^2\ln x\,dx$, se utiliza integración por partes.

16. Para evaluar $\int \operatorname{sen} 2x\cos 4x\,dx$, se utilizan las fórmulas para el medio ángulo.

17. $\frac{x^2}{x^2-1}$ puede expresarse en la forma $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$.

18. $\frac{x^2+2}{x(x^2-1)}$ puede expresarse en la forma

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$$

19. $\frac{x^2+2}{x(x^2+1)}$ puede expresarse en la forma $\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$.

20. $\frac{x+2}{x^2(x^2-1)}$ puede expresarse en la forma

$$\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$$

21. Para completar el cuadrado de ax^2+bx se suma $(b/2)^2$.

22. Cualquier polinomio con coeficientes reales puede factorizarse en un producto de polinomios lineales con coeficientes reales.

23. Dos polinomios en x tienen los mismos valores para toda x si y sólo si los coeficientes de términos del mismo grado son idénticos.

24. La integral $\int x^2\sqrt{25-4x^2}\,dx$ puede evaluarse mediante la fórmula 57 de la tabla de integrales, junto con una sustitución adecuada.

25. La integral $\int x\sqrt{25-4x^2}\,dx$ puede evaluarse mediante la fórmula 57 de la tabla de integrales, junto con una sustitución adecuada.

26. $\operatorname{erf}(0)<\operatorname{erf}(1)$

27. Si $C(x)=\int_0^x \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)dt$, entonces $C'(x)=\cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)$.

28. La función integral del seno $\operatorname{Si}(x)=\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$ es una función creciente en el intervalo $[0,\infty)$.

Problemas de examen

En los problemas del 1 al 42 evalúe cada integral.

1. $\int_0^4 \frac{t}{\sqrt{9+t^2}}\,dt$

2. $\int \cot^2(2\theta)\,d\theta$

3. $\int_0^{\pi/2} e^{\cos x}\operatorname{sen} x\,dx$

4. $\int_0^{\pi/4} x\operatorname{sen} 2x\,dx$

5. $\int \frac{y^3+y}{y+1}\,dy$

6. $\int \operatorname{sen}^3(2t)\,dt$

7. $\int \frac{y-2}{y^2-4y+2}\,dy$

8. $\int_0^{3/2} \frac{dy}{\sqrt{2y+1}}$

9. $\int \frac{e^{2t}}{e^t-2}\,dt$

10. $\int \frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{\tan x}\,dx$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{16+4x-2x^2}}$

12. $\int x^2e^x\,dx$

13. $\int \frac{dy}{\sqrt{2+3y^2}}$

14. $\int \frac{w^3}{1-w^2}\,dw$

15. $\int \frac{\tan x}{\ln|\cos x|}\,dx$

16. $\int \frac{3\,dt}{t^3-1}$

17. $\int \operatorname{senh} x\,dx$

18. $\int \frac{(\ln y)^5}{y}\,dy$

19. $\int x\cot^2 x\,dx$

20. $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

21. $\int \frac{\ln t^2}{t}\,dt$

22. $\int \ln(y^2+9)\,dy$

23. $\int e^{t/3}\operatorname{sen} 3t\,dt$

24. $\int \frac{t+9}{t^3+9t}\,dt$

25. $\int \operatorname{sen}\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx$

26. $\int \cos^4\left(\frac{x}{2}\right)dx$

27. $\int \tan^3 2x\sec 2x\,dx$

28. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$

29. $\int \tan^{3/2} x\sec^4 x\,dx$

30. $\int \frac{dt}{t(t^{1/6}+1)}$

31. $\int \frac{e^{2y}\,dy}{\sqrt{9-e^{2y}}}$

32. $\int \cos^5 x\sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx$

33. $\int e^{\ln(3\cos x)}\,dx$

34. $\int \frac{\sqrt{9-y^2}}{y}\,dy$

35. $\int \frac{e^{4x}}{1+e^{8x}}\,dx$

36. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^4}\,dx$

37. $\int \frac{w}{\sqrt{w+5}}\,dw$

38. $\int \frac{\operatorname{sen} t\,dt}{\sqrt{1+\cos t}}$

39. $\int \frac{\operatorname{sen} y\cos y}{9+\cos^4 y}\,dy$

40. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-6x-x^2}}$

41. $\int \frac{4x^2+3x+6}{x^2(x^2+3)}\,dx$

42. $\int \frac{dx}{(16+x^2)^{3/2}}$

43. Exprese la descomposición en fracciones parciales de cada función racional sin calcular los coeficientes exactos. Por ejemplo,

$$\frac{3x+1}{(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

(a) $\dfrac{3-4x^2}{(2x+1)^3}$

(b) $\dfrac{7x-41}{(x-1)^2(2-x)^3}$

(c) $\dfrac{3x+1}{(x^2+x+10)^2}$

(d) $\dfrac{(x+1)^2}{(x^2-x+10)^2(1-x^2)^2}$

(e) $\dfrac{x^5}{(x+3)^4(x^2+2x+10)^2}$

(f) $\dfrac{(3x^2+2x-1)^2}{(2x^2+x+10)^3}$

44. Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región bajo la gráfica de

$$y = \frac{1}{\sqrt{3x-x^2}}$$

desde $x = 1$ hasta $x = 2$ alrededor del

(a) eje x; (b) eje y

45. Encuentre la longitud de la curva $y = x^2/16$ desde $x = 0$ hasta $x = 4$.

46. La región bajo la curva

$$y = \frac{1}{x^2+5x+6}$$

desde $x = 0$ hasta $x = 3$ se hace girar alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido que se genera.

47. Si la curva dada en el problema 46 se hace girar alrededor del eje y, encuentre el volumen del sólido.

48. Encuentre el volumen del sólido que se crea al hacer girar la región acotada por el eje x y la curva $y = 4x\sqrt{2-x}$ alrededor del eje y.

49. Encuentre el volumen cuando el área creada por el eje x, el eje y, la curva $y = 2(e^x - 1)$ y la curva $x = \ln 3$ se hace girar alrededor de la recta $x = \ln 3$.

50. Encuentre el área de la región acotada por el eje x, la curva $y = 18/\left(x^2\sqrt{x^2+9}\right)$, y las rectas $x = \sqrt{3}$ y $x = 3\sqrt{3}$.

51. Encuentre el área de la región acotada por la curva $s = t/(t-1)^2$, $s = 0$, $t = -6$ y $t = 0$.

≈ **52.** Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región

$$\left\{(x, y): -3 \le x \le -1, \frac{6}{x\sqrt{x+4}} \le y \le 0\right\}$$

alrededor del eje x. Haga un dibujo.

≈ **53.** Encuentre la longitud del segmento de la curva $y = \ln(\operatorname{sen} x)$ desde $x = \pi/6$ hasta $x = \pi/3$.

54. Utilice la tabla de integrales para evaluar las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{81-4x^2}}{x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int e^x(9-e^{2x})^{3/2}\,dx$

55. Utilice la tabla de integrales para evaluar las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \cos x\sqrt{\operatorname{sen}^2 x + 4}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{1-4x^2}\,dx$

56. Evalúe las primeras dos derivadas de la integral del seno $\operatorname{Si}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$.

57. Una varilla tiene densidad $\delta(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$. Utilice el método de Newton para determinar el valor de c, de modo que la masa de la varilla desde 0 hasta c sea 0.5.

PROBLEMAS DE REPASO E INTRODUCCIÓN

Evalúe los límites de los problemas del 1 al 14.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x+1}{x+5}$

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{x}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

8. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x+1}{x+5}$

9. $\lim\limits_{x\to \infty} e^{-x}$

10. $\lim\limits_{x\to \infty} e^{-x^2}$

11. $\lim\limits_{x\to \infty} e^{2x}$

12. $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{-2x}$

13. $\lim\limits_{x\to \infty} \tan^{-1} x$

14. $\lim\limits_{x\to \infty} \sec^{-1} x$

Trace las funciones dadas en los problemas 15 a 18 en el dominio $0 \le x \le 10$ y plantee una conjetura acerca de $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

15. $f(x) = xe^{-x}$

16. $f(x) = x^2e^{-x}$

17. $f(x) = x^3e^{-x}$

18. $f(x) = x^4e^{-x}$

19. Trace una gráfica de $y = x^{10}e^{-x}$ en algún dominio que le permita plantear una conjetura acerca del $\lim\limits_{x\to\infty} x^{10}e^{-x}$.

20. Experimente con varios enteros positivos n y haga una conjetura acerca de $\lim\limits_{x\to\infty} x^{n}e^{-x}$.

Evalúe las integrales de los problemas del 21 al 28 para los valores de a que se indican.

21. $\displaystyle\int_0^a e^{-x}\,dx;\ a = 1, 2, 4, 8, 16$

22. $\displaystyle\int_0^a xe^{-x^2}\,dx;\ a = 1, 2, 4, 8, 16$

23. $\displaystyle\int_0^a \frac{x}{1+x^2}\,dx;\ a = 1, 2, 4, 8, 16$

24. $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{1+x}\,dx;\ a = 1, 2, 4, 8, 16$

25. $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{x^2}\,dx;\ a = 2, 4, 8, 16$

26. $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{x^3}\,dx;\ a = 2, 4, 8, 16$

27. $\displaystyle\int_a^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx;\ a = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$

28. $\displaystyle\int_a^4 \frac{1}{x}\,dx;\ a = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$

CAPÍTULO 8 Formas indeterminadas e integrales impropias

8.1 Formas indeterminadas del tipo 0/0
8.2 Otras formas indeterminadas
8.3 Integrales impropias: límites de integración infinitos
8.4 Integrales impropias: integrandos infinitos
8.5 Repaso del capítulo

8.1

Formas indeterminadas del tipo 0/0

He aquí tres problemas de límites conocidos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}, \qquad \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-x-6}, \qquad \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

El primero se trató con amplitud en la sección 1.4 y el tercero, en realidad, define la derivada de $f'(a)$. Los tres límites tienen una característica común. En cada caso está incluido un cociente y, en cada caso, tanto el numerador como el denominador tienen a 0 como su límite. Un intento de aplicar la parte 7 del teorema principal de límites (teorema 1.3A), que dice que el límite de un cociente es igual al cociente de los límites, lleva al resultado sin sentido 0/0. En realidad, el teorema no se aplica, ya que requiere que el límite del denominador sea diferente de 0. No estamos diciendo que estos límites no existan, sólo que el teorema principal de límites no los determinará.

Puede recordar que un intrincado argumento geométrico nos condujo a la conclusión $\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)/x = 1$ (teorema 1.4B). Por otra parte, la técnica algebraica de factorización conduce a

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-x-6} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x+2} = \frac{6}{5}$$

¿No sería bueno tener un procedimiento estándar para manejar todos los problemas para los cuales los límites del numerador y el denominador sean cero? Esto es esperar demasiado. Sin embargo, existe una regla sencilla que funciona de maravilla en una amplia variedad de tales problemas.

Regla de L'Hôpital En 1696, Guillaume François Antoine de L'Hôpital publicó el primer libro sobre cálculo diferencial; incluía la siguiente regla, que él aprendió de su maestro Johann Bernoulli.

Teorema A Regla de L'Hôpital para formas del tipo 0/0

Suponga que $\lim_{x\to u} f(x) = \lim_{x\to u} g(x) = 0$. Si $\lim_{x\to u}[f'(x)/g'(x)]$ existe en cualquiera de los sentidos finito o infinito (es decir, si este límite es un número finito o $-\infty$ o $+\infty$), entonces

$$\lim_{x\to u}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to u}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

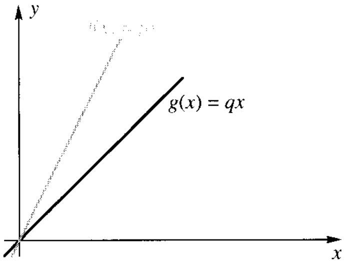
Antes de intentar demostrar este teorema, lo ilustramos. Obsérvese que la regla de L'Hôpital nos permite reemplazar un límite por otro, el cual puede ser más sencillo y, en particular, podría tener la forma 0/0.

EJEMPLO 1 Utilice la regla de L'Hôpital para demostrar que

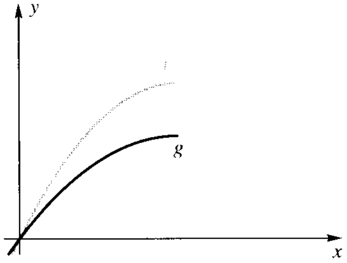
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$$

Interpretación geométrica de la regla de L'Hôpital

Estudie los siguientes diagramas. Ellos deben hacer que la regla de L'Hôpital parezca muy razonable. (Véanse los problemas del 38 a 42.)



$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{px}{qx} = \frac{p}{q} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$



$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

SOLUCIÓN En la sección 1.4 trabajamos duro para demostrar estos dos resultados. Después de haber notado que el intento de evaluar ambos límites por medio de sustitución conduce a la forma 0/0, ahora podemos establecer los resultados deseados en dos líneas (pero véase el problema 25). Por la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{D_x \operatorname{sen} x}{D_x x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{D_x(1-\cos x)}{D_x x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{1}=0$$ ■

EJEMPLO 2 Encuentre $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-x-6}$ y $\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+3x-10}{x^2-4x+4}$.

SOLUCIÓN Ambos límites tienen la forma 0/0, de modo que por la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-x-6}=\lim_{x\to 3}\frac{2x}{2x-1}=\frac{6}{5}$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+3x-10}{x^2-4x+4}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2x+3}{2x-4}=\infty$$

El primero de estos límites fue manejado al inicio de este apartado mediante factorización y simplificación. Por supuesto, de cualquier forma obtenemos la misma respuesta. ■

EJEMPLO 3 Encuentre $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\ln(1+x)}$.

SOLUCIÓN El numerador y el denominador tienen límite 0. De aquí que,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 2x}{1/(1+x)}=\frac{2}{1}=2$$ ■

Algunas veces, lím $f'(x)/g'(x)$ también tiene la forma indeterminada 0/0. Entonces podemos aplicar de nueva cuenta la regla de L'Hôpital, como lo ilustramos ahora. Cada aplicación de la regla de L'Hôpital está señalada con el símbolo Ⓛ.

EJEMPLO 4 Encuentre $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x-x}{x^3}$.

SOLUCIÓN Por medio de la regla de L'Hôpital aplicada tres veces en sucesión

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x-x}{x^3}&\overset{\textcircled{L}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}\\&\overset{\textcircled{L}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x}{6x}\\&\overset{\textcircled{L}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{6}=-\frac{1}{6}\end{aligned}$$ ■

Aunque tengamos una regla elegante, no significa que debamos utilizarla de manera indiscriminada. En particular, siempre debemos asegurar que se puede aplicar; es decir, debemos asegurar que el límite tiene la forma indeterminada 0/0. De otra forma, conducirá a toda clase de errores, como lo ilustramos a continuación.

EJEMPLO 5 Encuentre $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2+3x}$.

SOLUCIÓN Podríamos intentar escribir

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2+3x} \overset{\textcircled{L}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x+3} \overset{\textcircled{L}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2} \qquad \text{INCORRECTO}$$

La primera aplicación de la regla de L'Hôpital fue correcta; la segunda no, ya que en ese paso, el límite no tenía la forma 0/0. He aquí lo que debía hacerse

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2+3x} \overset{\textcircled{L}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x+3} = 0 \qquad \text{CORRECTO}$$

Detenemos la derivación tan pronto como el numerador o el denominador tengan un límite distinto de cero. ■

Aun si las condiciones de la regla de L'Hôpital se cumplen podrían no ayudarnos; veamos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 Encuentre $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{-x}}{x^{-1}}$.

SOLUCIÓN Ya que el numerador y el denominador tienden a cero, el límite es indeterminado de la forma 0/0. Así, las condiciones del teorema A se satisfacen. Podríamos aplicar la regla de L'Hôpital de manera indefinida.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{x^{-1}} \overset{\textcircled{L}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{x^{-2}} \overset{\textcircled{L}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{2x^{-3}} = \cdots$$

Es claro que sólo estamos complicando el problema. Un mejor enfoque es hacer primero un poco de álgebra

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{x^{-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x}$$

Escrito de esta manera, el límite está indeterminado en la forma ∞/∞, que es el tema de la siguiente sección. Sin embargo, debemos ser capaces de adivinar que el límite es cero considerando que e^x crece mucho más rápido que x (véase la figura 1). Una demostración rigurosa vendrá más adelante (ejemplo 1 de la sección 8.2). ■

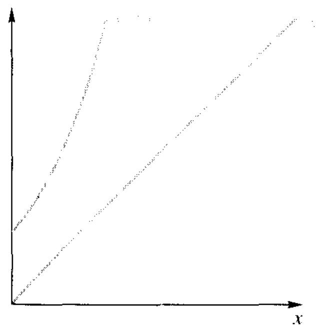


Figura 1

Teorema del valor medio de Cauchy La demostración de la regla de L'Hôpital depende de una extensión del teorema del valor medio debida a Augustin Louis Cauchy (1789–1857).

Teorema B Teorema del valor medio de Cauchy

Sean f y g funciones derivables en (a, b) y continuas en $[a, b]$. Si $g'(x) \neq 0$ para toda x en (a, b), entonces existe un número c en (a, b) tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Observe que este teorema se reduce al ordinario teorema del valor medio para derivadas (teorema 3.6A) cuando $g(x) = x$.

Demostración Es tentador aplicar el teorema del valor medio al numerador y al denominador del lado izquierdo de la conclusión. Si lo hacemos, obtenemos

$$(1) \qquad f(b) - f(a) = f'(c_1)(b - a)$$

y

$$(2) \qquad g(b) - g(a) = g'(c_2)(b - a)$$

para elecciones apropiadas de c_1 y c_2. Si sólo c_1 y c_2 fuesen iguales, podríamos dividir la primera igualdad entre la segunda y estaría hecho; pero no existe razón para esperar tal coincidencia. Sin embargo, este intento no es un fracaso completo, ya que (2) da la valiosa información de que $g(\mathrm{b}) - g(a) \neq 0$, un hecho que necesitaremos posteriormente (esto se deduce de la hipótesis que $g'(x) \neq 0$ para toda x en (a, b)).

Recuerde que la demostración del teorema del valor medio para derivadas (teorema 3.6A) se sustenta en la introducción de una función auxiliar s. Si tratamos de imitar esa demostración, llegaremos a la siguiente elección para $s(x)$. Sea

$$s(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$$

No hay división entre cero, ya que antes establecimos que $g(b) - g(a) \neq 0$. Además, observe que $s(a) = 0 = s(b)$. También s es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b); esto se sigue de los correspondientes hechos para f y g. Así, por el teorema del valor medio para derivadas, existe un número c en (a, b) tal que

$$s'(c) = \frac{s(b) - s(a)}{b - a} = \frac{0 - 0}{b - a} = 0$$

Pero

$$s'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0$$

de modo que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

que es lo que deseábamos demostrar. ■

Demostración de la regla de L'Hôpital

Demostración Regrésese al teorema A, que en realidad establece varios teoremas en uno. Sólo demostraremos el caso en el que L es finito y el límite es el límite unilateral $\lim\limits_{x \to a^+}$.

Las hipótesis para el teorema A implican más de lo que explícitamente dicen. En particular, la existencia de $\lim\limits_{x \to a^+}[f'(x)/g'(x)]$ implica que tanto $f'(x)$ como $g'(x)$ existen en, por lo menos, un pequeño intervalo (a, b] y que allí $g'(x) \neq 0$. En a todavía no sabemos que f y g estén definidas, pero sabemos que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0$. Así, podemos definir (o redefinir, si es necesario) a $f(a)$ y a $g(a)$ como cero y, por lo tanto, hacer a f y a g continuas (por la derecha) en a. Todo esto es para decir que f y g satisfacen las hipótesis del teorema del valor medio de Cauchy en $[a, b]$. En consecuencia, existe un número c en (a, b) tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

o, como $f(a) = 0 = g(a)$,

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Cuando hacemos $b \to a^+$ y, por lo tanto, forzando a que $c \to a^+$, obtenemos

$$\lim_{b \to a^+} \frac{f(b)}{g(b)} = \lim_{c \to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

que es equivalente a lo que queríamos demostrar.

Una demostración muy semejante funciona para el caso de los límites por la izquierda y, en consecuencia, para límites por los dos lados. Las demostraciones para los casos en donde a o L es infinito son más difíciles, y los omitiremos. ■

Revisión de conceptos

1. La regla de L'Hôpital es útil para determinar $\lim_{x \to a} [f(x)/g(x)]$, en donde _____ y _____ son cero.

2. La regla de L'Hôpital dice que bajo condiciones apropiadas $\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = \lim_{x \to a}$ _____.

3. De la regla de L'Hôpital, podemos concluir que $\lim_{x \to 0} (\tan x)/x = \lim_{x \to 0} \frac{\_\_\_\_\_}{\_\_\_\_\_} =$ _____ pero la regla de L'Hôpital no nos da información acerca de $\lim_{x \to 0} (\cos x)/x$ porque _____.

4. La demostración de la regla de L'Hôpital depende del teorema _____.

Conjunto de problemas 8.1

En los problemas del 1 al 24 encuentre el límite que se indica. Asegúrese de tener una forma indeterminada antes de aplicar la regla de L'Hôpital.

1. $\lim_{x \to 0} \frac{2x - \operatorname{sen} x}{x}$

2. $\lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos x}{\frac{1}{2}\pi - x}$

3. $\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} 2x}{\tan x}$

4. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan^{-1} 3x}{\operatorname{sen}^{-1} x}$

5. $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 6x + 8}{x^2 - 3x - 10}$

6. $\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 3x^2 + x}{x^3 - 2x}$

7. $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 1}$

8. $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x^2}{x^2 - 1}$

9. $\lim_{x \to \pi/2} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)^3}{\frac{1}{2}\pi - x}$

10. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2 \operatorname{sen} x}$

11. $\lim_{t \to 1} \frac{\sqrt{t} - t^2}{\ln t}$

12. $\lim_{x \to 0^+} \frac{7^{\sqrt{x}} - 1}{2^{\sqrt{x}} - 1}$

13. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln \cos 2x}{7x^2}$

14. $\lim_{x \to 0^-} \frac{3 \operatorname{sen} x}{\sqrt{-x}}$

15. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{\operatorname{sen} 2x - 2x}$

16. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \tan x}{x^2 \operatorname{sen} x}$

17. $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{\operatorname{sen} x - x}$

18. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \ln(1 + x) - 1}{x^2}$

19. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan^{-1} x - x}{8x^3}$

20. $\lim_{x \to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2}$

21. $\lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos x - x \operatorname{sen} x}{2 - 2\cos x - \operatorname{sen}^2 x}$

22. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x + \tan x}{e^x + e^{-x} - 2}$

23. $\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \sqrt{1 + \operatorname{sen} t}\, dt}{x}$

24. $\lim_{x \to 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{t} \cos t\, dt}{x^2}$

25. En la sección 1.4 trabajamos muy duro para demostrar que $\lim_{x \to 0} (\operatorname{sen} x)/x = 1$; la regla de L'Hôpital nos permite demostrar esto en una línea. Sin embargo, aun si tuviésemos la regla de L'Hôpital, digamos al final de la sección 1.3, no nos hubiese ayudado. Explique por qué. (En realidad necesitamos establecer $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ en la forma que lo hicimos en la sección 1.4.)

26. Encuentre $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{\tan x}$.

Sugerencia: comience por decidir por qué la regla de L'Hôpital no es aplicable. Después encuentre el límite por otros medios.

27. Para la figura 2, calcule los siguientes límites:

(a) $\lim_{t \to 0^+} \frac{\text{área del triángulo } ABC}{\text{área de la región curva } ABC}$

(b) $\lim_{t \to 0^+} \frac{\text{área de la región curva } BCD}{\text{área de la región curva } ABC}$

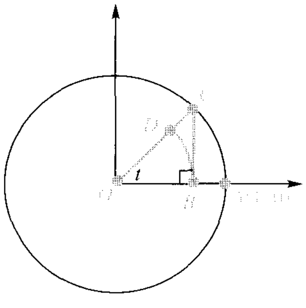


Figura 2

28. En la figura 3, $CD = DE = DF = t$. Encuentre cada límite.

(a) $\lim_{t\to 0^+} y$ (b) $\lim_{t\to 0^+} x$

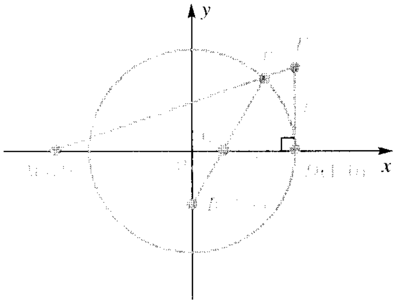


Figura 3

29. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ c, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

¿Qué valor de c hace que $f(x)$ sea continua en $x = 0$?

30. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x - 1}, & \text{si } x \neq 1 \\ c, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

¿Qué valor de c hace que $f(x)$ sea continua en $x = 1$?

31. Mediante los conceptos de la sección 5.4, puede demostrar que el área de la superficie del elipsoide alargado obtenido al hacer girar la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ $(a > b)$, alrededor del eje x es

$$A = 2\pi b^2 + 2\pi ab\left[\frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right]$$

¿A dónde se aproxima A cuando $a \to b^+$? Utilice la regla de L'Hôpital para demostrar que esto sucede.

32. Determine constantes a, b y c de tal modo que

$$\lim_{x\to 1} \frac{ax^4 + bx^3 + 1}{(x - 1)\operatorname{sen} \pi x} = c$$

33. La regla de L'Hôpital en su forma de 1696 decía esto: Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = f'(a)/g'(a)$, con tal que $f'(a)$ y $g'(a)$ existan y $g'(a) \neq 0$. Demuestre este resultado sin recurrir al teorema del valor medio de Cauchy.

CAS *Utilice un CAS para evaluar los límites de los problemas 34 al 37.*

34. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^4}$

35. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x - x^2/2 - x^3/6}{x^4}$

36. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos(x^2)}{x^3 \operatorname{sen} x}$

37. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{\operatorname{arcsen} x - x}$

GC *Para los problemas del 38 al 41 grafique el numerador $f(x)$ y el denominador $g(x)$ en la misma ventana de graficación para cada uno de estos dominios $-1 \le x \le 1$, $-0.1 \le x \le 0.1$ y $-0.01 \le x \le 0.01$. Con base en la gráfica, estime los valores de $f'(x)$ y $g'(x)$ y utilice éstos para aproximar el límite dado.*

38. $\lim_{x\to 0} \dfrac{3x - \operatorname{sen} x}{x}$

39. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x/2}{x}$

40. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{e^{2x} - 1}$

41. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{e^{-x} - 1}$

EXPL **42.** Utilice el concepto de **aproximación lineal** a una función (véase la sección 2.9) para explicar la interpretación geométrica de la regla de L'Hôpital en el recuadro al margen próximo al teorema A.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $\lim_{x\to a} f(x)$; $\lim_{x\to a} g(x)$ **2.** $f'(x)/g'(x)$ **3.** $\sec^2 x$; 1; $\lim_{x\to 0} \cos x \neq 0$ **4.** Del valor medio de Cauchy.

8.2 Otras formas indeterminadas

En la solución al ejemplo 6 de la sección anterior nos enfrentamos al siguiente problema de límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x}$$

Esto es común a una clase de problemas de la forma $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x)$, en donde el numerador y el denominador crecen indefinidamente; les llamamos forma indeterminada del tipo ∞/∞. Resulta que la regla de L'Hôpital también se aplica en esta situación; esto es,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Una demostración rigurosa es muy difícil, pero existe una manera intuitiva de ver que el resultado tiene que ser cierto. Imagine que $f(t)$ y $g(t)$ representan las posiciones de dos automóviles sobre el eje t en el instante t (véase la figura 1). Estos dos automóviles, f y g, están en una viaje sin fin, con velocidades respectivas $f'(t)$ y $g'(t)$. Ahora, si

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f'(t)}{g'(t)} = L$$

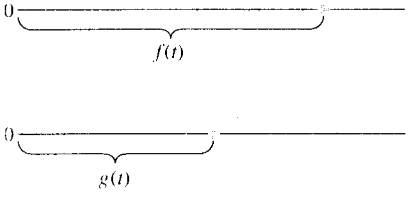


Figura 1

entonces, básicamente el auto f viaja a casi L veces tan rápido como el auto g. Por lo tanto, es razonable decir que, a la larga, viajará casi L veces más lejos; esto es,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = L$$

A esto no le llamamos demostración, pero hace plausible un resultado que ahora establecemos de manera formal.

Teorema A **Regla de L'Hôpital para formas del tipo ∞/∞**

Suponga que $\lim_{x\to u}|f(x)| = \lim_{x\to u}|g(x)| = \infty$. Si $\lim_{x\to u}[f'(x)/g'(x)]$ existe en el sentido finito o infinito, entonces

$$\lim_{x\to u} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to u} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Aquí u puede significar cualquiera de los símbolos $a, a^-, a^+, -\infty$ o $+\infty$.

La forma indeterminada ∞/∞ Utilizamos el teorema A para terminar el ejemplo 6 de la sección anterior.

EJEMPLO 1 Encuentre $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x}$.

SOLUCIÓN Tanto x como e^x tienden a ∞ cuando $x \to \infty$. De aquí que, por la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{D_x x}{D_x e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$ ■

He aquí un resultado general del mismo tipo.

EJEMPLO 2 Demuestre que si a es cualquier número real positivo, $\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$.

SOLUCIÓN Suponga, como un caso especial, que $a = 2.5$. Entonces, tres aplicaciones de la regla de L'Hôpital proporcionan

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{2.5}}{e^x} \overset{\textcircled{L}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2.5x^{1.5}}{e^x} \overset{\textcircled{L}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(2.5)(1.5)x^{0.5}}{e^x} \overset{\textcircled{L}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(2.5)(1.5)(0.5)}{x^{0.5}e^x} = 0$$

Un argumento similar funciona para cualquier $a > 0$. Denótese con m al máximo entero menor que a. Entonces, $m + 1$ aplicaciones de la regla de L'Hôpital da

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} \overset{\textcircled{L}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{ax^{a-1}}{e^x} \overset{\textcircled{L}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{a(a-1)x^{a-2}}{e^x} \overset{\textcircled{L}}{=} \cdots \overset{\textcircled{L}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{a(a-1)\cdots(a-m)}{x^{m+1-a}e^x} = 0$$

■

EJEMPLO 3 Demuestre que si a es cualquier número real positivo, $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$.

Vea cómo crecen

En ciencias de la computación uno pone cuidadosa atención a la cantidad de tiempo necesaria para realizar una tarea. Por ejemplo, para ordenar x elementos por medio del algoritmo "de la burbuja" toma un tiempo proporcional a x^2, mientras que el algoritmo "rápido" (*quick sort*) x ln x, una gran mejoría. He aquí una tabla que ilustra cómo algunas funciones comunes crecen cuando x aumenta de 10 a 100 a 1000.

$\ln x$	2.3	4.6	6.9
$\sqrt{x}$	3.2	10	31.6
x	10	100	1000
$x \ln x$	23	461	6908
x^2	100	10000	10^6
e^x	2.2×10^4	2.7×10^{43}	10^{434}

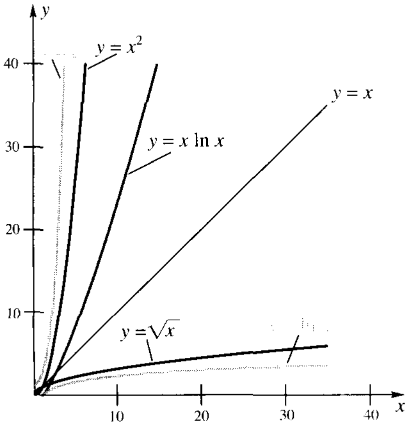


Figura 2

SOLUCIÓN Tanto ln x como x^a tienden a ∞ cuando $x \to \infty$. De aquí que, por medio de una aplicación de la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^a} \overset{\text{Ⓛ}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{ax^{a-1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{ax^a} = 0$$

■

≅ Los ejemplos 2 y 3 dicen algo que es valioso recordar: *para x suficientemente grande, e^x crece más rápido cuando x aumenta que cualquier potencia constante de x, mientras que ln x crece más lentamente que cualquier potencia constante de x.* Por ejemplo, cuando x es suficientemente grande, e^x crece más rápido que x^{100} y ln x crece más lentamente que $\sqrt[100]{x}$. La tabla en el margen y la figura 2 ofrecen ilustración adicional.

EJEMPLO 4 Encuentre $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\cot x}$.

SOLUCIÓN Cuando $x \to 0^+$, $\ln x \to -\infty$ y $\cot x \to \infty$, de modo que la regla de L'Hôpital se puede aplicar,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x} \overset{\text{Ⓛ}}{=} \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{1/x}{-\csc^2 x}\right]$$

Esto aún es una indeterminación como aparece, pero en lugar de aplicar otra vez la regla de L'Hôpital (lo cual sólo hace que las cosas empeoren), rescribimos la expresión entre corchetes como

$$\frac{1/x}{-\csc^2 x} = -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} = -\operatorname{sen} x \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

Así,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x} = \lim_{x \to 0^+} \left[-\operatorname{sen} x \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right] = 0 \cdot 1 = 0$$

■

Las formas indeterminadas $0 \cdot \infty$ y $\infty - \infty$ Supóngase que $A(x) \to 0$, pero $B(x) \to \infty$. ¿Qué ocurre con el producto $A(x)B(x)$? Trabajan dos fuerzas en competencia, tendiendo a jalar el producto en direcciones opuestas. ¿Cuál ganará esta batalla, A o B, o ninguna? Depende de cuál es más fuerte (es decir, cuál hace su trabajo más rápido) o si están niveladas. La regla de L'Hôpital nos ayudará a decidir, pero sólo después de transformar el problema a la forma 0/0 o ∞/∞.

EJEMPLO 5 Encuentre $\lim\limits_{x \to \pi/2} (\tan x \cdot \ln \operatorname{sen} x)$.

SOLUCIÓN Ya que $\lim\limits_{x \to \pi/2} \ln \operatorname{sen} x = 0$ y $\lim\limits_{x \to \pi/2} |\tan x| = \infty$, ésta es una forma indeterminada $0 \cdot \infty$. Podemos reescribirla como una forma 0/0 por medio del artificio simple de cambiar tan x como 1/cot x. Así,

$$\begin{aligned}\lim_{x \to \pi/2} (\tan x \cdot \ln \operatorname{sen} x) &= \lim_{x \to \pi/2} \frac{\ln \operatorname{sen} x}{\cot x} \\ &\overset{\text{Ⓛ}}{=} \lim_{x \to \pi/2} \frac{\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x}{-\csc^2 x} \\ &= \lim_{x \to \pi/2} (-\cos x \cdot \operatorname{sen} x) = 0\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6 Encuentre $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

SOLUCIÓN El primer término crece sin cota; lo mismo que el segundo. Decimos que el límite está en una forma indeterminada $\infty - \infty$. La regla de L'Hôpital determinará el resultado, pero sólo después de reescribir el problema de manera que se pueda aplicar la regla. En este caso, las dos fracciones deben combinarse, un procedimiento que cambia el problema a una forma 0/0. Dos aplicaciones de la regla de L'Hôpital dan

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1^+}\frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} \overset{Ⓛ}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{x\cdot 1/x + \ln x - 1}{(x-1)(1/x)+\ln x}$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{x\ln x}{x - 1 + x\ln x} \overset{Ⓛ}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{1+\ln x}{2+\ln x} = \frac{1}{2}$$

■

Las formas indeterminadas 0^0, ∞^0, 1^∞ Ahora regresemos a tres formas indeterminadas del tipo exponencial. Aquí, el truco es no considerar la expresión original sino su logaritmo. Por lo común, la regla de L'Hôpital se aplicará al logaritmo.

EJEMPLO 7 Encuentre $\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)^{\cot x}$.

SOLUCIÓN Esto adquiere la forma indeterminada 1^∞. Sea $y = (x+1)^{\cot x}$, de modo que

$$\ln y = \cot x \ln(x+1) = \frac{\ln(x+1)}{\tan x}$$

Mediante la regla de L'Hôpital para formas 0/0, obtenemos

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{\tan x} \overset{Ⓛ}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{x+1}}{\sec^2 x} = 1$$

Ahora $y = e^{\ln y}$, y como la función exponencial $f(x) = e^x$ es continua,

$$\lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+}\exp(\ln y) = \exp\left(\lim_{x\to 0^+}\ln y\right) = \exp 1 = e$$

■

EJEMPLO 8 Encuentre $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\tan x)^{\cos x}$.

SOLUCIÓN Ésta tiene la forma indeterminada ∞^0. Sea $y = (\tan x)^{\cos x}$, de modo que

$$\ln y = \cos x \cdot \ln \tan x = \frac{\ln \tan x}{\sec x}$$

Entonces

$$\lim_{x\to \pi/2^-}\ln y = \lim_{x\to \pi/2^-}\frac{\ln\tan x}{\sec x} \overset{Ⓛ}{=} \lim_{x\to \pi/2^-}\frac{\dfrac{1}{\tan x}\cdot\sec^2 x}{\sec x\tan x}$$

$$= \lim_{x\to \pi/2^-}\frac{\sec x}{\tan^2 x} = \lim_{x\to \pi/2^-}\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = 0$$

Por lo tanto,

$$\operatorname*{lím}_{x\to\pi/2^-} y = e^0 = 1 \qquad \blacksquare$$

Resumen Hemos clasificado ciertos problemas de límites como formas indeterminadas, utilizando siete símbolos $0/0, \infty/\infty, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0$ y 1^∞. Cada uno implica una competencia de fuerzas opuestas, lo cual significa que el resultado no es obvio. Sin embargo, con la ayuda de la regla de L'Hôpital, que sólo se aplica directamente a las formas $0/0$ e ∞/∞, por lo común podemos determinar el límite.

Existen muchas otras posibilidades simbolizadas, por ejemplo, $0/\infty, \infty/0, \infty + \infty, \infty \cdot \infty, 0^\infty$ e ∞^∞. Y a éstas, ¿por qué no denominarlas como formas indeterminadas? Porque en cada caso las fuerzas trabajan juntas, no en competencia.

EJEMPLO 9 Encuentre $\operatorname*{lím}_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\cot x}$.

SOLUCIÓN Podríamos llamar a ésta una forma 0^∞, pero no es indeterminada. Observe que sen x se aproxima a cero y elevada al exponente cot x, un número que está aumentando, sólo sirve para hacer que se aproxime más rápido a cero. Así,

$$\operatorname*{lím}_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\cot x} = 0 \qquad \blacksquare$$

Revisión de conceptos

1. Si $\operatorname*{lím}_{x\to a} f(x) = \operatorname*{lím}_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces la regla de L'Hôpital dice que $\operatorname*{lím}_{x\to a} f(x)/g(x) = \operatorname*{lím}_{x\to a}$ ______.

2. Si $\operatorname*{lím}_{x\to a} f(x) = 0$ y $\operatorname*{lím}_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces $\operatorname*{lím}_{x\to a} f(x)g(x)$ es una forma indeterminada. Para aplicar la regla de L'Hôpital, podemos reescribir este último límite como ______.

3. Siete formas indeterminadas se estudiaron en este texto. Se simbolizan por medio de $0/0, \infty/\infty, 0 \cdot \infty$ y ______.

4. e^x crece más rápido que cualquier potencia de x, pero ______ crece más lentamente que cualquier potencia de x.

Conjunto de problemas 8.2

En los problemas del 1 al 40 encuentre cada límite. Asegúrese de que tiene una forma indeterminada antes de aplicar la regla de L'Hôpital.

1. $\operatorname*{lím}_{x\to\infty} \dfrac{\ln x^{10000}}{x}$

2. $\operatorname*{lím}_{x\to\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{2^x}$

3. $\operatorname*{lím}_{x\to\infty} \dfrac{x^{10000}}{e^x}$

4. $\operatorname*{lím}_{x\to\infty} \dfrac{3x}{\ln(100x + e^x)}$

5. $\operatorname*{lím}_{x\to\pi/2} \dfrac{3\sec x + 5}{\tan x}$

6. $\operatorname*{lím}_{x\to 0^+} \dfrac{\ln \operatorname{sen}^2 x}{3 \ln \tan x}$

7. $\operatorname*{lím}_{x\to\infty} \dfrac{\ln(\ln x^{1000})}{\ln x}$

8. $\operatorname*{lím}_{x\to(1/2)^-} \dfrac{\ln(4 - 8x)^2}{\tan \pi x}$

9. $\operatorname*{lím}_{x\to 0^+} \dfrac{\cot x}{\sqrt{-\ln x}}$

10. $\operatorname*{lím}_{x\to 0} \dfrac{2\csc^2 x}{\cot^2 x}$

11. $\operatorname*{lím}_{x\to 0} (x \ln x^{1000})$

12. $\operatorname*{lím}_{x\to 0} 3x^2 \csc^2 x$

13. $\operatorname*{lím}_{x\to 0} (\csc^2 x - \cot^2 x)$

14. $\operatorname*{lím}_{x\to\pi/2} (\tan x - \sec x)$

15. $\operatorname*{lím}_{x\to 0^+} (3x)^{x^2}$

16. $\operatorname*{lím}_{x\to 0} (\cos x)^{\csc x}$

17. $\operatorname*{lím}_{x\to(\pi/2)^-} (5\cos x)^{\tan x}$

18. $\operatorname*{lím}_{x\to 0} \left(\csc^2 x - \dfrac{1}{x^2}\right)^2$

19. $\operatorname*{lím}_{x\to 0} (x + e^{x/3})^{3/x}$

20. $\operatorname*{lím}_{x\to(\pi/2)^-} (\cos 2x)^{x-\pi/2}$

21. $\operatorname*{lím}_{x\to\pi/2} (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$

22. $\operatorname*{lím}_{x\to\infty} x^x$

23. $\operatorname*{lím}_{x\to\infty} x^{1/x}$

24. $\operatorname*{lím}_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$

25. $\operatorname*{lím}_{x\to 0^+} (\tan x)^{2/x}$

26. $\operatorname*{lím}_{x\to -\infty} (e^{-x} - x)$

27. $\operatorname*{lím}_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x$

28. $\operatorname*{lím}_{x\to 0} (\cos x - \operatorname{sen} x)^{1/x}$

29. $\operatorname*{lím}_{x\to 0} \left(\csc x - \dfrac{1}{x}\right)$

30. $\operatorname*{lím}_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

31. $\operatorname*{lím}_{x\to 0^+} (1 + 2e^x)^{1/x}$

32. $\operatorname*{lím}_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{x}{\ln x}\right)$

33. $\operatorname*{lím}_{x\to 0} (\cos x)^{1/x}$

34. $\operatorname*{lím}_{x\to 0^+} (x^{1/2} \ln x)$

35. $\operatorname*{lím}_{x\to\infty} e^{\cos x}$

36. $\operatorname*{lím}_{x\to\infty} [\ln(x + 1) - \ln(x - 1)]$

37. $\operatorname*{lím}_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\ln x}$

38. $\operatorname*{lím}_{x\to 0^+} (\ln x \cot x)$

39. $\operatorname*{lím}_{x\to\infty} \dfrac{\displaystyle\int_1^x \sqrt{1 + e^{-t}}\, dt}{x}$

40. $\operatorname*{lím}_{x\to 1^+} \dfrac{\displaystyle\int_1^x \operatorname{sen} t\, dt}{x - 1}$

41. Encuentre cada límite. *Sugerencia:* transforme a problemas que incluyan una variable continua x. Suponga que $a > 0$.

(a) $\operatorname*{lím}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$

(b) $\operatorname*{lím}_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$

(c) $\operatorname*{lím}_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$

(d) $\operatorname*{lím}_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)$

42. Encuentre cada límite.

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x^x)^x$

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{(x^x)}$ (d) $\lim\limits_{x\to 0^+} ((x^x)^x)^x$

(e) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{(x^{(x^x)})}$

43. Grafique $y = x^{1/x}$, para $x > 0$. Muestre lo que sucede para x muy pequeña y x muy grande. Indique el valor máximo.

44. Determine cada límite.

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1^x + 2^x)^{1/x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} (1^x + 2^x)^{1/x}$

(c) $\lim\limits_{x\to \infty} (1^x + 2^x)^{1/x}$ (d) $\lim\limits_{x\to -\infty} (1^x + 2^x)^{1/x}$

45. Para $k \geq 0$, encuentre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}$$

Sugerencia: aunque esto tiene la forma ∞/∞, la regla de L'Hôpital no es de ayuda. Piense en una suma de Riemann.

46. Sean $c_1, c_2, \ldots, c_n$ constantes positivas con $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$, y sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números positivos. Tome logaritmos naturales y después utilice la regla de L'Hôpital para demostrar que

$$\lim_{t\to 0^+} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^t \right)^{1/t} = x_1^{c_1} x_2^{c_2} \cdots x_n^{c_n} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{c_i}$$

Aquí $\prod$ significa producto; esto es, $\prod_{i=1}^{n} a_i$ significa $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$. En particular, si a, b, x y y son positivas y $a + b = 1$, entonces

$$\lim_{t\to 0^+} (ax^t + by^t)^{1/t} = x^a y^b$$

47. Verifique la última proposición en el problema 46 calculando cada uno de los siguientes límites.

(a) $\lim\limits_{t\to 0^+} \left(\frac{1}{2}2^t + \frac{1}{2}5^t\right)^{1/t}$ (b) $\lim\limits_{t\to 0^+} \left(\frac{1}{5}2^t + \frac{4}{5}5^t\right)^{1/t}$

(c) $\lim\limits_{t\to 0^+} \left(\frac{1}{10}2^t + \frac{9}{10}5^t\right)^{1/t}$

48. Considere $f(x) = n^2 x e^{-nx}$.

(a) Haga la gráfica de $f(x)$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ en $[0, 1]$ en la misma ventana de graficación.

(b) Para $x > 0$, encuentre $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)$.

(c) Evalúe $\int_0^1 f(x)\,dx$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

(d) Haga una conjetura acerca de $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\,dx$. Después justifique su respuesta de manera rigurosa.

CAS **49.** Encuentre los puntos máximo absoluto y mínimo absoluto (si existen) para $f(x) = (x^{25} + x^3 + 2^x)e^{-x}$ en $[0, \infty)$.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $f'(x)/g'(x)$
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)/[1/g(x)]$ o $\lim\limits_{x\to a} g(x)/[1/f(x)]$
3. $\infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$ **4.** $\ln x$

8.3

Integrales impropias: límites de integración infinitos

En la definición de $\int_a^b f(x)\,dx$, se supuso que el intervalo $[a, b]$ era finito. Sin embargo, en muchas aplicaciones de física, economía y probabilidad queremos permitir a a o a b (o a ambas) ser ∞ o $-\infty$. Por lo tanto, debemos encontrar la manera de dar significado a símbolos como

$$\int_0^\infty \frac{1}{1 + x^2}\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2}\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx$$

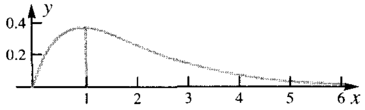
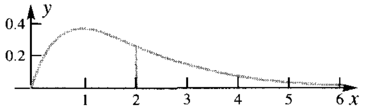
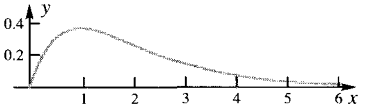
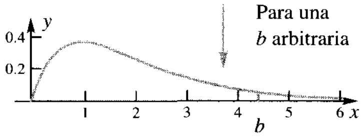
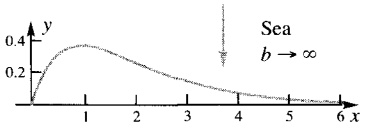
Estas integrales se denominan **integrales impropias** con límites infinitos.

Un límite infinito Considere la función $f(x) = xe^{-x}$. Tiene mucho sentido preguntar por $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$ o $\int_0^2 xe^{-x}\,dx$, o hasta por $\int_0^b xe^{-x}\,dx$, en donde b es cualquier número positivo. Como lo indica la tabla de la siguiente página, conforme aumenta el límite superior en la integral definida, el valor de la integral (el área bajo la curva) aumenta, pero aparentemente no sin cota (al menos, en este ejemplo). Para darle significado a $\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$, empezamos integrando desde 0 hasta un límite superior arbitrario, digamos b, que al utilizar integración por partes da

$$\int_0^b xe^{-x}\,dx = [-xe^{-x}]_0^b - \int_0^b (-e^{-x})\,dx = 1 - e^{-b} - be^{-b}$$

Ahora, imagine que el valor de b avanza hacia infinito. (Véase la siguiente tabla). Como lo muestra el cálculo precedente, si hacemos $b \to \infty$, el valor de la integral definida converge a 1. Por lo tanto, parece natural definir

$$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b xe^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} (1 - e^{-b} - be^{-b}) = 1$$

Integral	Figura	Valor exacto	Aproximación numérica
$\int_0^1 xe^{-x}\,dx$		$1 - e^{-1} - 1e^{-1}$	0.2642
$\int_0^2 xe^{-x}\,dx$		$1 - e^{-2} - 2e^{-2}$	0.5940
$\int_0^3 xe^{-x}\,dx$		$1 - e^{-3} - 3e^{-3}$	0.8009
$\int_0^b xe^{-x}\,dx$		$1 - e^{-b} - be^{-b}$	
$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$		$\operatorname{lím}_{b\to\infty}\left[1 - e^{-b} - be^{-b}\right] = 1$	

He aquí la definición general.

Definición

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \operatorname{lím}_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \operatorname{lím}_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

Si los límites de la derecha existen y tienen valores finitos, entonces decimos que las correspondientes integrales impropias **convergen** y tienen esos valores. De otra forma, se dice que la integral **diverge**.

EJEMPLO 1 Encuentre, si es posible, $\int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2}\,dx$.

SOLUCIÓN

$$\int_a^{-1} xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_a^{-1} e^{-x^2}(-2x\,dx) = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_a^{-1}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-a^2}$$

Así,

$$\int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2}\,dx = \operatorname{lím}_{a\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-a^2}\right] = -\frac{1}{2e}$$

Decimos que la integral converge y tiene valor $-1/2e$ ■

EJEMPLO 2 Encuentre si es posible, $\int_0^{\infty} \operatorname{sen} x\, dx$.

SOLUCIÓN

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sen} x\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \operatorname{sen} x\, dx = \lim_{b\to\infty} [-\cos x]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} [1 - \cos b]$$

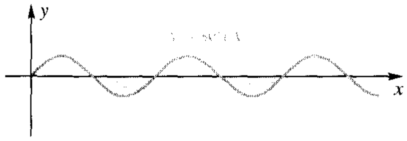


Figura 1

El último límite no existe; concluimos que la integral dada diverge. Considere el significado geométrico de $\int_0^{\infty} \operatorname{sen} x\, dx$ para apoyar este resultado (véase la figura 1). ■

EJEMPLO 3 De acuerdo con la ley del inverso de los cuadrados de Newton, la fuerza que ejerce la Tierra sobre una cápsula espacial es $-k/x^2$, en donde x es la distancia (en millas, por ejemplo) desde la cápsula al centro de la Tierra (véase la figura 2). Por lo tanto, la fuerza $F(x)$ requerida para elevar a la cápsula es $F(x) = k/x^2$. ¿Cuánto trabajo se realiza al impulsar una cápsula de 1000 libras fuera del campo de atracción terrestre?

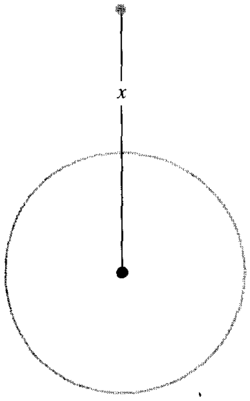


Figura 2

SOLUCIÓN Podemos evaluar k observando que en $x = 3960$ millas (el radio de la Tierra) $F = 1000$ libras. Ésta da $k = 1000(3960)^2 \approx 1.568 \times 10^{10}$. Por lo tanto, el trabajo realizado en millas-libra es

$$1.568 \times 10^{10} \int_{3960}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} 1.568 \times 10^{10} \left[-\frac{1}{x}\right]_{3960}^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} 1.568 \times 10^{10} \left[-\frac{1}{b} + \frac{1}{3960}\right]$$

$$= \frac{1.568 \times 10^{10}}{3960} \approx 3.96 \times 10^{6}$$ ■

Ambos límites infinitos

Ahora podemos dar una definición para $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$.

Definición

Si $\int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx$ y $\int_{0}^{\infty} f(x)\, dx$ convergen, entonces se dice que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ converge y tiene valor

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\, dx$$

En caso contrario, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$.

EJEMPLO 4 Evalúe $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2}\, dx$ o establezca que diverge.

SOLUCIÓN

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \frac{1}{1 + x^2}\, dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} [\tan^{-1} x]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} [\tan^{-1} b - \tan^{-1} 0] = \frac{\pi}{2}$$

Ya que el integrando es una función par.

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1 + x^2}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \qquad ■$$

Utilizaremos la notación $[F(x)]_a^{\infty}$ para querer decir $\lim_{b\to\infty} F(b) - F(a)$. Definiciones similares se aplican a $[F(x)]_{-\infty}^{a}$ y a $[F(x)]_{-\infty}^{\infty}$. Observe que en ninguno de estos casos estamos "sustituyendo" infinito. Cada uno está definido como un límite que coincide con nuestro enfoque de determinar las integrales impropias.

Funciones de densidad de probabilidad Cuando introdujimos por primera vez las variables aleatorias y funciones de densidad de probabilidad, en la sección 5.7, tuvimos que restringir la atención a casos en donde el conjunto de resultados posibles era acotado. En muchas situaciones no existe límite superior (o inferior) para el conjunto de resultados posibles. Por ejemplo, no hay cota superior en la durabilidad de una batería, o qué tan fuerte es una mezcla de concreto. Ahora que hemos analizado integrales impropias, podemos prescindir de esta restricción.

Si la FDP $f(x)$ de una variable aleatoria continua X está definida como 0 fuera del conjunto de resultados posibles, entonces los requerimientos para una FDP son

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

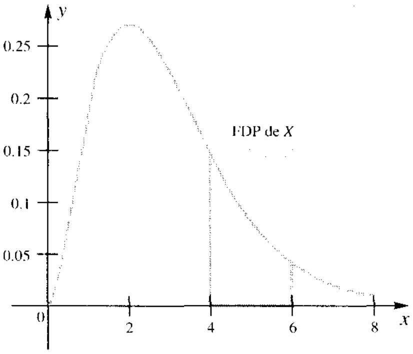


Figura 3

La FDP de una variable aleatoria nos permite encontrar probabilidades por medio de integración; por ejemplo, la figura 3 ilustra la probabilidad de que X esté entre 4 y 6.

Entonces, la media y la varianza de una variable aleatoria están definidas por

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, dx$$

La varianza σ^2 de una variable aleatoria es una medida de la dispersión, o "dispersidad" de la probabilidad, y puede calcularse así (véase el problema 41 de la sección 5.7)

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Cuando σ^2 es pequeña, la distribución de probabilidad está, para decirlo de manera informal, concentrada muy cerca, alrededor de la media; cuando σ^2 es grande, la probabilidad está más dispersa.

Los dos ejemplos siguientes, y algunos de los ejercicios, introducen varias familias útiles de distribuciones de probabilidad.

EJEMPLO 5 La **distribución exponencial**, que en ocasiones se utiliza para modelar tiempos de vida de componentes eléctricos o mecánicos, tiene FDP

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si } 0 \leq x \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde λ es alguna constante positiva.

(a) Muestre que es una FDP válida.
(b) Determine la media μ y la varianza σ^2.
(c) Determine la función de distribución acumulada (FDA) $F(x)$.
(d) Si el tiempo de vida de un componente X, medida en horas, es una variable aleatoria que tiene una distribución exponencial con $\lambda = 0.01$, ¿cuál es la probabilidad de que el componente funcione al menos 20 horas?

SOLUCIÓN

(a) La función f siempre es no negativa y

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx \\ &= 0 + [-e^{-\lambda x}]_0^{\infty} \\ &= 1\end{aligned}$$

por lo que $f(x)$ es una FDP válida.

(b)

$$\begin{aligned}E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\,dx + \int_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,dx\end{aligned}$$

Aplicamos integración por partes en la segunda integral: $u = x$, $dv = \lambda e^{-\lambda x}dx$, por lo que $du = dx$, $v = -e^{-\lambda x}$. Así que,

$$\begin{aligned}E(X) &= [-x\lambda e^{-\lambda x}]_0^{\infty} - \int_{0}^{\infty} (-e^{-\lambda x})\,dx \\ &= (-0+0) + \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{\lambda}\end{aligned}$$

La varianza es

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E(X^2) - \mu^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \\ &= \int_{-\infty}^{0} x^2\cdot 0\,dx + \int_{0}^{\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}\,dx - \frac{1}{\lambda^2} \\ &= [-x^2 e^{-\lambda x}]_0^{\infty} - \int_{0}^{\infty} (-e^{-\lambda x})\,2x\,dx - \frac{1}{\lambda^2} \\ &= (-0+0) + 2\int_{0}^{\infty} x e^{-\lambda x}\,dx - \frac{1}{\lambda^2} \\ &= 2\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}\end{aligned}$$

(c) Para $x < 0$, la FDA es $F(x) = P(X \leq x) = 0$. Para $x \geq 0$,

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t}\,dt \\ &= 0 + [-e^{-\lambda t}]_0^{x} \\ &= 1 - e^{-\lambda x}\end{aligned}$$

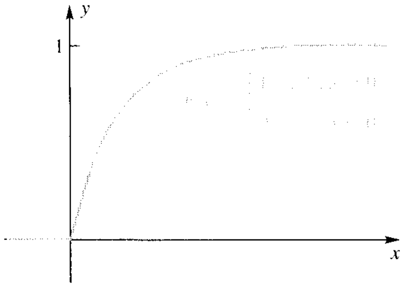


Figura 4

En la figura 4 se muestra un ejemplo de la FDA.

(d) Haga λ = 0.0. La probabilidad de que el componente funcione al menos 20 horas es la probabilidad de que el tiempo de vida sea de 20 horas o más:

$$\begin{aligned} P(X > 20) &= \int_{20}^{\infty} 0.01e^{-0.01x}\,dx \\ &= [-e^{-0.01x}]_{20}^{\infty} \\ &= 0 - (-e^{-0.01\cdot 20}) \\ &= e^{-0.2} \\ &\approx 0.819 \end{aligned}$$

■

La **distribución normal** es la conocida curva en forma de campana. En realidad es una familia de distribuciones, ya que la media μ puede ser cualquier número y la varianza puede ser cualquier número positivo σ^2. La distribución normal con parámetros μ y σ^2 tiene FDP

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp[-(x - \mu)^2/2\sigma^2]$$

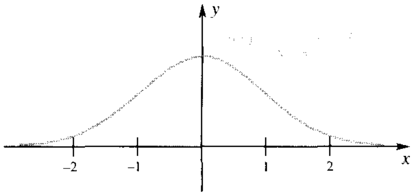


Figura 5

(Los parámetros μ y σ^2 resultan ser la media y la varianza, respectivamente, por lo que se justifica el uso de las letras griegas μ y σ.) La figura 5 muestra una gráfica de la FDP para la distribución normal con media $\mu = 0$ y varianza $\sigma^2 = 1$. Es sorprendentemente difícil demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp[-(x - \mu)^2/2\sigma^2]\,dx = 1$$

aunque lo haremos más adelante (sección 13.4). Otras propiedades de la distribución normal incluyen lo siguiente:

(a) su gráfica es simétrica con respecto a la recta $x = \mu$;
(b) tiene un máximo en $x = \mu$;
(c) tiene puntos de inflexión cuando $x = \mu \pm \sigma$;
(d) la media es μ;
(e) la varianza es σ^2.

El problema 33 incluye algunas otras propiedades de la FDP normal. La distribución normal con $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$ se denomina **distribución normal estándar**. Ésta es la distribución normal que se graficó en la figura 5.

EJEMPLO 6 Demuestre que

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2/2}\,dx = 0$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2/2}\,dx = 1$

SOLUCIÓN

(a) $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} xe^{-x^2/2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{b} e^{-x^2/2}(-x\,dx)\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right]_0^b$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Como $xe^{-x^2/2}$ es una función impar,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2/2}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} xe^{-x^2/2}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Así,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2/2}\,dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} xe^{-x^2/2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0$$

(b) Como $e^{-x^2/2}$ es una función par y dado que $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx = 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{2}$$

Entonces, aplicamos integración por partes y la regla de L'Hôpital.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} x^2e^{-x^2/2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{b}(x)(e^{-x^2/2}x)\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[-xe^{-x^2/2}\right]_0^b + \int_0^b e^{-x^2/2}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(0 + \int_0^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx\right) = \frac{1}{2}$$

Como $x^2e^{-x^2/2}$ es una función par, obtenemos una contribución similar a la izquierda del cero, y así

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \qquad ■$$

La paradoja de la trompeta de Gabriel Suponga que la curva $y = 1/x$ en $[1, \infty)$ se hace girar alrededor del eje x, con lo que se genera una superficie denominada trompeta de Gabriel (véase la figura 6). Afirmamos que

1. el volumen V de esta trompeta es finito;
2. el área de la superficie A de la trompeta es infinita.

Al poner los resultados en términos prácticos, parecen decir que la trompeta puede llenarse con una cantidad finita de pintura y que, incluso, no hay suficiente pintura para pintar su superficie interna. Antes de que tratemos de esclarecer esta paradoja, establecemos (1) y (2). Utilizamos los resultados para el volumen de la sección 5.2 y para el área de la superficie de la sección 5.4.

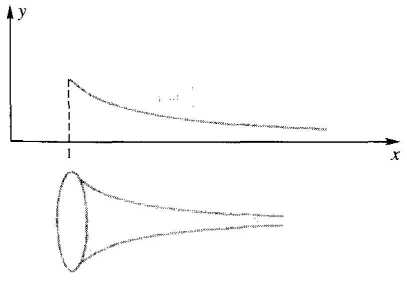


Figura 6

$$
\begin{aligned}
V &= \int_1^{\infty} \pi\left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \lim_{b\to\infty} \pi \int_1^b x^{-2}\, dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{\pi}{x}\right]_1^b = \pi \\
A &= \int_1^{\infty} 2\pi y\, ds = \int_1^{\infty} 2\pi y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \\
&= 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{x^2}\right)^2}\, dx \\
&= \lim_{b\to\infty} 2\pi \int_1^b \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\, dx
\end{aligned}
$$

Ahora,

$$\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3} > \frac{\sqrt{x^4}}{x^3} = \frac{1}{x}$$

Así,

$$\int_1^b \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\, dx > \int_1^b \frac{1}{x}\, dx = \ln b$$

y como $\ln b \to \infty$ cuando $b \to \infty$, concluimos que A es infinita.

¿Hay algo erróneo en nuestras matemáticas? No. Imagine que la trompeta se corta por un lado, se abre y se aplana. Dada una cantidad finita de pintura, posiblemente no podríamos pintar esta superficie con una capa de grosor *uniforme*. Sin embargo, podríamos hacerlo si permitimos que la capa de pintura se haga cada vez más delgada conforme nos alejamos del extremo más ancho de la trompeta. Y por supuesto, esto es exactamente lo que sucede cuando llenamos la trompeta sin abrir con π unidades cúbicas de pintura. (Pintura imaginaria puede extenderse a un grosor arbitrario.)

Este problema implica el estudio de dos integrales de la forma $\int_1^{\infty} 1/x^p\, dx$. Para referencia posterior, ahora analizamos esta integral para todos los valores de p.

EJEMPLO 7 Demuestre que $\int_1^{\infty} 1/x^p\, dx$ diverge para $p \le 1$ y converge para $p > 1$.

SOLUCIÓN En nuestra solución de la trompeta de Gabriel, demostramos que la integral diverge para $p = 1$. Si $p \ne 1$,

$$
\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-p}\, dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{1-p}\right]\left[\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right] = \begin{cases} \infty & \text{si } p < 1 \\ \dfrac{1}{p-1} & \text{si } p > 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

La conclusión se sigue. ■

Hans Memling (1425/40–1494). El *Juicio final*, detalle del panel derecho: el ángel hace sonar una trompeta y el condenado cae al infierno. Museo Promorskie, Gdansk, Polonia. Scala/Art Resource, N. Y.

Gabriel pavimenta una calle

Cuando se le pidió pavimentar una calle infinita $0 \le x < \infty, 0 \le y \le 1$ con oro puro, Gabriel obedeció pero hizo que el grosor h del oro en x satisficiera

$$h = e^{-x}$$

¿Cuánto oro necesitó?

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}\, dx \\
&= \lim_{b\to\infty} [-e^{-x}]_0^b = 1
\end{aligned}
$$

Sólo una unidad cúbica.

Revisión de conceptos

1. La $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ se dice que _______, si $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx$ existe y es finito.

2. La $\int_0^{\infty} \cos x\, dx$ no converge porque _______ no existe.

3. La $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ se dice que diverge si _______ o _______ divergen.

4. La $\int_1^{\infty} (1/x^p)\, dx$ converge si y sólo si _______.

Conjunto de problemas 8.3

En los problemas del 1 al 24 evalúe cada integral impropia o demuestre que diverge.

1. $\displaystyle\int_{100}^{\infty} e^x\,dx$

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-5} \frac{dx}{x^4}$

3. $\displaystyle\int_{1}^{\infty} 2xe^{-x^2}\,dx$

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} e^{4x}\,dx$

5. $\displaystyle\int_{9}^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$

6. $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\pi x}}$

7. $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{1.00001}}$

8. $\displaystyle\int_{10}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$

9. $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{0.99999}}$

10. $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$

11. $\displaystyle\int_{e}^{\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$

12. $\displaystyle\int_{e}^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$

13. $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

14. $\displaystyle\int_{1}^{\infty} xe^{-x}\,dx$

15. $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{(2x-3)^3}$

16. $\displaystyle\int_{4}^{\infty} \frac{dx}{(\pi-x)^{2/3}}$

17. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$

18. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+16)^2}$

19. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+10}\,dx$

20. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{e^{2|x|}}\,dx$

21. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} x\,dx$ *Sugerencia:* utilice una tabla de integrales o un CAS.

22. $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \operatorname{csch} x\,dx$

23. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-x}\cos x\,dx$ *Sugerencia:* utilice una tabla de integrales o un CAS.

24. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-x}\operatorname{sen} x\,dx$

25. Encuentre el área de la región bajo la curva $y = 2/(4x^2-1)$ a la derecha de $x = 1$. *Sugerencia:* utilice fracciones parciales.

26. Encuentre el área de la región bajo la curva $y = 1/(x^2+x)$ a la derecha de $x = 1$.

27. Suponga que la Ley de Newton para la fuerza debida a la gravedad tuviese la forma $-k/x$ en lugar de $-k/x^2$ (véase el ejemplo 3). Demuestre que entonces sería imposible enviar cualquier cosa fuera del campo de atracción terrestre.

28. Si una cápsula de 1000 libras sólo pesa 165 libras en la Luna (con radio de 1080 millas), ¿cuánto trabajo se hace al impulsar esta cápsula fuera del campo de atracción gravitacional de la Luna? (Véase el ejemplo 3.)

29. Supóngase que una compañía espera que su utilidad anual dentro de t años sea $f(t)$ dólares y que se considera que el interés se compone de manera continua a una tasa anual de r. Entonces el valor presente de todas las utilidades futuras (UF) puede demostrarse que es

$$FP = \int_{0}^{\infty} e^{-rt} f(t)\,dt$$

Encuentre la UF si $r = 0.08$ y $f(t) = 100{,}000$.

30. Resuelva el problema 29 suponiendo que $f(t) = 100{,}000 + 1000t$.

31. Una variable aleatoria continua X tiene una **distribución uniforme** si tiene una función de densidad de probabilidades de la forma

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ 0 & \text{si } x \le a \text{ o } x \ge b \end{cases}$$

(a) Demuestre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

(b) Encuentre la media μ y la varianza σ^2 de la distribución uniforme.

(c) Si $a = 0$ y $b = 10$, encuentre la probabilidad de que X sea menor a 2.

32. Una variable aleatoria X tiene una **distribución Weibull** si tiene función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\theta}\left(\dfrac{x}{\theta}\right)^{\beta-1} e^{-(x/\theta)^\beta} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

(a) Demuestre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. (Suponga que b > 1).

(b) Si $\theta = 3$ y $\beta = 2$, encuentre la media μ y la varianza σ^2.

(c) Si durabilidad de un monitor de computadora es una variable aleatoria X que tiene distribución Weibull con $\theta = 3$ y $\beta = 2$ (en donde la edad se mide en años) encuentre la probabilidad de que un monitor se descomponga antes de dos años.

33. Haga un bosquejo de la gráfica de la función de densidad normal

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

y demuestre, por medio de cálculo, que σ es la distancia desde la media μ hasta la abscisa de uno de los puntos de inflexión.

CAS **34.** La función de densidad de probabilidad Pareto tiene la forma

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{CM^k}{x^{k+1}} & \text{si } x \ge M, \\ 0 & \text{si } x < M \end{cases}$$

donde k y M son constante positivas.

(a) Determine el valor de C que hace a $f(x)$ una función de densidad de probabilidad.

(b) Para el valor de C que encontró en la parte (a), determine el valor de la media μ. ¿La media es finita para toda k positiva? Si no es así, ¿cómo depende la media de k?

(c) Para el valor de C que encontró en la parte (a), determine la varianza σ^2. ¿Cómo depende la varianza de k?

35. Con frecuencia, la distribución de Pareto es utilizada para modelar distribuciones de ingreso. Suponga que en alguna economía, la distribución del ingreso sigue una distribución de Pareto con $k = 3$. Suponga que el ingreso medio es de \$20,000.

(a) Determine M y C.

(b) Determine la varianza σ^2.

(c) Determine la fracción de asalariados que ganan más de \$100,000. (*Nota:* es lo mismo que preguntar cuál es la probabilidad de que al elegir de manera aleatoria a una persona ésta tenga un ingreso de más de \$100,000).

36. En teoría electromagnética, el potencial magnético u en un punto sobre el eje de una bobina circular está dada por

$$u = Ar \int_a^{\infty} \frac{dx}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

en donde A, r y a son constantes. Evalúe u.

37. Existe una sutileza en la definición de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ ilustrado por medio de lo siguiente. Demuestre que

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} x\,dx$ diverge y

(b) $\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \operatorname{sen} x\,dx = 0$.

38. Considere un alambre infinito que coincide con la parte positiva del eje x y que tiene densidad de masa $\delta(x) = (1 + x^2)^{-1}, 0 \le x < \infty$.

(a) Calcule la masa total del alambre.

(b) Demuestre que este alambre no tiene centro de masa.

39. Proporcione un ejemplo de una región en el primer cuadrante que dé un sólido de volumen finito cuando se hace girar alrededor del eje x, pero que dé un sólido de volumen infinito cuando se hace girar alrededor del eje y.

40. Sea f una función continua no negativa en $0 \le x < \infty$ con $\int_0^{\infty} f(x)\,dx < \infty$. Demuestre que

(a) si $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe debe ser 0;

(b) es posible que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ no exista.

CAS **41.** Podemos utilizar una computadora para aproximar $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ tomando b muy grande en $\int_1^{b} f(x)\,dx$ *con tal que* sepamos que la primera integral converge. Calcule $\int_1^{100} (1/x^p)\,dx$ para $p = 2, 1.1, 1.01, 1$ y 0.99. Observe que esto no da idea de que la integral $\int_1^{\infty} (1/x^p)\,dx$ converge para $p > 1$ y diverge para $p \le 1$.

CAS **42.** Aproxime $\int_0^{a} \frac{1}{\pi}(1 + x^2)^{-1}\,dx$ para $a = 10, 50$ y 100.

CAS **43.** Aproxime $\int_{-a}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)\,dx$ para $a = 1, 2, 3$ y 4.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** converge **2.** $\lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \cos x\,dx$ **3.** $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx;\ \int_0^{\infty} f(x)\,dx$ **4.** $p > 1$

8.4 Integrales impropias: integrandos infinitos

Considerando la gran cantidad de integraciones complicadas que hemos hecho, he aquí una que parece muy sencilla pero que es incorrecta.

$$\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-2}^{1} = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \qquad \text{Error}$$

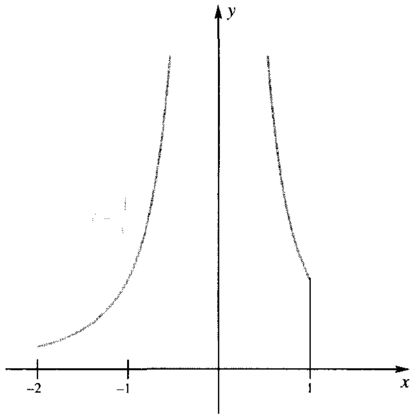


Figura 1

Una mirada a la figura 1 nos dice que algo está muy mal. El valor de la integral (si existe uno) tiene que ser un número positivo. (¿Por qué?)

¿En dónde está nuestro error? Para responder, nos regresamos a la sección 4.2. Recuerde que para que una función sea integrable en el sentido estándar (o propio) debe ser acotada. Nuestra función, $f(x) = 1/x^2$, no está acotada, así que no es integrable en el sentido propio. Decimos que $\int_{-2}^{1} x^{-2}\,dx$ es una integral impropia con un integrando infinito (*integrando no acotado* es un término más preciso aunque menos interesante).

Hasta ahora, hemos evitado con cuidado integrandos infinitos en todos nuestros ejemplos y problemas. Podríamos continuar haciendo esto, pero sería evitar una clase de integrales que tienen aplicaciones importantes. Nuestra tarea para esta sección es definir y analizar esta nueva clase de integrales.

Integrandos que son infinitos en un punto frontera

Damos la definición para el caso en donde f tiende a infinito en el punto frontera del lado derecho del intervalo de integración. Existe una definición completamente análoga para el caso en donde f tiende a infinito en el punto frontera del lado izquierdo.

Definición

Sea f continua en el intervalo semiabierto $[a, b)$ y supóngase que $\lim_{x\to b^-} |f(x)| = \infty$. Entonces

$$\int_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^{t} f(x)\,dx$$

con tal que este límite exista y sea finito, en cuyo caso decimos que la integral converge. De otra forma, decimos que la integral diverge.

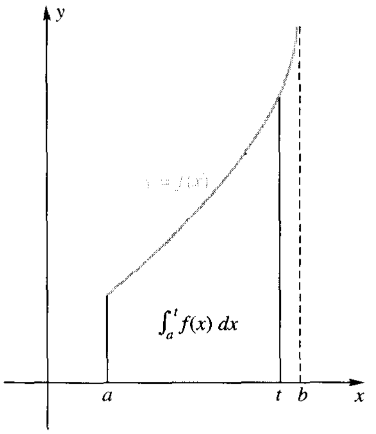


Figura 2

Observe la interpretación geométrica en la figura 2.

EJEMPLO 1 Evalúe, si es posible, la integral impropia $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

SOLUCIÓN Observe que en 2 el integrando tiene a infinito.

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{t\to 2^-}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{t\to 2^-}\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^t$$

$$= \lim_{t\to 2^-}\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{t}{2}\right) - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{0}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{2}$$ ■

EJEMPLO 2 Evalúe, si es posible, $\displaystyle\int_0^{16} \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$.

SOLUCIÓN

$$\int_0^{16} x^{-1/4}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^{16} x^{-1/4}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{4}{3}x^{3/4}\right]_t^{16}$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{32}{3} - \frac{4}{3}t^{3/4}\right] = \frac{32}{3}$$ ■

EJEMPLO 3 Evalúe, si es posible, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$.

SOLUCIÓN

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+}[\ln x]_t^1$$

$$= \lim_{t\to 0^+}[-\ln t] = \infty$$

Concluimos que la integral diverge. ■

EJEMPLO 4 Muestre que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ converge si $p < 1$, pero diverge si $p \geq 1$.

SOLUCIÓN El ejemplo 3 se hizo cargo del caso $p = 1$. Si $p \neq 1$,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 x^{-p}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_t^1$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p}\cdot\frac{1}{t^{p-1}}\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p} & \text{si } p < 1 \\ \infty & \text{si } p > 1 \end{cases}$$ ■

Dos ejemplos clave

Del ejemplo 7 de la sección 8.3 aprendimos que

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$$

converge si y sólo si $p > 1$. Del ejemplo 4 de esta sección aprendimos que

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$$

converge si y sólo si $p < 1$. La primera tiene un límite de integración infinito, la segunda tiene un integrando infinito. Si se siente como en casa con estas dos integrales, también debe sentirse cómodo con cualesquiera otras integrales impropias con la que se encuentre.

EJEMPLO 5 Haga una gráfica de la hipocicloide de cuatro vértices, $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ y determine su perímetro.

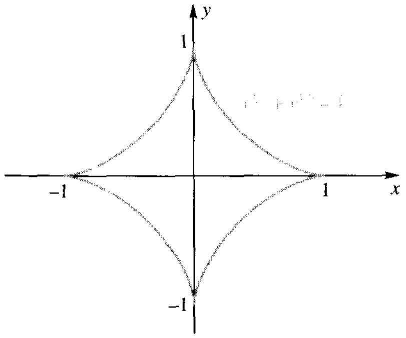


Figura 3

SOLUCIÓN La gráfica se muestra en la figura 3. Para encontrar el perímetro, es suficiente con determinar la longitud L de la parte del primer cuadrante y multiplicarla por cuatro. Estimamos que L será un poco más de $\sqrt{2} \approx 1.4$. Su valor exacto (véase la sección 5.4) es

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$$

Por medio de derivación implícita de $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, obtenemos

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}y' = 0$$

o

$$y' = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$

Así,

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{y^{2/3}}{x^{2/3}} = 1 + \frac{1 - x^{2/3}}{x^{2/3}} = \frac{1}{x^{2/3}}$$

y de esta manera

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{1/3}}\, dx$$

El valor de esta integral impropia puede deducirse de la solución al ejemplo 4; es $L = 1/\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}$. Concluimos que la hipocicloide tiene perímetro $4L = 6$. ■

Integrandos que son infinitos en un punto interior La integral $\int_{-2}^{1} 1/x^2\, dx$ de nuestra introducción tiene un integrando que tiende a infinito en $x = 0$, un punto interior del intervalo $[-2, 1]$. He aquí la definición apropiada para dar significado a tal integral.

Definición

Sea f continua en $[a, b]$ excepto en un número c, en donde $a < c < b$, y supóngase que $\lim_{x\to c} |f(x)| = \infty$. Entonces definimos

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

siempre que ambas integrales de la derecha convergen. En caso contrario, decimos que $\int_a^b f(x)\, dx$ diverge.

EJEMPLO 6 Demuestre que $\int_{-2}^{1} 1/x^2\, dx$ diverge.

SOLUCIÓN

$$\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = \int_{-2}^{0} \frac{1}{x^2}\, dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx$$

La segunda integral de la derecha diverge, por el ejemplo 4. Esto es suficiente para dar la conclusión. ■

EJEMPLO 7 Evalúe, si es posible, la integral impropia $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$.

SOLUCIÓN El integrando tiende a infinito en $x = 1$ (véase la figura 4). Así,

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} &= \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} \\
&= \lim_{t\to1^-} \int_0^t \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \lim_{s\to1^+} \int_s^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} \\
&= \lim_{t\to1^-} [3(x-1)^{1/3}]_0^t + \lim_{s\to1^+} [3(x-1)^{1/3}]_s^3 \\
&= 3\lim_{t\to1^-} [(t-1)^{1/3} + 1] + 3\lim_{s\to1^+} [2^{1/3} - (s-1)^{1/3}] \\
&= 3 + 3(2^{1/3}) \approx 6.78
\end{aligned}$$

■

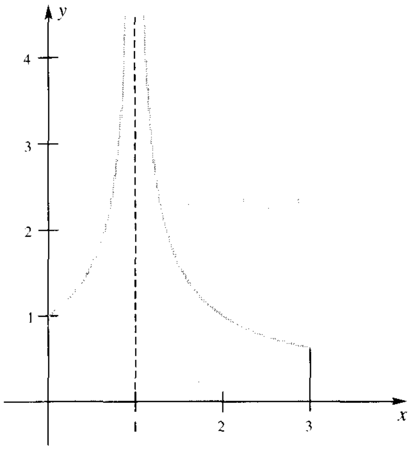


Figura 4

Revisión de conceptos

1. La integral $\int_0^1 (1/\sqrt{x})\,dx$ no existe en el sentido propio, ya que la función $f(x) = 1/\sqrt{x}$ es ______ en el intervalo $(0, 1]$.

2. Considerada como una integral impropia, $\int_0^1 (1/\sqrt{x})\,dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 x^{-1/2}\,dx =$ ______.

3. La integral impropia $\int_0^4 \left(1/\sqrt{4-x}\right)dx$ se define por ______.

4. La integral impropia $\int_0^1 (1/x^p)\,dx$ converge si y sólo si ______.

Conjunto de problemas 8.4

En los problemas del 1 al 32 evalúe cada integral impropia o demuestre que diverge.

1. $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}}$

2. $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{4/3}}$

3. $\displaystyle\int_3^{10} \frac{dx}{\sqrt{x-3}}$

4. $\displaystyle\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{9-x}}$

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

6. $\displaystyle\int_{100}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

7. $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{1}{x^3}\,dx$

8. $\displaystyle\int_5^{-5} \frac{1}{x^{2/3}}\,dx$

9. $\displaystyle\int_{-1}^{128} x^{-5/7}\,dx$

10. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx$

11. $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{(2-3x)^{1/3}}$

12. $\displaystyle\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} \frac{x}{(16-2x^2)^{2/3}}\,dx$

13. $\displaystyle\int_0^{-4} \frac{x}{16-2x^2}\,dx$

14. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

15. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x+1)^{4/3}}$

16. $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{x^2+x-2}$

17. $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{x^3-x^2-x+1}$

18. $\displaystyle\int_0^{27} \frac{x^{1/3}}{x^{2/3}-9}\,dx$

19. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan 2x\,dx$

20. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \csc x\,dx$

21. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}\,dx$

22. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} x}}\,dx$

23. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan^2 x \sec^2 x\,dx$

24. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2 x}{(\tan x-1)^2}\,dx$

25. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos x-1}$

26. $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{\ln(-x)}}$

27. $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^x-1}}$

28. $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

29. $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\ln x}$

30. $\displaystyle\int_1^{10} \frac{dx}{x\ln^{100} x}$

31. $\displaystyle\int_{2c}^{4c} \frac{dx}{\sqrt{x^2-4c^2}}$

32. $\displaystyle\int_c^{2c} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+xc-2c^2}}, c > 0$

33. Con frecuencia, es posible cambiar una integral impropia en una propia por medio del uso de la integración por partes. Considere $\lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$. Utilice la integración por partes en el intervalo $[c, 1]$ donde $0 < c < 1$ para demostrar que

$$\int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = 1 - \frac{2\sqrt{c}}{c+1} + 2\int_c^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+x)^2}$$

y así concluir que tomando el límite cuando $c \to 0$ una integral impropia puede convertirse en una integral propia.

34. Utilice integración por partes y la técnica del problema 33 para transformar la integral impropia $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$ en una integral propia.

35. Si $f(x)$ tiende a infinito en a y b, entonces definimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

en donde c es cualquier punto entre a y b, siempre que, por supuesto, las últimas dos integrales converjan. En caso contrario, decimos que la integral dada diverge. Utilice esto para evaluar $\int_{-3}^3 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$ o demuestre que diverge.

36. Evalúe $\int_{-3}^3 \frac{x}{9-x^2}\,dx$ o demuestre que diverge. Véase el problema 35.

37. Evalúe $\int_{-4}^4 \frac{1}{16-x^2}\,dx$ o demuestre que diverge. Véase el problema 35.

38. Evalúe $\int_{-1}^1 \frac{1}{x\sqrt{-\ln|x|}}\,dx$ o demuestre que diverge.

39. Si $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, definimos

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_1^b f(x)\,dx$$

con tal que ambos límites existan. En caso contrario, decimos que $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ diverge. Demuestre que $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ diverge para toda p.

40. Suponga que f es continua en $[0, \infty)$ excepto en $x = 1$, en donde $\lim_{x\to 1} |f(x)| = \infty$. ¿Cómo definiría $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$?

41. Encuentre el área de la región entre las curvas $y = (x - 8)^{-2/3}$ y $y = 0$ para $0 \le x < 8$.

42. Encuentre el área de la región entre las curvas $y = 1/x$ y $y = 1/(x^3 + x)$ para $0 < x \le 1$.

43. Sea R la región en el primer cuadrante debajo de la curva $y = x^{-2/3}$ y a la izquierda de $x = 1$.

(a) Demuestre que el área de R es finita encontrando su valor.

(b) Demuestre que el volumen del sólido generado al hacer girar R alrededor del eje x es infinito.

44. Encuentre b de modo que $\int_0^b \ln x \, dx = 0$.

45. ¿La integral $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, dx$ es impropia? Explique.

EXPL **46. (Prueba de comparación)** Si $0 \le f(x) \le g(x)$ en $[a, \infty)$, puede demostrarse que la convergencia de $\int_a^\infty g(x)\, dx$ implica la convergencia de $\int_a^\infty f(x)\, dx$, y la divergencia de $\int_a^\infty f(x)\, dx$ implica la divergencia de $\int_a^\infty g(x)\, dx$. Utilice esto para demostrar que $\int_1^\infty \frac{1}{x^4(1 + x^4)}\, dx$ converge. *Sugerencia:* en $[1, \infty)$, $1/[x^4(1 + x^4)] \le 1/x^4$.

47. Utilice la prueba de comparación del problema 46 para demostrar que $\int_1^\infty e^{-x^2}\, dx$ converge. *Sugerencia:* $e^{-x^2} \le e^{-x}$ en $[1, \infty)$.

48. Utilice la prueba de comparación del problema 46 para demostrar que $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x + 2} - 1}\, dx$

49. Utilice la prueba de comparación del problema 46 para determinar si $\int_1^\infty \frac{1}{x^2 \ln(x + 1)}\, dx$ converge o diverge.

50. Formule una prueba de comparación para integrales impropias con integrandos infinitos.

51. (a) Utilice el ejemplo 2 de la sección 8.2 para demostrar que para cualquier número positivo n existe un número M tal que

$$0 < \frac{x^{n-1}}{e^x} \le \frac{1}{x^2} \text{ para } x \ge M$$

(b) Utilice la parte (a) y el problema 46 para demostrar que $\int_1^\infty x^{n-1} e^{-x}\, dx$ converge.

52. Utilizando el problema 50 demuestre que $\int_0^1 x^{n-1} e^{-x}\, dx$ converge para $n > 0$.

EXPL **53. (Función gamma)** Sea $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\, dx$, $n > 0$. Por los problemas 51 y 52, esta integral converge. Demuestre cada uno de lo siguiente (observe que la función gamma está definida para cualquier número positivo real n):

(a) $\Gamma(1) = 1$

(b) $\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n)$

(c) $\Gamma(n + 1) = n!$, si n es un entero positivo.

CAS **54.** Evalúe $\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\, dx$ para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5, con lo que se confirma el problema 53(c).

55. La función de densidad de probabilidad **gamma** es

$$f(x) = \begin{cases} Cx^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

donde α y β son constantes positivas. (Tanto las distribuciones gamma como la Weibull son utilizadas en modelos de tiempo de vida de personas, animales y equipos).

(a) Determine el valor de C, dependiente de α y β, que hace a $f(x)$ una función de densidad de probabilidad.

(b) Para el valor de C, que encontró en la parte (a), determine el valor de la media μ.

(c) Para el valor de C, que encontró en la parte (a), determine la varianza σ^2.

EXPL **56.** La **transformada de Laplace**, nombrada así en honor del matemático francés Pierre–Simon de Laplace (1749–1827), de una función $f(x)$ está dada mediante $L\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st}\, dt$. Las transformadas de Laplace se utilizan para resolver ecuaciones diferenciales.

(a) Demuestre que la transformada de Laplace de t^a está dada por $\Gamma(\alpha + 1)/s^{\alpha+1}$ y está definida para $s > 0$.

(b) Demuestre que la transformada de Laplace de $e^{\alpha t}$ está dada por $1/(s - \alpha)$ y está definida por $s > \alpha$.

(c) Demuestre que la transformada de Laplace de $\operatorname{sen}(\alpha t)$ está dada por $\alpha/(s^2 + \alpha^2)$ y está definida para $s > 0$).

57. Interprete cada una de las siguientes integrales como un área y después calcule esta área por medio de una integración con respecto a y, evalúe:

(a) $\int_0^1 \sqrt{\frac{1 - x}{x}}\, dx$

(b) $\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}\, dx$

EXPL **58.** Suponga que $0 < p < q$ y que $\int_0^\infty \frac{1}{x^p + x^q}\, dx$ converge. ¿Qué puede decir acerca de p y q?

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** no acotada **2.** 2 **3.** $\lim_{b \to 4^-} \int_0^b \left(1/\sqrt{4 - x}\right) dx$ **4.** $p < 1$

8.5 Repaso del capítulo

Examen de conceptos

Responda con verdadero o falso a cada una de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

1. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^{100}}{e^x} = 0$

2. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^{1/10}}{\ln x} = \infty$

3. $\lim_{x \to \infty} \frac{1000x^4 + 1000}{0.001x^4 + 1} = \infty$

4. $\lim_{x \to \infty} x e^{-1/x} = 0$

5. Si $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

6. Si $\lim_{x \to a} f(x) = 1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)} = 1$.

7. Si $\lim_{x \to a} f(x) = 1$, entonces $\lim_{n \to \infty} \left\{ \lim_{x \to a} [f(x)]^n \right\} = 1$.

8. Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = 0$. (Suponga $f(x) \geq 0$ para $x \neq a$).

9. Si $\lim_{x\to a} f(x) = -1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = -\infty$.

10. Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = 0$.

11. Si $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 3$, entonces $\lim_{x\to\infty} [f(x) - 3g(x)] = 0$.

12. Si $\lim_{x\to a} f(x) = 2$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{|g(x)|} = \infty$. (Suponga que $g(x) \neq 0$ para $x \neq a$).

13. Si $\lim_{x\to\infty} \ln f(x) = 2$, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = e^2$.

14. Si $f(x) \neq 0$ para $x \neq a$ y $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to a} [1 + f(x)]^{1/f(x)} = e$.

15. Si $p(x)$ es un polinomio, entonces $\lim_{x\to\infty} \dfrac{p(x)}{e^x} = 0$.

16. Si $p(x)$ es un polinomio, entonces $\lim_{x\to 0} \dfrac{p(x)}{e^x} = p(0)$.

17. Si $f(x)$ y $g(x)$ son derivables y $\lim_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, entonces $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

18. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{1.001}}\, dx$ converge.

19. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^p}\, dx$ diverge para toda $p > 0$.

20. Si f es continua en $[0, \infty)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, entonces $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\, dx$ converge.

21. Si f es una función par y $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\, dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx$ converge.

22. Si $\displaystyle\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} f(x)\, dx$ existe y es finita, entonces $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx$ converge.

23. Si f' es continua en $[0, \infty)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, entonces $\displaystyle\int_0^\infty f'(x)\, dx$ converge.

24. Si $0 \leq f(x) \leq e^{-x}$ en $[0, \infty)$, entonces $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\, dx$ converge.

25. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{x}\, dx$ es una integral impropia.

Problemas de examen

Determine cada límite en los problemas del 1 al 18.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4x}{\tan x}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\operatorname{sen} 3x}$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \tan x}{\frac{1}{3}x^2}$

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x^2}$

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} 2x \cot x$

6. $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(1 - x)}{\cot \pi x}$

7. $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{\ln t}{t^2}$

8. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3}{\ln x}$

9. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{1/x}$

10. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x \ln x$

11. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x$

12. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{2/x}$

13. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} \ln x$

14. $\displaystyle\lim_{t\to\infty} t^{1/t}$

15. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right)$

16. $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \frac{\tan 3x}{\tan x}$

17. $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} (\operatorname{sen} x)^{\tan x}$

18. $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \left(x \tan x - \frac{\pi}{2} \sec x\right)$

En los problemas del 19 al 38 evalúe la integral impropia dada o demuestre que diverge.

19. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x + 1)^2}$

20. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2}$

21. $\displaystyle\int_{-\infty}^1 e^{2x}\, dx$

22. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{1 - x}$

23. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x + 1}$

24. $\displaystyle\int_{1/2}^2 \frac{dx}{x(\ln x)^{1/5}}$

25. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2 + x^4}$

26. $\displaystyle\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{(2 - x)^2}$

27. $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{dx}{2x + 3}$

28. $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x - 1}}$

29. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

30. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{e^{x/2}}$

31. $\displaystyle\int_3^5 \frac{dx}{(4 - x)^{2/3}}$

32. $\displaystyle\int_2^\infty x e^{-x^2}\, dx$

33. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{x^2 + 1}\, dx$

34. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1 + x^4}\, dx$

35. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x} + 1}\, dx$

36. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-x^3}\, dx$

37. $\displaystyle\int_{-3}^3 \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}\, dx$

38. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\tan x}{(\ln \cos x)^2}\, dx$

39. ¿Para qué valores de p la integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\, dx$ converge y para qué valores diverge?

40. ¿Para qué valores de p la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\, dx$ converge y para cuáles diverge?

En los problemas del 41 al 44 utilice la prueba de comparación (véase el problema 46 de la sección 8.4) para decidir si cada una de las siguientes integrales convergen o divergen.

41. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^6 + x}}$

42. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{e^{2x}}\, dx$

43. $\displaystyle\int_3^\infty \frac{\ln x}{x}\, dx$

44. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3}\, dx$

PROBLEMAS DE REPASO E INTRODUCCIÓN

De la sección 0.1 recuerde que la recíproca de la implicación $P \Rightarrow Q$ es $Q \Rightarrow P$, y la contrapositiva es no $Q \Rightarrow$ no P. *En los problemas del 1 al 8 proporcione la recíproca y la contrapositiva de las proposiciones dadas. ¿Cuáles, entre la proposición original, su recíproca y su contrapositiva son siempre verdaderas?*

1. Si $x > 0$, entonces $x^2 > 0$.

2. Si $x^2 > 0$, entonces $x > 0$.

3. Si f es diferenciable en c, entonces f es continua en c.

4. Si f es continua en c, entonces f es diferenciable en c.

5. Si f es continua por la derecha en c, entonces f es continua en c.

6. Si la derivada de f siempre es cero, entonces f es una función constante. [Suponga que f es diferenciable para toda x].

7. Si $f(x) = x^2$, entonces $f'(x) = 2x$.

8. Si $a < b$, entonces $a^2 < b^2$.

En los problemas del 9 al 12 evalúe la suma dada.

9. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

10. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$

11. $\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i}$

12. $\sum_{k=1}^{4} \frac{(-1)^k}{2^k}$

Evalúe los siguientes límites.

13. $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2x+1}$

14. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2+1}$

15. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$

16. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^n}$

¿Cuál de las integrales impropias converge?

17. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$

18. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$

19. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1.001}}\, dx$

20. $\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\, dx$

21. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\, dx$

22. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx$

CAPÍTULO 9 Series infinitas

9.1 Sucesiones infinitas
9.2 Series infinitas
9.3 Series positivas: el criterio de la integral
9.4 Series positivas: otros criterios
9.5 Series alternantes, convergencia absoluta y convergencia condicional
9.6 Series de potencias
9.7 Operaciones sobre series de potencias
9.8 Series de Taylor y de Maclaurin
9.9 La aproximación de Taylor para una función
9.10 Repaso del capítulo

9.1
Sucesiones infinitas

En un lenguaje sencillo, una sucesión

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

es un arreglo ordenado de números reales, uno para cada entero positivo. Más formalmente, una **sucesión infinita** es una función cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos y cuyo rango es un conjunto de números reales. Podemos indicar una sucesión mediante $a_1, a_2, a_3, \ldots$, mediante $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, o simplemente por $\{a_n\}$. En algunos casos, extenderemos un poco este concepto permitiendo que el dominio conste de todos los enteros mayores o iguales a un entero específico, como en $b_0, b_1, b_2, \ldots$ y $c_8, c_9, c_{10}, \ldots$, que denotamos como $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{c_n\}_{n=8}^{\infty}$, respectivamente.

Se puede especificar una sucesión dando suficientes términos iniciales para establecer un patrón, como en

$$1, 4, 7, 10, 13, \ldots$$

mediante una **fórmula explícita** para el n-ésimo término, como en

$$a_n = 3n - 2, \qquad n \geq 1$$

o mediante una **fórmula recursiva**

$$a_1 = 1, \qquad a_n = a_{n-1} + 3, \qquad n \geq 2$$

Observe que cada una de estas ilustraciones describe la misma sucesión. He aquí otras cuatro fórmulas explícitas y los primeros términos de las sucesiones que generan.

(1) $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$, $\quad n \geq 1$: $\quad 0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots$

(2) $b_n = 1 + (-1)^n \dfrac{1}{n}$, $\quad n \geq 1$: $\quad 0, \dfrac{3}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{7}{6}, \dfrac{6}{7}, \ldots$

(3) $c_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$, $\quad n \geq 1$: $\quad 0, \dfrac{3}{2}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{4}, -\dfrac{4}{5}, \dfrac{7}{6}, -\dfrac{6}{7}, \ldots$

(4) $d_n = 0.999$, $\quad n \geq 1$: $\quad 0.999, 0.999, 0.999, 0.999, \ldots$

Alguien podría afirmar que existen muchas sucesiones diferentes que inician con

$$1, 4, 7, 10, 13$$

y estamos de acuerdo. Por ejemplo, la fórmula

$$3n - 2 + (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots (n - 5)$$

genera esos cinco números. Pero ¿quién, salvo un experto, pensaría en esta fórmula? Cuando le preguntamos por un patrón, queremos decir un patrón sencillo y obvio.

Convergencia Considere las cuatro sucesiones recién definidas. Cada una tiene valores que se apilan cerca de 1 (véanse los diagramas de la figura 1). Pero, ¿todas *convergen* a 1? La respuesta correcta es no. Las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ convergen a 1, pero $\{c_n\}$ y $\{d_n\}$ no.

Para que una sucesión converja a 1, primero debe ocurrir que los valores de la sucesión se acerquen a 1. Pero deben hacer algo más que estar cerca; deben *permanecer* cerca, para toda n más allá de cierto valor. Esto descarta a la sucesión $\{c_n\}$. Además, cerca significa arbitrariamente cerca, es decir, dentro de *cualquier* distancia no nula dada con respecto de 1, lo cual excluye a $\{d_n\}$. Aunque la sucesión $\{d_n\}$ no converge a 1, es correcto decir que converge a 0.999. La sucesión $\{c_n\}$ no converge; decimos que diverge.

He aquí la definición formal, la introdujimos por primera vez en la sección 1.5.

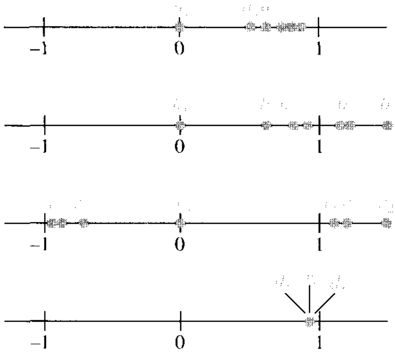


Figura 1

Definición

La sucesión $\{a_n\}$ se dice que **converge** a L y escribimos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

si para cada número positivo ε existe un número positivo correspondiente a N tal que

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

Si no hay un número finito L al que converja una sucesión, se dice que ésta **diverge**, o que es divergente.

Para ver una relación con los límites en infinito (sección 1.5), consideremos la gráfica de $a_n = 1 - 1/n$ y $a(x) = 1 - 1/x$. La única diferencia es que en el caso de la sucesión, el dominio se restringe a los enteros positivos. En el primer caso, escribimos $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$; y en el segundo, $\lim_{x\to\infty} a(x) = 1$. Observe las interpretaciones de ε y N en los diagramas de la figura 2.

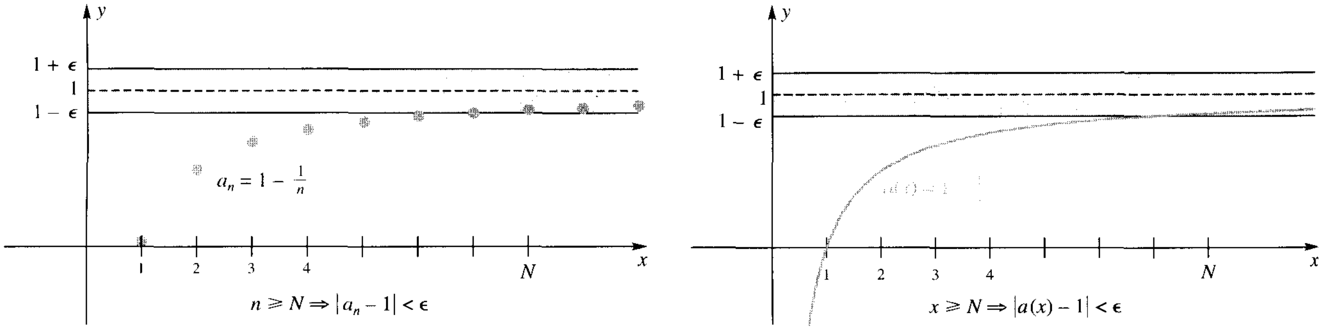


Figura 2

EJEMPLO 1 Demuestre que si p es un entero positivo, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$$

SOLUCIÓN Con base en el trabajo previo, esto es casi obvio, pero daremos una demostración formal. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario dado. Elegimos N como cualquier número mayor que $\sqrt[p]{1/\varepsilon}$. Entonces $n \geq N$ implica que

$$|a_n - L| = \left|\frac{1}{n^p} - 0\right| = \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{N^p} < \frac{1}{\left(\sqrt[p]{1/\varepsilon}\right)^p} = \varepsilon \qquad \blacksquare$$

Todos los teoremas familiares para límites son válidos para sucesiones convergentes; los establecemos sin demostración.

Teorema A Propiedades de los límites de sucesiones

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones convergentes y k una constante. Entonces

(i) $\lim_{n\to\infty} k = k$;

(ii) $\lim_{n\to\infty} ka_n = k \lim_{n\to\infty} a_n$;

(iii) $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$;

(iv) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$;

(v) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$, siempre que $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

EJEMPLO 2 Determine $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2}{7n^2+1}$.

SOLUCIÓN Para decidir lo que le sucede a un cociente de dos polinomios en n cuando n crece, conviene dividir el numerador y el denominador entre la mayor potencia de n que aparezca en el denominador. Esto justifica nuestro primer paso más adelante; los otros se justifican apelando a las afirmaciones del Teorema A, como se indica mediante los números encerrados en un círculo.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{n^2+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{7+(1/n^2)} \\
&\overset{\textcircled{5}}{=} \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3}{\lim\limits_{n\to\infty}\,[7+(1/n^2)]} \\
&\overset{\textcircled{3}}{=} \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3}{\lim\limits_{n\to\infty} 7 + \lim\limits_{n\to\infty} 1/n^2} \\
&\overset{\textcircled{1}}{=} \frac{3}{7+\lim\limits_{n\to\infty} 1/n^2} = \frac{3}{7+0} = \frac{3}{7}
\end{aligned}$$

En este momento, los teoremas de límite deben ser tan familiares que por lo general pasaremos directamente del primer paso al resultado final. ■

EJEMPLO 3 ¿La sucesión $\{(\ln n)/e^n\}$ converge?, en tal caso, ¿a qué número?

SOLUCIÓN Aquí, y en muchos problemas de sucesiones, es conveniente usar el siguiente hecho casi obvio (véase la figura 2).

$$\boxed{\text{Si } \lim_{x\to\infty} f(x) = L, \text{ entonces } \lim_{n\to\infty} f(n) = L.}$$

Esto es conveniente, ya que nos permite aplicar la regla de L'Hôpital al problema de la variable continua. En particular, por la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{e^x} = 0$$

Así,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{e^n} = 0$$

Es decir, $\{(\ln n)/e^n\}$ converge a 0. ■

Como se esperaba

En el capítulo 8 mostramos, mediante el uso de la regla de L'Hôpital, que e^x crece *más rápido* que cualquier potencia de x y que $\ln x$ crece *más lentamente* que cualquier potencia de x. Así, esperaríamos que $\ln x/e^x$ y $\ln n/e^n$ ambas tiendan a cero.

He aquí otro teorema que ya hemos visto, de un modo ligeramente distinto (teorema 1.3D).

Teorema B **Teorema del emparedado**

Suponga que $\{a_n\}$ y $\{c_n\}$ convergen a L y que $a_n \le b_n \le c_n$ para $n \ge K$ (K es un entero fijo). Entonces $\{b_n\}$ también converge en L.

EJEMPLO 4 Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}^3 n}{n} = 0$.

SOLUCIÓN Para $n \ge 1$, $-1/n \le (\operatorname{sen}^3 n)/n \le 1/n$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} (-1/n) = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} (1/n) = 0$, el resultado es consecuencia del teorema del emparedado. ■

Para las sucesiones con signo variable, el siguiente resultado es útil.

Teorema C

Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demostración Como $-|a_n| \le a_n \le |a_n|$, el resultado es consecuencia del teorema del emparedado. ■

¿Qué ocurre con los números de la sucesión $\{0.999^n\}$ cuando $n \to \infty$? Le sugerimos que calcule 0.999^n para $n = 10, 100, 1000$ y $10{,}000$ con su calculadora para tener una mejor idea. Luego observe el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Demuestre que si $-1 < r < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.

SOLUCIÓN Si $r = 0$, el resultado es trivial, de modo que suponemos lo contrario. Entonces $1/|r| > 1$ y entonces $1/|r| = 1 + p$ para algún número $p > 0$. Por la fórmula del binomio,

$$\frac{1}{|r|^n} = (1 + p)^n = 1 + pn + (\text{términos positivos}) \ge pn$$

Así,

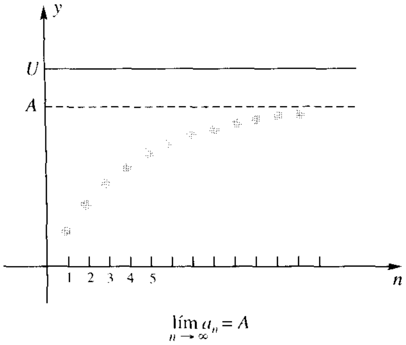
$$0 \le |r|^n \le \frac{1}{pn}$$

Como $\lim_{n\to\infty} (1/pn) = (1/p) \lim_{n\to\infty} (1/n) = 0$, el teorema del emparedado implica que $\lim_{n\to\infty} |r|^n = 0$ o, en forma equivalente, $\lim_{n\to\infty} |r^n| = 0$. Por el teorema C, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.

¿Qué ocurre si $r > 1$; por ejemplo, si $r = 1.5$? Entonces r^n crecerá hacia ∞. En este caso, escribimos

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \infty, \qquad r > 1$$

Sin embargo, decimos que la sucesión $\{r^n\}$ diverge. Para converger, una sucesión debe tender a un límite *finito*. La sucesión $\{r^n\}$ también diverge cuando $r \le -1$.



$\lim_{n\to\infty} a_n = A$

Figura 3

Sucesiones monótonas Ahora consideremos una **sucesión no decreciente** arbitraria $\{a_n\}$, con lo que queremos decir que $a_n \le a_{n+1}$, $n \ge 1$. Un ejemplo es la sucesión $a_n = n^2$; otra es $a_n = 1 - 1/n$. Si usted reflexiona un poco sobre esto, podría convencerse de que una sucesión de este tipo sólo puede hacer una de dos cosas. O bien se va a infinito o, si no puede hacerlo por estar acotada por arriba, entonces debe tender a una orilla (véase la figura 3). He aquí el enunciado formal de este resultado tan importante.

Teorema D **Teorema de la sucesión monótona**

Si U es una cota superior para una sucesión no decreciente $\{a_n\}$, entonces la sucesión converge a un límite A que es menor o igual a U. De manera análoga, si L es una cota inferior para una sucesión no creciente $\{b_n\}$, entonces la sucesión $\{b_n\}$ converge a un límite que es mayor o igual a L.

La expresión **sucesión monótona** se usa para describir una sucesión no decreciente o no creciente; de aquí el nombre de este teorema.

El teorema D describe una propiedad muy importante del sistema de los números reales. Es equivalente a la *propiedad de completez* de los números reales, que en lenguaje común dice que la recta real no tiene "agujeros" (véanse los problemas 47 y 48). Esta propiedad es la que distingue la recta numérica real de la recta numérica racional (que está llena de agujeros). Se podría decir más de este tema; esperamos que el teorema D apele a su intuición y que tendrá fe en él, hasta asistir a un curso más avanzado.

Haremos otro comentario sobre el teorema D. No es necesario que las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sean monótonas inicialmente; basta que sean monótonas a partir de cierto punto, es decir, para $n \geq K$. De hecho, *la convergencia o divergencia de una sucesión no depende del carácter de los términos iniciales, sino de lo que ocurra para n grande.*

EJEMPLO 6 Demuestre que la sucesión $b_n = n^2/2^n$ converge usando el teorema D.

SOLUCIÓN Los primeros términos de esta sucesión son

$$\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \frac{9}{16}, \frac{49}{128}, \ldots$$

Para $n \geq 3$, la sucesión parece ser decreciente ($b_n > b_{n+1}$), un hecho que estableceremos a continuación. Cada una de las siguientes desigualdades es equivalente a las demás.

$$\begin{aligned} \frac{n^2}{2^n} &> \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \\ n^2 &> \frac{(n+1)^2}{2} \\ 2n^2 &> n^2 + 2n + 1 \\ n^2 - 2n &> 1 \\ n(n-2) &> 1 \end{aligned}$$

Es claro que la última desigualdad es cierta para $n \geq 3$. Como la sucesión es decreciente (condición más fuerte que ser no creciente) y está acotada por abajo por cero, el teorema de la sucesión monótona garantiza que tiene un límite.

Sería fácil usar la regla de L'Hôpital para mostrar que el límite es cero. ■

Revisión de conceptos

1. Un arreglo de números $a_1, a_2, a_3, \ldots$, se llama_____.
2. Decimos que la sucesión $\{a_n\}$ converge si _____.
3. Una sucesión creciente que además es _____ debe converger.
4. La sucesión $\{r^n\}$ converge si y sólo si _____ $< r \leq$ _____.

Conjunto de problemas 9.1

En los problemas del 1 al 20 se da una fórmula explícita para a_n. Escriba los primeros cinco términos de $\{a_n\}$, determine si la sucesión converge o diverge y, si converge, determine $\lim_{n\to\infty} a_n$.

1. $a_n = \dfrac{n}{3n-1}$
2. $a_n = \dfrac{3n+2}{n+1}$
3. $a_n = \dfrac{4n^2+2}{n^2+3n-1}$
4. $a_n = \dfrac{3n^2+2}{2n-1}$
5. $a_n = \dfrac{n^3+3n^2+3n}{(n+1)^3}$
6. $a_n = \dfrac{\sqrt{3n^2+2}}{2n+1}$
7. $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+2}$
8. $a_n = \dfrac{n\cos(n\pi)}{2n-1}$
9. $a_n = \dfrac{\cos(n\pi)}{n}$
10. $a_n = e^{\ n} \sin n$
11. $a_n = \dfrac{e^{2n}}{n^2+3n-1}$
12. $a_n = \dfrac{e^{2n}}{4^n}$
13. $a_n = \dfrac{(-\pi)^n}{5^n}$
14. $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + 3^{n/2}$
15. $a_n = 2 + (0.99)^n$
16. $a_n = \dfrac{n^{100}}{e^n}$
17. $a_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$
18. $a_n = \dfrac{\ln(1/n)}{\sqrt{2n}}$
19. $a_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^{n/2}$
20. $a_n = (2n)^{1/2n}$

Sugerencia: teorema 6.5A.

En los problemas del 21 al 30 determine una fórmula explícita a_n = ______ para cada sucesión, determine si la sucesión converge o diverge y, si converge, determine $\lim_{n\to\infty} a_n$.

21. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$
22. $\dfrac{1}{2^2}, \dfrac{2}{2^3}, \dfrac{3}{2^4}, \dfrac{4}{2^5}, \ldots$
23. $-1, \frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, \frac{4}{7}, -\frac{5}{9}, \ldots$
24. $1, \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}, \dfrac{1}{1-\frac{2}{3}}, \dfrac{1}{1-\frac{3}{4}}, \ldots$
25. $1, \dfrac{2}{2^2-1^2}, \dfrac{3}{3^2-2^2}, \dfrac{4}{4^2-3^2}, \ldots$

26. $\dfrac{1}{2-\frac{1}{2}}, \dfrac{2}{3-\frac{1}{3}}, \dfrac{3}{4-\frac{1}{4}}, \dfrac{4}{5-\frac{1}{5}}, \ldots$

27. $\operatorname{sen} 1, 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}, 3 \operatorname{sen} \frac{1}{3}, 4 \operatorname{sen} \frac{1}{4}, \ldots$

28. $-\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{9}{27}, \frac{16}{81}, \ldots$

29. $2, 1, \dfrac{2^3}{3^2}, \dfrac{2^4}{4^2}, \dfrac{2^5}{5^2}, \ldots$

30. $1-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}-\frac{1}{5}, \ldots$

En los problemas del 31 al 36 escriba los primeros cuatro términos de la sucesión $\{a_n\}$. Después use *el teorema D para demostrar que la sucesión converge.*

31. $a_n = \dfrac{4n-3}{2^n}$

32. $a_n = \dfrac{n}{n+1}\left(2 - \dfrac{1}{n^2}\right)$

33. $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\left(1 - \dfrac{1}{9}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right), n \geq 2$

34. $a_n = 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$

35. $a_1 = 1, a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} a_n$

36. $a_1 = 2, a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right)$

C **37.** Suponga que $u_1 = \sqrt{3}$ y $u_{n+1} = \sqrt{3 + u_n}$, determine una sucesión convergente y calcule $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ con cuatro cifras decimales.

38. Demuestre que la sucesión $\{u_n\}$ del problema 37 está acotada por arriba y que es creciente. Use el teorema D para concluir que $\{u_n\}$ converge. *Sugerencia:* aplique la inducción matemática.

39. En forma algebraica, determine $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ del problema 37. *Sugerencia:* sea $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Luego, ya que $u_{n+1} = \sqrt{3 + u_n}$, $u = \sqrt{3 + u}$. Ahora eleve al cuadrado ambos lados y despeje u.

40. Use la técnica del problema 39 para determinar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ del problema 36.

C **41.** Suponga que $u_1 = 0$ y $u_{n+1} = u_{n+1} = 1.1^{u_n}$ determine una sucesión convergente, calcule $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ con cuatro cifras decimales.

42. Demuestre que $\{u_n\}$ del problema 41 es creciente y está acotada por arriba por 2.

43. Determine

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{sen} \frac{k}{n}\right) \frac{1}{n}$$

Sugerencia: escriba una integral definida equivalente.

44. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{1 + (k/n)^2}\right] \frac{1}{n} = \frac{\pi}{4}$$

45. Use la definición de límite para demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} n/(n+1) = 1$; es decir, para $\varepsilon > 0$ dado, determine N tal que $n \geq N \Rightarrow |n/(n+1) - 1| < \varepsilon$.

46. Como en el problema 45, demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} n/(n^2 + 1) = 0$.

47. Sea $S = \{x : x$ es racional y $x^2 < 2\}$. Convénzase de que S no tiene una *mínima* cota superior en los números racionales, pero que tiene una cota en los números reales. En otras palabras, la sucesión de números racionales 1, 1.4, 1.41, 1.414, . . . no tiene límite dentro de los números racionales.

EXPL **48.** La *propiedad de completez* de los números reales dice que para cualquier conjunto de números reales que esté acotado por arriba existe un número real que es la mínima cota superior para el conjunto. Por lo general, esta propiedad se considera como un axioma de los números reales. Demuestre el teorema D mediante esta propiedad.

49. Demuestre que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\{b_n\}$ está acotada, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

50. Demuestre que si $\{a_n\}$ converge y $\{b_n\}$ diverge, entonces $\{a_n + b_n\}$ diverge.

51. Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ divergen, ¿es cierto que $\{a_n + b_n\}$ diverge?

EXPL **52.** Una famosa sucesión $\{f_n\}$, llamada **sucesión de Fibonacci**, en honor de Leonardo Fibonacci, quien la introdujo aproximadamente en el año 1200, se define mediante la fórmula recursiva

$$f_1 = f_2 = 1, \qquad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

(a) Calcule desde f_3 hasta f_{10}.

(b) Sea $\phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1.618034$. Los griegos llamaron a este número *razón áurea* (razón dorada); afirmaron que un rectángulo cuyas dimensiones estaban en esta razón era "perfecto". Se puede demostrar que

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}[\phi^n - (-1)^n \phi^{-n}]$$

Verifique que esto da el resultado correcto para $n = 1$ y $n = 2$. El resultado general se puede demostrar por inducción (es un buen reto). Más relacionado con esta sección, use esta fórmula explícita para demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} f_{n+1}/f_n = \phi$.

(c) Con la ayuda del límite recién demostrado, muestre que ϕ satisface la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$. Entonces, en otro giro interesante, use la fórmula cuadrática para demostrar que las dos raíces de esta ecuación son ϕ y $-1/\phi$, dos números que aparecen en la fórmula explícita para f_n.

53. Considere un triángulo equilátero que contiene $1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n+1)/2$ círculos, cada uno de diámetro 1 y apilados como se indica en la figura 4 para el caso $n = 4$. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} A_n/B_n$, donde A_n es el área total de los círculos y B_n es el área del triángulo.

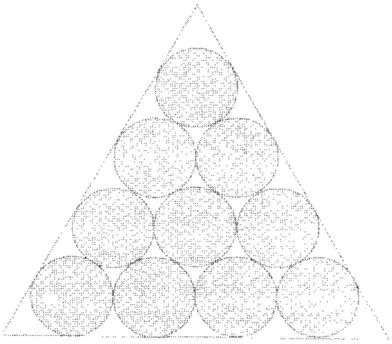


Figura 4

C *En los problemas del 54 al 59 utilice el hecho de que* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *para calcular los siguientes límites.*

54. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

55. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^n$

56. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$

57. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$

58. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2+n^2}{3+n^2}\right)^n$

59. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2+n^2}{3+n^2}\right)^{n^2}$

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** una sucesión **2.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existe (sentido finito) **3.** acotada por arriba **4.** -1; 1

9.2 Series infinitas

Cuando le pide a una computadora o a una calculadora el seno de un ángulo, o e a alguna potencia, la máquina está utilizando una algoritmo para realizar esta aproximación. Muchos de tales algoritmos tienen como base las **series infinitas**, el tema de ésta y de las siguientes secciones del presente capítulo. En la sección 9.8 veremos que

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

El tema de la última sección de este capítulo es el uso de tales series (en realidad, sólo el uso de un número finito de términos en la serie) para aproximar una función dada a una precisión deseada. Pero existe un poco de trabajo antes de llegar a ese punto. Debemos dar el significado a una serie "infinita" como las anteriores. Iniciamos con el tema de una serie infinita de números, en contraparte a una serie infinita de potencias de x, denominada serie de potencias (que abordaremos en la sección 9.6). Como ejemplo, considere la serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

Si sólo incluimos el primer término, tenemos una suma de $\frac{1}{2}$. Si incluimos los primeros dos términos, tenemos una suma de $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$; si incluimos los primeros tres términos, tenemos una suma de $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$; y así sucesivamente. Ésta es la idea de una **suma parcial**, que es la suma de un número finito de términos iniciales de la serie. Denotamos la n–ésima suma parcial, esto es, la suma de los primeros n términos, mediante S_n. Para esta serie las sumas parciales son

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \\ S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ S_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \\ &\vdots \\ S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Claramente, estas sumas parciales se hacen cada vez más cercanas a 1. De hecho,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

Entonces, la suma infinita se define como el límite de las sumas parciales S_n,

Más en general, considere la **serie infinita**

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

que también se indica mediante $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ o $\sum a_k$. Entonces S_n, la ***n*-ésima suma parcial**, está dada por

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Establecemos la siguiente definición formal.

Definición

La serie infinita $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **converge** y tiene **suma** S, si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ converge en S. Si $\{S_n\}$ diverge, entonces la serie **diverge**. Una serie divergente no tiene suma.

Serie geométrica Una serie de la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

donde $a \neq 0$, es una **serie geométrica**.

EJEMPLO 1 Demuestre que una serie geométrica converge y tiene suma $S = a/(1 - r)$ si $|r| < 1$, pero diverge si $|r| \geq 1$.

SOLUCIÓN Sea $S_n = a + ar + ar_2 + \cdots + ar^{n-1}$. Si $r = 1$, $S_n = na$, lo cual crece sin límite, de modo que $\{S_n\}$ diverge. Si $r \neq 1$, podemos escribir

$$S_n - rS_n = (a + ar + \cdots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + \cdots + ar^n) = a - ar^n$$

y entonces

$$\boxed{S_n = \frac{a - ar^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{a}{1 - r}r^n}$$

Si $|r| < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ (sección 9.1, ejemplo 5) y así

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1 - r}$$

Si $|r| > 1$ o $r = -1$, la sucesión $\{r^n\}$ diverge y, en consecuencia, también lo hace $\{S_n\}$. ■

EJEMPLO 2 Use el resultado del ejemplo 1 para calcular la suma de las dos series geométricas siguientes.

(a) $\frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \frac{4}{81} + \cdots$

(b) $0.515151\ldots = \frac{51}{100} + \frac{51}{10{,}000} + \frac{51}{1{,}000{,}000} + \cdots$

SOLUCIÓN

(a) $S = \frac{a}{1 - r} = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = 2$ (b) $S = \frac{\frac{51}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{51}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{51}{99} = \frac{17}{33}$

Por cierto, el procedimiento de la parte (b) sugiere cómo mostrar que cualquier decimal periódico representa un número racional. ■

EJEMPLO 3 El diagrama de la figura 1 representa un triángulo equilátero con una infinidad de círculos, tangentes al triángulo y a los círculos cercanos y que llegan hasta las esquinas. ¿Qué fracción del área del triángulo es ocupada por los círculos?

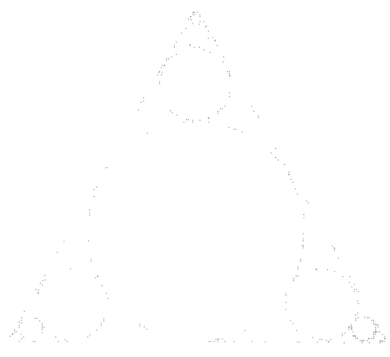


Figura 1

SOLUCIÓN Suponga, por conveniencia, que el círculo mayor tiene radio 1, lo cual hace que el triángulo tenga lados de longitud $2\sqrt{3}$. Concentre su atención en la pila vertical de círculos. Con un pequeño razonamiento geométrico (el centro del círculo mayor está a dos tercios del camino desde el vértice superior hasta la base), vemos que los radios de estos círculos son $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$, y concluya que la pila vertical tiene área

$$\pi\left[1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \left(\frac{1}{27}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$= \pi\left[1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \frac{1}{729} + \cdots\right] = \pi\left[\frac{1}{1 - \frac{1}{9}}\right] = \frac{9\pi}{8}$$

El área total de todos los círculos es el triple de este número, menos el doble del área del círculo grande, es decir, $27\pi/8 - 2\pi$, u $11\pi/8$. Como el triángulo tiene área $3\sqrt{3}$, la fracción de esta área ocupada por los círculos es

$$\frac{11\pi}{24\sqrt{3}} \approx 0.83$$

■

EJEMPLO 4 Suponga que Peter y Paul se turnan para lanzar una moneda legal; gana el primero que obtenga una cara. Si Peter lanza primero, ¿cuál es la probabilidad de que él gane?

SOLUCIÓN Peter gana al obtener cara en el primer lanzamiento, lo cual sucede con probabilidad de $\frac{1}{2}$. O puede ganar si ocurren los siguientes eventos en sucesión: Peter lanza una cruz, Paul obtiene una cruz y Peter obtiene una cara. Cada uno de estos eventos tiene probabilidad $\frac{1}{2}$, de modo que suceden con probabilidad $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Otra forma en que Peter puede ganar es que los primeros cuatro lanzamientos sean cara, mientras que el tercer lanzamiento de Peter (quinto global) sea cruz. Esto sucede con probabilidad $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$. Este proceso continúa, de modo que la probabilidad de que Peter gane es la suma de la serie geométrica

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \cdots = \frac{1/2}{1 - 1/4} = \frac{2}{3}$$

Por lo tanto, Paul gana con probabilidad $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Peter tiene más oportunidad de ganar, ya que él tira primero. ■

Lógica

Considere estas dos proposiciones:

1. Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
2. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

La primera proposición es verdadera para cualquier sucesión $\{a_n\}$; la segunda no. Esto proporciona otro ejemplo de una proposición verdadera (la primera) cuyo *recíproco* es falso.

Recuerde que la *contrapositiva* de una proposición es verdadera siempre que la proposición sea verdadera. La contrapositiva de la primera proposición es

3. Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Un criterio general para la divergencia Considere la serie geométrica $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$ una vez más. Su n-ésimo término a_n está dado por $a_n = ar^{n-1}$. El ejemplo 1 muestra que una serie geométrica converge *si y sólo si* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

¿Esto podría ser cierto para todas las series? La respuesta es no, aunque la mitad de la afirmación (la parte "sólo si") es correcta. Esto conduce a un importante criterio de divergencia para las series.

Teorema A Criterio del n-ésimo término para la divergencia

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. En forma equivalente, si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ o si $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe, entonces la serie diverge.

Demostración Sea S_n la n-ésima suma parcial y $S = \lim_{n\to\infty} S_n$. Observe que $a_n = S_n - S_{n-1}$. Como $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = S$, se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

■

EJEMPLO 5 Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3n^3 + 2n^2}$ diverge.

SOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{3n^3 + 2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3 + 2/n} = \frac{1}{3}$$

Así, por el criterio del n-ésimo término, la serie diverge. ■

La serie armónica Los estudiantes acostumbran voltear el teorema A y hacerlo decir que $a_n \to 0$ implica la convergencia de Σa_n. La serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

demuestra que esto es falso. Es claro que, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (1/n) = 0$. Sin embargo, la serie diverge, como mostraremos a continuación.

EJEMPLO 6 Demuestre que la serie armónica diverge.

SOLUCIÓN Mostraremos que S_n, crece sin cota. Imagine que n es grande y escriba

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots + \frac{1}{n} \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{8}{16} + \cdots + \frac{1}{n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Es claro que al hacer n suficientemente grande, podemos introducir en la última expresión tantos $\frac{1}{2}$ como queramos. Así, S_n, crece sin límite, de modo que $\{S_n\}$ diverge. Por lo tanto, la serie armónica diverge. ■

Serie telescópica (colapsante) Una serie geométrica es una de las pocas series que admiten una fórmula explícita S_n; una **serie telescópica** es otra (véase el ejemplo 2 de la sección 4.1)

EJEMPLO 7 Demuestre que la siguiente serie converge y calcule su suma.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$$

SOLUCIÓN Use una descomposición en fracciones parciales para escribir

$$\frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}$$

Entonces

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \tfrac{1}{3}$$

La serie converge y tiene suma $\frac{1}{3}$. ■

Una nota sobre la terminología

Este teorema introduce un cambio sutil en la terminología. El símbolo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ahora será utilizado tanto para la serie infinita, $a_1 + a_2 + \cdots$ y para la suma de esta serie, que es un número.

Propiedades de las series convergentes Las series convergentes se comportan de manera similar a las sumas finitas; lo que se espera que ocurra, con frecuencia *ocurre*.

Teorema B **Linealidad de las series convergentes**

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergen y si c es una constante, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ también convergen y

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c\sum_{k=1}^{\infty} a_k$;

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Demostración Por hipótesis $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$ y $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k$ existen. Así, usamos las propiedades de las sumas con una cantidad finita de términos y las propiedades de límites de sucesiones.

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} ca_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} ca_k = \lim_{n\to\infty} c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$= c \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = c\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\text{(ii)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 8 Calcule $\sum_{k=1}^{\infty} \left[3\left(\frac{1}{8}\right)^k - 5\left(\frac{1}{3}\right)^k\right]$.

SOLUCIÓN Por el teorema B y el ejemplo 1,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[3\left(\frac{1}{8}\right)^k - 5\left(\frac{1}{3}\right)^k\right] = 3\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^k - 5\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$$= 3\frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{8}} - 5\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{7} - \frac{5}{2} = -\frac{29}{14} \qquad \blacksquare$$

Teorema C

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge y $c \neq 0$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ diverge.

Dejaremos al lector la demostración de este teorema (problema 41). Esto implica, por ejemplo, que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{k}$$

diverge, pues sabemos que la serie armónica diverge.

La ley asociativa de la suma nos permite agrupar, de cualquier forma, términos en una suma *finita*. Por ejemplo,

$$2 + 7 + 3 + 4 + 5 = (2 + 7) + (3 + 4) + 5 = 2 + (7 + 3) + (4 + 5)$$

Pero a veces perdemos el sentido de la definición de una serie *infinita* como el límite de una sucesión de sumas parciales, por lo que nuestra intuición puede llevarnos a una paradoja. Por ejemplo, la serie

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n+1} + \cdots$$

tiene sumas parciales

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 \\ S_2 &= 1 - 1 = 0 \\ S_3 &= 1 - 1 + 1 = 1 \\ S_4 &= 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

La sucesión de sumas parciales, 1, 0, 1, 0, 1, . . . , diverge; así, la serie $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ diverge. Sin embargo, podemos ver la serie como

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \cdots$$

y afirmar que la suma es 0. En forma alternativa, podemos ver la serie como

$$1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \cdots$$

y afirmar que la suma es 1. La suma de la serie no puede ser igual a 0 y a 1. La agrupación de términos en una serie es aceptable siempre que la serie sea convergente; en tal caso podemos agrupar los términos de cualquier manera.

Teorema D **Agrupación de términos en una serie infinita**

Los términos de una serie convergente se pueden agrupar de cualquier manera (siempre que el orden de los términos se mantenga) y la nueva serie convergería en la misma suma que la serie original.

Demostración Sea Σa_n la serie convergente original y sea $\{S_n\}$ su sucesión de sumas parciales. Si Σa_n es una serie formada al agrupar los términos de Σb_m y si $\{T_m\}$ es su sucesión de sumas parciales, entonces cada T_m es una de las S_n. Por ejemplo, T_4 podría ser

$$T_4 = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_7 + a_8)$$

en cuyo caso $T_4 = S_8$. Así, (T_m) es una "subsucesión" de $\{S_n\}$. Un momento de reflexión le permitirá convencerse de que si $S_n \to S$, entonces $T_m \to S$. ■

Revisión de conceptos

1. Una expresión de la forma $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ se llama _____.

2. Se dice que una serie $a_1 + a_2 + \cdots$ converge, si la sucesión $\{S_n\}$ converge, donde $S_n =$ _____.

3. La serie geométrica $a + ar + ar^2 + \cdots$ converge si _____; en este caso, la suma de la serie es _____.

4. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, podemos garantizar que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ _____.

Conjunto de problemas 9.2

En los problemas del 1 al 14 indique si la serie dada converge o diverge. Si converge, determine su suma. Sugerencia: *tel vez le ayude escribir los primeros términos de la serie.*

1. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^{k}$

2. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{-k-2}$

3. $\sum_{k=0}^{\infty}\left[2\left(\frac{1}{4}\right)^{k}+3\left(-\frac{1}{5}\right)^{k}\right]$

4. $\sum_{k=1}^{\infty}\left[5\left(\frac{1}{2}\right)^{k}-3\left(\frac{1}{7}\right)^{k+1}\right]$

5. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-5}{k+2}$

6. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{9}{8}\right)^{k}$

7. $\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k-1}\right)$

8. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{k}$

9. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{100^{k}}$

10. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(k+2)k}$

11. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{e}{\pi}\right)^{k+1}$

12. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^{k+1}}{7^{k-1}}$

13. $\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{3}{(k-1)^{2}}-\frac{3}{k^{2}}\right)$

14. $\sum_{k=6}^{\infty}\frac{2}{k-5}$

En los problemas del 15 al 20 escriba el decimal dado como una serie infinita; luego determine la suma de la serie y, por último, use el resultado para escribir el decimal como el cociente de dos enteros (véase el ejemplo 2).

15. 0.22222...

16. 0.21212121...

17. 0.013013013...

18. 0.125125125...

19. 0.49999...

20. 0.36717171...

21. Evalúe $\sum_{k=0}^{\infty}r(1-r)^{k}, 0<r<2$.

22. Evalúe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}x^{k}, -1<x<1$.

23. Demuestre que $\sum_{k=1}^{\infty}\ln\frac{k}{k+1}$ diverge. *Sugerencia;* obtenga una fórmula para S_n.

24. Demuestre que $\sum_{k=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{k^{2}}\right)=-\ln 2$.

25. Se arroja una pelota desde una altura de 100 pies. Cada vez que golpea el suelo, rebota hasta $\frac{2}{3}$ de su altura anterior. Calcule la distancia total que recorre hasta llegar al reposo.

26. Tres personas A, B y C dividen una manzana como sigue. Primero la dividen en cuartos, tomando cada uno un pedazo. Luego dividen el cuarto restante en cuartos, tomando un pedazo cada uno y así sucesivamente. Demuestre que cada uno recibe una tercera parte de la manzana.

27. Suponga que el gobierno inyecta mil millones de dólares más a la economía. También, que cada empresa e individuo ahorran 25% de su ingreso y gastan el resto, de modo que 75% de los mil millones originales vuelven a gastarse. De esa cantidad, se gasta 75% y así sucesivamente. ¿Cuál es el incremento total en el gasto debido a la acción gubernamental? (En economía, esto se llama el *efecto multiplicador*).

28. Resuelva el problema 27 suponiendo que sólo 10% del ingreso se ahorra en cada etapa.

≈ **29.** Suponga que el cuadrado $ABCD$ (figura 2) tiene lados de longitud 1 y que E, F, G y H son puntos medios de los lados. Si el patrón indicado se continúa de manera indefinida, ¿cuál será el área de la región sombreada?

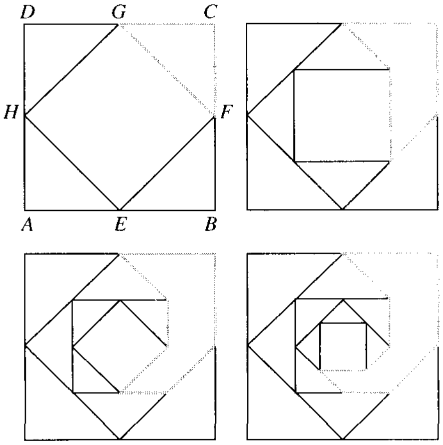


Figura 2

≈ **30.** Si el patrón que aparece en la figura 3 continúa indefinidamente, ¿qué fracción del cuadrado original quedará sombreado?

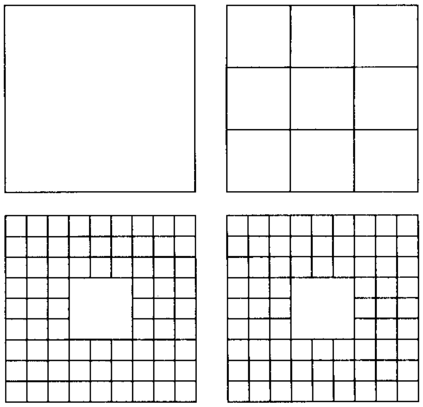


Figura 3

≈ **31.** Cada triángulo en la cadena descendente (figura 4) tiene sus vértices en los puntos medios de los lados del siguiente triángulo mayor. Si el patrón indicado de sombreado continúa indefinidamente, ¿qué fracción del triángulo original quedará sombreada? ¿Es necesario que el triángulo sea equilátero para que esto sea cierto?

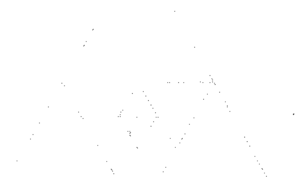


Figura 4

Figura 5

≈ **32.** Se inscriben círculos en los triángulos del problema 31, como se indica en la figura 5. Si el triangulo original es equilátero, ¿qué fracción del área quedará sombreada?

33. El copo de nieve de Koch se forma como sigue. Inicie con un triángulo equilátero, que se supone tiene lados de longitud 9. En cada lado reemplace el tercio medio, con dos lados de un triángulo equilátero que tienen lados de longitud 3. Luego, en cada uno de estos 12 lados reemplace cada tercio medio con dos lados de un triángulo equilátero que tiene lados de longitud 1. El copo de nieve de Koch es el resultado de continuar este proceso sin parar. Las primeras cuatro etapas se muestran en la figura 6.

(a) Determine el perímetro del copo de nieve de Koch o demuestre que es infinito.

(b) Determine el área del copo de nieve de Koch o demuestre que es infinito.

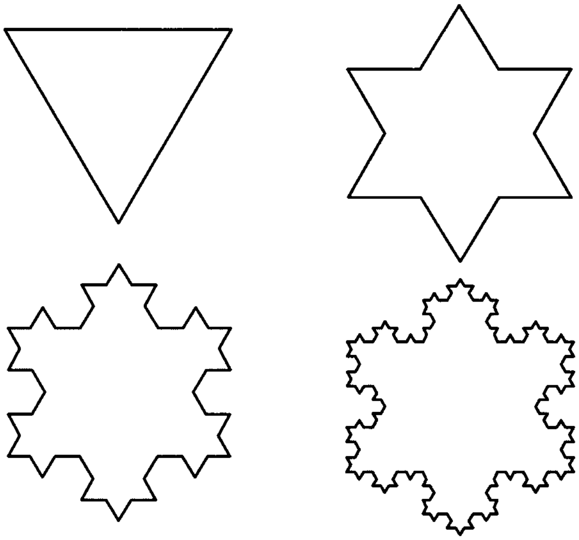


Figura 6

34. Considere el triángulo rectángulo ABC como se muestra en la figura 7. El punto A_1 se determinó dibujando una perpendicular a la recta AB que pasa por C; B_1 se forma dibujando una recta paralela a AC que pasa por A_1. Este proceso continúa para producir A_2, $A_3, \ldots$, y $B_2, B_3, \ldots$. Determine una serie para las áreas de los triángulos que se forma de esta manera y demuestre que la serie totaliza el área del ΔABC.

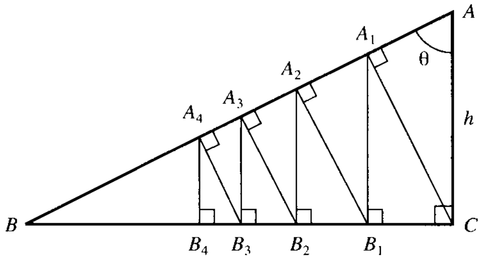


Figura 7

35. En una versión de la paradoja de Zenón, Aquiles puede correr diez veces más rápido que la tortuga, pero la tortuga inicia la carrera 100 yardas más adelante. Aquiles no puede alcanzar a la tortuga, afirma Zenón, porque cuando Aquiles haya recorrido 100 yardas, la tortuga habrá avanzado 10; cuando Aquiles recorra otras 10 yardas, la tortuga habrá avanzado una más, y así sucesivamente. Convenza a Zenón de que Aquiles alcanzará a la tortuga e indique con exactitud cuántas yardas deberá recorrer Aquiles para hacerlo.

36. Tom y Joel son buenos corredores y ambos pueden correr a una velocidad constante de 10 millas/hora. Su fabuloso perro Trot puede hacerlo mucho mejor, pues corre a 20 millas/hora. Partiendo de poblaciones que están a 60 millas de distancia entre sí, Tom y Joel corren uno en dirección del otro, mientras que Trot corre de un lado a otro entre ellos. ¿Cuánto habrá recorrido Trot en el momento que los muchachos se encuentren? Suponga que Trot comenzó a correr con Tom hacia Joel y que puede dar vueltas instantáneas. Resuelva el problema de dos formas.

(a) Use una serie geométrica.

(b) Determine una forma más rápida de resolver el problema.

37. Suponga que Peter y Paul lanzan, en forma alternada, una moneda para la cual la probabilidad de cara es $\frac{1}{3}$ y la probabilidad de cruz es $\frac{2}{3}$. Si lanzan la moneda, gana el primero que obtenga una cara y Peter lanza primero, ¿cuál es la probabilidad de que Peter gane?

38. Repita el problema 37 para el caso en donde la probabilidad de cara es p y la probabilidad de cruz es $1 - p$.

39. Suponga que Mary tira un dado legal hasta que parezca un "6". Sea X la variable aleatoria que es el número de tiros necesarios para que aparezca este "6". Determine la de distribución de probabilidad para X y verifique que la suma de todas las probabilidades es 1.

40. Utilice el hecho de que

$$\sum_{x=1}^{\infty} xp^x = \frac{p}{(1 - p)^2}$$

(la cual se deduce en la sección 9.7) para determinar el valor esperado de la variable aleatoria X del problema 39.

41. Demuestre. Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge, también lo hace $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ para $c \neq 0$.

42. Use el problema 41 para concluir que $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots$ diverge.

43. Suponga que puede disponer de una cantidad ilimitada de ladrillos, cada uno de 1 unidad de largo.

(a) Demuestre que pueden colocarse como en la figura 8, sin caer. *Sugerencia:* considere los centros de masa.

(b) ¿Qué tan lejos puede sobresalir el ladrillo superior a la derecha del ladrillo inferior usando este método de apilamiento?

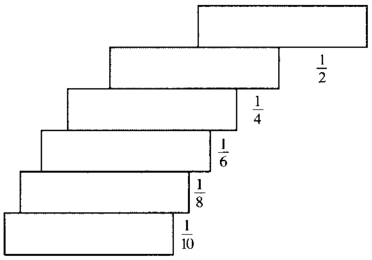


Figura 8

44. ¿Qué tan grande debe ser N para que $S_N = \sum_{k=1}^{N} (1/k)$ exceda a 4? *Nota:* los cálculos con computadora muestran que para que S_n exceda a 20, $N = 272{,}400{,}600$ y para que S_N exceda 100, $N \approx 1.5 \times 10^{43}$.

45. Demuestre que es posible si Σa_n diverge y Σb_n converge, entonces $\Sigma(a_n + b_n)$ diverge.

46. Demuestre que es posible que Σa_n y Σb_n diverjan y que incluso así $\Sigma(a_n + b_n)$ converja.

47. Observe la región de la figura 9, primero en forma vertical y luego en forma horizontal para concluir que

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \cdots = \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{4} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{4}{16} + \cdots$$

y use este hecho para calcular:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$

(b) $\bar{x}$, la coordenada horizontal del centroide de la región.

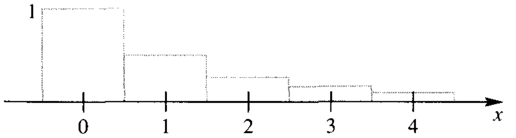


Figura 9

48. Sea r un número fijo con $|r| < 1$. Entonces se puede demostrar que $\sum_{k=1}^{\infty} kr^k$ converge, digamos con suma S. Use las propiedades de Σ para demostrar que

$$(1 - r)S = \sum_{k=1}^{\infty} r^k$$

y luego obtener una fórmula para S, generalizando así el problema 47a.

49. Muchos medicamentos son eliminados del cuerpo en forma exponencial. Así, si un medicamento se administra en dosis de tamaño C en intervalos de tiempo de longitud t, la cantidad A_n del medicamento en el cuerpo justo después de la dosis $(n + 1)$ es

$$A_n = C + Ce^{-kt} + Ce^{-2kt} + \cdots + Ce^{-nkt}$$

donde k es una constante positiva que depende del tipo de medicamento.

(a) Deduzca una fórmula para A, la cantidad de medicamento en el cuerpo justo después de una dosis, si una persona ha consumido el medicamento durante mucho tiempo (suponga un tiempo infinitamente largo).

(b) Evalúe A si se sabe que la mitad de una dosis se elimina del cuerpo en 6 horas y se administran dosis de 2 miligramos cada 12 horas.

50. Determine la suma de la serie.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(2^{k+1} - 1)(2^k - 1)}$$

51. Evalúe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{f_k f_{k+2}}$ donde $\{f_k\}$ es la sucesión de Fibonacci presentada en el problema 52 de la sección 9.1. *Sugerencia:* demuestre primero que

$$\frac{1}{f_k f_{k+2}} = \frac{1}{f_k f_{k+1}} - \frac{1}{f_{k+1} f_{k+2}}$$

Respuestas al repaso de conceptos: **1.** una serie infinita **2.** $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ **3.** $|r| < 1$; $a/(1 - r)$ **4.** diverge

9.3

Series positivas: el criterio de la integral

En la sección 9.2 presentamos varias ideas importantes, aunque las ilustramos principalmente con dos tipos muy particulares de series: geométricas y telescópicas. Para estas series podemos dar fórmulas exactas para las sumas parciales S_n, algo que rara vez podemos hacer para la mayor parte de las series. Ahora, nuestra tarea es iniciar un estudio de las series infinitas generales.

Siempre hay dos preguntas importantes sobre una serie.

1. ¿La serie converge?
2. Si converge, ¿cuál es su suma?

¿Cómo contestar a estas preguntas? Alguien podría sugerir el uso de una computadora. Para responder la primera pregunta, basta sumar más y más términos de la serie, observando los números obtenidos como sumas parciales. Si estos números parecen estabilizarse en un número fijo S, la serie converge. Y en este caso, S es la suma de la serie, lo cual responde a la segunda pregunta. Esta respuesta simplemente es incorrecta para la primera pregunta y sólo es parcialmente adecuada para la segunda. Veamos por qué.

Considere la serie armónica

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots$$

presentada en la sección 9.2 y analizada en el ejemplo 6 y el problema 44 de esa sección. Sabemos que esta serie diverge, pero una computadora no nos ayudaría a descubrir este hecho. Las sumas parciales S_n de esta serie crecen sin límite, pero lo hacen tan lentamente que se necesitan más de 272 millones de términos para que S_n alcance 20 y más de 10^{43} términos para que S_n llegue a 100. Debido a la limitación inherente en el número de dígitos que puede manejar, una computadora daría en algún momento valores repetidos para S_n, lo cual sugeriría incorrectamente que las S_n estarían convergiendo. Lo que es cierto para la serie armónica es cierto para cualquier serie que diverge lentamente. Enfatizamos lo siguiente: una computadora no puede sustituir los criterios matemáticos para la convergencia y la divergencia, tema que tratamos a continuación.

Importantes recordatorios

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

es una *sucesión*.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

es una *serie.*

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

es la *n-ésima suma parcial* de la serie.

$$S_1, S_2, S_3, \ldots$$

es la *sucesión de sumas parciales* de la serie. La serie *converge* si y sólo si

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

existe y es finito, en cuyo caso S se denomina la *suma* de la serie.

En ésta y la próxima sección restringimos nuestra atención a las series con términos positivos (o al menos no negativos). Con esta restricción podremos dar algunos criterios de convergencia notablemente sencillos. Los criterios para series con términos de signo arbitrarios aparecen en la sección 9.5

Sumas parciales acotadas Nuestro primer resultado es consecuencia directa del teorema de la sucesión monótona (teorema 9.1D).

Teorema A **Criterio de la suma acotada**

Una serie Σa_k de términos no negativos converge si y sólo si sus sumas parciales están acotadas por arriba.

Demostración Como ya es usual, sea $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Como $a_k \geq 0$, $S_{n+1} \geq S_n$; es decir, $\{S_n\}$ es una sucesión no decreciente. Así, por el teorema 9.1D, la sucesión $\{S_n\}$ convergerá si existe un número U tal que $S_n \leq U$ para toda n. En caso contrario, las S_n crecerían sin límite, en cuyo caso $\{S_n\}$ diverge. ■

EJEMPLO 1 Muestre que la serie $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$ converge.

SOLUCIÓN Queremos demostrar que las sumas parciales S_n están acotadas por arriba. Observe primero que

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \geq 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{n-1}$$

y entonces $1/n! \leq 1/2^{n-1}$. Así,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &\leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

Estos últimos términos provienen de una serie geométrica con $r = \frac{1}{2}$. Podemos obtener su suma mediante una fórmula en el ejemplo 1 de la sección 9.2. Obtenemos

$$S_n \leq \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] < 2$$

Así, por el criterio de la suma acotada, la serie dada converge. El argumento también muestra que su suma S es a lo más 2. Posteriormente mostraremos que $S = e - 1 \approx 1.71828$. ■

Serie e integrales impropias El comportamiento de $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ y $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$, con respecto de la convergencia, es similar y proporciona un criterio muy poderoso.

Teorema B **Criterio de la integral**

Sea f una función continua, positiva no creciente en el intervalo $[1, \infty)$ y suponga que $a_k = f(k)$ para todo entero positivo k. Entonces la serie infinita

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

converge si y sólo si la integral impropia

$$\int_1^{\infty} f(x)\, dx$$

converge.

Observemos que el entero 1 puede reemplazarse por cualquier entero positivo M en este teorema (véase el ejemplo 4).

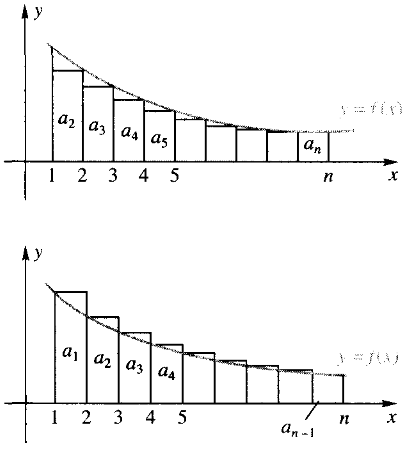


Figura 1

Demostración Los diagramas de la figura 1 indican la forma de interpretar las sumas parciales de la serie Σa_k como áreas y, con ello, relacionar la serie con una integral correspondiente. Observe que el área de cada rectángulo es igual a su altura, pues en cada caso el ancho es 1. Con base en estos diagramas podemos ver fácilmente que

$$\sum_{k=2}^{n} a_k \le \int_1^n f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

Ahora suponga que $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge. Entonces, por la desigualdad izquierda anterior,

$$S_n = a_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k \le a_1 + \int_1^n f(x)\,dx \le a_1 + \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

Por lo tanto, por el criterio de la suma acotada, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

Por otra parte, suponga que, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge. Entonces, por la desigualdad derecha anterior, si $t \le n$,

$$\int_1^t f(x)\,dx \le \int_1^n f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{n-1} a_k \le \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Como $\int_1^t f(x)\,dx$ crece con t y está acotada superiormente, $\lim_{t\to\infty} \int_1^t f(x)\,dx$ debe existir; es decir, $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge. ■

La conclusión del teorema B se enuncia con frecuencia de esta manera: *la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ *y la integral impropia* $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ *convergen o divergen juntas.* Usted debe ver que esto es equivalente a nuestro enunciado.

EJEMPLO 2 **(Criterio de la serie *p*)** La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$$

donde p es una constante, es una **serie *p***. Demuestre lo siguiente:

(a) La serie p converge si $p > 1$.
(b) La serie p diverge si $p \le 1$.

SOLUCIÓN Si $p \ge 0$, la función $f(x) = 1/x^p$ es continua, positiva y no creciente en $[1,\infty)$ y $f(k) = 1/k^p$. Así, por el criterio de la integral, $\Sigma(1/k^p)$ converge si y sólo si $\lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-p}\,dx$ existe (como un número finito).

Si $p \ne 1$,

$$\int_1^t x^{-p}\,dx = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^t = \frac{t^{1-p} - 1}{1-p}$$

Si $p = 1$,

$$\int_1^t x^{-1}\,dx = [\ln x]_1^t = \ln t$$

Como $\lim_{t\to\infty} t^{1-p} = 0$ si $p > 1$ y $\lim_{t\to\infty} t^{1-p} = \infty$ si $p < 1$ y como $\lim_{t\to\infty} \ln t = \infty$, concluimos que la serie p converge si $p > 1$ y diverge si $0 \le p \le 1$.

Aún debemos estudiar el caso $p < 0$. Ahora, el n-ésimo término de $\Sigma\,(1/k^p)$, es decir, $1/n^p$, ni siquiera tiende a 0. Así, por el criterio del n-ésimo término, la serie diverge.

Observe que el caso $p = 1$ corresponde a la serie armónica, analizada en la sección 9.2. Nuestros resultados de entonces y los actuales son consistentes. La serie armónica diverge. ■

La cola de una serie

El inicio de una serie no desempeña papel alguno en su convergencia o divergencia. Sólo la cola es importante (en realidad, la cola es la que menea al perro). Por la *cola* de una serie queremos decir

$$a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots$$

donde N denota un número arbitrariamente grande. Por lo tanto, al probar la convergencia o divergencia de una serie podemos ignorar los términos iniciales y hasta cambiarlos. Sin embargo, es claro que la suma de una serie depende de todos sus términos, incluyendo a los iniciales.

EJEMPLO 3 ¿Converge o diverge la serie $\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k^{1.001}}$?

SOLUCIÓN Por el criterio de la serie p, $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k^{1.001})$. *La inserción o eliminación de un número finito de términos en una serie no afecta su convergencia o divergencia (aunque puede afectar la suma).* Así, la serie dada converge. ■

EJEMPLO 4 Determine si $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ converge o diverge.

SOLUCIÓN Las hipótesis del criterio de la integral se cumplen para $f(x) = 1/(x \ln x)$ en $[2, \infty)$. El hecho de considerar el intervalo $[2, \infty)$ en vez de $[1, \infty)$ no es importante, como lo hicimos notar después del teorema B. Ahora,

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_2^{t} \frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{x}\, dx\right) = \lim_{t\to\infty} [\ln \ln x]_2^t = \infty$$

Así, $\Sigma 1/(k \ln k)$ diverge. ■

Cómo aproximar la suma de una serie Hasta ahora hemos estado interesados en si una serie converge o diverge. Salvo por unos cuantos casos especiales, tal como la serie geométrica o una serie telescópica, no hemos abordado la pregunta de a que si converge una serie a qué converge. En general, ésta es una pregunta difícil, pero en este momento podemos utilizar el método sugerido por el criterio de la integral para *aproximar* la suma de una serie.

Si utilizamos la n–ésima suma parcial S_n para aproximar a la suma de la serie

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

entonces el error que cometemos es

$$E_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

Sea $f(x)$ una función con las propiedades de que $a_n = f(n)$ y f sea positiva, continua y no creciente en $[1, \infty)$; éstas son las condiciones del teorema B. Con base en estas condiciones

$$E_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots < \int_n^{\infty} f(x)\, dx$$

(véase la figura 2). Podemos utilizar este resultado para determinar una cota superior del error implicado al utilizar los primeros n términos para aproximar la suma S de la serie, y podemos utilizarla para determinar qué tan grande debe ser n para aproximar a S con una precisión deseada.

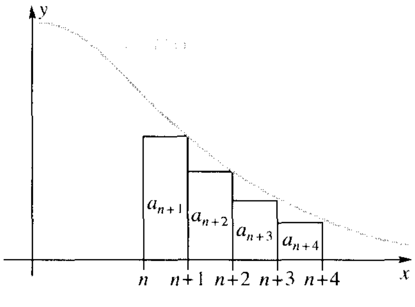


Figura 2

EJEMPLO 5 Determine una cota superior para el error al utilizar la suma de los primeros 20 términos para aproximar la suma de la serie convergente $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$.

SOLUCIÓN La elección obvia para $f(x)$ es $f(x) = 1/x^{3/2}$; esta función es positiva, continua y no creciente en $[1, \infty)$. El error satisface

$$E_{20} = \sum_{k=20+1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} < \int_{20}^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\, dx = \lim_{A\to\infty} \left[-2x^{-1/2}\right]_{20}^{A} = \frac{2}{\sqrt{20}} \approx 0.44721$$

Incluso con 20 términos el error es un tanto grande. ■

EJEMPLO 6 ¿Qué tan grande debe ser n, de modo que la suma parcial S_n se aproxime a la suma de la serie del ejemplo 5 con un error no mayor que 0.005?

SOLUCIÓN El error satisface

$$E_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} < \int_n^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx = \lim_{A\to\infty}\left[-2x^{-1/2}\right]_n^A = \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Así, para garantizar que el error sea menor que 0.005, necesitamos tener

$$\frac{2}{\sqrt{n}} < 0.005$$

$$\sqrt{n} > \frac{2}{0.005}$$

$$n > \left(\frac{2}{0.005}\right)^2 = 400^2 = 160{,}000$$

■

Revisión de conceptos

1. Una serie de términos no negativos converge si y sólo si sus sumas parciales son _____.

2. El criterio de la integral relaciona la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$, suponiendo que $a_k =$ _____ y que f es _____, _____ y _____en $[1, \infty)$.

3. La inserción o eliminación de un número finito de términos en una serie no afecta su _____, aunque puede afectar su suma.

4. La serie p $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k^p)$ converge si y sólo si _____.

Conjunto de problemas 9.3

Use el criterio de la integral para determinar la convergencia o divergencia de cada una de las siguientes series.

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+3}$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2k-3}$

3. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k^2+3}$

4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2k^2+1}$

5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{\sqrt{k+2}}$

6. $\sum_{k=100}^{\infty} \frac{3}{(k+2)^2}$

7. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{7}{4k+2}$

8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{e^k}$

9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{(4+3k)^{7/6}}$

10. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1000k^2}{1+k^3}$

11. $\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-3k^2}$

12. $\sum_{k=5}^{\infty} \frac{1000}{k(\ln k)^2}$

En los problemas del 13 al 22 use cualquiera de los criterios desarrollados hasta ahora, entre ellos los de la sección 9.2, para decidir acerca de la convergencia o divergencia de la serie. Justifique su conclusión.

13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^2+5}$

14. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{\pi}\right)^k$

15. $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{k-1}{2k+1}\right]$

16. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{2^k}\right)$

17. $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right)$

18. $\sum_{k=1}^{\infty} k \operatorname{sen}\frac{1}{k}$

19. $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-k^3}$

20. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

21. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} k}{1+k^2}$

22. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+4k^2}$

En los problemas del 23 al 26 estime el error cometido al aproximar la suma de la serie dada mediante la suma de los cinco primeros términos (véase el ejemplo 5).

23. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^k}$

24. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$

25. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}$

26. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

Para las series dadas en los problemas del 27 al 32 determine qué tan grande debe ser n, de modo que al utilizar la n-ésima suma parcial para aproximar la serie proporcione un error de no más de 0.0002.

27. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

28. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$

29. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}$

30. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^{k^2}}$

31. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{1+k^4}$

32. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

33. ¿Para qué valores de p converge $\sum_{n=2}^{\infty} 1/[n(\ln n)^p]$? Explique.

34. ¿Converge o diverge la serie $\sum_{n=3}^{\infty} 1/[n \cdot \ln n \cdot \ln(\ln n)]$ Explique.

35. Use diagramas, como en la figura 1, para demostrar que

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n$$

Sugerencia: $\int_1^n (1/x)\,dx = \ln n$.

36. Use el problema 35 para demostrar que la sucesión

$$B_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$$

es creciente y está acotada superiormente por 1.

37. Use el resultado del problema 35 para demostrar que $\lim_{n\to\infty} B_n$ en el problema 36 existe. (El límite, denotado como γ, se llama **constante de Euler** y es aproximadamente 0.5772. En la actualidad, no se sabe si γ es racional o irracional. Sin embargo, se sabe que *si* γ fuese racional, entonces el denominador en su mínima expresión sería al menos $10^{244.663}$).

38. Use el problema 35 para obtener cotas superior e inferior buenas para la suma de los primeros 10 millones de términos de la serie armónica.

39. Del problema 37 podemos inferir que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \approx \gamma + \ln(n+1)$$

Use esto para estimar el número de términos de la serie armónica necesarios para obtener una suma mayor que 20 y compare con el resultado indicado en el problema 44 de la sección 9.2.

40. Ahora que hemos mostrado la existencia de la constante de Euler siguiendo el camino difícil (problemas 35 a 37), resolveremos un problema mucho más general de manera sencilla y veremos cómo surge γ de la nada, por así decirlo. Sea f continua y decreciente en $[1, \infty)$ y sea

$$B_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) - \int_1^{n+1} f(x)\,dx$$

Observe que B_n es el área de la región sombreada de la figura 3.

(a) ¿Por qué es obvio que B_n crece con n?

(b) Demuestre que $B_n \le f(1)$. *Sugerencia*: simplemente recorra todos los pequeños pedazos sombreados hacia la izquierda, dentro del primer rectángulo.

(c) Concluya que $\lim_{n\to\infty} B_n$ existe.

(d) ¿Cómo obtenemos γ a partir de esto?

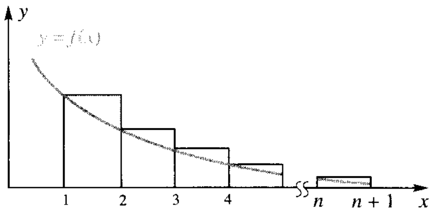


Figura 3

41. Sea f continua, creciente y cóncava hacia abajo en $[1, \infty)$, como en la figura 4. Además, sea A_n el área de la región sombreada. Demuestre que A_n es creciente con n, que $A_n \le T$, donde T es el área del triángulo resaltado, y así que $\lim_{n\to\infty} A_n$ existe.

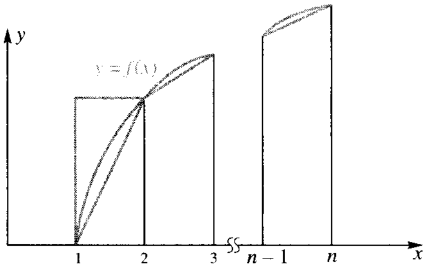


Figura 4

42. Particularice la función del problema 41 a $f(x) = \ln x$.

(a) Demuestre que

$$\begin{aligned} A_n &= \int_1^n \ln x\,dx - \left[\frac{\ln 1 + \ln 2}{2} + \cdots + \frac{\ln(n-1) + \ln n}{2}\right] \\ &= n \ln n - n + 1 - \ln n! + \ln\sqrt{n} \\ &= 1 + \ln\frac{(n/e)^n\sqrt{n}}{n!} \end{aligned}$$

(b) Concluya de la parte (a) y el problema 41 que

$$k = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n/e)^n\sqrt{n}}$$

existe. Se puede demostrar que $k = \sqrt{2\pi}$.

(c) Esto significa que $n! \approx \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$, que se llama **fórmula de Stirling**. Use esto para aproximar 15! y compare con el valor que da su calculadora para 15!

43. Demuestre que el error cometido al aproximar S mediante S_n satisface

$$E_n \ge \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx$$

en donde la notación es la misma que en el análisis que precede al ejemplo 5.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** acotada superiormente **2.** $f(k)$; continua; positiva; no creciente **3.** convergencia o divergencia **4.** $p > 1$

9.4

Series positivas: otros criterios

Hemos analizado por completo la convergencia y divergencia de dos series, la geométrica y la serie p.

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \quad \text{converge si } -1 < r < 1 \text{, en otro caso diverge}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \text{converge si } p > 1, \text{ en otro caso diverge}$$

En el primer caso vimos en dónde convergía la serie, si ésta converge; en el segundo caso no. Estas series proporcionan estándares, o modelos, con los que podemos comparar otras series. Recuerde que seguimos considerando series cuyos términos son positivos (o al menos no negativos).

Comparación de una serie con otra Una serie con términos menores que los términos correspondientes de una serie convergente debe converger; una serie con términos mayores que los términos correspondientes de una serie divergente debe divergir. Lo que debe ser cierto, es cierto.

Teorema A **Criterio de comparación ordinaria**

Suponga que $0 \le a_n \le b_n$ para $n \ge N$.

(i) Si Σb_n converge, también lo hará Σa_n.

(ii) Si Σa_n diverge, también lo hará Σb_n.

Demostración Suponga que $N = 1$; el caso $N > 1$ sólo es un poco más difícil. Para demostrar (i), sea $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ y observe que $\{S_n\}$ es una sucesión no decreciente. Si Σb_n converge, por ejemplo, con suma B, entonces

$$S_n \le b_1 + b_2 + \cdots + b_n \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

Por el criterio de la suma acotada (teorema 9.3A), Σa_n converge.

La propiedad (ii) es consecuencia de (i), ya que si Σb_n converge, entonces Σa_n, tendría que converger. ■

EJEMPLO 1 ¿Converge o diverge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n^2 - 4}$?

SOLUCIÓN Podríamos pensar que diverge, pues el n-ésimo término se comporta como $1/5n$ para n grande. De hecho,

$$\frac{n}{5n^2 - 4} > \frac{n}{5n^2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{n}$$

Sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{n}$ diverge, pues es un quinto de la serie armónica (teorema 9.2C). Así, por el criterio de comparación ordinaria, la serie dada también diverge. ■

EJEMPLO 2 ¿Converge o diverge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(n + 1)}$?

SOLUCIÓN Podríamos pensar que converge, pues el n-ésimo término se comporta como $(1/2)^n$ para n grande. Para justificar esto, observemos que

$$\frac{n}{2^n(n + 1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{n}{n + 1} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Como $\Sigma\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge (es una serie geométrica con $r = \frac{1}{2}$, concluimos que la serie dada converge. ■

Si hay un problema al aplicar el criterio de comparación ordinaria, éste surge al buscar la serie adecuada con la cual comparar la serie en cuestión. Suponga que queremos determinar la convergencia o divergencia de

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n - 2)^2} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 4}$$

Sospechamos que converge, de modo que nos inclinamos por comparar $1/(n-2)^2$ con $1/n^2$. Por desgracia,

$$\frac{1}{(n-2)^2} > \frac{1}{n^2}$$

que no sirve (la desigualdad está en sentido contrario al deseado). Después de unos cuantos experimentos, vemos que

$$\frac{1}{(n-2)^2} \leq \frac{9}{n^2}$$

para $n \geq 3$; como $\Sigma 9/n^2$ converge, también lo hace $\Sigma 1/(n-2)^2$.

¿Podemos evitar estas contorsiones con las desigualdades? Nuestra intuición nos dice que Σa_n y Σb_n convergen o divergen juntas, siempre que a_n y b_n tengan aproximadamente el mismo tamaño para n grande (salvo una constante multiplicativa). Éste es el contenido esencial de nuestro siguiente teorema.

Teorema B Criterio de comparación del límite

Suponga que $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ y que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

Si $0 < L < \infty$, entonces Σa_n y Σb_n convergen o divergen juntas. Si $L = 0$ y Σb_n converge, entonces Σa_n converge.

Demostración Primero consideramos $\varepsilon = L/2$ en la definición de límite de una sucesión (sección 9.1). Existe un número N tal que $n \geq N \Rightarrow |(a_n/b_n) - L| < L/2$; es decir,

$$-\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} - L < \frac{L}{2}$$

Esta desigualdad es equivalente (sumando L) a

$$\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2}$$

Por lo tanto, para $n \geq N$,

$$b_n < \frac{2}{L}a_n \quad \text{y} \quad a_n < \frac{3L}{2}b_n$$

Estas dos desigualdades, junto con el criterio de comparación ordinaria, muestran que Σa_n y Σb_n convergen o divergen juntas. Dejaremos la demostración de la última afirmación del teorema al lector (problema 37). ■

EJEMPLO 3 Determine la convergencia o divergencia de cada serie.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n^3-2n^2+11}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+19n}}$

SOLUCIÓN Aplicamos el criterio de comparación del límite; no obstante, debemos decidir con qué comparamos el n-ésimo término. Vemos a qué se parece este término para n grande al observar los términos de mayor grado en el numerador y el denominador. En el primer caso, el n-ésimo término es como $3/n^2$, en el segundo es como $1/n$.

(a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n-2)/(n^3-2n^2+11)}{3/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3-2n^2}{3n^3-6n^2+33} = 1$$

(b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/\sqrt{n^2+19n}}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^2+19n}} = 1$$

Como $\Sigma 3/n^2$ converge y $\Sigma 1/n$ diverge, concluimos que la serie en (a) converge y la serie en (b) diverge. ■

EJEMPLO 4 ¿Converge o diverge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$?

SOLUCIÓN ¿Contra qué debemos comparar $(\ln n)/n^2$? Si intentamos con $1/n^2$, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2} \div \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \ln n = \infty$$

El criterio falla, no se cumplen sus condiciones. Por otro lado, si usamos $1/n$, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2} \div \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

De nuevo, el criterio falla. Tal vez algo entre $1/n^2$ y $1/n$ funcione, tal como $1/n^{3/2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2} \div \frac{1}{n^{3/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$$

(La última igualdad es consecuencia de la regla de L'Hôpital). Concluimos de la segunda parte del criterio de comparación del límite que $\Sigma(\ln n)/n^2$ converge (pues $\Sigma 1/n^{3/2}$ converge por el criterio de la serie p). ■

Comparación de una serie con ella misma La obtención de resultados útiles mediante los criterios de comparación requiere visión y perseverancia. Debemos elegir adecuadamente una serie conocida para hallar una que sea justamente la correcta para la comparación con la serie que queremos verificar. ¿No sería bueno que se pudiese comparar una serie consigo misma y así determinar la convergencia o la divergencia? A grandes rasgos, esto es lo que hacemos en el criterio del cociente.

Teorema C Criterio del cociente

Sea Σa_n una serie de términos positivos y supóngase que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$$

(i) Si $\rho < 1$, la serie converge.
(ii) Si $\rho > 1$ o si $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \infty$, la serie diverge.
(iii) Si $\rho = 1$, el criterio no es concluyente.

Demostración He aquí lo que está detrás del criterio del cociente. Como $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \rho$, $a_{n+1} \approx \rho a_n$; es decir, la serie se comporta como una serie geométrica con razón ρ. Una serie geométrica converge cuando su razón es menor que 1 y diverge cuando su razón es mayor que 1. Nuestra tarea consiste en unir estos argumentos.

(i) Como $\rho < 1$, podemos elegir un número r tal que $\rho < r < 1$; por ejemplo, $r = (\rho + 1)/2$. A continuación elegimos N de modo que $n \geq N$ implica $a_{n+1}/a_n < r$. (Podemos hacer esto porque $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \rho < r$).

Entonces

$$\begin{aligned} a_{N+1} &< r a_N \\ a_{N+2} &< r a_{N+1} < r^2 a_N \\ a_{N+3} &< r a_{N+2} < r^3 a_N \\ &\vdots \end{aligned}$$

Como $ra_N + r^2a_N + r^3a_N + \cdots$ es una serie geométrica con $0 < r < 1$, converge. Por el criterio de comparación ordinaria, $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n$ converge, y por lo tanto también lo hace $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

(ii) Como $\rho > 1$, existe un número N tal que $a_{n+1}/a_n > 1$ para toda $n \geq N$. Así,

$$\begin{gathered} a_{N+1} > a_N \\ a_{N+2} > a_{N+1} > a_N \\ \vdots \end{gathered}$$

Por lo tanto, $a_n > a_N > 0$ para toda $n > N$, lo cual significa que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ no puede anularse. Por el criterio del n–ésimo término para la divergencia, Σa_n diverge.

(iii) Sabemos que $\Sigma 1/n$ diverge, mientras que $\Sigma 1/n^2$ converge. Para la primera serie,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \div \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Para la segunda serie,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \div \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

Así, el criterio del cociente no distingue entre la convergencia y la divergencia cuando $\rho = 1$. ■

El criterio del cociente nunca será concluyente para una serie cuyo n–ésimo término sea una expresión racional en n, pues en este caso $\rho = 1$ (los casos $a_n = 1/n$ y $a_n = 1/n^2$ fueron considerados antes). Sin embargo, para una serie cuyo n-ésimo término implica $n!$ o r^n, el criterio del cociente trabaja muy bien en general.

EJEMPLO 5 Verifique la convergencia o divergencia de la serie: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

SOLUCIÓN

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0$$

Con base en el criterio del cociente concluimos que la serie converge. ■

EJEMPLO 6 Verifique la convergencia o divergencia de la serie: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{20}}$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^{20}} \frac{n^{20}}{2^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{20} \cdot 2 = 2 \end{aligned}$$

Concluimos que la serie dada diverge. ■

EJEMPLO 7 Verifique la convergencia o divergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

SOLUCIÓN Debemos usar el hecho de que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h} = e$$

lo cual es consecuencia del teorema 6.5A. Suponiendo esto, podemos escribir

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{((n+1)/n)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+1/n)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

Por lo tanto, la serie dada converge. ■

Resumen Para verificar la convergencia o divergencia de una serie Σa_n con términos positivos, observe con cuidado a_n.

1. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, concluya del criterio del n-ésimo término que la serie diverge.
2. Si a_n incluye $n!$, r^n o n^n, trate de usar el criterio del cociente.
3. Si a_n incluye sólo potencias constantes de n, trate de usar el criterio de comparación del límite. En particular, si a_n es una expresión racional en n, use este criterio con b_n como el cociente de los términos principales del numerador y el denominador.
4. Si los criterios anteriores no funcionan, trate con el criterio de comparación ordinaria, el criterio de la integral o el criterio de la suma acotada.
5. Algunas series exigen un manejo inteligente o un truco para determinar su convergencia o divergencia.

Revisión de conceptos

1. El criterio de comparación ordinaria dice que si ____ y si Σb_k converge, entonces también Σa_k converge.

2. Suponga que $a_k \geq 0$ y $b_k > 0$. El criterio de comparación del límite nos dice que si $0 <$ ____ $< \infty$, entonces Σa_k y Σb_k convergen o divergen a la vez.

3. Sea $\rho = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$. El criterio del cociente dice que una serie Σa_k de términos positivos converge si ______, diverge si ______, y puede hacer cualquiera de éstas si ______.

4. $\Sigma(3^k/k!)$ es un candidato obvio para el criterio _____, mientras que $\Sigma k/(k^3 - k - 1)$ es un candidato obvio para el criterio ______.

Conjunto de problemas 9.4

En los problemas 1 al 4 utilice el criterio de comparación del límite para determinar la convergencia o divergencia.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+2n+3}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n^3-4}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+1}}{n^2}$

En los problemas 5 al 10 use el criterio del cociente para determinar la convergencia o divergencia.

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{n!}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{100}}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\tfrac{1}{3}\right)^n$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(2n)!}$

10. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k+k}{k!}$

En los problemas 11 al 34 determine la convergencia o divergencia de cada una de las series. Indique el criterio utilizado.

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+200}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5+n}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^2\sqrt{n}}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n^2+1}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{2^n}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^3+3n}{n^5-4n^2+1}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{3^n}$

19. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots$

Sugerencia: $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$.

20. $\frac{1}{2^2}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{4^2}+\frac{4}{5^2}+\cdots$

21. $\frac{2}{1\cdot 3\cdot 4}+\frac{3}{2\cdot 4\cdot 5}+\frac{4}{3\cdot 5\cdot 6}+\frac{5}{4\cdot 6\cdot 7}+\cdots$

22. $\frac{1}{1^2+1}+\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^2+1}+\frac{4}{4^2+1}+\cdots$

23. $\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\cdots$ **24.** $3+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\frac{3^4}{4!}+\cdots$

25. $1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{4}}+\cdots$

26. $\frac{\ln 2}{2^2}+\frac{\ln 3}{3^2}+\frac{\ln 4}{4^2}+\frac{\ln 5}{5^2}+\cdots$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2+\operatorname{sen}^2 n}$ **28.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{3^n+1}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4+\cos n}{n^3}$ **30.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{2n}}{n!}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n)!}$ **32.** $\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

33. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+n}{n!}$ **34.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2+n5^n}$

35. Sea $a_n>0$ y suponga que Σa_n converge. Demuestre que Σa_n^2 converge.

36. Demuestre que $\lim_{n\to\infty}(n!/n^n)=0$ analizando la serie $\Sigma n!/n^n$. *Sugerencia:* ejemplo 7, seguido del criterio del n-ésimo término.

37. Demuestre que si $a_n\geq 0, b_n>0, \lim_{n\to\infty} a_n/b_n=0$ y Σb_n converge, entonces Σa_n converge.

38. Demuestre que si $a_n\geq 0, b_n>0, \lim_{n\to\infty} a_n/b_n=\infty$ y Σb_n diverge, entonces Σa_n diverge.

39. Suponga que $\lim_{n\to\infty} na_n=1$. Demuestre que Σa_n diverge.

40. Demuestre que si Σa_n es una serie convergente con términos positivos, entonces $\Sigma\ln(1+a_n)$ converge.

41. Criterio de la raíz Demuestre que si $a_n>0$ y $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/n}=R$, entonces Σa_n converge si $R<1$ y diverge si $R>1$.

42. Compruebe la convergencia o divergencia mediante el criterio de la raíz.

(a) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln n}\right)^n$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$

43. Compruebe la convergencia o divergencia. En algunos casos, el uso adecuado de las propiedades de los logaritmos simplificará el problema.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ (d) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{[\ln(\ln n)]^{\ln n}}$

(e) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^4}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\ln n}{n}\right]^2$

EXPL **44.** Sean $p(n)$ y $q(n)$ polinomios en n con coeficientes no negativos. Proporcione condiciones sencillas para determinar la convergencia o divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(n)}{q(n)}$.

EXPL **45.** Dé condiciones sobre p que determinen la convergencia o divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\left(1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}\right)$.

46. Compruebe la convergencia o divergencia.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{n}\right)$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\tan\left(\frac{1}{n}\right)$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left[1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]$

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $0\leq a_k\leq b_k$ **2.** $\lim_{k\to\infty}(a_k/b_k)$ **3.** $\rho<1;\rho>1;\rho=1$ **4.** Cociente, comparación del límite.

9.5

Series alternantes, convergencia absoluta y convergencia condicional

En las dos últimas secciones hemos considerado series de términos no negativos. Ahora eliminamos esa restricción, permitiendo que algunos términos sean negativos. En particular, estudiaremos las **series alternantes**; es decir, series de la forma

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots$$

donde $a_n>0$ para toda n. Un ejemplo importante es la **serie armónica alternante**

$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\cdots$$

Ya hemos visto que la serie armónica diverge; pronto veremos que la serie armónica *alternante* converge.

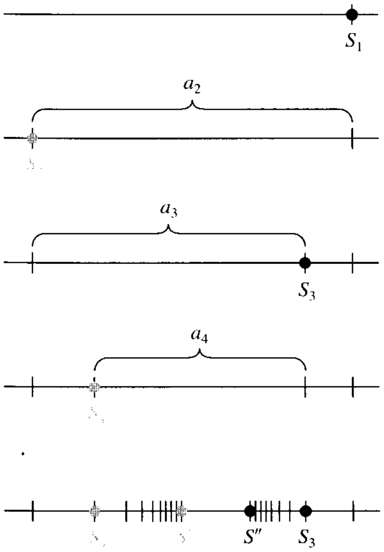


Figura 1

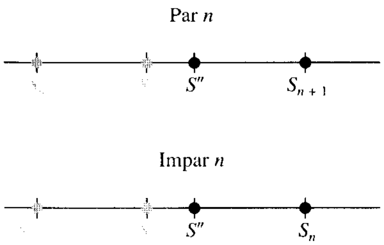


Figura 2

Un criterio de convergencia Supongamos que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente; es decir, $a_{n+1} < a_n$ para toda n. Además, S_n tiene su significado usual. Así, para la serie alternante $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$, tenemos

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 - a_2 = S_1 - a_2 \\ S_3 &= a_1 - a_2 + a_3 = S_2 + a_3 \\ S_4 &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = S_3 - a_4 \end{aligned}$$

y así sucesivamente. La figura 1 muestra una interpretación geométrica de estas sumas parciales. Observe que los términos con número par $S_2, S_4, S_6, \ldots$ son crecientes y acotados por arriba, por lo que deben converger a un límite, digamos S'. De manera análoga, los términos con número impar $S_1, S_3, S_5, \ldots$ son decrecientes y acotados por abajo. También deben converger, digamos, a S''.

Tanto S' como S'' están entre S_n y S_{n+1} para toda n (véase la figura 2), de modo que

$$|S'' - S'| \le |S_{n+1} - S_n| = a_{n+1}$$

Así, la condición $a_{n+1} \to 0$ cuando $n \to \infty$ garantizará que $S' = S''$ y, en consecuencia, la convergencia de la serie a su valor común, que llamamos S. Por último, observamos que, como S está entre S_n y S_{n+1},

$$|S - S_n| \le |S_{n+1} - S_n| = a_{n+1}$$

Es decir, el error generado al usar S_n como aproximación de la suma S de toda la serie no es mayor que la magnitud del primer término despreciado. Hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema A **Criterio de la serie alternante**

Sea

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

una serie alternante con $a_n > a_{n+1} > 0$. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces la serie converge. Además, el error cometido al usar la suma S_n de los primeros n términos para aproximar la suma S de la serie no es mayor que a_{n+1}.

EJEMPLO 1 Demuestre que la serie armónica alternante

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots$$

converge. ¿Cuántos términos de esta serie se necesitan para obtener una suma parcial S_n a menos de 0.01 de la suma S de toda la serie?

SOLUCIÓN La serie armónica alternante satisface las hipótesis del teorema A y por lo tanto converge. Queremos que $|S - S_n| \le 0.01$, y esto se cumplirá si $a_{n+1} \le 0.01$. Como $a_{n+1} = 1/(n+1)$, necesitamos que $1/(n+1) \le 0.01$, lo que se satisface si $n \ge 99$. Así, necesitamos considerar 99 términos para garantizar que tenemos la precisión deseada. Esto le dará una idea de lo lento que converge la serie armónica alternante. (Véase el problema 45, donde se muestra una forma inteligente de determinar la suma exacta de esta serie). ■

EJEMPLO 2 Demuestre que

$$\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots$$

converge. Calcule S_5 y estime el error cometido al usar esto como un valor para la suma de toda la serie.

SOLUCIÓN El criterio para series alternantes (teorema A) se aplica y garantiza la convergencia.

$$S_5 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} \approx 0.6333$$

$$|S - S_5| \leq a_6 = \frac{1}{6!} \approx 0.0014$$ ■

EJEMPLO 3 Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{2^n}$ converge.

SOLUCIÓN Para tener una idea de esta serie, escribimos los primeros términos:

$$\tfrac{1}{2} - 1 + \tfrac{9}{8} - 1 + \tfrac{25}{32} - \tfrac{36}{64} + \cdots$$

La serie es alternante y $\lim_{n\to\infty} n^2/2^n = 0$ (regla de L'Hôpital), pero por desgracia, los términos no son decrecientes al principio. Sin embargo, parecen ser decrecientes después de los dos primeros términos; esto es bueno, pues lo que ocurre al inicio de una serie no afecta la convergencia o la divergencia. Para mostrar que la sucesión $\{n^2/2^n\}$ es decreciente a partir del tercer término, consideremos la función

$$f(x) = \frac{x^2}{2^x}$$

Observe que si $x \geq 3$, la derivada

$$f'(x) = \frac{2x \cdot 2^x - x^2 2^x \ln 2}{2^{2x}} = \frac{x2^x(2 - x\ln 2)}{2^{2x}}$$

$$\approx \frac{x(2 - 0.69x)}{2^x} < 0$$

Así, f es decreciente en $[3, \infty)$ y entonces $\{n^2/2^n\}$ es decreciente para $n \geq 3$. Para una demostración distinta de este último hecho, véase el ejemplo 6 de la sección 9.1. ■

Convergencia absoluta

¿Converge o diverge una serie como la siguiente

$$1 + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{25} - \tfrac{1}{36} + \cdots$$

en la que existe un patrón de dos términos positivos seguido de uno negativo? En este caso, el criterio para series alternantes no es aplicable. Sin embargo, como la serie correspondiente de términos positivos

$$1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{36} + \cdots$$

converge (serie p con $p = 2$) parece plausible pensar que la misma serie con algunos términos negativos debería converger (aún mejor). Éste es el contenido de nuestro siguiente teorema.

Teorema B **Criterio de convergencia absoluta**

Si $\Sigma|u_n|$ converge, entonces Σu_n converge.

Demostración Usaremos un truco. Sea $v_n = u_n + |u_n|$, de modo que

$$u_n = v_n - |u_n|$$

Ahora, $0 \leq v_n \leq 2|u_n|$, de modo que el criterio de comparación ordinaria garantiza que Σv_n converge por el criterio de comparación ordinaria. El teorema de linealidad (teorema 9.2B) implica que $\Sigma u_n = \Sigma(v_n - |u_n|)$ converge. ■

Una serie Σu_n se dice que **converge absolutamente** si $\Sigma|u_n|$ converge. El teorema B afirma que la convergencia absoluta implica la convergencia. Todos nuestros criterios para la convergencia de series con términos positivos se convierten automáticamente en criterios para la convergencia absoluta de una serie con algunos términos negativos. En particular, esto es cierto para el criterio del cociente, que reformulamos a continuación.

Teorema C **Criterio del cociente absoluto**

Sea Σu_n una serie de términos no nulos y suponga que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \rho$$

(i) Si $\rho < 1$, la serie converge absolutamente (y por lo tanto converge).

(ii) Si $\rho > 1$, la serie diverge.

(iii) Si $\rho = 1$, el criterio no es concluyente.

Demostración Las demostraciones de (i) y (iii) son consecuencia directa del criterio del cociente. Para (ii) podríamos concluir del criterio del cociente original que $\Sigma|u_n|$ diverge, pero aquí estamos afirmando algo más, que Σu_n diverge. Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} > 1$$

se deduce que para n suficientemente grande, digamos $n \geq N$, $|u_{n+1}| > |u_n|$. Esto, a su vez, implica que $|u_n| > |u_N| > 0$ para toda $n \geq N$, de modo que $\lim_{n\to\infty} u_n$ no puede ser 0. Concluimos mediante el criterio del n-ésimo término que Σu_n diverge. ■

EJEMPLO 4 Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{n!}$ converge absolutamente.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \div \frac{3^n}{n!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0\end{aligned}$$

Con base en el criterio del cociente absoluto concluimos que la serie converge absolutamente (y por lo tanto converge). ■

EJEMPLO 5 Compruebe la convergencia o divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n!)}{n^2}$.

SOLUCIÓN Si usted escribe los primeros 100 términos de esta serie, descubrirá que los signos de los términos varían de una manera un tanto aleatoria. De hecho, es difícil analizar directamente esta serie. Sin embargo,

$$\left|\frac{\cos(n!)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

de modo que la serie converge absolutamente por el criterio de comparación ordinaria. Del criterio de convergencia absoluta (teorema B) concluimos que la serie converge. ■

Convergencia condicional Un error común consiste en dar la vuelta al teorema B. Éste *no* dice que la convergencia implique la convergencia absoluta. Es claro que esto es falso; basta observar la serie armónica alternante. Sabemos que

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots$$

converge, pero que

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots$$

diverge. Una serie Σu_n se denomina **condicionalmente convergente** si Σu_n converge pero $\Sigma |u_n|$ diverge. La serie armónica alternante es el primer ejemplo de una serie condicionalmente convergente, pero hay muchas otras.

EJEMPLO 6 Demuestre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ es condicionalmente convergente.

SOLUCIÓN $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}[1/\sqrt{n}\,]$ converge por el criterio para series alternantes. Sin embargo, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ diverge, pues es una serie p con $p = \frac{1}{2}$. ■

Las series absolutamente convergentes se comportan mucho mejor que las condicionalmente convergentes. He aquí un bonito teorema acerca de series absolutamente convergentes. Es espectacularmente falso para series condicionalmente convergentes (véanse los problemas del 35 al 38). La demostración es difícil, de modo que no la incluiremos aquí.

Teorema D **Teorema de reordenamiento**

Los términos de una serie absolutamente convergente pueden reordenarse sin afectar la convergencia o la suma de la serie.

Por ejemplo, la serie

$$1 + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{25} - \tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{49} + \tfrac{1}{64} - \tfrac{1}{81} + \cdots$$

converge absolutamente. El reordenamiento

$$1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} - \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{49} + \tfrac{1}{64} - \tfrac{1}{36} + \cdots$$

converge y tiene la misma suma que la serie original.

Revisión de conceptos

1. Si $a_n \geq 0$ para toda n, la serie alternante $a_1 - a_2 + a_3 - \cdots$ convergerá siempre que el tamaño de los términos decrezca y _____.

2. Si $\Sigma|u_k|$ converge, decimos que la serie Σu_k converge _____; si Σu_k converge, pero $\Sigma|u_k|$ diverge, decimos que Σu_k converge_____.

3. El primer ejemplo de una serie condicionalmente convergente es ____.

4. Los términos de una serie absolutamente convergente pueden _____sin afectar su convergencia o su suma.

Conjunto de problemas 9.5

En los problemas del 1 al 6 demuestre que cada serie alternante converge y luego estime el error cometido al usar la suma parcial S_9 como una aproximación a la suma S de la serie (véanse los ejemplos del 1 al 3).

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{3n + 1}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n + 1)}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2 + 1}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

En los problemas del 7 al 12 demuestre que cada serie converge absolutamente.

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\tfrac{3}{4}\right)^n$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{e^n}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(n + 1)}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n!}$

En los problemas del 13 al 30 clasifique cada serie como absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{5n}$ **14.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{5n^{1.1}}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{10n+1}$ **16.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{10n^{1.1}+1}$

17. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n\ln n}$ **18.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(1+\sqrt{n})}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^4}{2^n}$ **20.** $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$ **22.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n-1}{n}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}$ **24.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n^2}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\operatorname{sen} n}{n\sqrt{n}}$ **26.** $\sum_{n=1}^{\infty}n\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ **28.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n+1}}{n^2}$ **30.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}$

31. Demuestre que si Σa_n diverge, también lo hace $\Sigma|a_n|$.

32. Dé un ejemplo de dos series Σa_n y Σb_n, ambas convergentes, tales que $\Sigma a_n b_n$ diverja.

33. Demuestre que los términos positivos de la serie armónica alternante forman una serie divergente. Demuestre lo mismo para los términos negativos.

34. Demuestre que los resultados del problema 33 se cumplen para cualquier serie condicionalmente convergente.

35. Demuestre que la serie armónica alternante

$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}+\cdots$$

(cuya suma real es $\ln 2\approx 0.69$) se puede reordenar para converger a 1.3, mediante los siguientes pasos.

(a) Considere una cantidad suficiente de términos positivos $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots$ para exceder apenas a 1.3.

(b) Ahora sume una cantidad suficiente de términos negativos $-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\cdots$ de modo que la suma parcial S_n quede justo debajo de 1.3.

(c) Sume de nuevo un número suficiente de términos positivos para exceder 1.3, y así sucesivamente.

$\boxed{C}$ **36.** Use su calculadora como ayuda para encontrar los 20 primeros términos de la serie descrita en el problema 35. Calcule S_{20}.

37. Explique por qué una serie condicionalmente convergente puede reordenarse para converger a cualquier número dado.

38. Demuestre que una serie condicionalmente convergente se puede reordenar, de modo que diverja.

39. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ no es suficiente para garantizar la convergencia de la serie alternante $\Sigma(-1)^{n+1}a_n$. *Sugerencia:* alterne los términos de $\Sigma 1/n$ y $\Sigma(-1/n^2)$.

40. Analice la convergencia o divergencia de

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}+\cdots$$

41. Demuestre que si $\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2$ y $\sum_{k=1}^{\infty}b_k^2$ convergen, entonces $\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k$ converge absolutamente. *Sugerencia*: primero demuestre que $2|a_kb_k|\le a_k^2+b_k^2$.

42. Bosqueje la gráfica de $y=(\operatorname{sen} x)/x$ y luego demuestre que $\int_0^{\infty}(\operatorname{sen} x)/x\,dx$ converge.

43. Demuestre que $\int_0^{\infty}|\operatorname{sen} x|/x\,dx$ diverge.

44. Demuestre que la gráfica de $y=x\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}$ en $(0,1]$ tiene longitud infinita.

45. Observe que

$$\begin{aligned}1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n}&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\end{aligned}$$

Reconozca la última expresión como una suma de Riemann y utilícela para determinar la suma de la serie armónica alternante.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ **2.** absolutamente; condicionalmente **3.** la serie armónica alternante **4.** reordenarse

---

9.6
Series de potencias

Hasta ahora hemos estudiado lo que podría llamarse *series de constantes*, es decir, series de la forma Σu_n donde cada u_n es un número. Ahora estudiaremos las *series de funciones*, series de la forma $\Sigma u_n(x)$. Un ejemplo típico de esta clase de series es

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}=\frac{\operatorname{sen} x}{1}+\frac{\operatorname{sen} 2x}{4}+\frac{\operatorname{sen} 3x}{9}+\cdots$$

Por supuesto, en cuanto sustituimos un valor de x (como $x=2.1$), regresamos a territorio familiar; tenemos una serie de constantes.

Hay dos preguntas importantes en cuanto a una serie de funciones.

1. ¿Para qué valores de x converge la serie?
2. ¿A qué función converge? Es decir, ¿cuál es la suma $S(x)$ de la serie?

Serie de Fourier

La serie de funciones seno mencionada en la introducción es un ejemplo de una *serie de Fourier*, llamada así en honor de Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830). Las series de Fourier son de gran importancia en el estudio de fenómenos de ondas, ya que estas series nos permiten representar una onda complicada como una suma de sus componentes fundamentales (denominados tonos puros en el caso de ondas de sonido). Es un amplio campo, que dejamos para otros autores y otros libros.

La situación general es un tema propio de un curso de cálculo avanzado. Sin embargo, incluso en el cálculo elemental podemos aprender mucho en el caso particular de una serie de potencias. Una **serie de potencias en *x*** tiene la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

(Aquí interpretamos $a_0 x^0$ como a_0 incluso cuando $x = 0$). Podemos responder de inmediato nuestras dos preguntas en el caso de una serie de potencias.

EJEMPLO 1 ¿Para qué valores de x la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = a + ax + ax^2 + ax^3 + \cdots$$

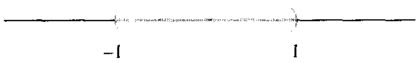
converge y cuál es su suma? Suponga que $a \neq 0$.

SOLUCIÓN En realidad, estudiamos esta serie en la sección 9.2 (con r en vez de x) y la llamamos una serie geométrica. Converge para $-1 < x < 1$ y tiene suma $S(x)$ dada por

$$S(x) = \frac{a}{1 - x}, \qquad -1 < x < 1$$

■

El conjunto de convergencia Llamamos al conjunto donde una serie de potencias converge su **conjunto de convergencia**. ¿Qué tipo de conjunto puede ser el conjunto de convergencia? El ejemplo 1 sugiere que puede ser un intervalo abierto (véase la figura 1). ¿Hay otras posibilidades?



Conjunto de convergencia

Figura 1

EJEMPLO 2 ¿Cuál es el conjunto de convergencia para

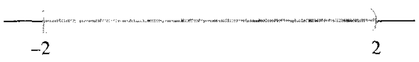
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n} = 1 + \frac{1}{2}\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\frac{x^2}{2^2} + \frac{1}{4}\frac{x^3}{2^3} + \cdots$$

SOLUCIÓN Observe que algunos de los términos pueden ser negativos (si x es un número negativo). Comprobemos la convergencia absoluta mediante el criterio del cociente absoluto (teorema 9.5C).

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+2)2^{n+1}} \div \frac{x^n}{(n+1)2^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{2} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{|x|}{2}$$

La serie converge absolutamente (y por lo tanto converge) cuando $\rho = |x|/2 < 1$ y diverge cuando $|x|/2 > 1$. En consecuencia, converge cuando $|x| < 2$ y diverge cuando $|x| > 2$.

Si $x = 2$ o $x = -2$, el criterio del cociente falla. Sin embargo, cuando $x = 2$, la serie es armónica, la cual diverge; y cuando $x = -2$, es la serie armónica alternante, la cual converge. Concluimos que el conjunto de convergencia para la serie dada es el intervalo $-2 \le x < 2$ (figura 2). ■



Conjunto de convergencia

Figura 2

EJEMPLO 3 Determine el conjunto de convergencia para $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

SOLUCIÓN

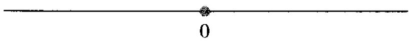
$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \div \frac{x^n}{n!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$$

Con base en el criterio del cociente absoluto concluimos que la serie converge para toda x (véase la figura 3). ■

Conjunto de convergencia

Figura 3

EJEMPLO 4 Determine el conjunto de convergencia para $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$.



Conjunto de convergencia

Figura 4

SOLUCIÓN

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1)|x| = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \infty & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Concluimos que la serie sólo converge en $x = 0$ (véase la figura 4). ■

En cada uno de nuestros ejemplos, el conjunto de convergencia fue un intervalo (un intervalo degenerado en el último ejemplo). Esto siempre ocurre. Por ejemplo, es imposible que una serie de potencias tenga un conjunto de convergencia que conste de dos partes disconexas (como $[0, 1] \cup [2, 3]$). Nuestro siguiente teorema nos cuenta toda la historia

Teorema A

El conjunto de convergencia para una serie de potencias $\Sigma a_n x^n$ siempre es un intervalo de uno de los tres tipos siguientes:

(i) El único punto $x = 0$.
(ii) Un intervalo $(-R, R)$, incluyendo uno o ambos extremos.
(iii) Toda la recta real.

En (i), (ii) y (iii) se dice la serie que tiene radio de convergencia 0, R, e ∞, respectivamente.

Demostración Suponga que la serie converge en $x = x_1 \neq 0$. Entonces $\lim_{n\to\infty} a_n x_1^n = 0$, de modo que existe un número N tal que $|a_n x_1^n| < 1$ para $n \geq N$. Entonces, para cualquier x tal que $|x| < |x_1|$,

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n|\left|\frac{x}{x_1}\right|^n < \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$$

lo cual se cumple para $n \geq N$. Ahora, $\Sigma|x/x_1|^n$ converge, pues es una serie geométrica con razón menor que 1. Así, por el criterio de comparación ordinaria (teorema 9.4A), $\Sigma|a_n x^n|$ converge. Hemos demostrado que si una serie de potencias converge en x_1 entonces converge (absolutamente) para cada x, tal que $|x| < |x_1|$.

Por otro lado, suponga que una serie de potencias diverge en x_2. Entonces debe divergir para cada x tal que $|x| > |x_2|$. Ya que si convergiese en x_1 tal que $|x_1| > |x_2|$, entonces, por lo que mostramos antes, convergería en x_2, contrario a la hipótesis.

Estos dos párrafos eliminan todos los tipos posibles de conjuntos de convergencia, excepto los tres tipos mencionados en el teorema. ■

En realidad hemos demostrado algo ligeramente más que lo que afirmamos en el teorema A, y es importante establecerlo como otro teorema.

Teorema B

Una serie de potencias $\Sigma a_n x^n$ converge absolutamente en el interior de su intervalo de convergencia.

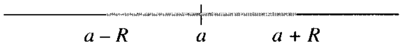
Por supuesto, la serie podría converger absolutamente en los extremos del intervalo de convergencia, pero eso no podemos garantizarlo; revise el ejemplo 2.

Series de potencia en $x - a$

Una serie de la forma

$$\sum a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots$$

se denomina **serie de potencia en $x - a$**. Todo lo que hemos dicho acerca de las series de potencias en x se aplica de la misma forma a series en $x - a$. En particular, su conjunto de convergencia siempre es una de las siguientes clases de intervalos:



Conjunto de convergencia

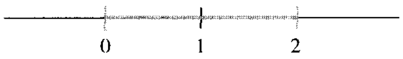
Figura 5

1. El único punto $x = a$.
2. Un intervalo $(a - R, a + R)$, incluyendo, posiblemente, uno o ambos puntos extremos (figura 5).
3. Toda la recta real.

EJEMPLO 5 Determine el conjunto de convergencia para $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)^2}$.

SOLUCIÓN Aplicamos el criterio del cociente absoluto.

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+2)^2} \div \frac{(x-1)^n}{(n+1)^2}\right| = \lim_{n\to\infty}|x-1|\frac{(n+1)^2}{(n+2)^2}$$
$$= |x-1|$$



Conjunto de convergencia

Figura 6

Así, la serie converge si $|x - 1| < 1$; es decir, si $0 < x < 2$; diverge si $|x - 1| > 1$. También converge (incluso absolutamente) en ambos extremos 0 y 2, como podemos ver al sustituir estos valores. El conjunto de convergencia es el intervalo cerrado $[0, 2]$ (figura 6). ■

EJEMPLO 6 Determine el conjunto de convergencia de

$$\frac{(x+2)^2 \ln 2}{2\cdot 9} + \frac{(x+2)^3 \ln 3}{3\cdot 27} + \frac{(x+2)^4 \ln 4}{4\cdot 81} + \cdots$$

SOLUCIÓN El término n-ésimo es $u_n = \frac{(x+2)^n \ln n}{n\cdot 3^n}$, $n \geq 2$. Así que,

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+2)^{n+1}\ln(n+1)}{(n+1)3^{n+1}}\cdot\frac{n3^n}{(x+2)^n \ln n}\right|$$
$$= \frac{|x+2|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\,\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{|x+2|}{3}$$

Sabemos que la serie converge cuando $\rho < 1$, esto es, cuando $|x + 2| < 3$, o de forma equivalente, $-5 < x < 1$, pero debemos verificar los puntos extremos -5 y 1.

En $x = -5$,

$$u_n = \frac{(-3)^n \ln n}{n3^n} = (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$

y $\Sigma(-1)^n(\ln n)/n$ converge por el criterio de la serie alternante.

En $x = 1$, $u_n = (\ln n)/n$ y $\Sigma(\ln n)/n$ diverge por comparación con la serie armónica.

Concluimos que la serie dada converge en el intervalo $-5 \leq x < 1$. ■

Revisión de conceptos

1. Una serie de la forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ se denomina _____.

2. En lugar de preguntar si una serie de potencias converge, debemos preguntar _____.

3. Una serie de potencias siempre converge en un(a) _____ que puede o no incluir a _____.

4. La serie $5 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ converge en el intervalo _____.

Conjunto de problemas 9.6

En los problemas del 1 al 8 determine el conjunto de convergencia de la serie de potencias dada.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n}\frac{x^n}{n}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n}\frac{(x-2)^n}{n}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!}$

En los problemas del 9 al 28 determine el conjunto de convergencia para la serie de potencias dada. Sugerencia: *primero encuentre una fórmula para el término n-ésimo, luego utilice el criterio del cociente absoluto.*

9. $\dfrac{x}{1\cdot 2} - \dfrac{x^2}{2\cdot 3} + \dfrac{x^3}{3\cdot 4} - \dfrac{x^4}{4\cdot 5} + \dfrac{x^5}{5\cdot 6} - \cdots$

10. $1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots$

11. $x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \dfrac{x^9}{9!} - \cdots$

12. $1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \dfrac{x^8}{8!} - \dfrac{x^{10}}{10!} + \cdots$

13. $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots$

14. $x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + 4^2x^4 + \cdots$

15. $1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} - \cdots$

16. $1 + x + \dfrac{x^2}{\sqrt{2}} + \dfrac{x^3}{\sqrt{3}} + \dfrac{x^4}{\sqrt{4}} + \dfrac{x^5}{\sqrt{5}} + \cdots$

17. $1 - \dfrac{x}{1\cdot 3} + \dfrac{x^2}{2\cdot 4} - \dfrac{x^3}{3\cdot 5} + \dfrac{x^4}{4\cdot 6} - \cdots$

18. $\dfrac{x}{2^2-1} + \dfrac{x^2}{3^2-1} + \dfrac{x^3}{4^2-1} + \dfrac{x^4}{5^2-1} + \cdots$

19. $1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{2^2} - \dfrac{x^3}{2^3} + \dfrac{x^4}{2^4} - \cdots$

20. $1 + 2x + 2^2x^2 + 2^3x^3 + 2^4x^4 + \cdots$

21. $1 + 2x + \dfrac{2^2x^2}{2!} + \dfrac{2^3x^3}{3!} + \dfrac{2^4x^4}{4!} + \cdots$

22. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{2x^2}{3} + \dfrac{3x^3}{4} + \dfrac{4x^4}{5} + \dfrac{5x^5}{6} + \cdots$

23. $\dfrac{x-1}{1} + \dfrac{(x-1)^2}{2} + \dfrac{(x-1)^3}{3} + \dfrac{(x-1)^4}{4} + \cdots$

24. $1 + (x+2) + \dfrac{(x+2)^2}{2!} + \dfrac{(x+2)^3}{3!} + \cdots$

25. $1 + \dfrac{x+1}{2} + \dfrac{(x+1)^2}{2^2} + \dfrac{(x+1)^3}{2^3} + \cdots$

26. $\dfrac{x-2}{1^2} + \dfrac{(x-2)^2}{2^2} + \dfrac{(x-2)^3}{3^2} + \dfrac{(x-2)^4}{4^2} + \cdots$

27. $\dfrac{x+5}{1\cdot 2} + \dfrac{(x+5)^2}{2\cdot 3} + \dfrac{(x+5)^3}{3\cdot 4} + \dfrac{(x+5)^4}{4\cdot 5} + \cdots$

28. $(x+3) - 2(x+3)^2 + 3(x+3)^3 - 4(x+3)^4 + \cdots$

29. Con base en el ejemplo 3, sabemos que $\Sigma x^n/n!$ converge para toda x. ¿Por qué podemos concluir que $\lim\limits_{n\to\infty} x^n/n! = 0$ para toda x?

30. Sea k un número arbitrario y $-1 < x < 1$. Pruebe que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n)}{n!}x^n = 0$$

Sugerencia: véase el problema 29.

31. Determine el radio de convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}x^{2n+1}$$

32. Determine el radio de convergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(pn)!}{(n!)^p}x^n$$

en donde p es un entero positivo.

33. Determine la suma $S(x)$ de $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x-3)^n$. ¿Cuál es el conjunto de convergencia?

34. Suponga que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$ converge en $x = -1$. ¿Por qué podemos concluir que converge en $x = 6$? ¿Podemos asegurar que converge en $x = 7$? Explique.

35. Determine el conjunto de convergencia para cada serie.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^n}{n\cdot 2^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{(2x-3)^n}{4^n\sqrt{n}}$

36. Con respecto al problema 52 de la sección 9.1, en donde se definió la sucesión de Fibonacci $f_1, f_2, f_3, \ldots$ Determine el radio de convergencia de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n x^n$.

37. Suponga que $a_{n+3} = a_n$ y sea $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Demuestre que la serie converge para $|x| < 1$ y proporcione una fórmula para $S(x)$.

38. Siga las instrucciones del problema 37 para el caso en donde $a_{n+p} = a_n$ para algún entero positivo fijo p.

Respuestas a la revisión de conceptos : **1.** serie de potencias **2.** en donde converge **3.** intervalo; puntos extremos **4.** $(-1, 1)$

9.7

Operaciones sobre series de potencias

Por la sección anterior sabemos que el conjunto de convergencia de una serie de potencias $\Sigma a_n x^n$ es un intervalo I. Este intervalo es el dominio de una nueva función $S(x)$, la suma de la serie. La pregunta más obvia acerca de $S(x)$ es si podemos darle una fórmula sencilla. Hemos hecho esto para una serie, una serie geométrica.

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = \frac{a}{1-x}, \qquad -1 < x < 1$$

En realidad, no hay mucha razón en esperar que la suma de una serie de potencias arbitraria sea una de las funciones elementales estudiadas anteriormente en este libro, aunque avanzaremos un poco en esa dirección en esta sección y un poco más en la sección 9.8.

Una mejor pregunta es si podemos decir algo acerca de las propiedades de $S(x)$. Por ejemplo, ¿es diferenciable? ¿Es integrable? La respuesta a ambas preguntas es sí.

Derivación e integración término a término Piense en una serie de potencias como un polinomio con un número infinito de términos. Se comporta como un polinomio bajo la integración y la derivación; estas operaciones se pueden realizar término a término, como sigue.

Teorema A

Suponga que $S(x)$ es la suma de una serie de potencias en un intervalo I; es decir,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

Entonces, si x es interior en I

(i) $$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_x(a_n x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$
$$= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$$

(ii) $$\int_0^x S(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$
$$= a_0 x + \frac{1}{2}a_1 x^2 + \frac{1}{3}a_2 x^3 + \frac{1}{4}a_3 x^4 + \cdots$$

El teorema encierra varios aspectos. Afirma que S es diferenciable e integrable, muestra cómo calcular la derivada y la integral e implica que el radio de convergencia de la serie derivada e integrada es igual al radio de la serie original (aunque no habla acerca de los puntos extremos del intervalo de convergencia). La demostración del teorema es difícil. Dejaremos la demostración para libros más avanzados.

Una consecuencia agradable del teorema A es que podemos aplicarlo a una serie de potencias con una fórmula conocida para la suma, con el fin de obtener fórmulas de suma para otras series.

EJEMPLO 1 Aplique el teorema A a la serie geométrica

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \qquad -1 < x < 1$$

para obtener fórmulas para dos nuevas series.

SOLUCIÓN Al derivar término a término se obtiene

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots, \qquad -1 < x < 1$$

Un resultado acerca de un punto extremo

La cuestión sobre lo que ocurre en un punto extremo del intervalo de convergencia de una serie de potencias es compleja. Un resultado se debe al más grande matemático noruego, Niels Henrik Abel (1802–1829). Suponga que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

para $|x| < R$. Si f es continua en un punto extremo (R o $-R$) y si la serie converge en ese punto, entonces la fórmula también es válida en ese punto extremo.

Al integrar término a término se obtiene

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = \int_0^x 1\,dt + \int_0^x t\,dt + \int_0^x t^2\,dt + \cdots$$

Esto es,

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots, \qquad -1 < x < 1$$

Si reemplazamos x por $-x$ en la última y multiplicamos ambos lados por -1, obtenemos

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \qquad -1 < x < 1}$$

Del problema 45 de la sección 9.5 aprendimos que este resultado es válido en el punto extremo $x = 1$ (también vea la nota al margen). ■

EJEMPLO 2 Determine la representación en serie de potencias para $\tan^{-1} x$.

SOLUCIÓN Recuerde que

$$\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

Con base en la serie geométrica para $1/(1-x)$ con x reemplazada por $-t^2$, obtenemos

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots, \qquad -1 < t < 1$$

Por lo tanto,

$$\tan^{-1} x = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots)\,dt$$

Esto es,

$$\boxed{\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \qquad -1 < x < 1}$$

(Por la nota al margen, esto también se cumple en $x = \pm 1$). ■

EJEMPLO 3 Determine una fórmula para la suma de la serie

$$S(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

SOLUCIÓN Anteriormente vimos (sección 9.6, ejemplo 3) que esta serie converge para toda x. Al derivar término a término, obtenemos

$$S'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Esto es, $S'(x) = S(x)$ para toda x. Además, $S(0) = 1$. Esta ecuación diferencial tiene como única solución $S(x) = e^x$ (véase la sección 6.5). Por lo tanto,

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots}$$

■

EJEMPLO 4 Obtenga la representación en serie de potencias para e^{-x^2}.

SOLUCIÓN Basta con que sustituya $-x^2$ por x en la serie para e^x.

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots \qquad ■$$

Operaciones algebraicas Las series de potencias convergentes pueden sumarse o restarse término a término (teorema 9.2B). En ese sentido se comportan como polinomios. Las series de potencias convergentes también se pueden multiplicar y dividir de una manera sugerida por la multiplicación y división "larga" de polinomios.

EJEMPLO 5 Multiplique y divida la serie de potencias para $\ln(1 + x)$ por la de e^x.

SOLUCIÓN Nos referimos a los ejemplos 1 y 3 para las series necesarias. La clave de la multiplicación es encontrar primero el término constante, después el término en x, luego el término en x^2 y así sucesivamente. Ordenamos nuestro trabajo como sigue

$$\begin{array}{l}
0 + x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots \\[2ex]
1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots \\ \hline
0 + (0 + 1)x + \left(0 + 1 - \dfrac{1}{2}\right)x^2 + \left(0 + \dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\right)x^3 \\
\qquad\qquad\qquad + \left(0 + \dfrac{1}{3!} - \dfrac{1}{2!2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\right)x^4 + \cdots \\
\qquad = 0 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + 0 \cdot x^4 + \cdots
\end{array}$$

He aquí cómo se realiza la división

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & x & -\tfrac{3}{2}x^2 & +\tfrac{4}{3}x^3 & -x^4 & +\cdots \\ \cline{2-6}
1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \cdots\,\big) & x & -\tfrac{1}{2}x^2 & +\tfrac{1}{3}x^3 & -\tfrac{1}{4}x^4 & +\cdots \\
 & x & +x^2 & +\tfrac{1}{2}x^3 & +\tfrac{1}{6}x^4 & +\cdots \\ \cline{2-6}
 & & -\tfrac{3}{2}x^2 & -\tfrac{1}{6}x^3 & -\tfrac{5}{12}x^4 & +\cdots \\
 & & -\tfrac{3}{2}x^2 & -\tfrac{3}{2}x^3 & -\tfrac{3}{4}x^4 & +\cdots \\ \cline{3-6}
 & & & \tfrac{4}{3}x^3 & +\tfrac{1}{3}x^4 & +\cdots \\
 & & & \tfrac{4}{3}x^3 & +\tfrac{4}{3}x^4 & +\cdots \\ \cline{2-6}
 & & & & -x^4 & +\cdots
\end{array} \qquad ■$$

La pregunta real relativa al ejemplo 5 es si las dos series obtenidas convergen a $[\ln(1 + x)]e^x$ y $[\ln(1 + x)]/e^x$, respectivamente. Nuestro siguiente teorema, enunciado sin demostración, responde esta interrogante.

Teorema B

Sean $f(x) = \Sigma a_n x^n$ y $g(x) = \Sigma b_n x^n$, donde ambas series convergen al menos para $|x| < r$. Si se realizan las operaciones de suma, resta y multiplicación en estas series como si fuesen polinomios, entonces la serie resultante convergerá para $|x| < r$ y representa *a* $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$ *y* $f(x) \cdot g(x)$, respectivamente. Si $b_0 \neq 0$, el resultado correspondiente es válido para la división, pero sólo podemos garantizar su validez para $|x|$ suficientemente pequeño.

Dijimos que la operación de sustituir una serie de potencias en otra también es válida para $|x|$ suficientemente pequeña, siempre que el término constante de la serie sustituida sea cero. He aquí una ilustración.

S. Ramanujan (1887–1920)

Una de las personas más notables de principios del siglo XX fue el matemático de la India Srinivasa Ramanujan. En gran medida autodidacto, tras su muerte, Ramanujan dejó varias libretas donde registró sus descubrimientos. Sólo hasta ahora se han estudiado con mayor detalle estos cuadernos. En ellos hay muchas fórmulas extrañas y maravillosas, algunas para las sumas de series infinitas. He aquí una.

$$\frac{1}{\pi}=\frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)![1103+26{,}390n]}{(n!)^4(396)^{4n}}$$

Fórmulas como éstas fueron utilizadas en 1989 para calcular el desarrollo decimal de π con más de mil millones de decimales. (Véase el problema 35.)

EJEMPLO 6 Determine la serie de potencias para $e^{\tan^{-1} x}$, hasta los términos de grado 4.

SOLUCIÓN Como

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \cdots$$

$$e^{\tan^{-1} x} = 1 + \tan^{-1} x + \frac{(\tan^{-1} x)^2}{2!} + \frac{(\tan^{-1} x)^3}{3!} + \frac{(\tan^{-1} x)^4}{4!} + \cdots$$

Ahora sustituimos la serie para $\tan^{-1} x$ del ejemplo 2 y reducimos términos semejantes.

$$\begin{aligned}
e^{\tan^{-1} x} &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{3} + \cdots\right) + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3} + \cdots\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3} + \cdots\right)^3}{3!}\\
&\quad + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3} + \cdots\right)^4}{4!} + \cdots\\
&= 1 + \left(x - \frac{x^3}{3} + \cdots\right) + \frac{\left(x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \cdots\right)}{2} + \frac{(x^3 + \cdots)}{6}\\
&\quad + \frac{(x^4 + \cdots)}{24} + \cdots\\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{7x^4}{24} + \cdots
\end{aligned}$$

■

Serie de potencias en $x - a$ Hemos establecido los teoremas de esta sección para series de potencias en x, pero con algunas modificaciones obvias son igualmente válidas para series de potencias en $x - a$.

Revisión de conceptos

1. Una serie de potencias puede derivarse o _______ término a término en el _______ de su intervalo de convergencia.

2. Los primeros cinco términos en el desarrollo en serie de potencias para $\ln(1 - x)$ son _______.

3. Los primeros cuatro términos en el desarrollo en serie de potencias para $\exp(x^2)$ son _______.

4. Los primeros cinco términos en el desarrollo en serie de potencias para $\exp(x^2) - \ln(1 - x)$ son _______.

Conjunto de problemas 9.7

En los problemas 1 al 10 determine la representación en serie de potencias para $f(x)$ y especifique el radio de convergencia. Cada una está relacionada en cierto sentido con una serie geométrica (véanse los ejemplos 1 *y* 2*).*

1. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$

2. $f(x) = \dfrac{1}{(1 + x)^2}$ *Sugerencia:* derive el problema 1.

3. $f(x) = \dfrac{1}{(1 - x)^3}$

4. $f(x) = \dfrac{x}{(1 + x)^2}$

5. $f(x) = \dfrac{1}{2 - 3x} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{3}{2}x}$

6. $f(x) = \dfrac{1}{3 + 2x}$

7. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 - x^4}$

8. $f(x) = \dfrac{x^3}{2 - x^3}$

9. $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1 + t)\,dt$

10. $f(x) = \displaystyle\int_0^x \tan^{-1} t\,dt$

11. Obtenga la serie de potencias en x para $\ln[(1 + x)/(1 - x)]$ y especifique el radio de convergencia. *Sugerencia:*

$$\ln[(1 + x)/(1 - x)] = \ln(1 + x) - \ln(1 - x)$$

12. Demuestre que cualquier número positivo M se puede representar mediante $(1 + x)/(1 - x)$, donde x está dentro del intervalo de convergencia de la serie del problema 11. Por lo tanto, concluya que el logaritmo natural de cualquier número positivo se puede determinar por medio de esta serie. Determine ln 8 de esta forma, con tres cifras decimales.

En los problemas del 13 al 16 utilice el resultado del ejemplo 3 para determinar la serie de potencias en x para las funciones dadas.

13. $f(x) = e^{-x}$

14. $f(x) = xe^{x^2}$

15. $f(x) = e^x + e^{-x}$

16. $f(x) = e^{2x} - 1 - 2x$

En los problemas del 17 al 24 utilice los métodos del ejemplo 5 para determinar la serie de potencias en x, para cada función f.

17. $f(x) = e^{-x} \cdot \dfrac{1}{1-x}$

18. $f(x) = e^x \tan^{-1} x$

19. $f(x) = \dfrac{\tan^{-1} x}{e^x}$

20. $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + \ln(1 + x)}$

21. $f(x) = (\tan^{-1} x)(1 + x^2 + x^4)$

22. $f(x) = \dfrac{\tan^{-1} x}{1 + x^2 + x^4}$

23. $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{1+t}\, dt$

24. $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\tan^{-1} t}{t}\, dt$

25. Determine la suma de cada una de las siguientes series; reconozca cómo está relacionada con algo familiar.

(a) $x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - \cdots$

(b) $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{x}{3!} + \dfrac{x^2}{4!} + \dfrac{x^3}{5!} + \cdots$

(c) $2x + \dfrac{4x^2}{2} + \dfrac{8x^3}{3} + \dfrac{16x^4}{4} + \cdots$

26. Siga las instrucciones del problema 25.

(a) $1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots$

(b) $\cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x + \cdots$

(c) $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{x^8}{8} + \cdots$

27. Determine la suma de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.

28. Determine la suma de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$.

29. Utilice el método de sustitución (ejemplo 6) para determinar series de potencias hasta términos de grado 3.

(a) $\tan^{-1}(e^x - 1)$

(b) $e^{e^x - 1}$

30. Suponga que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ para $|x| < R$. Demuestre que $a_n = b_n$ para toda n. *Sugerencia*: sea $x = 0$; luego derive y nuevamente haga $x = 0$. Continúe así.

31. Determine la representación en serie de potencias de $x/(x^2 - 3x + 2)$. *Sugerencia:* utilice fracciones parciales.

32. Sea $y = y(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots$. Muestre que y satisface la ecuación diferencial $y'' + y = 0$ con las condiciones $y(0) = 0$ y $y'(0) = 1$. Con base en esto, adivine una fórmula sencilla para y.

33. Sea $\{f_n\}$ la sucesión de Fibonacci definida mediante

$$f_0 = 0, \qquad f_1 = 1, \qquad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

(Véanse los problemas 52 de la sección 9.1 y 36 de la sección 9.6). Si $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$, demuestre que

$$F(x) - xF(x) - x^2F(x) = x$$

y luego utilice este hecho para obtener una fórmula sencilla para $F(x)$.

34. Sea $y = y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{n!} x^n$, donde f_n es como en el problema 33. Demuestre que y satisface la ecuación diferencial $y'' - y' - y = 0$.

$\boxed{\text{C}}$ **35.** ¿Alguna vez se ha preguntado cómo las personas han calculado el desarrollo decimal de π con un gran número de cifras? Un método depende de la siguiente identidad (véase el problema 76 de la sección 6.8).

$$\pi = 16 \tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) - 4 \tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)$$

Calcule las seis primeras cifras de π mediante esta identidad y la serie para $\tan^{-1}x$. (Usted necesitará los términos hasta $x^9/9$ para $\tan^{-1}(\frac{1}{5})$, pero sólo el primer término para $\tan^{-1}(1/239)$). En 1706, John Machin usó este método para calcular los 100 primeros dígitos de π, mientras que en 1973, Jean Guilloud y Martine Bouyer determinaron el primer millón de cifras usando una identidad relacionada con la anterior

$$\pi = 48 \tan^{-1}\left(\frac{1}{18}\right) + 32 \tan^{-1}\left(\frac{1}{57}\right) - 20 \tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)$$

En 1983, π se calculó hasta 16 millones de cifras, mediante un método un poco distinto. Por supuesto, se usaron computadoras en estos cálculos recientes.

36. El número e se calcula fácilmente, con el número de cifras que se desee, usando la serie rápidamente convergente

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

Esta serie también se puede usar para demostrar que e es irracional. Haga esto completando el siguiente argumento. Suponga que $e = p/q$, donde p y q son enteros positivos. Elija $n > q$ y sea

$$M = n!\left(e - 1 - 1 - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \cdots - \frac{1}{n!}\right)$$

Ahora M es un entero positivo. (¿Por qué?) Además,

$$\begin{aligned} M &= n!\left[\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots\right] \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \\ &< \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

que es una contradicción (¿con qué?)

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** integrando; interior **2.** $-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5$ **3.** $1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6$ **4.** $1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4$

9.8

Series de Taylor y Maclaurin

La principal pregunta pendiente es ésta: dada una función f (por ejemplo, sen x o $\ln(\cos^2 x)$), *¿podemos representarla mediante una serie de potencias en x o, más en general, en $x - a$?* Más precisamente, ¿podemos hallar números $c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots$ tales que

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \cdots$$

para x que pertenece a algún intervalo en torno de a?

Suponga que tal representación existe. Entonces, por el teorema sobre la derivación de una serie (teorema 9.7 A),

$$\begin{aligned} f'(x) &= c_1 + 2c_2(x - a) + 3c_3(x - a)^2 + 4c_4(x - a)^3 + \cdots \\ f''(x) &= 2!c_2 + 3!c_3(x - a) + 4 \cdot 3c_4(x - a)^2 + \cdots \\ f'''(x) &= 3!c_3 + 4!c_4(x - a) + 5 \cdot 4 \cdot 3c_5(x - a)^2 + \cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Al sustituir $x = a$ y resolver para c_n, obtenemos

$$\begin{aligned} c_0 &= f(a) \\ c_1 &= f'(a) \\ c_2 &= \frac{f''(a)}{2!} \\ c_3 &= \frac{f'''(a)}{3!} \end{aligned}$$

y, más generalmente,

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

(Para que esto sea válido en $n = 0$, definimos $f^{(0)}(a)$ como $f(a)$ y 0! como 1). Así, los coeficientes c_n están determinados por la función f. Esto muestra también que una función f no puede ser representada mediante dos series de potencias distintas en $x - a$, un punto importante que hemos dejado pasar hasta ahora. Resumimos esto en el siguiente teorema

Teorema A **Teorema de unicidad**

Suponga que f satisface

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \cdots$$

para toda x en algún intervalo alrededor de a. Entonces

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Así, una función no puede ser representada por más de una serie de potencias en $x - a$. La representación en serie de potencias de una función en $x - a$ es su **serie de Taylor**, llamada así en honor del matemático inglés Brook Taylor (1685–1731). Si $a = 0$, la serie correspondiente se denomina **serie de Maclaurin**, llamada así en honor del matemático escocés Colin Maclaurin (1698–1746).

Convergencia de series de Taylor Pero la cuestión de la existencia persiste. Dada una función f, ¿podemos representarla por medio de una serie de potencias en $x - a$ (que debe ser, necesariamente, la serie de Taylor)? Los dos teoremas siguientes dan la respuesta.

Teorema B **Fórmula de Taylor con residuo**

Sea f una función cuya $(n+1)$-ésima derivada $f^{(n+1)}(x)$ existe para cada x en un intervalo I que contiene a a. Entonces, para cada x en I,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

donde el residuo (o error) $R_n(x)$ está dado por la fórmula

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

y c es algún punto entre x y a.

Demostración Demostraremos el teorema para el caso particular de $n = 4$; la demostración para n arbitraria sigue la misma estructura y se deja como ejercicio. (Véase el problema 37). Primero definimos la función $R_4(x)$ en I como

$$R_4(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 - \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 - \frac{f^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4$$

Ahora consideramos a x y a a como constantes y definimos una nueva función g sobre I mediante

$$g(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)(x-t)^2}{2!} - \frac{f'''(t)(x-t)^3}{3!} - \frac{f^{(4)}(t)(x-t)^4}{4!} - R_4(x)\frac{(x-t)^5}{(x-a)^5}$$

Es claro que $g(x) = 0$ (recuerde que x se considera fija) y

$$\begin{aligned} g(a) &= f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} - \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} \\ &\quad - \frac{f^{(4)}(a)(x-a)^4}{4!} - R_4(x)\frac{(x-a)^5}{(x-a)^5} \\ &= R_4(x) - R_4(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como a y x son puntos en I, con la propiedad de que $g(a) = g(x) = 0$, podemos aplicar el teorema del valor medio para derivadas. Por lo tanto, existe un número real c entre a y x tal que $g'(c) = 0$. Para obtener la derivada de g, debemos aplicar varias veces la regla del producto

$$\begin{aligned} g'(t) &= 0 - f'(t) - [f'(t)(-1) + (x-t)f''(t)] - \\ &\qquad \frac{1}{2!}[f''(t)2(x-t)(-1) + (x-t)^2 f'''(t)] \\ &\quad - \frac{1}{3!}[f'''(t)3(x-t)^2(-1) + (x-t)^3 f^{(4)}(t)] \\ &\quad - \frac{1}{4!}[f^{(4)}(t)4(x-t)^3(-1) + (x-t)^4 f^{(5)}(t)] - R_4(x)\frac{5(x-t)^4(-1)}{(x-a)^5} \\ &= -\frac{1}{4!}(x-t)^4 f^{(5)}(t) + 5R_4(x)\frac{(x-t)^4}{(x-a)^5} \end{aligned}$$

Así, mediante el teorema del valor medio para derivadas, existe alguna c entre x y a tal que

$$0 = g'(c) = -\frac{1}{4!}(x - c)^4 f^{(5)}(c) + 5R_4(x)\frac{(x - c)^4}{(x - a)^5}$$

Esto conduce a

$$\frac{1}{4!}(x - c)^4 f^{(5)}(c) = 5R_4(x)\frac{(x - c)^4}{(x - a)^5}$$

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(c)}{5!}(x - a)^5$$

■

Este teorema nos indica cuál puede ser el error al aproximar una función con un número finito de términos de su serie de Taylor. En la siguiente sección explotaremos con más detalle la relación dada en el teorema B.

Finalmente, ahora podemos contestar cuándo una función f se puede representar mediante una serie de potencias en $x - a$.

Teorema C **Teorema de Taylor**

Sea f una función con derivadas de todos los órdenes en algún intervalo $(a - r, a + r)$. La serie de Taylor

$$f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \cdots$$

representa a la función f en el intervalo $(a - r, a + r)$ si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

donde $R_n(x)$ es el residuo en la fórmula de Taylor,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1}$$

y c es algún punto en $(a - r, a + r)$.

Demostración Sólo necesitamos recordar la fórmula de Taylor con residuo (teorema B),

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n(x)$$

y el resultado se deduce. ■

Observe que si $a = 0$, obtenemos la serie de Maclaurin

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

EJEMPLO 1 Determine la serie de Maclaurin para sen x y demuestre que representa a sen x para toda x.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{sen } x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\text{sen } x & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 \\ f^{(4)}(x) &= \text{sen } x & f^{(4)}(0) &= 0 \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

Advertencia

He aquí un hecho que sorprende a muchos estudiantes. Es posible que la serie de Taylor para $f(x)$ converja en un intervalo, pero que allí no represente a $f(x)$. Esto se muestra, por ejemplo, en el problema 40. Por supuesto que

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) \neq 0$$

en este ejemplo.

Así,

$$\boxed{\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots}$$

y esto es válido para toda x, siempre que podamos demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} = 0$$

Ahora, $|f^{(n+1)}(x)| = |\cos x|$ o $|f^{(n+1)}(x)| = |\operatorname{sen} x|$, y de este modo

$$|R_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Pero, $\lim\limits_{n\to\infty} x^n/n! = 0$ para toda x, ya que $x^n/n!$ es el término n-ésimo de una serie convergente (véanse el ejemplo 3 y el problema 29 de la sección 9.6). Como consecuencia, vemos que $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. ■

EJEMPLO 2 Determine la serie de Maclaurin para cos x y muestre que representa a cos x para toda x.

SOLUCIÓN Podríamos proceder como en el ejemplo 1. Sin embargo, es más fácil obtener el resultado derivando la serie de ese ejemplo (procedimiento válido de acuerdo con el teorema 9.7 A). Obtenemos

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots}$$ ■

EJEMPLO 3 Determine la serie de Maclaurin para $f(x) = \cosh$ x de dos maneras distintas y demuestre que representa a cosh x para toda x.

SOLUCIÓN

Método 1. Éste es el método directo

$$\begin{aligned} f(x) &= \cosh x & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= \operatorname{senh} x & f'(0) &= 0 \\ f''(x) &= \cosh x & f''(0) &= 1 \\ f'''(x) &= \operatorname{senh} x & f'''(0) &= 0 \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots}$$

siempre que podamos demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para toda x.

Ahora sea B un número arbitrario y suponga que $|x| \le B$. Entonces

$$|\cosh x| = \left|\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right| \le \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} \le \frac{e^B}{2} + \frac{e^B}{2} = e^B$$

Mediante un razonamiento análogo, $|\operatorname{senh} x| \le e^B$. Ya que $f^{(n+1)}(x)$ es cosh x o senh x, concluimos que

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \le \frac{e^B|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

La última expresión tiende a cero cuando $n \to \infty$, al igual que en el ejemplo 1.

Método 2. Utilizamos el hecho de que $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$. Del ejemplo 3 de la sección 9.7,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

El resultado que se obtuvo previamente se deduce sumando estas dos series y dividiendo entre 2. ■

EJEMPLO 4 Determine la serie de Maclaurin para senh y demuestre que representa senh x para toda x.

SOLUCIÓN Hacemos ambos trabajos a la vez cuando derivamos la serie para cosh x (ejemplo 3) término a término y utilizamos el teorema 9.7A.

$$\boxed{\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots}$$ ■

La serie binomial Todos estamos familiarizados con la fórmula del binomio. Para una entero positivo p,

$$(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \cdots + \binom{p}{p}x^p$$

en donde

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)}{k!}$$

Observe que si redefinimos $\binom{p}{k}$ como

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)}{k!}$$

entonces $\binom{p}{k}$ tiene sentido para *cualquier* número real p, siempre que k sea un entero positivo. Por supuesto, si p es un entero positivo, entonces nuestra definición se reduce a $p!/[k!(p-k)!]$.

Teorema D **Serie binomial**

Para cualquier número real p y para $|x| < 1$,

$$(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 + \cdots$$

Demostración parcial Sea $f(x) = (1 + x)^p$. Entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x)^p & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= p(1 + x)^{p-1} & f'(0) &= p \\ f''(x) &= p(p - 1)(1 + x)^{p-2} & f''(0) &= p(p - 1) \\ f'''(x) &= p(p - 1)(p - 2)(1 + x)^{p-3} & f'''(0) &= p(p - 1)(p - 2) \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

Así, la serie de Maclaurin para $(1 + x)^p$ es como se indica en el teorema. Para demostrar que representa a $(1 + x)^p$, necesitamos demostrar que $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$. Desafortunadamente, es difícil, y lo dejamos para cursos más avanzados. (Véase el problema 38 para una manera completamente diferente de demostrar el teorema D). ■

Si p es un entero positivo, $\binom{p}{k} = 0$ para $k > p$, y la serie binomial se colapsa en una serie con un número finito de términos, la fórmula usual del binomio.

EJEMPLO 5 Represente $(1 - x)^{-2}$ en una serie de Maclaurin para $-1 < x < 1$.

SOLUCIÓN Por el teorema D,

$$\begin{aligned} (1 + x)^{-2} &= 1 + (-2)x + \frac{(-2)(-3)}{2!}x^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}x^3 + \cdots \\ &= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots \end{aligned}$$

Así,

$$(1 - x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$$

Naturalmente, esto coincide con el resultado obtenido por un método diferente en el ejemplo 1 de la sección 9.7. ■

EJEMPLO 6 Represente $\sqrt{1 + x}$ en una serie de Maclaurin y utilícela para aproximar $\sqrt{1.1}$ con cinco decimales.

SOLUCIÓN Por el teorema D, para $|x| < 1$,

$$\begin{aligned} (1 + x)^{1/2} = 1 &+ \frac{1}{2}x + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}x^3 \\ &+ \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{4!}x^4 + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots \end{aligned}$$

Como $|0.1| < 1$, concluimos que

$$\begin{aligned} \sqrt{1.1} = (1 + 0.1)^{1/2} &= 1 + \frac{0.1}{2} - \frac{0.01}{8} + \frac{0.001}{16} - \frac{5(0.0001)}{128} + \cdots \\ &\approx 1.04881 \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 7 Calcule $\int_0^{0.4} \sqrt{1 + x^4}\, dx$ con cinco decimales.

SOLUCIÓN Del ejemplo 6,

$$\sqrt{1+x^4} = 1 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{16}x^{12} - \frac{5}{128}x^{16} + \cdots$$

Así,

$$\int_0^{0.4} \sqrt{1+x^4}\,dx = \left[x + \frac{x^5}{10} - \frac{x^9}{72} + \frac{x^{13}}{208} + \cdots\right]_0^{0.4} \approx 0.40102 \qquad \blacksquare$$

Resumen Concluimos nuestro análisis de las series con una lista de las series de Maclaurin importantes que hemos determinado hasta el momento. Estas series serán útiles para realizar los problemas, pero, lo que es más importante, tienen aplicaciones diversas en matemáticas y ciencias.

Series de Maclaurin importantes

1. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \qquad -1 < x < 1$
2. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots \qquad -1 < x \le 1$
3. $\tan^{-1} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \dfrac{x^9}{9} + \cdots \qquad -1 \le x \le 1$
4. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots$
5. $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \dfrac{x^9}{9!} - \cdots$
6. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \dfrac{x^8}{8!} - \cdots$
7. $\operatorname{senh} x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + \dfrac{x^9}{9!} + \cdots$
8. $\cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \dfrac{x^8}{8!} + \cdots$
9. $(1+x)^p = 1 + \dbinom{p}{1}x + \dbinom{p}{2}x^2 + \dbinom{p}{3}x^3 + \dbinom{p}{4}x^4 + \cdots \qquad -1 < x < 1$

Revisión de conceptos

1. Si una función $f(x)$ se representa por medio de la serie de potencias $\Sigma c_k x^k$, entonces $c_k =$ _____.

2. La serie de Taylor para una función representará a la función, de aquellas x para los que el residuo en la fórmula de Taylor satisfaga _____.

3. La serie de Maclaurin para sen x representa sen x para ____ $< x <$ ____.

4. Los primeros cuatro términos en la serie de Maclaurin para $(1+x)^{1/3}$ son _____.

Conjunto de problemas 9.8

En los problemas del 1 al 18 determine los términos hasta x^5 de la serie de Maclaurin para $f(x)$. Sugerencia: tal vez sea más fácil usar series de Maclaurin conocidas y luego realizar multiplicaciones, divisiones, etcétera. Por ejemplo, $\tan x = (\operatorname{sen} x)/(\cos x)$.

1. $f(x) = \tan x$ **2.** $f(x) = \tanh x$

3. $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$ **4.** $f(x) = e^{-x}\cos x$

5. $f(x) = (\cos x)\ln(1+x)$ **6.** $f(x) = (\operatorname{sen} x)\sqrt{1+x}$

7. $f(x) = e^x + x + \operatorname{sen} x$

8. $f(x) = \dfrac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^4}$ **9.** $f(x) = \dfrac{1}{1-x}\cosh x$

10. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}\ln\left(\dfrac{1}{1+x}\right) = \dfrac{-\ln(1+x)}{1+x}$

11. $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$ **12.** $f(x) = \dfrac{1}{1-\operatorname{sen} x}$

13. $f(x) = \operatorname{sen}^3 x$

14. $f(x) = x(\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x)$

15. $f(x) = x\sec(x^2) + \operatorname{sen} x$ **16.** $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{1+x}}$

17. $f(x) = (1+x)^{3/2}$ **18.** $f(x) = (1-x^2)^{2/3}$

En los problemas del 19 al 24 determine la serie de Taylor en $x - a$ *hasta el término* $(x-a)^3$.

19. $e^x, a = 1$ **20.** $\operatorname{sen} x, a = \dfrac{\pi}{6}$

21. $\cos x, a = \dfrac{\pi}{3}$ **22.** $\tan x, a = \dfrac{\pi}{4}$

23. $1 + x^2 + x^3, a = 1$

24. $2 - x + 3x^2 - x^3, a = -1$

25. Sea $f(x) = \Sigma a_n x^n$ una función par $(f(-x) = f(x))$ para x en $(-R, R)$. Demuestre que $a_n = 0$ si n es impar. *Sugerencia: utilice el teorema de unicidad.*

26. Enuncie y demuestre un teorema análogo al del problema 25 para funciones impares.

27. Recuerde que

$$\operatorname{sen}^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

Determine los primeros cuatro primeros términos distintos de cero en la serie de Maclaurin para $\operatorname{sen}^{-1} x$.

28. Dado que

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$$

determine los primeros cuatro términos distintos de cero en la serie de Maclaurin para $\operatorname{senh}^{-1} x$.

$\boxed{\text{C}}$ **29.** Calcule, con una precisión de cuatro decimales,

$$\int_0^1 \cos(x^2)\,dx$$

$\boxed{\text{C}}$ **30.** Calcule, con una precisión de cinco decimales

$$\int_0^{0.5} \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx$$

31. Escribiendo $1/x = 1/[1 - (1 - x)]$ y utilizando el desarrollo conocido de $1/(1 - x)$, determine la serie de Taylor para $1/x$ en potencias de $x - 1$.

32. Sea $f(x) = (1 + x)^{1/2} + (1 - x)^{1/2}$. Determine la serie de Maclaurin para f y utilícela para encontrar $f^{(4)}(0)$ y $f^{(51)}(0)$.

33. En cada caso determine la serie de Maclaurin para $f(x)$ mediante el uso de series conocidas y luego utilícela para calcular $f^{(4)}(0)$

(a) $f(x) = e^{x+x^2}$

(b) $f(x) = e^{\sin x}$

(c) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^{t^2} - 1}{t^2}\,dt$

(d) $f(x) = e^{\cos x} = e \cdot e^{\cos x - 1}$

(e) $f(x) = \ln(\cos^2 x)$

34. En ocasiones uno puede encontrar una serie de Maclaurin mediante el *método de igualación de coeficientes*. Por ejemplo, sea

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

Luego multiplique por $\cos x$ y reemplace $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ por sus series, para obtener

$$x - \frac{x^3}{6} + \cdots = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \cdots\right)$$

$$= a_0 + a_1 x + \left(a_2 - \frac{a_0}{2}\right)x^2 + \left(a_3 - \frac{a_1}{2}\right)x^3 + \cdots$$

Así,

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 - \frac{a_0}{2} = 0, \quad a_3 - \frac{a_1}{2} = -\frac{1}{6}, \quad \cdots$$

de modo que

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \tfrac{1}{3}, \quad \cdots$$

y por lo tanto

$$\tan x = 0 + x + 0 + \tfrac{1}{3}x^3 + \cdots$$

lo que coincide con el problema 1. Utilice este método para determinar los términos, hasta x^4, en la serie para $\sec x$.

35. Use el método del problema 34 para determinar los términos hasta x^5 en la serie de Maclaurin para tanh x.

36. Use el método del problema 34 para determinar los términos hasta x^4 en la serie de Maclaurin para sech x.

37. Demuestre el teorema B para

(a) el caso particular $n = 3$, y

(b) n arbitrario.

38. Demuestre el teorema D como sigue. Sea

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{p}{n} x^n$$

(a) Demuestre que la serie converge para $|x| < 1$.

(b) Demuestre que $(1 + x)f'(x) = pf(x)$ y $f(0) = 1$.

(c) Resuelva la ecuación diferencial para obtener $f(x) = (1 + x)^p$.

39. Sea

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t^4 & \text{si } t \ge 0 \end{cases}$$

Explique por qué $f(t)$ no puede representarse por medio de una serie de Maclaurin. También demuestre que, si $g(t)$ proporciona la distancia recorrida por un automóvil que está estacionado para $t < 0$ y moviéndose hacia adelante para $t \ge 0$, entonces $g(t)$ no puede ser representada mediante una serie de Maclaurin.

40. Sea

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \ne 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Muestre que $f'(0) = 0$, utilizando la definición de derivada.

(b) Muestre que $f''(0) = 0$.

(c) Suponiendo que se conoce el hecho que $f^{(n)}(0) = 0$ para toda n, determine la serie de Maclaurin para $f(x)$.

(d) ¿La serie de Maclaurin representa a $f(x)$?

(e) Cuando $a = 0$, la fórmula en el teorema B se denomina **fórmula de Maclaurin**. ¿Cuál es el residuo en la fórmula de Maclaurin para $f(x)$?

Esto muestra que una serie de Maclaurin puede existir aunque no represente a la función dada (el residuo no tiende a 0 cuando $n \to \infty$).

CAS *Utilice un CAS (del inglés computer algebra sistem: sistema de álgebra computacional) para determinar los primeros cuatro términos distintos de cero en la serie de Maclaurin para lo siguiente. Compruebe los problemas del 43 al 48 para ver que obtiene la misma respuesta que utilizando los métodos de la sección 9.7.*

41. sen x

42. exp x

43. $3 \operatorname{sen} x - 2 \exp x$

44. $\exp(x^2)$

45. $\operatorname{sen}(\exp x - 1)$

46. $\exp(\operatorname{sen} x)$

47. $(\operatorname{sen} x)(\exp x)$

48. $(\operatorname{sen} x)/(\exp x)$

Respuestas a la revisión de conceptos **1.** $f^{(k)}(0)/k!$ **2.** $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ **3.** $-\infty; \infty$ **4.** $1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3$

9.9
La aproximación de Taylor para una función

Las series de Taylor y de Maclaurin, que fueron introducidas en la sección anterior, no pueden utilizarse de manera directa para aproximar una función, tal como e^x o tan x. Sin embargo, al truncar una serie de Taylor o una de Maclaurin, esto es, cortar la serie después de un número finito de términos, conduce a un polinomio que *podemos* utilizar para aproximar una función. Tales polinomios se denominan polinomios de Taylor o de Maclaurin.

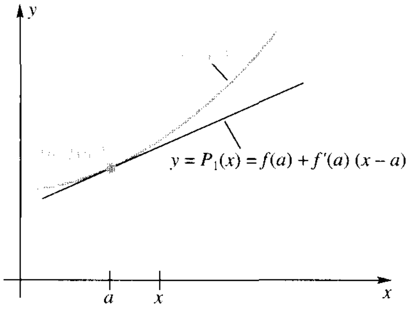


Figura 1

Polinomio de Taylor de orden 1 En la sección 2.9 enfatizamos que una función f se puede aproximar cerca de un punto a mediante su recta tangente a través del punto $(a, f(a))$ (véase la figura 1). Llamamos a esta recta la aproximación lineal a f cerca de a y encontramos que

$$\boxed{P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)}$$

Después de estudiar las series de Taylor en la sección 9.8, usted reconocerá que $P_1(x)$ está compuesto por los dos primeros términos; es decir, los términos de *orden* 0 y 1, de la serie de Taylor de f en torno de a. Por lo tanto, llamamos a P_1 el **polinomio de Taylor de orden 1 alrededor de (con base en) *a***. Como sugiere la figura 1, podemos esperar que $P_1(x)$ sea una buena aproximación de $f(x)$ sólo cerca de $x = a$.

EJEMPLO 1 Calcule $P_1(x)$ alrededor de $a = 1$ para $f(x) = \ln x$ y utilícelo para aproximar ln 0.9 y ln 1.5.

SOLUCIÓN Como $f(x) = \ln x, f'(x) = 1/x$; así, $f(1) = 0$ y $f'(1) = 1$. Por lo tanto,

$$P_1(x) = 0 + 1(x - 1) = x - 1$$

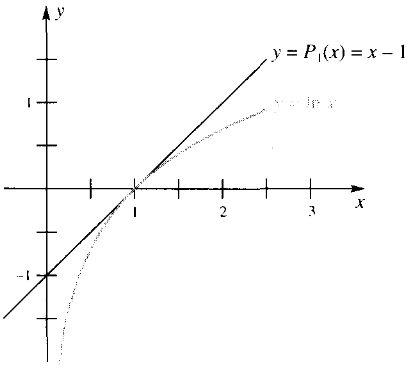


Figura 2

En consecuencia (véase la figura 2), para x cerca de 1,

$$\ln x \approx x - 1$$

y

$$\ln 0.9 \approx 0.9 - 1 = -0.1$$

$$\ln 1.5 \approx 1.5 - 1 = 0.5$$

Los valores de ln 0.9 y ln 1.5 con cuatro cifras correctas son -0.1054 y 0.4055. Como era de esperar, la aproximación es mucho mejor para ln 0.9 que para ln 1.5, pues 0.9 está más cerca de 1 que 1.5. ■

El polinomio de Taylor de orden *n* La aproximación lineal $P_1(x)$ funciona bien cuando x está cerca de a, pero no tan bien cuando x no está cerca de a. Como el lector podrá imaginar, al agregar términos de orden superior de la serie de Taylor se obtendrá una mejor aproximación. Así, el polinomio cuadrático

$$\boxed{P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2}$$

compuesto por los primero tres términos de la serie de Taylor para f, dará una mejor aproximación a f que la aproximación lineal $P_1(x)$. El **polinomio de Taylor de orden n alrededor de (con base en) a** es

$$\boxed{P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}$$

EJEMPLO 2 Calcule $P_2(x)$ alrededor de $a = 1$ para $f(x) = \ln x$ y utilícelo para aproximar ln 0.9 y ln 1.5.

SOLUCIÓN En este caso, $f(x) = \ln x, f'(x) = 1/x; f''(x) = -1/x^2$, de modo que $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$ y $f''(1) = -1$. Por lo tanto,

$$P_2(x) = 0 + 1(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$$

En consecuencia, para x cerca de 1,

$$\ln x \approx (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$$

y

$$\ln 0.9 \approx (0.9-1) - \frac{1}{2}(0.9-1)^2 = -0.1050$$

$$\ln 1.5 \approx (1.5-1) - \frac{1}{2}(1.5-1)^2 = 0.3750$$

Como se esperaba, éstas son mejores aproximaciones que las obtenidas mediante la aproximación lineal $P_1(x)$ (ejemplo 1). La figura 3 muestra la gráfica de $y = \ln x$ y la aproximación $P_2(x)$. ■

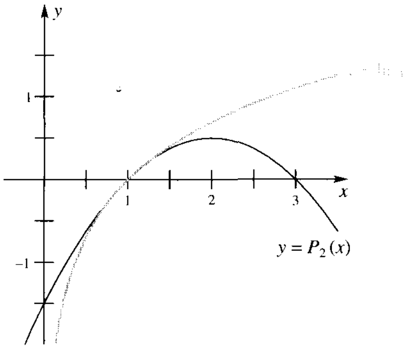


Figura 3

Polinomios de Maclaurin Cuando $a = 0$, el polinomio de Taylor de orden n se simplifica como el **polinomio de Maclaurin** de orden n, que da una aproximación particularmente útil cerca de $x = 0$:

$$\boxed{f(x) \approx P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}$$

EJEMPLO 3 Calcule los polinomios de Maclaurin de orden n para e^x y $\cos x$. Luego aproxime $e^{0.2}$ y cos(0.2) usando $n = 4$.

SOLUCIÓN El cálculo de las derivadas necesarias aparece en la siguiente tabla.

n			En $x = 0$		En $x = 0$
0	$f(x)$	e^x	1	$\cos x$	1
1	$f'(x)$	e^x	1	$-\text{sen } x$	0
2	$f''(x)$	e^x	1	$-\cos x$	-1
3	$f^{(3)}(x)$	e^x	1	$\text{sen } x$	0
4	$f^{(4)}(x)$	e^x	1	$\cos x$	1
5	$f^{(5)}(x)$	e^x	1	$-\text{sen } x$	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Orden contra grado

Hemos elegido la terminología polinomio de Taylor (y de Maclaurin) de *orden n*, pues la derivada de mayor orden que aparece en su construcción es de orden n. Observe que este polinomio puede tener *grado* menor que n, si $f^{(n)}(a) = 0$. Si en el ejemplo 3 n es impar, entonces el polinomio de Maclaurin de orden n para $\cos x$ será de grado $n - 1$. Por ejemplo, el polinomio de Maclaurin de orden 5 para $\cos x$ es

$$1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4$$

un polinomio de grado 4.

Esto implica que

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^{n/2}\frac{1}{n!}x^n \quad (n \text{ par})$$

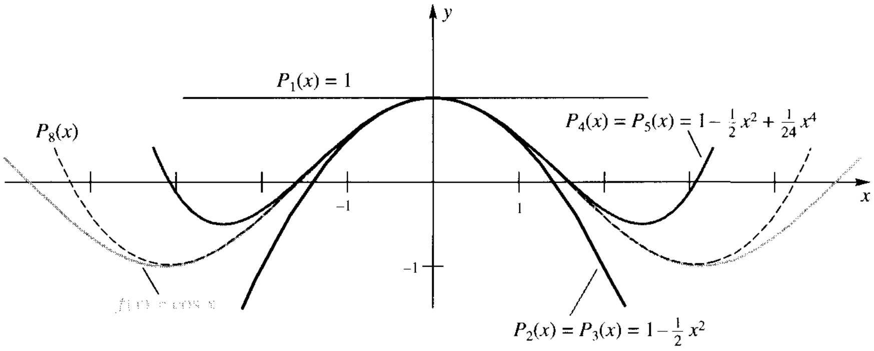
Así, usando $n = 4$ y $x = 0.2$, obtenemos

$$e^{0.2} \approx 1 + 0.2 + \frac{(0.2)^2}{2} + \frac{(0.2)^3}{6} + \frac{(0.2)^4}{24} = 1.2214000$$

$$\cos(0.2) \approx 1 - \frac{(0.2)^2}{2} + \frac{(0.2)^4}{24} = 0.9800667$$

Compare estos resultados con los valores con siete cifras correctas, 1.2214028 y 0.9800666. ■

Para tener una idea visual de la forma en que los polinomios de Maclaurin aproximan a cos x, hemos bosquejado las gráficas de $P_1(x)$ a $P_5(x)$ y $P_8(x)$, junto con la gráfica de cos x, en la figura 4.



Aproximaciones de Maclaurin a $f(x) = \cos x$

Figura 4

En el ejemplo 3 usamos el polinomio de Maclaurin de orden 4 para aproximar cos (0.2) como sigue:

$$\cos(0.2) \overset{\text{primer error}}{\approx} 1 - \frac{1}{2!}(0.2)^2 + \frac{1}{4!}(0.2)^4 \overset{\text{segundo error}}{\approx} 0.9800667$$

Este ejemplo ilustra los dos tipos de error que pueden aparecer en los procesos de aproximación. En primer lugar, existe el **error del método**. En este caso aproximamos cos x mediante un polinomio de cuarto grado, en vez de evaluar la suma *exacta* de la serie. En segundo lugar, hay un **error de cálculo**. Esto incluye los errores debidos al redondeo, como cuando sustituimos el decimal infinito 0.9800666... por 0.9800667 en el último término anterior.

Aquí aparece un hecho triste en la vida del analista numérico. Podemos reducir el error del método usando polinomios de Maclaurin de orden superior. Pero el uso de polinomios de mayor orden implica más cálculos, lo cual incrementa potencialmente los errores de cálculo. Ser un buen analista numérico significa saber cómo establecer un equilibrio entre estos dos tipos de error. Por desgracia, esto es más un arte que una ciencia. Sin embargo, podemos decir algo definido acerca del primer tipo de error, tema que estudiaremos a continuación.

El error en el método En la sección 9.8 dimos una fórmula para el error al aproximar una función mediante su polinomio de Taylor. La fórmula de Taylor con residuo es

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \\ &= P_n(x) + R_n(x) \end{aligned}$$

El error o residuo $R_n(x)$ está dado por

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

donde c es algún número real entre a y x. Esta fórmula para el error se debe al matemático franco–italiano Joseph Louis Lagrange (1736–1813) y con frecuencia se llama la cota del error de Lagrange para polinomios de Taylor. Cuando $a = 0$, la fórmula de Taylor se llama **fórmula de Maclaurin.**

Un problema que tal vez pase inadvertido en este punto es que no conocemos el valor de c; lo único que sabemos es que es algún número real entre a y x. Para muchos problemas, debemos establecer una cota para el residuo mediante las cotas conocidas para x. El siguiente ejemplo ilustra este punto.

EJEMPLO 4 Aproxime $e^{0.8}$ con un error menor que 0.001.

SOLUCIÓN Para $f(x) = e^x$, la fórmula de Maclaurin proporciona el residuo

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

y así

$$R_n(0.8) = \frac{e^c}{(n+1)!}(0.8)^{n+1}$$

donde $0 < c < 0.8$. Nuestro objetivo es elegir n lo suficientemente grande de modo que $|R_n(0.8)| < 0.001$. Ahora, $e^c < e^{0.8} < 3$ y $(0.8)^{n+1} < (1)^{n+1}$, y así

$$|R_n(0.8)| < \frac{3(1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{3}{(n+1)!}$$

Es fácil comprobar que $3/(n+1)! < 0.001$ cuando $n \geq 6$, de modo que podemos obtener la precisión deseada usando el polinomio de Maclaurin de orden 6:

$$e^{0.8} \approx 1 + (0.8) + \frac{(0.8)^2}{2!} + \frac{(0.8)^3}{3!} + \frac{(0.8)^4}{4!} + \frac{(0.8)^5}{5!} + \frac{(0.8)^6}{6!}$$

Nuestra calculadora da 2.2254948 para esta suma.

¿Podemos asegurarnos de que este valor está a menos de 0.001 del resultado real? Ciertamente, el error del método es menor que 0.001. Pero ¿podría ocurrir que el error de cálculo distorsione nuestra respuesta? Tal vez, pero son pocos los cálculos, que podemos confiar en dar la respuesta de 2.2255 con una precisión dentro de 0.001. ■

Herramientas útiles para acotar $|R_n|$ El valor preciso de R_n casi nunca se alcanza, pues no conocemos c; sólo sabemos que c está en cierto intervalo. Por lo tanto, nuestra tarea es encontrar el máximo valor posible de $|R_n|$ para c en el intervalo dado. Con frecuencia, es difícil hacer esto con exactitud, de modo que nos conformaremos con obtener una "buena" cota superior para $|R_n|$. Esto implica un uso adecuado de las desigualdades. Nuestras herramientas principales son la desigualdad del triángulo $|a \pm b| \leq |a| + |b|$ y el hecho de que una fracción crece cuando aumentamos el numerador o disminuimos el denominador.

EJEMPLO 5 Si se sabe que c está en $[2, 4]$, proporcione una buena cota para el valor máximo de

$$\left|\frac{c^2 - \operatorname{sen} c}{c}\right|$$

SOLUCIÓN

$$\left|\frac{c^2 - \operatorname{sen} c}{c}\right| = \frac{|c^2 - \operatorname{sen} c|}{|c|} \le \frac{|c^2| + |\operatorname{sen} c|}{|c|} \le \frac{4^2 + 1}{2} = 8.5$$

Obtenemos otra cota mejor, como sigue:

$$\left|\frac{c^2 - \operatorname{sen} c}{c}\right| = \left|c - \frac{\operatorname{sen} c}{c}\right| \le |c| + \left|\frac{\operatorname{sen} c}{c}\right| \le 4 + \frac{1}{2} = 4.5 \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 6 Use un polinomio de Taylor de orden 2 para aproximar cos 62° y luego proporcione una cota para el error de la aproximación.

SOLUCIÓN Como 62° está cerca de 60° (cuyos coseno y seno son conocidos), usamos la medida en radianes y el polinomio de Taylor con base en $a = \pi/3$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x & f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2} \\ f'(x) &= -\operatorname{sen} x & f'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ f''(x) &= -\cos x & f''\left(\frac{\pi}{3}\right) &= -\frac{1}{2} \\ f'''(x) &= \operatorname{sen} x & f'''(c) &= \operatorname{sen} c \end{aligned}$$

Ahora,

$$62° = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{90} \text{ radianes}$$

Así,

$$\cos x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + R_2(x)$$

y

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{90}\right) &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{90}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2 + R_2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{90}\right) \\ &\approx 0.4694654 + R_2 \end{aligned}$$

y

$$|R_2| = \left|\frac{\operatorname{sen} c}{3!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^3\right| < \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{90}\right)^3 \approx 0.0000071$$

De nuevo, el número de cálculos es pequeño, de modo que podemos sentirnos seguros al informar que cos 62° = 0.4694654 con un error menor que 0.0000071. ■

El error de cálculo Hasta ahora, en todos nuestros ejemplos hemos supuesto que el error de cálculo es lo bastante pequeño como para ser ignorado. Por lo general supondremos esto en este libro, pues nuestros problemas implicarán siempre una pequeña cantidad de cálculos. Sin embargo, nos sentimos obligados a advertirle que al usar computadoras para hacer centenas o miles de operaciones, estos errores de cálculo podrían acumularse y distorsionar una respuesta.

Hay dos fuentes de errores de cálculo que pueden ser de importancia, incluso al usar una calculadora. Considere el cálculo de

$$a + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_m$$

donde a es mucho mayor que cualquiera de los b; por ejemplo, $a = 10{,}000{,}000$ y $b_i = 0.4$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Si usamos la aritmética de punto flotante de ocho dígitos y trabajamos de izquierda a derecha, sumando primero b_1 a a, luego sumando b_2 al resultado, y así sucesivamente, en cada etapa obtendremos siempre 10,000,000. Incluso así, una suma de 25 de los b tendría que afectar al séptimo dígito de la suma total. La moraleja aquí es que al sumar un gran número de pequeños términos a uno o más términos grandes, es mejor encontrar primero la suma de los términos pequeños. Siempre que sea posible sume los números del menor al mayor.

Una fuente más probable de un error de cálculo se debe a la pérdida de cifras significativas en una resta de números casi iguales. Por ejemplo, al restar 0.823421 de 0.823445, cada uno con seis cifras significativas, se obtiene 0.000024, que sólo tiene dos cifras significativas. Que esto puede causar problemas se puede ver con facilidad si calculamos una aproximación numérica de una derivada.

Considere el cálculo de $f'(2)$ para $f(x) = x^4$ usando el cociente de diferencias

$$f'(2) \approx \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(2 + 10^{-n})^4 - 2^4}{10^{-n}}$$

En teoría, cuando n crece (y $h = 10^{-n}$ decrece en forma correspondiente) el resultado debe parecerse cada vez más al valor correcto, 32. Pero observe lo que ocurre con una calculadora de ocho dígitos, cuando n es muy grande. Problemas como éste surgen incluso al usar aritmética de punto flotante de 16 o 32 dígitos. Sin importar el número de cifras significativas utilizadas en los cálculos, el cociente de diferencias de la tabla anterior será 0 para n lo suficientemente grande.

n	$(2 + 10^{-n})^4 - 2^4$	$[(2 + 10^{-n})^4 - 2^4]/10^{-n}$
2	0.32240801	32.240801
3	0.03202401	32.024010
4	0.00320024	32.002400
5	0.00032000	32.000000
6	0.00003200	32.000000
7	0.00000320	32.000000
8	0.00000032	32.000000
9	0.00000003	30.000000
10	0.00000000	0.000000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Revisión de conceptos

1. Si $P_2(x)$ es el polinomio de Taylor de orden 2 alrededor de 1 para $f(x)$, entonces $P_2(1) =$ ______, $P_2'(1) =$ ______ y $P_2''(1) =$ ______.

2. El coeficiente de x^6 en el polinomio de Maclaurin de orden 9 para $f(x)$ es ______.

3. Los dos tipos de errores que surgen en la teoría de aproximación se denominan ______ y ______.

4. Los errores de cálculo al utilizar la fórmula de Taylor tienden a ______ cuando n aumenta, mientras que los errores del método tienden a ______ cuando n aumenta.

Conjunto de problemas 9.9

$\boxed{\text{C}}$ *En los problemas del 1 al 8 determine el polinomio de Maclaurin de orden 4 para* $f(x)$ *y úselo para aproximar* $f(0.12)$.

1. $f(x) = e^{2x}$

2. $f(x) = e^{-3x}$

3. $f(x) = \text{sen}\, 2x$

4. $f(x) = \tan x$

5. $f(x) = \ln(1 + x)$

6. $f(x) = \sqrt{1 + x}$

7. $f(x) = \tan^{-1} x$

8. $f(x) = \text{senh}\, x$

$\boxed{\text{C}}$ *En los problemas del 9 al 14 determine el polinomio de Taylor de orden 3 alrededor de a para la función dada.*

9. $e^x; a = 1$

10. $\text{sen}\, x; a = \frac{\pi}{4}$

11. $\tan x; a = \frac{\pi}{6}$

12. $\sec x; a = \frac{\pi}{4}$

13. $\cot^{-1} x; a = 1$

14. $\sqrt{x}; a = 2$

15. Determine el polinomio de Taylor de orden 3 alrededor de 1 para $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ y muestre que es una representación exacta de $f(x)$.

16. Determine el polinomio de Taylor de orden 4 alrededor de 2 para $f(x) = x^4$, y demuestre que representa a $f(x)$ de manera exacta.

17. Determine el polinomio de Maclaurin de orden n para $f(x) = 1/(1 - x)$. Luego utilícelo con $n = 4$ para aproximar cada uno de lo siguiente.

(a) $f(0.1)$ (b) $f(0.5)$ (c) $f(0.9)$ (d) $f(2)$

$\boxed{\text{C}}$ **18.** Determine el polinomio de Maclaurin de orden n (n impar) para sen x. Luego úselo con $n = 5$ para aproximar cada uno de lo siguiente. (Este ejemplo debe convencerlo que la aproximación de Maclaurin puede ser muy pobre, si x está lejos de cero). Compare sus respuestas con las que le da su calculadora. ¿Qué conclusión saca?

(a) sen(0.1) (b) sen(0.5) (c) sen(1) (d) sen(10)

$\boxed{\text{CAS}}$ *En los problemas del 19 al 28, en el mismo conjunto de ejes, trace la función dada junto con los polinomios de Maclaurin de órdenes 1, 2, 3, y 4.*

19. $\cos 2x$

20. $\text{sen}\, x$

21. $\text{sen}\, x^2$

22. $\cos(x - \pi)$

23. e^{-x^2}

24. $e^{\text{sen}\, x}$

25. $\text{sen}\, e^x$

26. $\text{sen}(\ln(1 + x))$

27. $\dfrac{\text{sen}\, x}{2 + \text{sen}\, x}$

28. $\dfrac{1}{1 + x^2}$

En los problemas del 29 al 36 determine una buena cota para el valor máximo de la expresión dada, considerando que c está en el intervalo que se establece. Las respuestas pueden variar dependiendo de la técnica empleada. (Véase el ejemplo 5.)

29. $|e^{2c} + e^{-2c}|; [0, 3]$

30. $|\tan c + \sec c|; \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

31. $\left|\dfrac{4c}{\text{sen}\, c}\right|; \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

32. $\left|\dfrac{4c}{c + 4}\right|; [0, 1]$

33. $\left|\dfrac{e^c}{c + 5}\right|; [-2, 4]$

34. $\left|\dfrac{\cos c}{c + 2}\right|; \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

35. $\left|\dfrac{c^2 + \text{sen}\, c}{10 \ln c}\right|; [2, 4]$

36. $\left|\dfrac{c^2 - c}{\cos c}\right|; \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

En los problemas del 37 al 42 determine una fórmula para $R_6(x)$, *el residuo para el polinomio de Taylor de orden 6 alrededor de a. Luego obtenga una buena cota para* $|R_6(0.5)|$. *Véanse los ejemplos 4 y 6.*

37. $\ln(2 + x); a = 0$

38. $e^{-x}; a = 1$

39. $\text{sen}\, x; a = \pi/4$

40. $\dfrac{1}{x - 3}; a = 1$

41. $\dfrac{1}{x}; a = 1$

42. $\dfrac{1}{x^2}; a = 1$

43. Determine el orden n del polinomio de Maclaurin para e^x que se requiere para aproximar e con cinco decimales; esto es, de modo que $|R_n(1)| \leq 0.000005$ (véase el ejemplo 4).

44. Determine el orden n del polinomio de Maclaurin para 4 $\tan^{-1} x$, que se requiere para aproximar $\pi = 4 \tan^{-1} 1$ con cinco decimales; esto es, de modo que $|R_n(1)| \leq 0.000005$.

45. Determine el polinomio de Maclaurin de tercer orden para $(1 + x)^{1/2}$ y acote el error $R_3(x)$ para $-0.5 \leq x \leq 0.5$.

46. Determine el polinomio de Maclaurin de tercer orden para $(1 + x)^{3/2}$ y acote el error $R_3(x)$, si $-0.1 \leq x \leq 0$.

47. Determine el polinomio de Maclaurin de tercer orden para

$$(1 + x)^{-1/2}$$

y acote el error $R_3(x)$, si $-0.05 \leq x \leq 0.05$.

48. Determine el polinomio de Maclaurin de cuarto orden para

$$\ln[(1 + x)/(1 - x)]$$

y acote el error $R_4(x)$, si $-0.5 \leq x \leq 0.5$.

49. Observe que el polinomio de Maclaurin de cuarto orden para sen x, en realidad es de tercer grado, ya que el coeficiente de x^4 es 0. Así,

$$\text{sen}\, x = x - \frac{x^3}{6} + R_4(x)$$

Demuestre que si $0 \leq x \leq 0.5$, $|R_4(x)| \leq 0.0002605$. Utilice este resultado para aproximar $\int_0^{0.5} \text{sen}\, x\, dx$ y proporcione una cota para el error.

50. En analogía con el problema 49,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + R_5(x)$$

Si $0 \leq x \leq 1$, proporcione una buena cota para $|R_5(x)3|$. Luego utilice su resultado para aproximar $\int_0^1 \cos x\, dx$ y proporcione una cota para el error.

51. El problema 49 sugiere que si n es impar, entonces el polinomio de Maclaurin de orden n para sen x también es el polinomio de orden $(n + 1)$, así que el error puede calcularse por medio de R_{n+1}. Utilice este resultado para determinar qué tan grande debe ser n, de modo que $|R_{n+1}(x)|$ sea menor que 0.00005, para toda x en el intervalo $0 \leq x \leq \pi/2$. (Observe, n debe ser impar).

52. El problema 50 sugiere que si n es par, entonces el polinomio de Maclaurin de orden n para cos x también es el polinomio de orden $(n + 1)$, así que el error puede calcularse por medio de R_{n+1}. Utilice este resultado para determinar qué tan grande debe ser n, de modo que $|R_{n+1}(x)|$ sea menor que 0.00005, para toda x en el intervalo $0 \leq x \leq \pi/2$. (Observe, n debe ser par.)

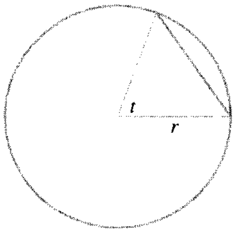


Figura 5

53. Utilice un polinomio de Maclaurin para obtener la aproximación $A \approx r^2t^3/12$ para el área de la región sombreada en la figura 5. Primero exprese A de forma exacta, luego aproxime.

54. Si un objeto de masa en reposo m_0 tiene velocidad v, entonces (de acuerdo con la teoría de la relatividad) su masa m está dada por $m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, en donde c es la velocidad de la luz. Explique cómo los físicos obtienen la aproximación

$$m \approx m_0 + \frac{m_0}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2$$

55. Si se invierte dinero a una tasa de interés de r que capitaliza cada mes, se duplicará en n años, donde n satisface

$$\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12n} = 2$$

(a) Demuestre que

$$n = \ln 2\left[\frac{1}{12\ln(1 + r/12)}\right]$$

(b) Utilice el polinomio de Maclaurin de orden 2 para $\ln(1 + x)$, y una descomposición en fracciones parciales para obtener la aproximación

$$n \approx \frac{0.693}{r} + 0.029$$

$\boxed{\text{C}}$ (c) Algunas personas utilizan *la regla del 72*, $n \approx 72/(100r)$, para aproximar n. Llene la tabla para comparar los valores obtenidos con base en estas res fórmulas.

r	n (*Exacta*)	n (*Aproximación*)	n (*Regla del 72*)
0.05			
0.10			
0.15			
0.20			

56. La autora de un texto de biología afirma que la solución positiva más pequeña para $x = 1 - e^{-(1+k)x}$ es aproximadamente $x = 2k$, siempre que k sea muy pequeña. Demuestre cómo ella llegó a esta conclusión y verifíquela para $k = 0.01$.

57. Desarrolle $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 2$ en un polinomio de Taylor de orden 4 alrededor de 1 y demuestre que $R_4(x) = 0$ para toda x.

58. Sea $f(x)$ una función que tiene al menos n derivadas en $x = a$, y sea $P_n(x)$ el polinomio de Taylor de orden n alrededor de a. Demuestre que

$$P_n(a) = f(a),\quad P_n'(a) = f'(a),\quad P_n''(a) = f''(a),\quad \ldots,\quad P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

$\boxed{\text{C}}$ **59.** Calcule sen 43° = sen($43\pi/180$) mediante el polinomio de Taylor de orden 3 alrededor de $\pi/4$ para sen x. Luego obtenga una buena cota para el error que se cometió. Véase el ejemplo 6.

$\boxed{\text{C}}$ **60.** Calcule cos 63° por el método ilustrado en el ejemplo 6. Seleccione n lo suficientemente grande de modo que $|R_n| \le 0.0005$.

$\boxed{\text{C}}$ **61.** Demuestre que si x está en $[0, \pi/2]$ el error al utilizar

$$\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

es menor que 5×10^{-5} y, por lo tanto, que esta fórmula es suficientemente buena para construir una tabla del seno con cuatro decimales.

62. Utilice la fórmula de Maclaurin, en lugar de la regla de L'Hôpital, para determinar

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + x^3/6}{x^5}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + x^2/2 - x^4/24}{x^6}$

$\boxed{\text{EXPL}}$ **63.** Sea $g(x) = p(x) + x^{n+1}f(x)$, en donde $p(x)$ es un polinomio de grado a lo más n y f tiene derivadas hasta de orden n. Demuestre que $p(x)$ es el polinomio de Maclaurin de orden n para g.

$\boxed{\text{EXPL}}$ **64.** Recuerde que el criterio de la segunda derivada para extremos locales (sección 3.3) no se aplica cuando $f''(c) = 0$. Pruebe la generalización siguiente, que puede ayudar a determinar un máximo o un mínimo cuando $f''(c) = 0$. Suponga que

$$f'(c) = f''(c) = f'''(c) = \cdots = f^{(n)}(c) = 0$$

donde n es impar y $f^{(n+1)}(x)$ es continua cerca de c.

1. Si $f^{(n+1)}(c) < 0$, entonces $f(c)$ es un valor máximo local.
2. Si $f^{(n+1)}(c) > 0$, entonces $f(c)$ es un valor mínimo local.

Pruebe este resultado con $f(x) = x^4$.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $f(1); f'(1); f''(1)$ **2.** $f^{(6)}(0)/6!$ **3.** error del método; error de cálculo **4.** aumenta; disminuye.

9.10 Repaso del capítulo

Examen de conceptos

Responda con verdadero o falso a cada una de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

1. Si $0 \le a_n \le b_n$ para todo número natural n y existe $\lim_{n\to\infty} b_n$ entonces existe $\lim_{n\to\infty} a_n$.

2. Para cada entero positivo n, $n! \le n^n \le (2n - 1)!$

3. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, entoncces $\lim_{n\to\infty} a_{3n+4} = L$.

4. Si $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = L$ y $\lim_{n\to\infty} a_{3n} = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

5. Si $\lim_{n\to\infty} a_{mn} = L$ para todo entero positivo $m \ge 2$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

6. Si $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = L$ y $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

7. Si $\lim_{n\to\infty}(a_n - a_{n+1}) = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe y es finito.

8. Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ divergen, entonces $\{a_n + b_n\}$ diverge.

9. Si $\{a_n\}$ converge, entonces $\{a_n/n\}$ converge en 0.

10. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces también converge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

11. Si $0 < a_{n+1} < a_n$ para todo número natural n, y si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ converge y tiene suma S que satisface $0 < S < a_1$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^n$ converge y tiene suma S que satisface $1 < S < 2$.

13. Si una serie $\sum a_n$ diverge, entonces su sucesión de sumas parciales no está acotada.

14. Si $0 \le a_n \le b_n$ para todo número natural n, y si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

15. El criterio del cociente no ayudará en la determinación de la convergencia o divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{3n^4 + 2n^3 + 3n + 1}$.

16. Si $a_n > 0$ para todo número natural n, y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}/a_n) < 1$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ converge

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n^4+1)}$ converge.

19. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{(n \ln n)^2}$ converge

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(n\pi/2)}{n}$ converge.

21. Si $0 \le a_{n+100} \le b_n$ para todo número natural n y si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

22. Si para alguna $c > 0$, $ca_n \ge 1/n$ para todo número natural n, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

23. $\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{1000} < \frac{1}{2}$.

24. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge.

25. Si $b_n \le a_n \le 0$ para todo número natural n, y si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

26. Si $0 \le a_n$ para todo número natural n, y si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge.

27. $\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{99}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| < 0.01$.

28. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge.

29. Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$ converge en $x = -1.1$, entonces también converge en $x = 7$.

30. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en $x = -2$, entonces también converge en $x = 2$.

31. 31. Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y si la serie converge en $x = 1.5$, entonces $\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n/(n+1)$.

32. Toda serie de potencias converge para al menos dos valores de la variable.

33. Si existen $f(0), f'(0), f''(0), \ldots$, entonces la serie de Maclaurin para $f(x)$ converge en $f(x)$ en una vecindad de $x = 0$.

34. La función $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ satisface la ecuación diferencial $y' = y^2$ en el intervalo $(-1, 1)$.

35. La función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n/n!$ satisface la ecuación diferencial $y' + y = 0$ en toda la recta real.

36. Si $P(x)$ es el polinomio de Maclaurin de orden 2 para $f(x)$, entonces $P(0) = f(0)$, $P''(0) = f'(0)$ y $P''(0) = f''(0)$.

37. El polinomio de Taylor de orden n alrededor de a para $f(x)$ es único; esto es, $f(x)$ sólo tiene uno de tales polinomios.

38. $f(x) = x^{5/2}$ tiene un polinomio de Maclaurin de segundo orden.

39. El polinomio de Maclaurin de orden 3 para $f(x) = 2x^3 - x^2 + 7x - 11$ es una representación exacta de $f(x)$.

40. El polinomio de Maclaurin de orden 16 para $\cos x$ sólo incluye potencias pares de x.

41. Si $f'(0)$ existe para una función par, entonces $f'(0) = 0$.

42. La fórmula de Taylor con residuo tiene al teorema del valor medio para derivadas como un caso particular.

Problemas de examen

En los problemas del 1 al 8 determine si la sucesión dada converge o diverge y, si converge, determine $\lim_{n\to\infty} a_n$.

1. $a_n = \frac{9n}{\sqrt{9n^2+1}}$

2. $a_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

3. $a_n = \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n$

4. $a_n = \frac{n!}{3^n}$

5. $a_n = \sqrt[n]{n}$

6. $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \frac{1}{\sqrt[n]{3}}$

7. $a_n = \frac{\operatorname{sen}^2 n}{\sqrt{n}}$

8. $a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)$

En los problemas del 9 al 18, determine si la serie dada converge o diverge, y si converge, determine su suma.

9. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$

10. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$

11. $\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \ln\frac{3}{4} + \cdots$

12. $\sum_{k=0}^{\infty} \cos k\pi$

13. $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-2k}$

14. $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2^k} + \frac{4}{3^k}\right)$

15. $0.91919191\ldots = \sum_{k=1}^{\infty} 91\left(\frac{1}{100}\right)^k$

16. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln 2}\right)^k$

17. $1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \cdots$

18. $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots$

En los problemas del 19 al 32 indique si la serie dada converge o diverge y justifique su conclusión.

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{1+n^3}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[n]{3}}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{n+1}{10n+12}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+7}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 3^n}{(n+1)!}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{(n+2)!}$

30. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+\ln n}$

En los problemas del 33 al 36 establezca si la serie dada es absolutamente convergente, condicionalmente convergente, o es divergente.

33. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{1}{3n-1}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{2^n}$

35. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{3^n}{2^{n+8}}$

36. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt[n]{n}}{\ln n}$

En los problemas del 37 al 42 determine el conjunto de convergencia para las series de potencias.

37. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^3+1}$

38. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}x^n}{2n+3}$

39. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-4)^n}{n+1}$

40. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^{3n}}{(3n)!}$

41. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n+1}$

42. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(x+1)^n}{3^n}$

43. Mediante la derivación de la serie geométrica

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots, \quad |x| < 1,$$

determine una serie de potencias que represente $1/(1+x)^2$. ¿Cuál es su intervalo de convergencia?

44. Determine una serie de potencias que represente $1/(1+x)^3$ en el intervalo $(-1, 1)$.

45. Determine la serie de Maclaurin para $\operatorname{sen}^2 x$. ¿Para qué valores de x la serie representa la función?

46. Determine los primeros cinco términos de la serie de Taylor para e^x alrededor del punto $x = 2$.

47. Escriba la serie de Maclaurin para $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$. ¿Para qué valores de x, la serie representa f?

48. Determine qué tan grande debe ser n, de modo que al utilizar la n-ésima suma parcial para aproximar la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9+k^2}$ da un error de no más que 0.00005.

49. Determine qué tan grande debe ser n de modo que al utilizar la n-ésima suma parcial para aproximar la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^{k^2}}$ da un error de no más que 0.000005.

50. ¿Cuántos términos tenemos que tomar en la serie convergente

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \cdots$$

para asegurar que hemos aproximado su suma con una tolerancia de 0.001?

51. Utilice el método más sencillo que pueda idear para determinar los primeros tres términos diferentes de cero de la serie de Maclaurin para cada uno de lo siguiente:

(a) $\frac{1}{1-x^3}$

(b) $\sqrt{1+x^2}$

(c) $e^{-x} - 1 + x$

(d) $x \sec x$

(e) $e^{-x} \operatorname{sen} x$

(f) $\frac{1}{1+\operatorname{sen} x}$

52. Determine el polinomio de Maclaurin de orden 2 para $f(x) = \cos x$ y úselo para aproximar cos 0.1.

C **53.** Determine el polinomio de Maclaurin de orden 1 para $f(x) = x \cos x^2$ y úselo para aproximar $f(0.2)$.

C **54.** Determine el polinomio de Maclaurin de orden 4 para $f(x)$ y úselo para aproximar $f(0.1)$.

(a) $f(x) = xe^x$

(b) $f(x) = \cosh x$

55. Determine el polinomio de Taylor de orden 3 alrededor de 2 para $g(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 7$ y demuestre que es una representación exacta de $g(x)$.

56. Utilice el resultado del problema 55 para calcular $g(2.1)$.

57. Determine el polinomio de Taylor de orden 4 alrededor de 1 para $f(x) = 1/(x+1)$.

58. Obtenga una expresión para el término del error $R_4(x)$ en el problema 57 y determine una cota para él si $x = 1.2$.

59. Determine el polinomio de Maclaurin de orden 4 para $f(x) = \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, y encuentre una cota para el error $R_4(x)$, si $|x| \leq 0.2$. *Nota:* se obtiene una mejor cota, si observa que $R_4(x) = R_5(x)$ y luego acota $R_5(x)$.

C **60.** Si $f(x) = \ln x$, entonces $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!/x^n$. Por lo tanto, el polinomio de Taylor de orden n alrededor de 1 para $\ln x$ es

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n + R_n(x)$$

¿Qué tan grande debería ser n para que sepamos que $|R_n(x)| \leq 0.00005$, si $0.8 \leq x \leq 1.2$?

C **61.** En relación con el problema 60. Utilice el polinomio de Taylor de orden 5, alrededor de 1, para aproximar

$$\int_{0.8}^{1.2} \ln x \, dx$$

y proporcione una buena cota para el error en que se incurre.

PROBLEMAS DE REPASO E INTRODUCCIÓN

1. Para la gráfica de $y = x^2/4$ determine la ecuación de la recta tangente y la recta normal (es decir, la recta perpendicular a la recta tangente) que pasan por el punto (2, 1).

2. Determine todos los puntos en la gráfica de $y = x^2/4$, (a) en donde la recta tangente es paralela a la recta $y = x$ y (b) donde la recta normal sea paralela a la recta $y = x$.

3. Determine todos los puntos de intersección de $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ y $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.

4. Determine todos los puntos de intersección de $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ y $x^2 + y^2 = 9$.

5. Utilice derivación implícita para determinar la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 + y^2/4 = 1$ en el punto $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$.

6. Utilice derivación implícita para determinar la ecuación de la recta tangente a la curva $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ en el punto $\left(9, 8\sqrt{2}\right)$.

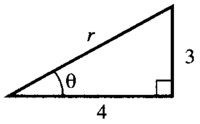
7. Determine todos los puntos de intersección de $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ y $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$. Para el punto de intersección que está en el primer cuadrante, utilice derivación implícita para determinar las ecuaciones de las rectas tangentes a ambas curvas. Determine todos los ángulos entre estas dos rectas tangentes.

8. Suponga que $x = 2 \cos t$ y $y = 2 \operatorname{sen} t$. Llene la tabla siguiente y trace las parejas ordenadas (x, y).

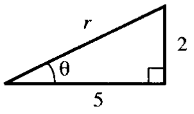
t	$x = 2 \cos t$	$y = 2 \operatorname{sen} t$
0		
$\pi/6$		
$\pi/4$		
$\pi/3$		
$\pi/2$		
π		
$3\pi/2$		
2π		

En los problemas 9 y 10 determine los valores de r y θ.

9.

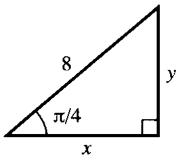


10.

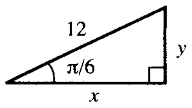


En los problemas 11 y 12 determine los valores de x y y.

11.



12.

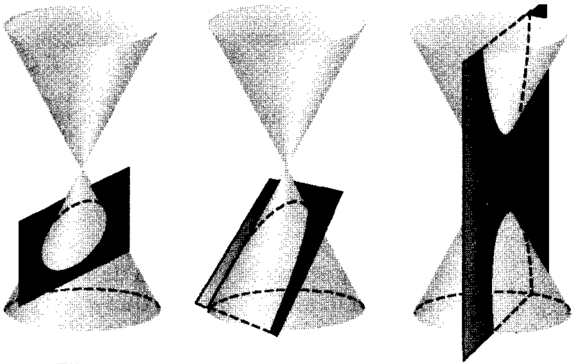


CAPÍTULO 10 Cónicas y coordenadas polares

10.1 La parábola
10.2 Elipses e hipérbolas
10.3 Traslación y rotación de ejes
10.4 Representación paramétrica de curvas en el plano
10.5 El sistema de coordenadas polares
10.6 Gráficas de ecuaciones polares
10.7 Cálculo en coordenadas polares
10.8 Repaso del capítulo

10.1
La parábola

Considere un cono circular recto con dos hojas y haga pasar planos por él, en distintos ángulos, como se muestra en la figura 1. Las curvas que obtendrá como secciones se llaman, respectivamente, elipse, parábola e hipérbola. (También puede obtener varias formas límites o degeneradas: una circunferencia, un punto, un par de rectas que se intersecan y una recta). Estas curvas se llaman *secciones cónicas*, o simplemente *cónicas*. Esta definición, que debemos a los griegos, es incómoda y pronto adoptaremos una distinta. Se puede demostrar que las dos definiciones son coherentes.



Elipse Parábola Hipérbola

Figura 1

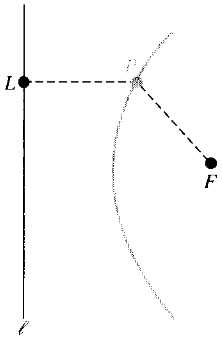


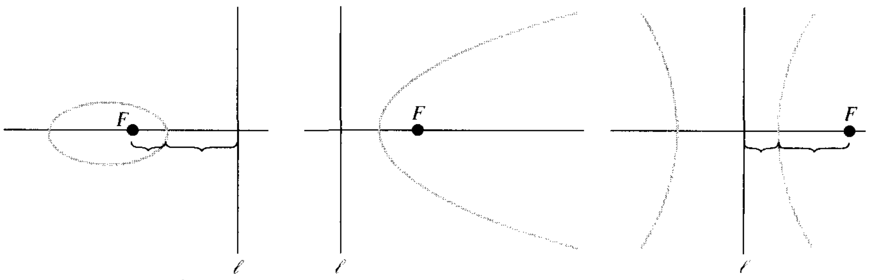
Figura 2

En el plano, sea ℓ una recta fija (la **directriz**) y F un punto fijo (el **foco**) que no está sobre la recta, como en la figura 2. El conjunto de puntos P para los que el cociente de la distancia $|PF|$ desde el foco entre la distancia $|PL|$ a la recta es una constante positiva e (la **excentricidad**), es decir, el conjunto de puntos P que satisfacen

$$\boxed{|PF| = e|PL|}$$

es una **cónica**. Si $0 < e < 1$, la cónica es una **elipse**; si $e = 1$, es una **parábola**; si $e > 1$, es una **hipérbola**.

Al trazar las curvas correspondientes a $e = \frac{1}{2}$, $e = 1$ y $e = 2$, obtenemos las tres curvas que aparecen en la figura 3.



Elipse ($e = \frac{1}{2}$) Parábola ($e = 1$) Hipérbola ($e = 2$)

Figura 3

En cada caso, las curvas son simétricas respecto de la recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz. Llamamos a esta recta el **eje mayor** (o simplemente el *eje*) de la cónica. Un punto donde la cónica cruza al eje es un **vértice**. La parábola tiene un vértice, mientras que la elipse y la hipérbola tienen dos vértices.

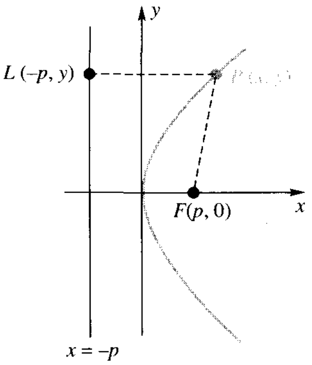


Figura 4

La parábola ($e = 1$) Una **parábola** es el conjunto de puntos P que son equidistantes de la directriz ℓ y del foco F; es decir, los puntos que satisfacen

$$|PF| = |PL|$$

Esta definición nos permite deducir la ecuación en xy, y queremos que ésta sea lo más sencilla posible. La posición de los ejes de coordenadas no tiene efectos sobre la curva, pero influye sobre la sencillez de la ecuación de la curva. Como una parábola es simétrica con respecto de su eje, es natural colocar uno de los ejes de coordenadas, como el eje x, a lo largo del eje de la parábola. Ubicamos F, el foco, a la derecha del origen, digamos, en $(p, 0)$; y la directriz a la izquierda, con ecuación $x = -p$. Entonces el vértice está en el origen. La figura 4 muestra todo esto.

La condición $|PF| = |PL|$ y la fórmula de la distancia implican

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+p)^2 + (y-y)^2}$$

Después de elevar al cuadrado ambos lados y simplificar, obtenemos

$$\boxed{y^2 = 4px}$$

Esto se llama **ecuación canónica** de una parábola horizontal (con eje horizontal), que abre hacia la derecha. Observe que $p > 0$ y que p es la distancia del foco al vértice.

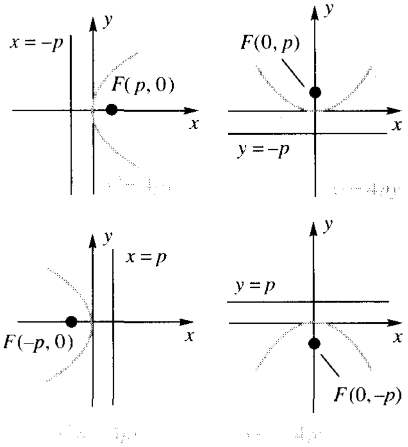


Figura 5

EJEMPLO 1 Determine el foco y la directriz de la parábola con ecuación $y^2 = 12x$.

SOLUCIÓN Como $y^2 = 4(3)x$, vemos que $p = 3$. El foco está en $(3, 0)$; la directriz es la recta $x = -3$. ■

Hay tres variantes de la ecuación canónica. Si intercambiamos los papeles de x y y, obtenemos la ecuación $x^2 = 4py$. Ésta es la ecuación de una parábola vertical con foco en $(0, p)$ y directriz $y = -p$. Por último, si introducimos un signo menos en un lado de la ecuación, esto hace que la parábola se abra en la dirección opuesta. Los cuatro casos se muestran en la figura 5.

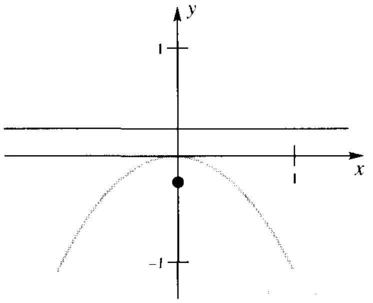


Figura 6

EJEMPLO 2 Determine el foco y la directriz de la parábola $x^2 = -y$ y bosqueje la gráfica

SOLUCIÓN Escribimos $x^2 = -4\left(\frac{1}{4}\right)y$, de donde concluimos que $p = \frac{1}{4}$. La forma de la ecuación nos dice que la parábola es vertical y que abre hacia abajo. El foco está en $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$; la directriz es la recta $y = \frac{1}{4}$. La gráfica aparece en la figura 6. ■

EJEMPLO 3 Determine la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco en $(0, 5)$.

SOLUCIÓN La parábola abre hacia arriba y $p = 5$. La ecuación es $x^2 = 4(5)y$, es decir, $x^2 = 20y$. ■

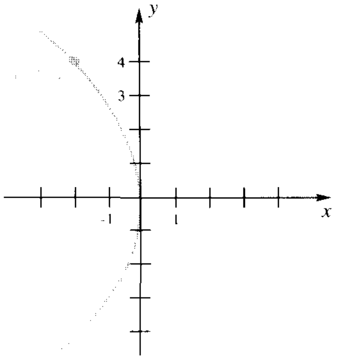


Figura 7

EJEMPLO 4 Determine la ecuación de la parábola con vértice en el origen, que pasa por $(-2, 4)$ y abre hacia la izquierda. Bosqueje la gráfica.

SOLUCIÓN La ecuación tiene la forma $y^2 = -4px$. Como $(-2, 4)$ está en la gráfica, $(4)^2 = -4p(-2)$, de donde $p = 2$. La ecuación deseada es $y^2 = -8x$ y su gráfica aparece en la figura 7. ■

La propiedad óptica Una propiedad geométrica sencilla de una parábola es la base de muchas aplicaciones importantes. Si F es el foco y P es cualquier punto en la parábola, la recta tangente en P forma ángulos iguales con FP y la recta GP, que es paralela al eje de la parábola (véase la figura 8). Un principio de la física dice que cuando un rayo de luz choca con una superficie reflejante, el ángulo de incidencia es igual al de reflexión. Esto implica que si una parábola se gira en torno de su eje para formar una capa reflejante hueca, todos los rayos de luz que salen del foco y tocan la capa se reflejan hacia fuera, paralelos al eje. Esta propiedad de la parábola se usa en el diseño de faros buscadores, con la fuente luminosa colocada en el foco. Recíprocamente, se usa en ciertos telescopios y antenas parabólicas donde los rayos paralelos que llegan desde una estrella distante o de un satélite se enfocan en un solo punto.

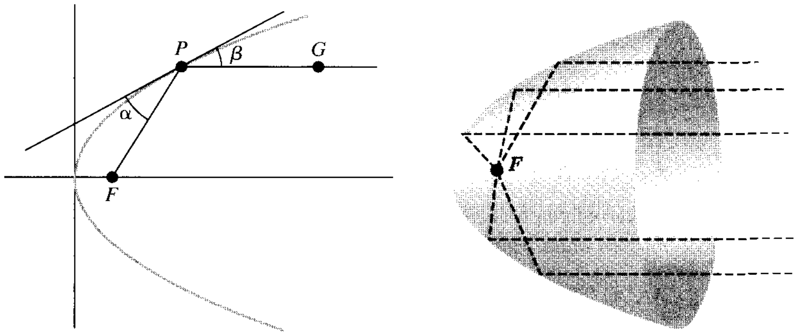


Figura 8

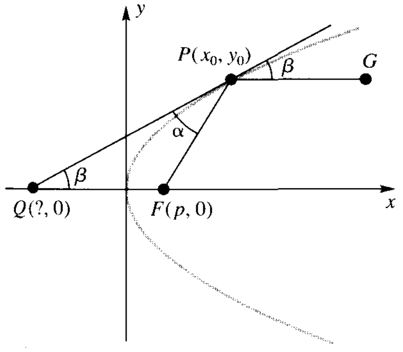


Figura 9

EJEMPLO 5 Demuestre la propiedad óptica de la parábola.

SOLUCIÓN En la figura 9, sea QP la recta tangente en P y sea GP la recta paralela al eje x que pasa por P. Debemos demostrar que $\alpha = \beta$. Después de observar que $\angle FQP = \beta$, reducimos el problema a demostrar que el triángulo FQP es isósceles.

Primero, obtenemos la coordenada x de Q. Al derivar $y^2 = 4px$ en forma implícita obtenemos $2y'y = 4p$, de donde podemos concluir que la pendiente de la recta tangente en $P(x_0, y_0)$ es $2p/y_0$. La ecuación de esta recta es

$$y - y_0 = \frac{2p}{y_0}(x - x_0)$$

Al hacer $y = 0$ y despejar a x tenemos $-y_0 = (2p/y_0)(x - x_0)$, o $x - x_0 = -y_0^2/2p$. Ahora, $y_0^2 = 4px_0$, lo que implica, $x - x_0 = -2x_0$, es decir, $x = -x_0$; Q tiene coordenadas $(-x_0, 0)$.

Para demostrar que los segmentos FP y FQ tienen la misma longitud, usamos la fórmula de la distancia

$$\begin{aligned} |FP| &= \sqrt{(x_0 - p)^2 + y_0^2} = \sqrt{x_0^2 - 2x_0p + p^2 + 4px_0} \\ &= \sqrt{x_0^2 + 2x_0p + p^2} = x_0 + p = |FQ| \end{aligned}$$ ■

El sonido obedece las mismas leyes de reflexión que la luz; se usan micrófonos parabólicos para elegir y concentrar sonidos de, por ejemplo, una parte distante de un estadio de futbol. Los radares y radio–telescopios también tienen como base este principio.

Hay muchas otras aplicaciones de las parábolas. Por ejemplo, la trayectoria de un proyectil es una parábola si se desprecia la resistencia del aire y otros factores menores. El cable de un puente colgante con carga uniforme toma la forma de una parábola. Con frecuencia, los arcos son parabólicos. Las trayectorias de algunos cometas son parabólicas.

Revisión de conceptos

1. El conjunto de puntos P que satisfacen $|PF| = e|PL|$ (es decir, la distancia al foco es igual a e por la distancia a la directriz) es una elipse si _______, una parábola si _______ y una hipérbola si _______.

2. La ecuación canónica de una parábola, con vértice en el origen y que abre a la derecha, es _______.

3. La parábola $y = \frac{1}{4}x^2$ tiene foco _______ y directriz _______.

4. Los rayos de una fuente de luz en el foco de un espejo parabólico se reflejarán en una dirección_______.

Conjunto de problemas 10.1

En los problemas del 1 al 8 determine las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz para cada parábola. Haga un bosquejo que muestre la parábola, su foco y su directriz.

1. $y^2 = 4x$

2. $y^2 = -12x$

3. $x^2 = -12y$

4. $x^2 = -16y$

5. $y^2 = x$

6. $y^2 + 3x = 0$

7. $6y - 2x^2 = 0$

8. $3x^2 - 9y = 0$

En los problemas del 9 al 14 determine la ecuación canónica de cada parábola a partir de la información dada. Suponga que el vértice está en el origen.

9. El foco está en $(2, 0)$

10. La directriz es $x = 3$

11. La directriz es $y - 2 = 0$

12. El foco está en $\left(0, -\frac{1}{9}\right)$

13. El foco está en $(-4, 0)$

14. La directriz es $y = \frac{7}{2}$

15. Determine la ecuación de la parábola con vértice en el origen y eje a lo largo del eje x si la parábola pasa por el punto $(3, -1)$. Haga un bosquejo.

16. Determine la ecuación de la parábola que pasa por el punto $(-2, 4)$, si su vértice está en el origen y su eje está a lo largo del eje x. Haga un bosquejo.

17. Determine la ecuación de la parábola que pasa por el punto $(6, -5)$, si su vértice está en el origen y su eje está a lo largo del eje y. Haga un bosquejo.

18. Determine la ecuación de la parábola cuyo vértice es el origen y su eje es el eje y, si la parábola pasa por el punto $(-3, 5)$. Haga un bosquejo.

En los problemas del 19 al 26 determine las ecuaciones de la tangente y la normal a la parábola dada en el punto dado. Bosqueje la parábola y las rectas tangente y normal.

19. $y^2 = 16x$, $(1, -4)$

20. $x^2 = -10y$, $\left(2\sqrt{5}, -2\right)$

21. $x^2 = 2y$, $(4, 8)$

22. $y^2 = -9x$, $(-1, -3)$

23. $y^2 = -15x$, $\left(-3, -3\sqrt{5}\right)$

24. $x^2 = 4y$, $(4, 4)$

25. $x^2 = -6y$, $\left(3\sqrt{2}, -3\right)$

26. $y^2 = 20x$, $\left(2, -2\sqrt{10}\right)$

27. La pendiente de la recta tangente a la parábola $y^2 = 5x$ en cierto punto sobre la parábola es $\sqrt{5}/4$. Determine las coordenadas de ese punto. Haga un bosquejo.

28. La pendiente de la recta tangente a la parábola $x^2 = -14y$ en un punto sobre la parábola es $-2\sqrt{7}/7$. Determine las coordenadas de ese punto.

29. Determine la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 = -18x$ que es paralela a la recta $3x - 2y + 4 = 0$.

30. Cualquier segmento de recta que pase por el foco de la parábola, cuyos extremos estén en la parábola, es una **cuerda focal**. Demuestre que las tangentes a una parábola en los puntos extremos de cualquier cuerda focal se cortan en la directriz.

31. Demuestre que las tangentes a una parábola en los extremos de cualquier cuerda focal son perpendiculares entre sí (véase el problema 30).

32. Una cuerda de una parábola que es perpendicular al eje y a 1 unidad del vértice tiene longitud de 1 unidad. ¿Qué distancia hay del vértice al foco?

33. Demuestre que el vértice es el punto de una parábola más cercano al foco.

34. Un asteroide del espacio exterior es observado desde la Tierra y sigue una trayectoria parabólica con la Tierra en el foco. Cuando la línea de la Tierra al asteroide hace primero un ángulo de 90° con el eje de la parábola, se calcula que el asteroide se encuentra a 40 millones de millas. ¿Qué tanto se acercará el asteroide a la Tierra (véase el problema 33)? Considere a la Tierra como un punto.

$\boxed{C}$ **35.** Resuelva el problema 34 suponiendo que el ángulo mide 75° en vez de 90°.

36. Los cables de la parte central de un puente colgante tienen la forma de una parábola (véase el problema 41). Si las torres están separadas por una distancia de 800 metros y los cables están unidos a éstas en puntos que están a 400 metros por arriba del suelo del puente, ¿cuál es la longitud del poste vertical que está a 100 metros de la torre? Suponga que el cable toca la parte inferior del puente en el punto medio de éste (figura 10).

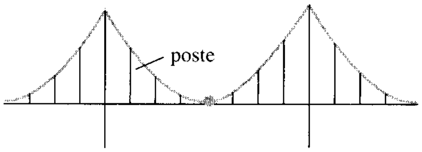


Figura 10

37. La cuerda focal perpendicular al eje de una parábola se denomina **lado recto**. Para la parábola $y^2 = 4px$ en la figura 11, sea F el foco, R cualquier punto sobre la parábola a la izquierda del lado recto y G la intersección del lado recto con la recta que pasa por R y que es paralela al eje. Determine $|FR| + |RG|$ y observe que esta suma es constante

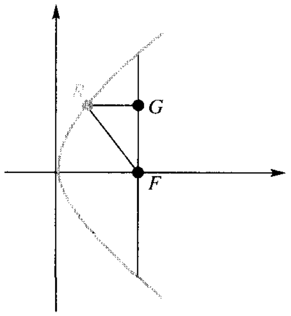


Figura 11

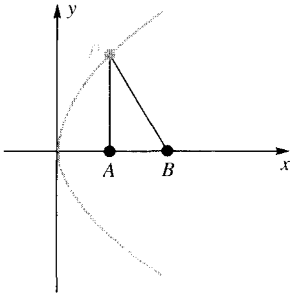


Figura 12

38. Para la parábola $y^2 = 4px$ de la figura 12, P es cualquiera de sus puntos, excepto el vértice; PB es la recta normal en P; PA es perpendicular al eje de la parábola, y A y B están sobre el eje. Determine $|AB|$ y observe que esto es constante.

39. Demuestre que la cuerda focal de la parábola $y^2 = 4px$ con puntos extremos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) tiene longitud $x_1 + x_2 + 2p$. Use esto para el caso particular del cálculo de la longitud L del lado recto.

40. Demuestre que el conjunto de puntos equidistantes a una circunferencia y a una recta fuera de la circunferencia es una parábola.

EXPL **41.** Considere la plataforma de un puente con un peso de δ libras por pie lineal, sostenida por un cable, que suponemos de peso despreciable en comparación con la plataforma. La sección de cable OP desde el punto más bajo (el origen) y el punto general $P(x, y)$ aparecen en la figura 13.

Las fuerzas que actúan en esta sección del cable son

H = tensión horizontal que jala en O

T = tensión tangente en P

$W = \delta x$ = peso de x pies de la plataforma

Para lograr el equilibrio, los componentes horizontal y vertical de T deben equilibrarse con H y W, respectivamente. Así,

$$\frac{T \operatorname{sen} \phi}{T \cos \phi} = \tan \phi = \frac{\delta x}{H}$$

Es decir,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\delta x}{H}, \qquad y(0) = 0$$

Resuelva esta ecuación diferencial para demostrar que el cable cuelga con la forma de una parábola. (Compare este resultado con el de un cable suspendido, sin carga, del problema 53 de la sección 6.9.)

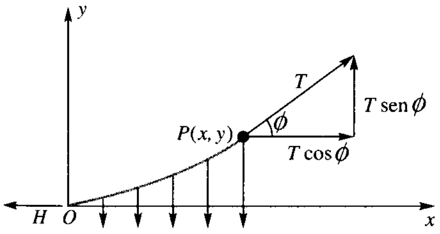


Figura 13

EXPL **42.** Considere la parábola $y = x^2$ en el intervalo $[a, b]$ y sean $c = (a + b)/2$ el punto medio de $[a, b]$; d el punto medio de $[a, c]$, y e el punto medio de $[c, b]$. Sea T_1 el triángulo con vértices sobre la parábola en a, c y b, y sea T_2 la unión de los dos triángulos con vértices en la parábola en a, d, c y c, e, b, respectivamente (figura 14). Continúe construyendo triángulos de esta manera y obtenga $T_3, T_4, \ldots$

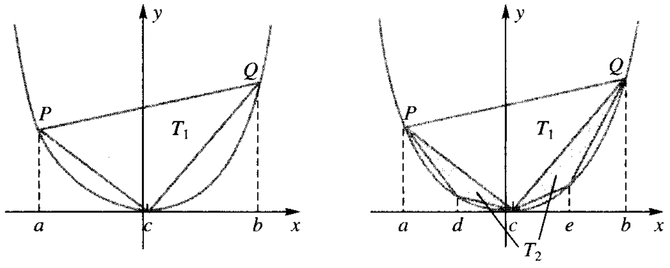


Figura 14

(a) Demuestre que $A(T_1) = (b - a)^3/8$.

(b) Demuestre que $A(T_2) = A(T_1)/4$.

(c) Sea S el segmento parabólico determinado por la cuerda PQ. Demuestre que el área de S satisface

$$A(S) = A(T_1) + A(T_2) + A(T_3) + \cdots = \frac{4}{3}A(T_1)$$

Éste es un famoso resultado de Arquímedes, quien lo obtuvo sin coordenadas.

(d) Use estos resultados para demostrar que el área bajo $y = x^2$ entre a y b es $b^3/3 - a^3/3$.

CAS **43.** Ilustre los problemas 30 y 31 para la parábola $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$ graficando (en la misma ventana de graficación) la parábola, su directriz, su cuerda focal paralela al eje x y las rectas tangentes en los extremos de la cuerda focal.

CAS **44.** En el problema 60 de la sección 6.9, se le pidió determinar la ecuación del Arco Gateway en San Luis, Missouri.

(a) Determine la ecuación de una parábola con las propiedades de que su vértice esté en $(0, 630)$ e intersecte al eje x en ± 315.

(b) En la misma ventana de graficación trace la catenaria que es el Arco Gateway y la parábola que determinó en la parte (a).

(c) Aproxime (al pie más cercano) la mayor distancia vertical entre la catenaria y la parábola.

Respuestas a la revisión de conceptos: 1. $e < 1$; $e = 1$; $e > 1$ **2.** $y^2 = 4px$ **3.** $(0, 1)$; $y = -1$ **4.** paralela al eje.

10.2
Elipses e hipérbolas

Recuerde que la cónica determinada mediante la condición $|PF| = e|PL|$ es una **elipse** si $0 < e < 1$ y una **hipérbola** si $e > 1$ (véase la introducción a la sección 10.1). En cualquier caso, la cónica tiene dos vértices, que llamamos A' y A. El punto del eje mayor a la mitad de la distancia entre A' y A es el **centro** de la cónica. Las elipses y las hipérbolas son simétricas respecto a sus centros (como demostraremos en breve) y, por tanto, se llaman **cónicas centrales**.

Para deducir la ecuación de una cónica central, colocamos el eje x a lo largo del eje mayor, con el origen en el centro. Podemos suponer que el foco es $F(c, 0)$, que la directriz es $x = k$ y los vértices son $A'(-a, 0)$ y $A(a, 0)$, con c, k y a positivos. Es claro

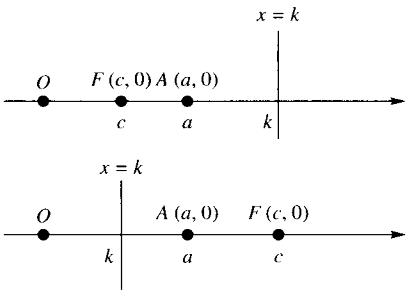


Figura 1

que A debe estar entre F y la recta $x = k$. Las dos disposiciones posibles aparecen en la figura 1. En el primer caso, la condición $|PF| = e|PL|$ aplicada al punto $P = A$ implica

$$a - c = e(k - a) = ek - ea \tag{1}$$

En el segundo caso, la condición $|PF| = e|PL|$ aplicada al punto $P = A$ implica

$$c - a = e(a - k) = ea - ek$$

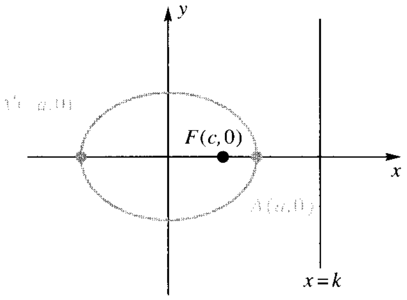
que, al ser multiplicados ambos lados por -1, se ve que es equivalente a (1). Luego se aplica la relación $|PF| = e|PL|$ a los puntos $A'(-a, 0)$ y $F'(-c, 0)$ y a la recta $x = -k$. Esto conduce a

$$a + c = e(k + a) = ek + ea \tag{2}$$

Al despejar c y k en las ecuaciones (1) y (2), obtenemos

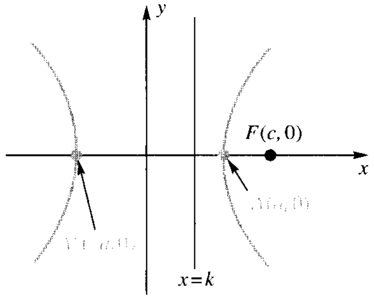
$$c = ea \quad \text{y} \quad k = \frac{a}{e}$$

Si $0 < e < 1$, entonces $c = ea < a$ y $k = a/e > a$. Así que para el caso de una elipse, el foco F está a la izquierda del vértice A y la directriz $x = k$ se encuentra a la derecha de A. Por otra parte, si $e > 1$, entonces $c = ea > a$ y $k = a/e < a$. Para el caso de una hipérbola, la directriz $x = k$ se encuentra a la izquierda de A, y el foco F a la derecha de A. Las dos situaciones se muestran en las figuras 2 y 3.



Elipse ($0 < e < 1$)

Figura 2



Hipérbola ($e > 1$)

Figura 3

Ahora, sea $P(x, y)$ cualquier punto en la elipse (o hipérbola). Entonces, $L(a/e, y)$ es su proyección sobre la directriz (véase la figura 4 para el caso de la elipse). La condición $|PF| = e|PL|$ se convierte en

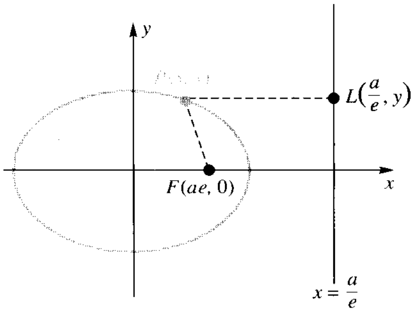


Figura 4

$$\sqrt{(x - ae)^2 + y^2} = e\sqrt{\left(x - \frac{a}{e}\right)^2}$$

Al elevar al cuadrado ambos lados y agrupar términos, obtenemos la ecuación equivalente.

$$x^2 - 2aex + a^2e^2 + y^2 = e^2\left(x^2 - \frac{2a}{e}x + \frac{a^2}{e^2}\right)$$

o

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 = a^2(1 - e^2)$$

o

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1$$

Como esta última ecuación sólo contiene potencias pares de x y y, corresponde a una curva simétrica respecto de los dos ejes y del origen. Además, debido a esta simetría, debe haber un segundo foco en $(-ae, 0)$ y una segunda directriz en $x = -a/e$. El eje que contiene los dos vértices (y los dos focos) es el **eje mayor**, y el eje perpendicular a él (que pasa por el centro) es el **eje menor**.

Ecuación canónica de la elipse Para la elipse, $0 < e < 1$, de modo que $(1 - e^2)$ es positivo. Para simplificar la notación, sea $b = a\sqrt{1 - e^2}$. Entonces, la ecuación recién deducida toma la forma

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

que se llama la **ecuación canónica de una elipse**. Como $c = ae$, los números a, b y c satisfacen la relación pitagórica $a^2 = b^2 + c^2$. En la figura 5, el triángulo rectángulo sombreado exhibe la condición $a^2 = b^2 + c^2$. Así, el número $2a$ es el **diámetro mayor**, mientras que $2b$ es el **diámetro menor**.

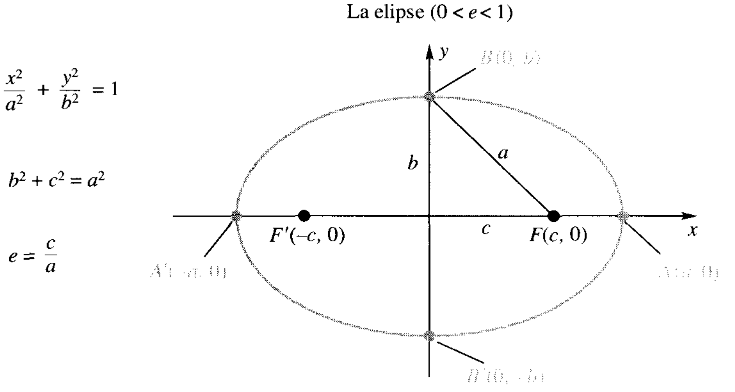


Figura 5

Ahora considere el efecto de cambiar el valor de e. Si e está cerca de 1 entonces $b = a\sqrt{1 - e^2}$ es pequeño con respecto de a; la elipse es delgada y muy **excéntrica**. Por otro lado, si e está cerca de 0 (cerca de la excentricidad nula), b es casi tan grande como a; la elipse es gorda y bien redondeada (figura 6). En el caso límite cuando $b = a$, la ecuación adquiere la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

que es equivalente a $x^2 + y^2 = a^2$. Ésta es la ecuación de una circunferencia de radio a con centro en el origen.

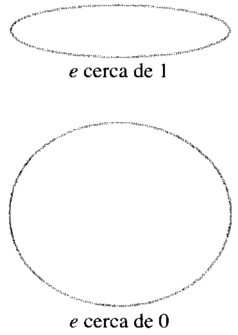


Figura 6

EJEMPLO 1 Bosqueje la gráfica de

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$$

y determine sus focos y excentricidad.

SOLUCIÓN Como $a = 6$ y $b = 2$, calculamos

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{36 - 4} = 4\sqrt{2} \approx 5.66$$

Los focos están en $(\pm c, 0) = \left(\pm 4\sqrt{2}, 0\right)$, y $e = c/a \approx 0.94$. La gráfica se bosqueja en la figura 7. ■

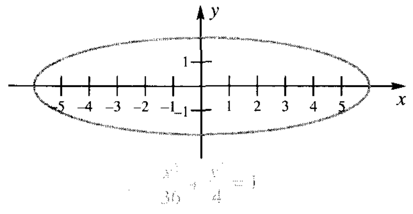


Figura 7

A las elipses bosquejadas hasta ahora les llamamos *elipses horizontales*, porque el eje mayor es el x. Si intercambiamos los papeles de x y y, tenemos la ecuación de una elipse vertical:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \text{o} \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

EJEMPLO 2 Bosqueje la gráfica de

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

y determine sus focos y excentricidad.

SOLUCIÓN El cuadrado mayor está ahora bajo y^2, lo cual nos dice que el eje mayor es vertical. Observando que $a = 5$ y $b = 4$, concluimos que $c = \sqrt{25 - 16} = 3$. Así, los focos son $(0, \pm 3)$ y $e = c/a = \frac{3}{5} = 0.6$ (figura 8). ■

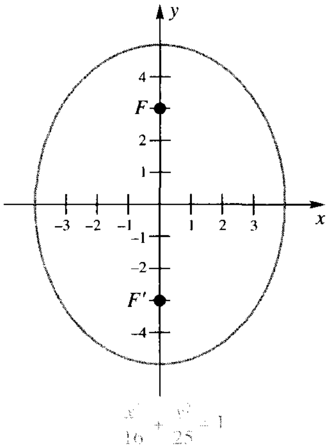


Figura 8

Ecuación canónica de la hipérbola Para la hipérbola, $e > 1$ y en consecuencia $e^2 - 1$ es positivo. Si hacemos $b = a\sqrt{e^2 - 1}$, entonces la ecuación $x^2/a^2 + y^2/(1 - e^2)\, a^2 = 1$, que dedujimos antes, adquiere la forma

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Esto se llama la **ecuación canónica de una hipérbola**. Como $c = ae$, ahora obtenemos $c^2 = a^2 + b^2$. (Observe cómo difiere esto de la relación correspondiente para una elipse).

Para interpretar b, observe que si despejamos y en términos de x, obtenemos

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Para x grande, $\sqrt{x^2 - a^2}$ se comporta como x, (es decir, $\left(\sqrt{x^2 - a^2} - x\right) \to 0$) cuando $\to \infty$; véase el problema 70) y por lo tanto y se comporta como

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{o} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

Más precisamente, la gráfica de la hipérbola dada tiene estas dos rectas como asíntotas.

Los hechos importantes para la hipérbola se resumen en la figura 9. Como en el caso de la elipse, existe un triángulo rectángulo importante (sombreado en el diagrama) con catetos a y b. Este **triángulo fundamental** determina el rectángulo con centro en el origen que tiene lados de longitud $2a$ y $2b$. Las diagonales extendidas de este rectángulo son las asíntotas antes mencionadas.

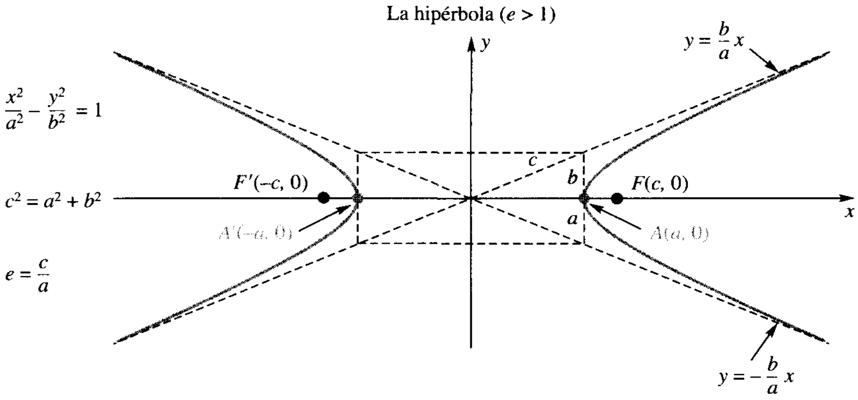


Figura 9

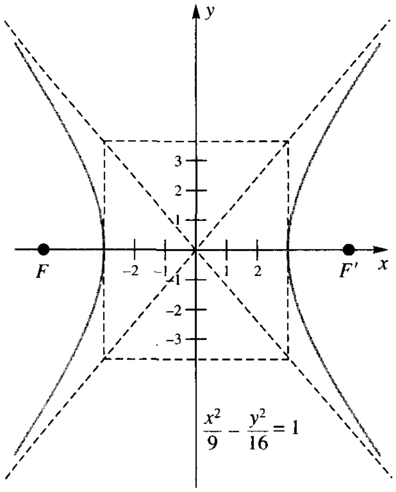


Figura 10

EJEMPLO 3 Bosqueje la gráfica de

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

mostrando las asíntotas. ¿Cuáles son las ecuaciones de las asíntotas? ¿Cuáles son los focos?

SOLUCIÓN Primero determinamos el triángulo fundamental; tiene como cateto horizontal 3 y como cateto vertical 4. Después de dibujarlo, podemos indicar las asíntotas y bosquejar la gráfica (figura 10). Las asíntotas son $y = \frac{4}{3}x$ y $y = -\frac{4}{3}x$. Como $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$, los focos están en $(\pm 5, 0)$. ■

De nuevo, debemos analizar el efecto de intercambiar los papeles de x y y. La ecuación adquiere la forma

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Ésta es la ecuación de una hipérbola vertical (eje mayor vertical). Sus vértices están en $(0, \pm a)$; sus focos están en $(0, \pm c)$.

Para la elipse y la hipérbola, a siempre es la distancia del centro a un vértice. Para la elipse, $a > b$; para la hipérbola no hay tal requisito.

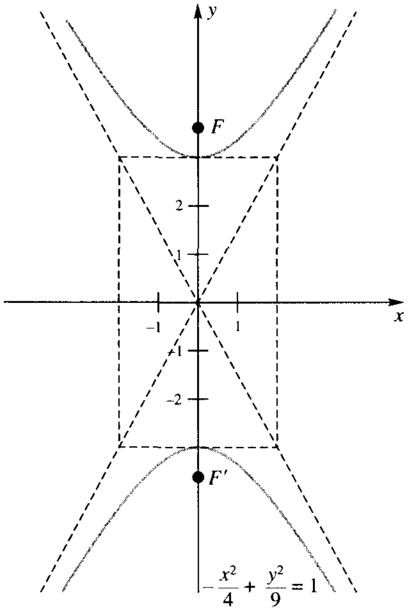


Figura 11

EJEMPLO 4 Determine los focos de

$$-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

y bosqueje su gráfica.

SOLUCIÓN Notamos de inmediato que ésta es una hipérbola vertical, determinada por el hecho de que el signo de más se asocia al término de y^2. Así que, $a = 3$, $b = 2$, y $c = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \approx 3.61$. Los focos están en $\left(0, \pm\sqrt{13}\right)$ (véase la figura 11). ■

EJEMPLO 5 De acuerdo con Johannes Kepler (1571-1630), los planetas giran alrededor del Sol en órbitas elípticas, con el Sol en uno de sus focos. La distancia máxima de la Tierra al Sol es de 94.56 millones de millas y su distancia mínima es 91.45 millones de millas. ¿Cuál es la excentricidad de la órbita? ¿Cuáles son los diámetros mayor y menor?

SOLUCIÓN Usamos la notación en la figura 12 y vemos que

$$a + c = 94.56 \qquad a - c = 91.45$$

Al despejar a y c en estas ecuaciones, obtenemos $a = 93.01$ y $c = 1.56$. Así,

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1.56}{93.01} \approx 0.017$$

y los diámetros mayor y menor (en millones de millas) son, respectivamente,

$$2a \approx 186.02 \qquad 2b = 2\sqrt{a^2 - c^2} \approx 185.99$$ ■

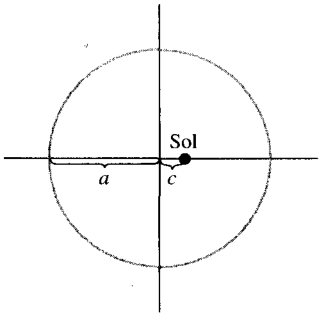
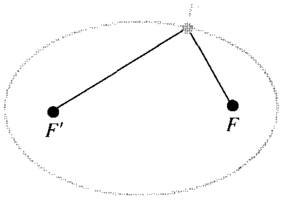


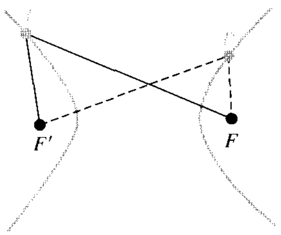
Figura 12

Propiedades cordales de la elipse y la hipérbola Hemos elegido definir las secciones cónicas en términos de la condición $|PF| = e|PL|$, en donde la figura es una elipse si $0 < e < 1$ y una hipérbola si $e > 1$. Este enfoque nos permite tratar todas las cónicas de una manera unificada. Muchos autores prefieren definir la elipse y la hipérbola mediante las siguientes formas.



Elipse: $|PF'| + |PF| = 2a$

Figura 13



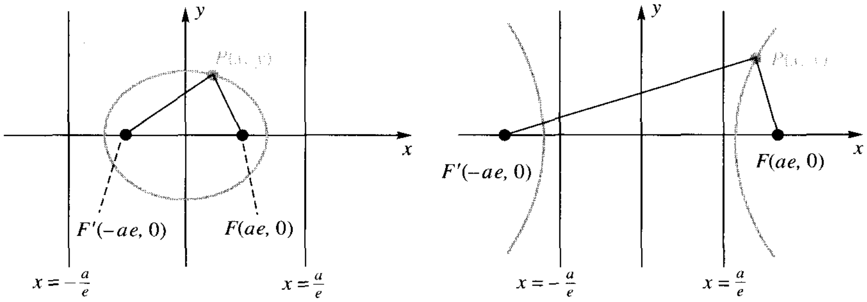
Hipérbola: $||PF'| - |PF|| = 2a$

Figura 14

Una elipse es el conjunto de todos los puntos en el plano, tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos (los focos) es una constante positiva dada $2a$. Una hipérbola es el conjunto de puntos en el plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos (los focos) es una constante positiva dada, $2a$. (Aquí, la palabra *diferencia* se considera como la distancia mayor menos la distancia menor).

Estas definiciones se ilustran en la figura 13 y 14. Para la elipse, imagine una cuerda de longitud $2a$ clavada en sus dos extremos. Si un lápiz estira la cuerda, con su punta en P, entonces se puede trazar la elipse moviendo el lápiz, manteniendo tensa la cuerda. Estas propiedades, denominadas *propiedades cordales*, deberían ser consecuencia de nuestras definiciones con excentricidad. Ahora las deduciremos.

Suponga dadas a y e. Sabemos que los focos tienen coordenadas $(\pm ae, 0)$ y las directrices tienen ecuaciones $x = \pm a/e$. Estos hechos se indican en la figura 15.



$0 < e < 1$

$e > 1$

Figura 15

Si consideramos un punto arbitrario $P(x, y)$ sobre la elipse, entonces, de la condición $|PF| = e|PL|$ aplicada primero al foco y a la directriz de la izquierda y luego a los correspondientes de la derecha, obtenemos

$$|PF'| = e\left(x + \frac{a}{e}\right) = ex + a \qquad |PF| = e\left(\frac{a}{e} - x\right) = a - ex$$

y así

$$\boxed{|PF'| + |PF| = 2a}$$

Ahora, consideremos la hipérbola con $P(x, y)$ en su rama derecha, como se muestra en la parte derecha de la figura 15. Entonces

$$|PF'| = e\left(x + \frac{a}{e}\right) = ex + a \qquad |PF| = e\left(x - \frac{a}{e}\right) = ex - a$$

y entonces $|PF'| - |PF| = 2a$. Si $P(x, y)$ hubiese estado en la rama izquierda, tendríamos $-2a$ en vez de $2a$. En cualquier caso,

$$\boxed{||PF'| - |PF|| = 2a}$$

EJEMPLO 6 Determine la ecuación del conjunto de puntos tales que la suma de sus distancias desde $(\pm 3, 0)$ es igual a 10.

SOLUCIÓN Ésta es una elipse horizontal con $a = 5$ y $c = 3$. Así, $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 4$, y la ecuación es

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

■

EJEMPLO 7 Determine la ecuación del conjunto de puntos tales que la diferencia de sus distancias a $(0, \pm 6)$ es igual a 4.

SOLUCIÓN Ésta es una hipérbola vertical con $a = 2$ y $c = 6$. Así, $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, y la ecuación es

$$-\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{4} = 1$$ ■

Propiedades ópticas Considere dos espejos, uno con la forma de una elipse y el otro con la forma de una hipérbola. Si un rayo de luz que emana de un foco toca al espejo, se reflejará hacia el otro foco en el caso de la elipse y se alejará del otro foco en el caso de la hipérbola. Estos hechos aparecen en la figura 16.

Lentes

Las propiedades ópticas de las cónicas han sido utilizadas en la elaboración de lentes durante cientos de años. Una innovación reciente es la introducción de lentes bifocales en los anteojos. Comenzando por la parte superior, estas lentes se pulen de modo que la excentricidad varíe continuamente de $e < 1$ a $e = 1$ a $e > 1$, produciendo entonces secciones transversales horizontales que van de elipses a parábolas e hipérbolas, de modo que permitan una visión perfecta de los objetos a cualquier distancia, moviendo en forma adecuada la cabeza.

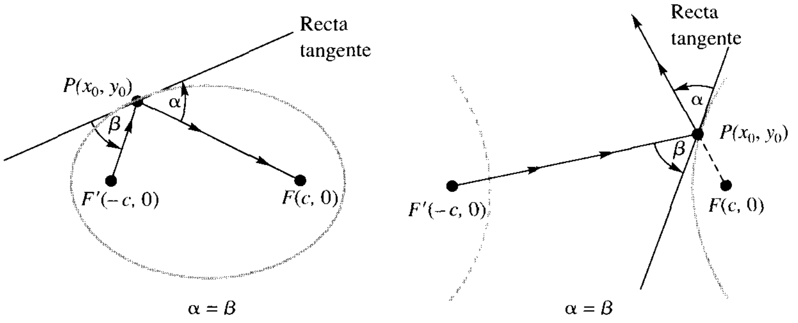


Figura 16

Para demostrar estas propiedades ópticas (es decir, para mostrar que $\alpha = \beta$ en ambas partes de la figura 16), suponemos que las curvas están en posición canónica, de modo que sus ecuaciones son $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ y $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, respectivamente. Para la elipse, derivamos de manera implícita para determinar la pendiente de la recta tangente.

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0$$

$$y' = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$$

La ecuación de la recta tangente en (x_0, y_0) es $m = -b^2x_0/(a^2y_0)$. Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente se puede escribir de forma sucesiva como

$$y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0)$$

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0$$

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

Para calcular $\tan \alpha$ para la elipse, recordamos (problema 40 de la sección 0.7) una fórmula para la tangente del ángulo medido en el sentido contrario al de las manecillas del reloj desde una recta ℓ_1 a otra recta ℓ en términos de sus pendientes respectivas m_1 y m:

$$\tan \alpha = \frac{m - m_1}{1 + mm_1}$$

Ahora nos referimos a la figura 16 y sea ℓ_1 la recta FP y ℓ la recta tangente en P. Entonces

$$\tan\alpha = \frac{\dfrac{-b^2x_0}{a^2y_0} - \dfrac{y_0 - 0}{x_0 - c}}{1 + \left(\dfrac{-b^2x_0}{a^2y_0}\right)\left(\dfrac{y_0 - 0}{x_0 - c}\right)} = \frac{-b^2x_0(x_0 - c) - a^2y_0^2}{a^2y_0(x_0 - c) - b^2x_0y_0}$$

$$= \frac{b^2cx_0 - (b^2x_0^2 + a^2y_0^2)}{(a^2 - b^2)x_0y_0 - a^2cy_0} = \frac{b^2cx_0 - a^2b^2}{c^2x_0y_0 - a^2cy_0}$$

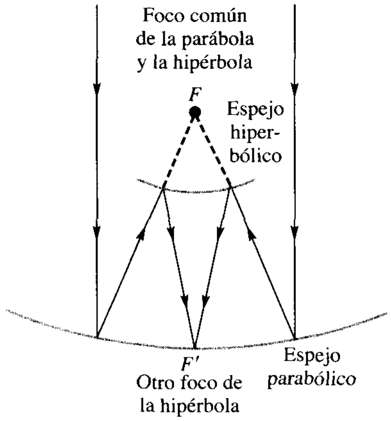
$$= \frac{b^2(cx_0 - a^2)}{cy_0(cx_0 - a^2)} = \frac{b^2}{cy_0}$$

El mismo cálculo con c reemplazado por $-c$ da

$$\tan(-\beta) = \frac{b^2}{-cy_0}$$

y como $\tan\beta = b^2/cy_0$. Concluimos que $\tan\alpha = \tan\beta$, y en consecuencia, $\alpha = \beta$.

Una deducción similar establece el resultado correspondiente para la hipérbola.


Foco común de la parábola y la hipérbola
F
Espejo hiperbólico
F'
Otro foco de la hipérbola
Espejo parabólico

Telescopio de reflexión

Figura 17

Aplicaciones La propiedad de reflexión de la elipse es la base del efecto de la *galería de murmullos* que se puede observar, por ejemplo, en el Capitolio de Estados Unidos, el Tabernáculo de los Mormones y muchos museos de ciencia. Un orador parado en un foco se puede escuchar como un murmullo para otra persona en el otro foco, aunque su voz no sea audible en otras partes del cuarto.

Las propiedades ópticas de la parábola y la hipérbola se combinan en el diseño de un telescopio de reflexión (figura 17). Los rayos paralelos de una estrella se concentran finalmente en el ocular en F'.

La propiedad cordal de la hipérbola se usa en navegación. En el mar, un barco puede establecer la diferencia $2a$ en su distancia a dos transmisores fijos midiendo la diferencia en los tiempos de recepción de señales de radio sincronizadas. Esto coloca su trayectoria en una hipérbola, con los dos transmisores F y F' como focos (véase la figura 18). Si se usa otra pareja de transmisores G y G', el barco debe estar en la intersección de las dos hipérbolas correspondientes (véase la figura 19). LORAN un sistema de navegación de largo alcance, tiene como base este principio.

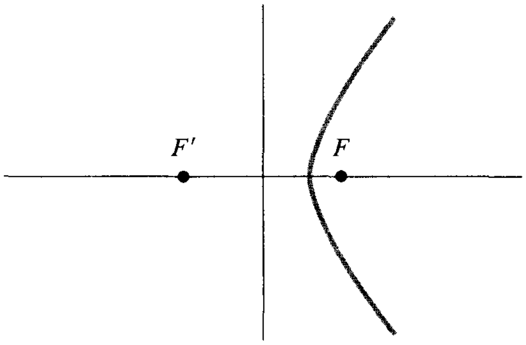


Figura 18

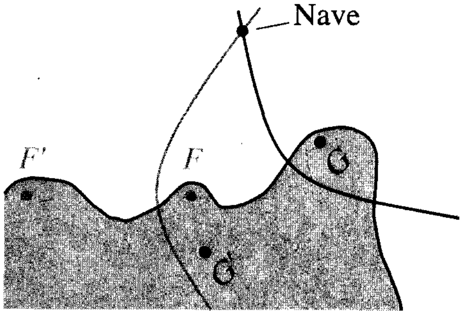


Figura 19

Revisión de conceptos

1. La ecuación canónica de la elipse horizontal con centro en $(0,0)$ es ______.

2. La ecuación en xy de la elipse vertical con centro en $(0,0)$ que tiene diámetro mayor 8 y diámetro menor 6 es ______.

3. Una elipse es el conjunto de puntos P que satisfacen $|PF| + |PF'| = 2a$, donde F y F' son puntos fijos llamados ________ de la elipse.

4. Un rayo que emana de una fuente de luz en el foco de un espejo elíptico se reflejará ______, mientras que un rayo que emana de una fuente de luz en el foco de un espejo hiperbólico se reflejará ______.

Conjunto de problemas 10.2

En los problemas del 1 al 8 dé el nombre de la cónica (elipse horizontal, hipérbola vertical y así sucesivamente) correspondiente a la ecuación dada.

1. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

2. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

3. $\dfrac{-x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

4. $\dfrac{-x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = -1$

5. $\dfrac{-x^2}{9} + \dfrac{y}{4} = 0$

6. $\dfrac{-x^2}{9} = \dfrac{y}{4}$

7. $9x^2 + 4y^2 = 9$

8. $x^2 - 4y^2 = 4$

En los problemas del 9 al 16 bosqueje la gráfica de la ecuación dada, indicando sus vértices, sus focos y, si es una hipérbola, sus asíntotas.

9. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

10. $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

11. $\dfrac{-x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

12. $\dfrac{x^2}{7} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

13. $16x^2 + 4y^2 = 32$

14. $4x^2 + 25y^2 = 100$

15. $10x^2 - 25y^2 = 100$

16. $x^2 - 4y^2 = 8$

En los problemas del 17 al 30 determine la ecuación de la cónica central dada.

17. Elipse con un foco en $(-3,0)$ y un vértice en $(6,0)$

18. Elipse con un foco en $(6,0)$ y excentricidad $\frac{2}{3}$

19. Elipse con un foco en $(0,-5)$ y excentricidad $\frac{1}{3}$

20. Elipse con un foco en $(0,3)$ y diámetro menor a 8

21. Elipse con un vértice en $(5,0)$ y que pase por $(2,3)$

22. Hipérbola con un foco en $(5,0)$ y un vértice en $(4,0)$

23. Hipérbola con un vértice en $(0,-4)$ y un foco en $(0,-5)$

24. Hipérbola con un vértice en $(0,-3)$ y excentricidad $\frac{3}{2}$

25. Hipérbola con asíntotas $2x \pm 4y = 0$ y un vértice en $(8,0)$

26. Hipérbola vertical con excentricidad $\sqrt{6}/2$ que pasa por $(2,4)$

27. Elipse con focos $(\pm 2,0)$ y directrices $x = \pm 8$

28. Hipérbola con focos $(\pm 4,0)$ y directrices $x = \pm 1$

29. Hipérbola cuyas asíntotas son $x \pm 2y = 0$ y que pasa por el punto $(4,3)$

30. Elipse horizontal que pasa por $(-5,1)$ y $(-4,-2)$

En los problemas del 31 al 34 determine la ecuación del conjunto de puntos P que satisfacen las condiciones dadas.

31. La suma de las distancias de P a $(0,\pm 9)$ es 26.

32. La suma de las distancias de P a $(\pm 4,0)$ es 14.

33. La diferencia de las distancias de P a $(\pm 7,0)$ es 12.

34. La diferencia de las distancias de P a $(0,\pm 6)$ es 10.

En los problemas del 35 al 42 determine la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto indicado.

35. $\dfrac{x^2}{27} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ en $\left(3, \sqrt{6}\right)$

36. $\dfrac{x^2}{24} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ en $\left(3\sqrt{2}, -2\right)$

37. $\dfrac{x^2}{27} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ en $\left(3, -\sqrt{6}\right)$

38. $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ en $\left(\sqrt{3}, \sqrt{2}\right)$

39. $x^2 + y^2 = 169$ en $(5,12)$

40. $x^2 - y^2 = -1$ en $\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$

41. La curva del problema 31 en $(0,13)$

42. La curva del problema 32 en $(7,0)$

43. Una entrada con forma de un arco elíptico (una semielipse) tiene 10 pies de ancho y 4 pies de altura en el centro. Una caja de 2 pies de alto debe pasar por la entrada. ¿Qué tan ancha puede ser la caja?

44. ¿Qué tan alto es el arco del problema 43 a una distancia de 2 pies a la derecha del centro?

45. ¿Qué tan largo es el *lado recto* (cuerda que pasa por un foco, perpendicular al eje mayor) para la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$?

46. Determine la longitud del lado recto (véase el problema 45) de la hipérbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$.

C **47.** El cometa Halley tiene una órbita elíptica con diámetros mayor y menor de 36.18 UA y 9.12 UA, respectivamente (1 UA es 1 unidad astronómica, la distancia media de la Tierra al Sol). ¿Cuál es su distancia mínima al Sol (suponiendo que el Sol está en un foco)?

C **48.** La órbita del cometa Kohoutek es una elipse con excentricidad $e = 0.999925$ con el Sol en un foco. Si su distancia mínima al Sol es de 0.13 UA, ¿cuál es su distancia máxima al Sol? Véase el problema 47.

C **49.** En 1957, Rusia lanzó el Sputnik I. Su órbita elíptica en torno de la Tierra alcanzó sus distancias máxima y mínima a la Tierra de 583 y 132 millas, respectivamente. Suponiendo que el centro de la Tierra es un foco y que la Tierra es una esfera con 4000 millas de radio, determine la excentricidad de la órbita.

50. La órbita del planeta Plutón tiene una excentricidad 0.249. Lo más cerca del Sol que Plutón pasa es 29.65 UA y lo más lejos es 49.31 UA. Determine los diámetros mayor y menor.

51. Si dos rectas tangentes a la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ intersecan al eje y en $(0, 6)$, determine los puntos de tangencia.

52. Si las rectas tangentes a la hipérbola $9x^2 - y^2 = 36$ intersecan al eje y en $(0, 6)$ determine los puntos de tangencia.

53. La pendiente de la tangente a la hipérbola.

$$2x^2 - 7y^2 - 35 = 0$$

en dos puntos de la hipérbola es $-\frac{2}{3}$. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos de tangencia?

54. Determine las ecuaciones de las tangentes a la elipse $x^2 + 2y^2 - 2 = 0$ que son paralelas a la recta.

$$3x - 3\sqrt{2}y - 7 = 0$$

55. Determine el área de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

56. Determine el volumen del sólido obtenido al girar la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en torno del eje y.

57. La región acotada por la hipérbola

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

y una recta vertical que pasa por un foco se gira en torno al eje x. Determine el volumen del sólido resultante.

58. Si la elipse del problema 56 se gira en torno al eje x. Determine el volumen del sólido resultante.

59. Determine las dimensiones del rectángulo con la mayor área posible que puede inscribirse en la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Suponga que los lados del rectángulo son paralelos a los ejes de la elipse.

60. Demuestre que el punto de contacto de cualquier tangente a una hipérbola está a la mitad de la distancia entre los puntos donde la tangente interseca a las asíntotas.

61. Determine el punto del primer cuadrante donde las hipérbolas $25x^2 - 9y^2 = 225$ y $-25x^2 + 18y^2 = 450$ se intersecan.

62. Determine los puntos de intersección de $x^2 + 4y^2 = 20$ y $x + 2y = 6$.

63. Bosqueje un diseño de un telescopio de reflexión que use una parábola y una elipse, en vez de una parábola y una hipérbola, como se describe en el texto y se muestra en la figura 17.

64. Una bola colocada en un foco de una mesa de billar elíptica se golpea con una fuerza enorme, de modo que continúa rebotando en las orillas de manera indefinida. Describa su trayectoria. *Sugerencia:* haga un dibujo.

65. Si la bola del problema 64 está inicialmente en el eje mayor entre un foco y el vértice más cercano a éste, ¿qué puede decir acerca de su trayectoria?

66. Demuestre que una elipse y una hipérbola con los mismos focos se intersecan en ángulos rectos. *Sugerencia*: trace una figura y use las propiedades ópticas.

67. Describa un aparato cordal para construir una hipérbola. (Hay varias posibilidades).

68. El sonido viaja a u pies/segundo y una bala de un rifle a $v \geq u$ pies/segundo. El sonido del disparo de un rifle y el impacto de la bala en el blanco se escucharon simultáneamente. Si el rifle estaba en $A(-c, 0)$, el blanco en $B(c, 0)$ y la persona que escucha estaba en $P(x, y)$, determine la ecuación de la curva donde está P (en términos de u, v y c).

69. Tres personas situadas en $A(-8, 0)$, $B(8, 0)$ y $C(8, 10)$ registraron los instantes exactos en que escucharon una explosión. Si B y C escucharon la explosión al mismo tiempo y A la escuchó 12 segundos después, ¿dónde ocurrió la explosión? Suponga que las distancias están dadas en kilómetros y que el sonido viaja a $\frac{1}{3}$ kilómetro/segundo.

70. Demuestre que $\left(\sqrt{x^2 - a^2} - x\right) \to 0$ cuando $x \to \infty$. *Sugerencia:* racionalice el numerador.

71. Para una elipse, sean p y q las distancias de un foco a los dos vértices. Demuestre que $b = \sqrt{pq}$, donde $2b$ es el diámetro menor.

72. La rueda de la figura 20 gira a 1 radián/segundo, de modo que Q tiene coordenadas $(a \cos t, a \operatorname{sen} t)$. Determine las coordenadas (x, y) de R en el instante t y muestre que recorre una trayectoria elíptica. *Nota: PQR* es un triángulo rectángulo cuando $P \neq R$ y $R \neq Q$.

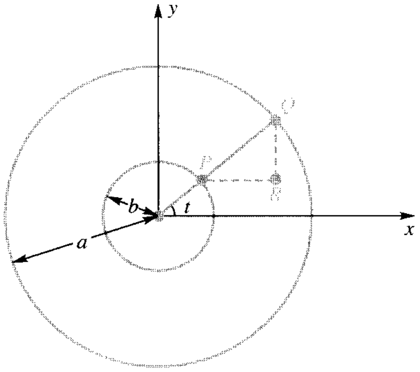


Figura 20

73. Sea P un punto en una escalera de longitud $a + b$, donde P está a a unidades del extremo superior. Conforme la escalera se desliza con su extremo superior en el eje y y su extremo inferior en el eje x, P describe una curva. Determine la ecuación de esta curva.

74. Muestre que una recta que pasa por un foco de una hipérbola y perpendicular a una asíntota, interseca esa asíntota en la directriz más cercana al foco.

75. Si dos hipérbolas, una horizontal y una vertical, tienen las mismas asíntotas, demuestre que sus excentricidades e y E satisfacen $e^{-2} + E^{-2} = 1$.

76. Sea C la curva de intersección de un cilindro circular recto y un plano que forma un ángulo ϕ $(0 < \phi < \pi/2)$ con el eje del cilindro. Demuestre que C es una elipse.

GC EXPL **77.** En el mismo conjunto de ejes trace las cónicas $y = \pm(ax^2 + 1)^{1/2}$ para $-2 \leq x \leq 2$ y $-2 \leq y \leq 2$, usando $a = -2, -1, -0.5, -0.1, 0, 0.1, 0.6, 1$. Haga una conjetura acerca del modo en que la forma de la figura depende de a.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ **2.** $x^2/9 + y^2/16 = 1$ **3.** focos **4.** al otro foco; directamente alejándose del otro foco

10.3
Traslación y rotación de ejes

Hasta ahora hemos colocado las cónicas en un sistema de coordenadas de un modo muy especial, con el eje mayor a lo largo de uno de los ejes de coordenadas y con el vértice (en el caso de una parábola) o el centro (en el caso de una elipse o una hipérbola) en el origen. Ahora colocaremos nuestra cónica en una posición más general, aunque seguiremos pidiendo que el eje mayor sea paralelo a uno de los ejes de coordenadas. Eliminaremos esta restricción más adelante en esta sección.

El caso de una circunferencia es instructivo. La circunferencia de radio 5 con centro en (2, 3) tiene la ecuación

$$(x-2)^2+(y-3)^2=25$$

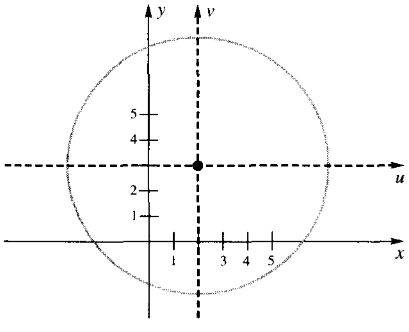
o bien, en la forma desarrollada equivalente,

$$x^2+y^2-4x-6y=12$$

La misma circunferencia con su centro en el origen del sistema de coordenadas uv (figura 1) tiene la sencilla ecuación

$$u^2+v^2=25$$

La introducción de los nuevos ejes no cambia la forma o el tamaño de una curva, pero puede simplificar en gran medida su ecuación. Queremos estudiar esta *traslación* de ejes y el cambio de variable correspondiente en una ecuación.



$(x-2)^2+(y-3)^2=25$
o
$u^2+v^2=25$

Figura 1

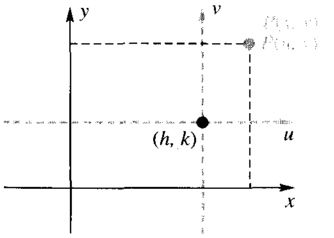


Figura 2

Traslaciones Si se eligen nuevos ejes en el plano, cada punto tendrá dos conjuntos de coordenadas: las coordenadas (x, y) con respecto de los ejes anteriores y las coordenadas (u, v) con respecto de los nuevos ejes. Se dice que las coordenadas originales sufren una **transformación**. Si los nuevos ejes son paralelos, respectivamente, a los ejes originales, y tienen las mismas direcciones, la transformación es una **traslación de ejes.**

Con base en la figura 2, es fácil ver cómo están relacionadas las nuevas coordenadas (u, v) con las anteriores (x, y). Si (h, k) son las coordenadas anteriores del nuevo origen, entonces

$$\boxed{u=x-h, \qquad v=y-k}$$

o, en forma equivalente,

$$\boxed{x=u+h, \qquad y=v+k}$$

EJEMPLO 1 Determine las nuevas coordenadas de $P(-6, 5)$ después de una traslación de ejes a un nuevo origen en $(2, -4)$.

SOLUCIÓN Como $h=2$ y $k=-4$, tenemos que

$$u=x-h=-6-2=-8 \qquad v=y-k=5-(-4)=9$$

Las nuevas coordenadas son $(-8, 9)$. ■

EJEMPLO 2 Dada la ecuación $4x^2+y^2+40x-2y+97=0$, determine la ecuación de su gráfica después de una traslación con el nuevo origen $(-5, 1)$.

SOLUCIÓN En la ecuación, reemplazamos x por $u+h=u-5$ y y por $v+k=v+1$. Obtenemos

$$4(u-5)^2+(v+1)^2+40(u-5)-2(v+1)+97=0$$

o

$$4u^2-40u+100+v^2+2v+1+40u-200-2v-2+97=0$$

Esto se simplifica como

$$4u^2+v^2=4$$

o

$$u^2 + \frac{v^2}{4} = 1$$

lo que reconocemos como la ecuación de una elipse. ■

Completar el cuadrado Dada una ecuación compleja de segundo grado, ¿cómo sabemos cuál traslación la simplificará y llevará a una forma reconocible? Podemos completar el cuadrado para eliminar los términos de primer grado de cualquier expresión de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad A \neq 0, \quad C \neq 0$$

EJEMPLO 3 Haga una traslación que elimine los términos de primer grado de

$$4x^2 + 9y^2 + 8x - 90y + 193 = 0$$

y use esta información para bosquejar la gráfica de la ecuación dada.

SOLUCIÓN Recuerde que para completar el cuadrado de $x^2 + ax$ debemos agregar $a^2/4$ (el cuadrado de la mitad del coeficiente de x). Usamos esto para reescribir la ecuación dada, sumando los mismos números a ambos lados.

$$4(x^2 + 2x \qquad) + 9(y^2 - 10y \qquad) = -193$$

$$4(x^2 + 2x + 1) + 9(y^2 - 10y + 25) = -193 + 4 + 225$$

$$4(x + 1)^2 + 9(y - 5)^2 = 36$$

$$\frac{(x + 1)^2}{9} + \frac{(y - 5)^2}{4} = 1$$

La traslación $u = x + 1$ y $v = y - 5$ transforma esto en

$$\frac{u^2}{9} + \frac{v^2}{4} = 1$$

que es la forma canónica de una elipse horizontal. La gráfica aparece en la figura 3. ■

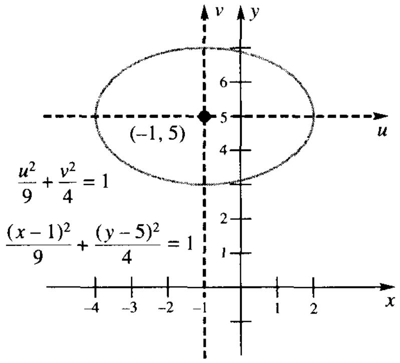


Figura 3

EJEMPLO 4 Use una traslación para simplificar

$$y^2 - 4x - 12y + 28 = 0$$

Luego, determine la cónica que representa, enumere las características importantes de esta cónica y bosqueje su gráfica.

SOLUCIÓN Completamos el cuadrado.

$$y^2 - 12y = 4x - 28$$

$$y^2 - 12y + 36 = 4x - 28 + 36$$

$$(y - 6)^2 = 4(x + 2)$$

La traslación $u = x + 2$, $v = y - 6$ transforma esto en $v^2 = 4u$, que reconocemos como una parábola horizontal que abre hacia la derecha, con $p = 1$ (figura 4). ■

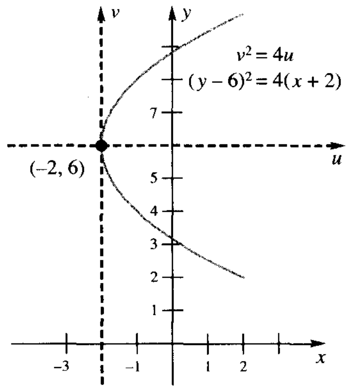


Figura 4

Ecuaciones generales de segundo grado Ahora plantearemos una pregunta importante. ¿La gráfica de una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es siempre una cónica? La respuesta es no, a menos que admitamos ciertas formas límite. La siguiente tabla indica las posibilidades, con una ecuación muestra para cada una.

Así, las gráficas de la ecuación cuadrática general anterior caen en tres categorías genéricas, aunque dan nueve posibilidades distintas, incluyendo formas límite (o degeneradas).

Cónicas		Formas límite(o degeneradas)	
1. $(AC = 0)$ Parábola: $y^2 = 4x$		Rectas paralelas: $y^2 = 4$	
		Una sola recta: $y^2 = 0$	
		Conjunto vacío: $y^2 = -1$	
2. $(AC > 0)$ Elipse: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$		Circunferencia: $x^2 + y^2 = 4$	
		Un punto: $2x^2 + y^2 = 0$	
		Conjunto vacío: $2x^2 + y^2 = -1$	
3. $(AC < 0)$ Hipérbola: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$		Rectas que se intersecan: $x^2 - y^2 = 0$	

EJEMPLO 5 Use una traslación para simplificar

$$4x^2 - y^2 - 8x - 6y - 5 = 0$$

y bosqueje su gráfica.

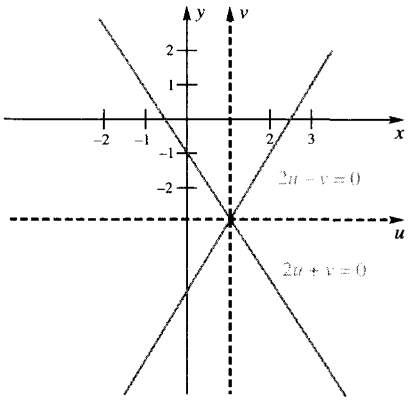


Figura 5

SOLUCIÓN Reescribimos la ecuación como sigue:

$$4(x^2 - 2x \qquad) - (y^2 + 6y \qquad) = 5$$
$$4(x^2 - 2x + 1) - (y^2 + 6y + 9) = 5 + 4 - 9$$
$$4(x - 1)^2 - (y + 3)^2 = 0$$

Sean $u = x - 1$ y $v = y + 3$, lo que produce

$$4u^2 - v^2 = 0$$

o

$$(2u - v)(2u + v) = 0$$

Ésta es la ecuación de dos rectas que se cortan (figura 5). ■

EJEMPLO 6 Escriba la ecuación de una hipérbola con focos en $(1, 1)$ y $(1, 11)$ y vértices en $(1, 3)$ y $(1, 9)$.

SOLUCIÓN El centro es $(1, 6)$, a la mitad de la distancia entre los vértices de un eje mayor vertical. Así, $a = 3$ y $c = 5$, de modo que $b = \sqrt{c^2 - a^2} = 4$. La ecuación es

$$\frac{(y-6)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{16} = 1$$ ■

La ecuación general de una sección cónica Considere la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Si tanto A como C son cero, tenemos la ecuación de una recta (siempre que, por supuesto, D y E no se anulen simultáneamente). Si al menos uno de los valores A y C es distinto de cero, podemos aplicar el proceso de completar el cuadrado. Obtenemos una de distintas formas, siendo las más típicas

(1) $$(y - k)^2 = \pm 4p(x - h)$$

(2) $$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

(3) $$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

En esta forma, éstas ya se pueden reconocer como las ecuaciones de una parábola horizontal con vértice en (h, k), una elipse horizontal (si $a^2 > b^2$) con centro en (h, k) y una hipérbola horizontal con centro en (h, k).

En todos estos casos obtenemos una figura cuyos ejes mayor y menor son paralelos a los ejes x y y. Si incluimos el término del producto cruzado, Bxy, como en

$$Ax^2 + Bxy + Cx^2 + Dx + Ey + F = 0$$

aún obtenemos una sección cónica (o alguna forma límite), pero una en donde los ejes mayor y menor son paralelos a una **rotación** de los ejes x y y.

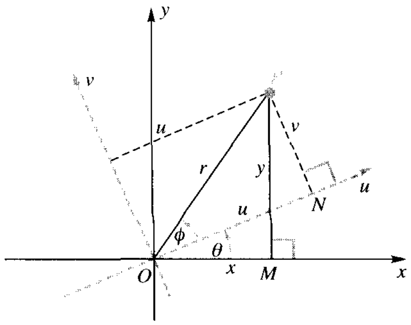


Figura 6

Rotaciones Introducimos una nueva pareja de ejes de coordenadas, los ejes u y v, con el mismo origen que los ejes x y y, pero girados a través de un ángulo θ, como se muestra en la figura 6. Entonces, un punto P tiene dos conjuntos de coordenadas: (x, y) y (u, v). ¿Cuál es la relación entre ellos?

Si r denota la longitud de OP, y ϕ es el ángulo desde el eje positivo de u hasta OP. Entonces x, y, u y v tienen la interpretación geométrica que muestra el diagrama.

Si observamos el triángulo rectángulo OPM, vemos que

$$\cos(\phi + \theta) = \frac{x}{r}$$

de modo que

$$\begin{aligned} x = r\cos(\phi + \theta) &= r(\cos\phi\cos\theta - \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta) \\ &= (r\cos\phi)\cos\theta - (r\operatorname{sen}\phi)\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Al considerar el triángulo OPN se muestra que $u = r\cos\phi$ y $v = r\operatorname{sen}\phi$. Por lo tanto,

$$\boxed{x = u\cos\theta - v\operatorname{sen}\theta}$$

Un razonamiento similar conduce a

$$\boxed{y = u\operatorname{sen}\theta + v\cos\theta}$$

Estas fórmulas determinan una transformación llamada **rotación de ejes**.

EJEMPLO 7 Determine la nueva ecuación que resulta de $xy = 1$ después de una rotación de ejes de $\theta = \pi/4$. Bosqueje la gráfica.

SOLUCIÓN Las sustituciones pedidas son

$$x = u\cos\frac{\pi}{4} - v\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(u - v)$$

$$y = u\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + v\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(u + v)$$

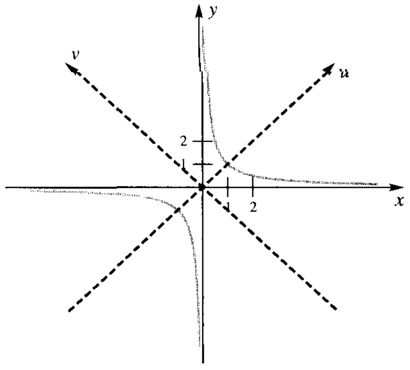
La ecuación $xy = 1$ adquiere la forma

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(u - v)\frac{\sqrt{2}}{2}(u + v) = 1$$

que se simplifica como

$$\frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} = 1$$

Reconocemos esto como la ecuación de una hipérbola, con $a = b = \sqrt{2}$. Observe que el término de producto cruzado ha desaparecido como resultado de la rotación. La elección del ángulo $\theta = \pi/4$ fue la correcta para lograr que esto sucediera. La gráfica aparece en la figura 7. ■



$xy = 1$

o

$\frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} = 1$

Figura 7

Determinación del ángulo θ ¿Cómo sabemos qué rotación hacer para eliminar el término de producto cruzado? Considere la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Si hacemos las sustituciones

$$\begin{aligned} x &= u\cos\theta - v\operatorname{sen}\theta \\ y &= u\operatorname{sen}\theta + v\cos\theta \end{aligned}$$

esta ecuación toma la forma

$$au^2 + buv + cv^2 + du + ev + f = 0$$

donde a, b, c, d, e y f son números que dependen de θ. Podríamos hallar las expresiones de todos ellos, pero en realidad sólo nos interesa b. Al hacer el álgebra necesaria, vemos que

$$\begin{aligned} b &= B(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) - 2(A - C)\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ &= B\cos 2\theta - (A - C)\operatorname{sen} 2\theta \end{aligned}$$

Para hacer que $b = 0$, necesitamos que

$$B\cos 2\theta = (A - C)\operatorname{sen} 2\theta$$

o

$$\boxed{\cot 2\theta = \frac{A - C}{B}}$$

Esta fórmula responde nuestra pregunta. Para eliminar el término del producto cruzado, elegimos θ de modo que satisfaga esta fórmula. En la ecuación $xy = 1$ del ejemplo 7, $A = 0$, $B = 1$ y $C = 0$, de modo que elegimos θ tal que $\cot 2\theta = 0$. Un ángulo que funciona es $\theta = \pi/4$. También podríamos usar $\theta = 3\pi/4$ o $\theta = -5\pi/4$, pero se acostumbra elegir un ángulo en el primer cuadrante, es decir, elegimos 2θ que satisface $0 \leq 2\theta < \pi$, de modo que $0 \leq \theta < \pi/2$.

EJEMPLO 8 Haga una rotación de ejes para eliminar el término de producto cruzado en

$$4x^2 + 2\sqrt{3}xy + 2y^2 + 10\sqrt{3}x + 10y = 5$$

Luego bosqueje la gráfica.

SOLUCIÓN

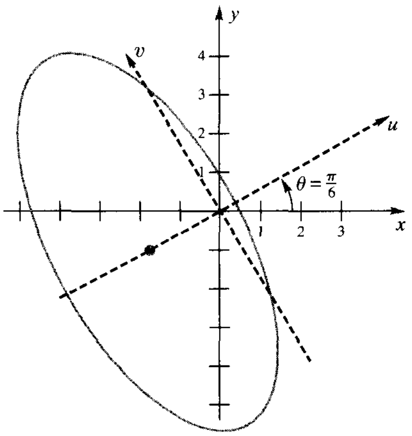
$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} = \frac{4 - 2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

lo cual significa que $2\theta = \pi/3$ y $\theta = \pi/6$. Las sustituciones adecuadas son

$$\begin{aligned} x &= u\frac{\sqrt{3}}{2} - v\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}u - v}{2} \\ y &= u\frac{1}{2} + v\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{u + \sqrt{3}v}{2} \end{aligned}$$

Nuestra ecuación se transforma primero en

$$4\frac{\left(\sqrt{3}u - v\right)^2}{4} + 2\sqrt{3}\frac{\left(\sqrt{3}u - v\right)\left(u + \sqrt{3}v\right)}{4} + 2\frac{\left(u + \sqrt{3}v\right)^2}{4} + 10\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}u - v}{2} + 10\frac{u + \sqrt{3}v}{2} = 5$$



$4x^2 + 2\sqrt{3}xy + 2y^2 + 10\sqrt{3}x + 10y = 5$

o $\dfrac{(u+2)^2}{5} + \dfrac{v^2}{25} = 1$

Figura 8

y después de simplificar, en

$$5u^2 + v^2 + 20u = 5$$

Para escribir esta ecuación en una forma reconocible, completamos el cuadrado.

$$5(u^2 + 4u + 4) + v^2 = 5 + 20$$

$$\frac{(u+2)^2}{5} + \frac{v^2}{25} = 1$$

Identificamos la última ecuación como la de una elipse vertical con centro en $u = -2$ y $v = 0$ y con $a = 5$ y $b = \sqrt{5}$. Esto nos permite trazar la gráfica que se muestra en la figura 8. Si quisiéramos simplificar aún más, haríamos la traslación $r = u + 2, s = v$, lo cual produce la ecuación canónica $r^2/5 + s^2/25 = 1$. ■

Revisión de conceptos

1. La forma cuadrática $x^2 + ax$ se convierte en un cuadrado al sumar_______.

2. $x^2 + 6x + 2(y^2 - 2y) = 3$, después de completar el cuadrado, es equivalente a $(x + 3)^2 + 2(y - 1)^2 =$ ______, que es la ecuación de un(a) ______.

3. El término de producto cruzado (el término xy) se puede eliminar mediante una rotación de ejes con un ángulo θ que satisfaga $\cot 2\theta =$ _____.

4. Para escribir una ecuación general de segundo grado en forma canónica, primero hacemos una ______de ejes y luego una _____de ejes.

Conjunto de problemas 10.3

En los problemas del 1 al 14 dé el nombre de la cónica o forma límite representada por la ecuación dada. Por lo general, deberá usar el proceso para completar el cuadrado (véanse los ejemplos del 3 al 5).

1. $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$

2. $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$

3. $9x^2 + 4y^2 + 72x - 16y + 124 = 0$

4. $16x^2 - 9y^2 + 192x + 90y - 495 = 0$

5. $9x^2 + 4y^2 + 72x - 16y + 160 = 0$

6. $16x^2 + 9y^2 + 192x + 90y + 1000 = 0$

7. $y^2 - 5x - 4y - 6 = 0$

8. $4x^2 + 4y^2 + 8x - 28y - 11 = 0$

9. $3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y + 60 = 0$

10. $4x^2 - 4y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$

11. $4x^2 - 4y^2 + 8x + 12y - 5 = 0$

12. $4x^2 - 4y^2 + 8x + 12y - 6 = 0$

13. $4x^2 - 24x + 36 = 0$

14. $4x^2 - 24x + 35 = 0$

En los problemas del 15 al 28 bosqueje la gráfica de la ecuación dada.

15. $\dfrac{(x+3)^2}{4} + \dfrac{(y+2)^2}{16} = 1$

16. $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$

17. $\dfrac{(x+3)^2}{4} - \dfrac{(y+2)^2}{16} = 1$

18. $4(x + 3) = (y + 2)^2$

19. $(x + 2)^2 = 8(y - 1)$

20. $(x + 2)^2 = 4$

21. $(y - 1)^2 = 16$

22. $\dfrac{(x+3)^2}{4} + \dfrac{(y-2)^2}{8} = 0$

23. $x^2 + 4y^2 - 2x + 16y + 1 = 0$

24. $25x^2 + 9y^2 + 150x - 18y + 9 = 0$

25. $9x^2 - 16y^2 + 54x + 64y - 127 = 0$

26. $x^2 - 4y^2 - 14x - 32y - 11 = 0$

27. $4x^2 + 16x - 16y + 32 = 0$

28. $x^2 - 4x + 8y = 0$

29. Determine el foco y la directriz de la parábola

$$2y^2 - 4y - 10x = 0$$

30. Determine la distancia entre los vértices de

$$-9x^2 + 18x + 4y^2 + 24y = 9$$

31. Determine los focos de la elipse

$$16(x - 1)^2 + 25(y + 2)^2 = 400$$

32. Determine el foco y directriz de la parábola

$$x^2 - 6x + 4y + 3 = 0$$

En los problemas del 33 al 42 determine la ecuación de la cónica dada.

33. Elipse horizontal con centro $(5, 1)$, diámetro mayor 10, diámetro menor 8.

34. Hipérbola con centro $(2, -1)$, vértice en $(4, -1)$ y foco en $(5, -1)$.

35. Parábola con vértice $(2, 3)$ y foco $(2, 5)$.

36. Elipse con centro $(2, 3)$ que pasa por $(6, 3)$ y $(2, 5)$.

37. Hipérbola con vértices en $(0, 0)$ y $(0, 6)$ y un foco en $(0, 8)$

38. Elipse con focos en $(2, 0)$ y $(2, 12)$ y un vértice en $(2, 14)$

39. Parábola con foco $(2, 5)$ y directriz $x = 10$

40. Parábola con foco $(2, 5)$ y vértice $(2, 6)$

41. Elipse con focos $(\pm 2, 2)$ que pasa por el origen

42. Hipérbola con focos $(0, 0)$ y $(0, 4)$ que pasa por $(12, 9)$.

En los problemas del 43 al 48 elimine el término del producto cruzado mediante una rotación adecuada de ejes y luego, en caso necesario, traslade los ejes (complete los cuadrados) para escribir la ecuación en forma canónica. Por último, grafique la ecuación que muestre los ejes girados.

43. $x^2 + xy + y^2 = 6$

44. $3x^2 + 10xy + 3y^2 + 10 = 0$

45. $4x^2 + xy + 4y^2 = 56$

46. $4xy - 3y^2 = 64$

47. $-\frac{1}{2}x^2 + 7xy - \frac{1}{2}y^2 - 6\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}y = 0$

48. $\frac{3}{2}x^2 + xy + \frac{3}{2}y^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 13$

En los problemas del 49 al 52 siga las instrucciones para los problemas del 43 al 48. Después de determinar $\cot 2\theta$, *necesitará utilizar las identidades* $\operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{(1 - \cos 2\theta)/2}$ *o* $\cos\theta = \pm\sqrt{(1 + \cos 2\theta)/2}$ *para determinar* θ.

49. $4x^2 - 3xy = 18$

50. $11x^2 + 96xy + 39y^2 + 240x + 570y + 875 = 0$

51. $34x^2 + 24xy + 41y^2 + 250y = -325$

52. $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 20x - 15y - 150 = 0$

53. Una curva C pasa por los tres puntos $(-1, 2)$, $(0, 0)$ y $(3, 6)$. Determine una ecuación para C, si C es

(a) una parábola vertical;
(b) una parábola horizontal;
(c) una circunferencia.

54. Los extremos de una cuerda elástica con un nudo en $K(x, y)$ se unen a un punto fijo $A(a, b)$ y un punto P en la orilla de una rueda de radio r con centro en $(0, 0)$. Al girar la rueda, K describe una curva C. Determine la ecuación para C. Suponga que la cuerda permanece tensa y se estira uniformemente (es decir, $\alpha = |KP|/|AP|$ es constante).

55. Dé el nombre de la cónica $y^2 = Lx + Kx^2$, de acuerdo con el valor de K, y luego demuestre que en cada caso $|L|$ es la longitud del lado recto de la cónica. Suponga que $L \neq 0$.

56. Demuestre que las ecuaciones de la parábola y la hipérbola con vértice $(a, 0)$ y foco $(c, 0)$, $c > a > 0$, se pueden escribir como $y^2 = 4(c - a)(x - a)$ y $y^2 = (b^2/a^2)(x^2 - a^2)$, respectivamente. Entonces use estas expresiones para y^2 y demuestre que la parábola siempre está "dentro" de la rama derecha de la hipérbola.

57. La gráfica de $x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha = d$ es una recta. Muestre que la distancia perpendicular del origen a esta recta es $|d|$, haciendo una rotación de ejes mediante el ángulo α.

58. Transforme la ecuación $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ mediante una rotación de ejes de 45° y luego eleve al cuadrado dos veces para eliminar los radicales sobre las variables. Identifique la curva correspondiente.

59. Despeje u y v en las fórmulas de rotación, en términos de x y y.

60. Utilice los resultados del problema 59 para determinar las coordenadas uv correspondientes a $(x, y) = (5, -3)$ después de una rotación de ejes de 60°.

61. Determine los puntos de $x^2 + 14xy + 49y^2 = 100$ más cercanos al origen.

62. Recuerde que $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, bajo una rotación de ejes, se transforma en $au^2 + buv + cv^2 + du + ev + f = 0$. Determine las fórmulas para a y c y demuestre que $a + c = A + C$.

63. Demuestre que $b^2 - 4ac = B^2 - 4AC$ (véase el problema 62).

64. Use el resultado del problema 63 para convencerse de que la gráfica de una ecuación general de segundo grado será

(a) una parábola si $B^2 - 4AC = 0$,
(b) una elipse si $B^2 - 4AC < 0$,
(c) una hipérbola si $B^2 - 4AC > 0$,

o formas límite de las cónicas anteriores.

65. Suponga que $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$ se transforma en $au^2 + cv^2 = 1$ mediante una rotación de ejes, y que $\Delta = 4AC - B^2 \neq 0$. Use los problemas 62 y 63 para mostrar que

(a) $1/ac = 4/\Delta$,
(b) $1/a + 1/c = 4(A + C)/\Delta$,
(c) $1/a$ y $1/c$ son los dos valores de

$$(2/\Delta)\left(A + C \pm \sqrt{(A - C)^2 + B^2}\right)$$

66. Demuestre que si $A + C$ y $\Delta = 4AC - B^2$ son positivos, entonces la gráfica de $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$ es una elipse (o una circunferencia) con área $2\pi/\sqrt{\Delta}$. (Recuerde del problema 55 de la sección 10.2, que el área de la elipse $x^2/p^2 + y^2/q^2 = 1$ es πpq).

67. ¿Para qué valores de B ocurre que la gráfica de $x^2 + Bxy + y^2 = 1$ es

(a) una elipse?
(b) una circunferencia?
(c) una hipérbola?
(d) dos rectas paralelas?

68. Use los resultados de los problemas 65 y 66 para determinar la distancia entre los focos y el área de la elipse

$$25x^2 + 8xy + y^2 = 1$$

69. Consulte la figura 6 y demuestre que $y = u \operatorname{sen}\theta + v \cos\theta$.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $a^2/4$ **2.** 14; elipse **3.** $(A - C)/B$ **4.** rotación; traslación

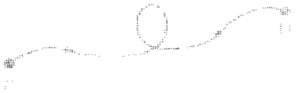
10.4

Representación paramétrica de curvas en el plano

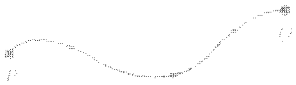
En la sección 5.4 dimos la definición general de una curva plana en relación con nuestra deducción de la fórmula para la longitud de arco. Una **curva plana** queda determinada mediante una pareja de ecuaciones paramétricas

$$\boxed{x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad t \text{ in } I}$$

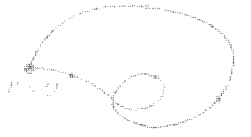
con f y g continuas en el intervalo I. Por lo general, I es un intervalo cerrado $[a, b]$. Piense en t, llamado el **parámetro**, como una medida del tiempo. Cuando t avanza de a a b, el punto (x, y) describe la curva en el plano xy. Cuando I es el intervalo cerrado $[a, b]$, los puntos $P = (x(a), y(a))$ y $Q = (x(b), y(b))$ son los **puntos extremos inicial** y **final**. Si la curva tiene puntos extremos que coincidan, entonces decimos que la curva es **cerrada.** Si valores distintos de t producen puntos distintos en el plano (excepto posiblemente para $t = a$ y $t = b$), decimos que la curva es una curva **simple** (figura 1). La pareja de relaciones $x = f(t)$, $y = g(t)$, junto con el intervalo I se llama la **parametrización** de la curva.



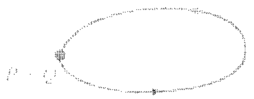
No simple, ni cerrada



Simple, pero no cerrada



No simple, sí cerrada



Simple y cerrada

Figura 1

Eliminación del parámetro

Para reconocer una curva dada por ecuaciones paramétricas, sería deseable eliminar el parámetro. A veces esto se puede llevar a cabo despejando t en una ecuación y sustituyendo en la otra (ejemplo 1). Con frecuencia usamos una identidad conocida, como en el ejemplo 2.

EJEMPLO 1 Elimine el parámetro en

$$x = t^2 + 2t, \qquad y = t - 3, \qquad -2 \leq t \leq 3$$

Después identifique la curva correspondiente y bosqueje su gráfica.

SOLUCIÓN De la segunda ecuación, $t = y + 3$. Al sustituir esta expresión para t en la primera ecuación tenemos

$$x = (y + 3)^2 + 2(y + 3) = y^2 + 8y + 15$$

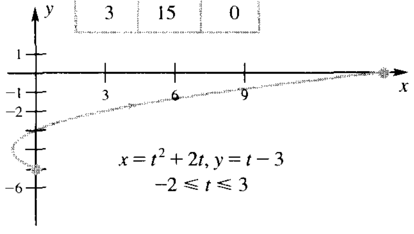
o

$$x + 1 = (y + 4)^2$$

Reconocemos esto como una parábola con vértice en $(-1, -4)$ y que abre hacia la derecha.

Al graficar la ecuación dada, debemos tener cuidado en exhibir únicamente la parte de la parábola correspondiente a $-2 \leq t \leq 3$. La figura 2 muestra una tabla de valores y la gráfica. Las flechas indican la *orientación* de la curva; es decir, la dirección cuando se hace crecer a t. ■

t	x	y
−2	0	−5
−1	−1	−4
0	0	−3
1	3	−2
2	8	−1
3	15	0



$x = t^2 + 2t, y = t - 3$
$-2 \leq t \leq 3$

Figura 2

EJEMPLO 2 Demuestre que

$$x = a \cos t, \qquad y = b \operatorname{sen} t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

representa la elipse que se muestra en la figura 3.

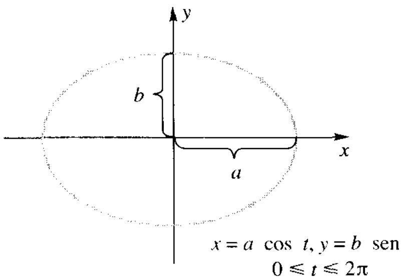
SOLUCIÓN Despejamos cos t y sen t en las ecuaciones, elevamos al cuadrado y sumamos

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Una rápida verificación de unos cuantos valores de t nos convencerá de que obtenemos toda la elipse. En particular, $t = 0$ y $t = 2\pi$ dan el mismo punto, a saber, $(a, 0)$.

Si $a = b$, obtenemos la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$. ■

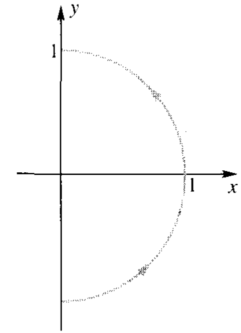


$x = a \cos t, y = b$ sen
$0 \leq t \leq 2\pi$

Elipse

Figura 3

Es posible que distintas parejas de ecuaciones paramétricas den la misma gráfica. En otras palabras, una curva dada puede tener más de una parametrización.



Semicircunferencia

Figura 4

EJEMPLO 3 Demuestre que cada una de las siguientes parejas de ecuaciones paramétricas tiene la misma gráfica, a saber, la semicircunferencia que se muestra en la figura 4.

(a) $x = \sqrt{1 - t^2}, y = t, -1 \leq t \leq 1$

(b) $x = \cos t, y = \operatorname{sen} t, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

(c) $x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, y = \frac{2t}{1 + t^2}, -1 \leq t \leq 1$

SOLUCIÓN En cada caso, descubrimos que

$$x^2 + y^2 = 1$$

Luego, sólo es cuestión de verificar unos cuantos valores de t para garantizar que los intervalos dados para t producen la misma sección de la circunferencia. ■

EJEMPLO 4 Demuestre que cada una de las siguientes parejas de ecuaciones paramétricas producen una rama de una hipérbola. En ambos casos suponga que $a > 0$ y $b > 0$.

(a) $x = a \sec t, y = b \tan t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

(b) $x = a \cosh t, y = b \operatorname{senh} t, -\infty < t < \infty$

SOLUCIÓN

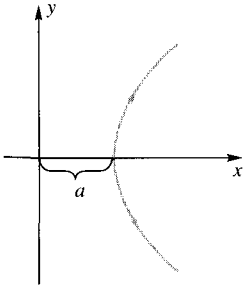
(a) En el primer caso,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \sec^2 t - \tan^2 t = 1$$

(b) En el segundo caso,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t$$

$$= \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = 1$$



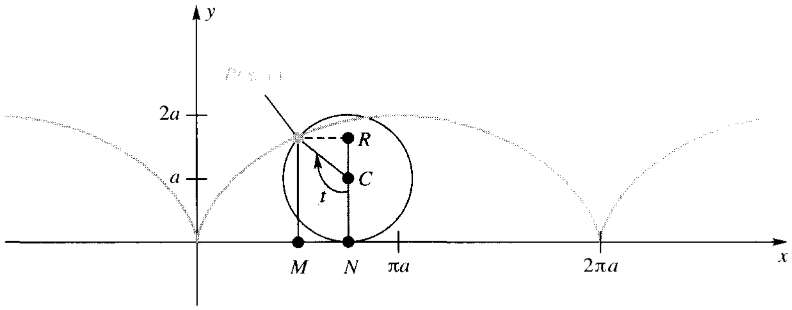
Hipérbola
(una rama)

Figura 5

Al verificar algunos valores de t se muestra que, en ambos casos, obtenemos la rama de la hipérbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ que se muestra en la figura 5. ■

En el ejemplo 4, observe que en la parte (a) tenemos una curva paramétrica definida en el intervalo *abierto* $(-\pi/2, \pi/2)$, mientras que en la parte (b) tenemos una curva definida en el intervalo *infinito* $(-\infty, \infty)$. Como la curva no contiene los puntos extremos, no es cerrada.

La cicloide Una **cicloide** es la curva descrita por un punto P en la orilla de una rueda, conforme ésta rueda a lo largo de una línea recta sin resbalar (figura 6). La ecuación cartesiana de una cicloide es algo complicada, pero es fácil encontrar ecuaciones paramétricas sencillas, como se muestra en el siguiente ejemplo.



Cicloide

Figura 6

EJEMPLO 5 Determine las ecuaciones paramétricas para la cicloide.

SOLUCIÓN Dejemos que la rueda gire a lo largo del eje x, con P inicialmente en el origen. Denote el centro de la rueda como C, y sea a su radio. Elija como parámetro t la medida en radianes del ángulo en el sentido de las manecillas del reloj con el que el segmento de recta CP ha girado desde su posición vertical cuando P estaba en el origen. Todo esto se muestra en la figura 6.

Como $|ON| = \text{arc } PN = at$,

$$x = |OM| = |ON| - |MN| = at - a\,\text{sen}\, t = a(t - \text{sen}\, t)$$

y

$$y = |MP| = |NR| = |NC| + |CR| = a - a\cos t = a(1 - \cos t)$$

Así, las ecuaciones paramétricas para la cicloide son

$$x = a(t - \text{sen}\, t), \qquad y = a(1 - \cos t), \qquad t > 0$$ ■

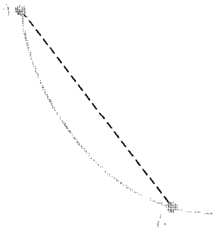


Figura 7

La cicloide tiene varias aplicaciones interesantes, en particular en mecánica. Es la "curva de descenso más rápido". Si se permite que una partícula, sobre la cual sólo actúa la gravedad, se deslice desde un punto A hasta un punto B, debajo de A pero que no esté sobre la misma recta vertical, entonces la partícula completa su viaje en el menor tiempo cuando la curva es una cicloide invertida (figura 7). Por supuesto, la *distancia* más corta corresponde al segmento de línea recta AB, pero el *menor tiempo* empleado es cuando la trayectoria se da a lo largo de una cicloide; esto se debe a que la aceleración depende de la inclinación del descenso, y a lo largo de una cicloide la partícula desarrolla su velocidad más rápido que en el caso de una línea recta.

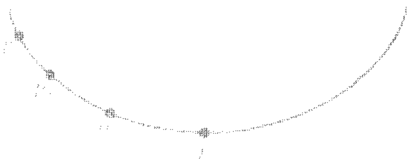


Figura 8

Otra propiedad interesante es ésta: si L es el punto más bajo de un arco de una cicloide invertida, el tiempo que tarda una partícula P en deslizarse por la cicloide hasta L es el mismo, sin importar el punto P en el arco invertido desde donde parta la partícula; así, si varias partículas P_1, P_2 y P_3 se encuentran en distintas posiciones sobre la cicloide (figura 8) y comienzan a deslizarse en el mismo instante, todas llegarán al punto más bajo L en el mismo tiempo.

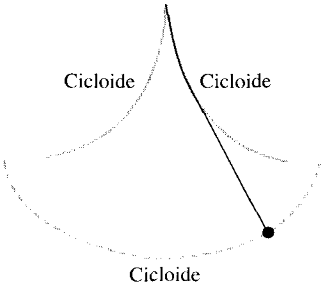


Figura 9

En 1673, el astrónomo holandés Christian Huygens (1629-1695) publicó una descripción de un reloj de péndulo ideal. Debido a que el péndulo oscila entre "mejillas" cicloidales, la trayectoria del péndulo es una cicloide (figura 9). Esto significa que el periodo de oscilación es independiente de la amplitud, de modo que el periodo no cambia al desenrollarse la cuerda del reloj.

Cálculo para curvas definidas en forma paramétrica ¿Es posible determinar la pendiente de la recta tangente a una curva dada en forma paramétrica, sin eliminar primero el parámetro? La respuesta es afirmativa, de acuerdo con el siguiente teorema.

Teorema A

Sean f y g continuamente diferenciables, con $f'(t) \neq 0$ en $\alpha < t < \beta$. Entonces las ecuaciones paramétricas

$$x = f(t), \qquad y = g(t)$$

definen a y como una función diferenciable de x y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

Demostración Como $f'(t) \neq 0$ para $\alpha < t < \beta$, f es estrictamente monótona y por lo tanto tiene una inversa diferenciable f^{-1} (véase el teorema de la función inversa (teorema 6.2B)). Defina F como $F = g \circ f^{-1}$ de modo que

$$y = g(t) = g(f^{-1}(x)) = F(x) = F(f(t))$$

Entonces, por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dt} = F'(f(t)) \cdot f'(t) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Como $dx/dt \neq 0$, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 6 Determine las primeras dos derivadas dy/dx y d^2y/dx^2 para la función determinada mediante

$$x = 5\cos t, \qquad y = 4\,\text{sen}\, t, \qquad 0 < t < 3$$

y evalúelas en $t = \pi/6$ (véase el ejemplo 2).

SOLUCIÓN Sea y' denotada como $\dfrac{dy}{dx}$. Entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{4\cos t}{-5\,\text{sen}\, t} = -\frac{4}{5}\cot t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{\frac{4}{5}\csc^2 t}{-5\,\text{sen}\, t} = -\frac{4}{25}\csc^3 t$$

En $t = \pi/6$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4\sqrt{3}}{5}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-4}{25}(8) = -\frac{32}{25}$$

El primer valor es la pendiente de la recta tangente a la elipse $x^2/25 + y^2/16 = 1$ en el punto $\left(5\sqrt{3}/2, 2\right)$. Usted puede verificar que esto es cierto mediante una derivación implícita. ■

A veces, una integral definida implica dos variables, como *x* y *y*, en el integrando y la diferencial, y *y* puede estar definida como una función de *x* mediante ecuaciones que den a *x* y *y* en términos de un parámetro como *t*. En tales casos, con frecuencia es conveniente evaluar la integral definida expresando el integrando y la diferencial en términos de *t* y *dt*, y ajustando los límites de integración antes de integrar respecto de *t*.

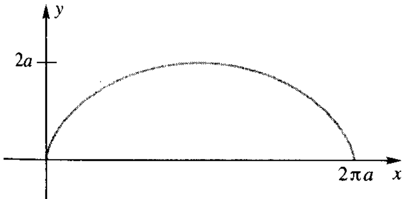
EJEMPLO 7 Evalúe (a) $\int_1^3 y\,dx$ y (b) $\int_1^3 xy^2\,dx$, donde $x = 2t - 1$ y $y = t^2 + 2$.

SOLUCIÓN De $x = 2t - 1$, tenemos $dx = 2dt$. Cuando $x = 1$, $t = 1$ y cuando $x = 3$, $t = 2$.

$$\text{(a)}\quad \int_1^3 y\,dx = \int_1^2 (t^2 + 2)2\,dt = 2\left[\frac{t^3}{3} + 2t\right]_1^2 = \frac{26}{3}$$

$$\text{(b)}\quad \int_1^3 xy^2\,dx = \int_1^2 (2t - 1)(t^2 + 2)^2 2\,dt$$

$$= 2\int_1^2 (2t^5 - t^4 + 8t^3 - 4t^2 + 8t - 4)\,dt = 86\tfrac{14}{15} \qquad \blacksquare$$



Cicloide (un arco)

Figura 10

EJEMPLO 8 Determine el área *A* debajo de un arco de una cicloide (figura 10) y la longitud *L* de este arco.

SOLUCIÓN Del ejemplo 5, sabemos que podemos representar un arco de la cicloide como

$$x = a(t - \text{sen}\, t), \qquad y = a(1 - \cos t), \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Así que, $dx = a(1 - \cos t)dt$. Por lo tanto, el área A es

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{2\pi a} y\,dx \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)(1 - \cos t)\,dt \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2t\right) dt \\
&= a^2\left[\tfrac{3}{2}t - 2\,\mathrm{sen}\,t + \tfrac{1}{4}\mathrm{sen}\,2t\right]_0^{2\pi} = 3\pi a^2
\end{aligned}
$$

Para calcular L, recordamos la fórmula para la longitud de arco de la sección 5.4:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

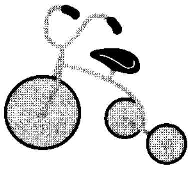
En nuestro caso, esto se reduce a

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2(\mathrm{sen}^2\,t)}\,dt \\
&= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)}\,dt \\
&= a\int_0^{2\pi} \sqrt{4\,\mathrm{sen}^2\frac{t}{2}}\,dt \\
&= 2a\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}\frac{t}{2}\,dt \\
&= \left[-4a\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a
\end{aligned}
$$

■

Dos pulgas en un triciclo

Dos pulgas discuten acerca de cuál de ellas tendrá el viaje más largo, cuando Jenny vaya en triciclo de su casa al parque. La pulga A viajará entre los rayos de la rueda frontal; la pulga B viajará entre los rayos de una de las ruedas traseras. Termine con la discusión mostrando que sus trayectorias tendrán la misma longitud. El ejemplo 8 le ayudará.



Revisión de conceptos

1. Una circunferencia es un primer ejemplo de una curva que es tanto ________ como ________; una figura en forma de ocho es un ejemplo de una curva cerrada que no es ________.

2. A las dos ecuaciones $x = f(t)$ y $y = g(t)$ les llamamos una representación ________ de una curva, y a t se le denomina ________.

3. La trayectoria de un punto en el borde de una rueda que gira se llama ________.

4. La fórmula para dy/dx, dada la representación $x = f(t)$ y $y = g(t)$, es $dy/dx =$ ________.

Conjunto de problemas 10.4

En cada uno de los problemas del 1 al 20 se da una representación paramétrica de una curva.

(a) *Grafique la curva.*

(b) *¿La curva es cerrada? ¿Es simple?*

(c) *Obtenga la ecuación cartesiana de la curva mediante la eliminación del parámetro (véanse los ejemplos del 1 al 4).*

1. $x = 3t,\ y = 2t;\ -\infty < t < \infty$

2. $x = 2t,\ y = 3t;\ -\infty < t < \infty$

3. $x = 3t - 1,\ y = t; 0 \le t \le 4$

4. $x = 4t - 2,\ y = 2t; 0 \le t \le 3$

5. $x = 4 - t,\ y = \sqrt{t}; 0 \le t \le 4$

6. $x = t - 3,\ y = \sqrt{2t}; 0 \le t \le 8$

7. $x = \dfrac{1}{s},\ y = s; 1 \le s < 10$

8. $x = s,\ y = \dfrac{1}{s}; 1 \le s \le 10$

9. $x = t^3 - 4t,\ y = t^2 - 4; -3 \le t \le 3$

10. $x = t^3 - 2t,\ y = t^2 - 2t; -3 \le t \le 3$

11. $x = 2\sqrt{t - 2},\ y = 3\sqrt{4 - t}; 2 \le t \le 4$

12. $x = 3\sqrt{t-3},\ y = 2\sqrt{4-t};\ 3 \leq t \leq 4$

13. $x = 2\operatorname{sen} t,\ y = 3\cos t;\ 0 \leq t \leq 2\pi$

14. $x = 3\operatorname{sen} r,\ y = -2\cos r;\ 0 \leq r \leq 2\pi$

15. $x = -2\operatorname{sen} r,\ y = -3\cos r;\ 0 \leq r \leq 4\pi$

16. $x = 2\cos^2 r,\ y = 3\operatorname{sen}^2 r;\ 0 \leq r \leq 2\pi$

17. $x = 9\operatorname{sen}^2 \theta,\ y = 9\cos^2 \theta;\ 0 \leq \theta \leq \pi$

18. $x = 9\cos^2 \theta,\ y = 9\operatorname{sen}^2 \theta;\ 0 \leq \theta \leq \pi$

19. $x = \cos \theta,\ y = -2\operatorname{sen}^2 2\theta;\ -\infty < \theta < \infty$

20. $x = \operatorname{sen} \theta,\ y = 2\cos^2 2\theta;\ -\infty < \theta < \infty$

En los problemas del 21 al 30 determine dy/dx y d^2y/dx^2 sin eliminar el parámetro.

21. $x = 3\tau^2,\ y = 4\tau^3;\ \tau \neq 0$

22. $x = 6s^2,\ y = -2s^3;\ s \neq 0$

23. $x = 2\theta^2,\ y = \sqrt{5}\theta^3;\ \theta \neq 0$

24. $x = \sqrt{3}\theta^2,\ y = -\sqrt{3}\theta^3;\ \theta \neq 0$

25. $x = 1 - \cos t,\ y = 1 + \operatorname{sen} t;\ t \neq n\pi$

26. $x = 3 - 2\cos t,\ y = -1 + 5\operatorname{sen} t;\ t \neq n\pi$

27. $x = 3\tan t - 1,\ y = 5\sec t + 2;\ t \neq \dfrac{(2n+1)\pi}{2}$

28. $x = \cot t - 2,\ y = -2\csc t + 5;\ 0 < t < \pi$

29. $x = \dfrac{1}{1+t^2},\ y = \dfrac{1}{t(1-t)};\ 0 < t < 1$

30. $x = \dfrac{2}{1+t^2},\ y = \dfrac{2}{t(1+t^2)};\ t \neq 0$

En los problemas del 31 al 34 determine la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el valor dado de t, sin eliminar el parámetro. Haga un bosquejo.

31. $x = t^2,\ y = t^3;\ t = 2$

32. $x = 3t,\ y = 8t^3;\ t = -\frac{1}{2}$

33. $x = 2\sec t,\ y = 2\tan t;\ t = -\dfrac{\pi}{6}$

34. $x = 2e^t,\ y = \frac{1}{3}e^{-t};\ t = 0$

En los problemas del 35 al 46 determine la longitud de la curva paramétrica definida sobre el intervalo dado.

35. $x = 2t - 1,\ y = 3t - 4;\ 0 \leq t \leq 3$

36. $x = 2 - t,\ y = 2t - 3;\ -3 \leq t \leq 3$

37. $x = t,\ y = t^{3/2};\ 0 \leq t \leq 3$

38. $x = 2\operatorname{sen} t,\ y = 2\cos t;\ 0 \leq t \leq \pi$

39. $x = 3t^2,\ y = t^3;\ 0 \leq t \leq 2$

40. $x = t + \dfrac{1}{t},\ y = \ln t^2;\ 1 \leq t \leq 4$

41. $x = 2e^t,\ y = 3e^{3t/2};\ \ln 3 \leq t \leq 2\ln 3$

42. $x = \sqrt{1-t^2},\ y = 1 - t;\ 0 \leq t \leq \dfrac{1}{4}$

43. $x = 4\sqrt{t},\ y = t^2 + \dfrac{1}{2t};\ \dfrac{1}{4} \leq t \leq 1$

44. $x = \tanh t,\ y = \ln(\cosh^2 t);\ -3 \leq t \leq 3$

45. $x = \cos t,\ y = \ln(\sec t + \tan t) - \operatorname{sen} t;\ 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{4}$

46. $x = \operatorname{sen} t - t\cos t,\ y = \cos t + t\operatorname{sen} t;\ \dfrac{\pi}{4} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$

47. Determine la longitud de la curva con las ecuaciones paramétricas dadas

(a) $x = \operatorname{sen} \theta,\ y = \cos \theta$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$

(b) $x = \operatorname{sen} 3\theta,\ y = \cos 3\theta$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$

(c) Explique por qué las longitudes en las partes (a) y (b) no son iguales.

Usted puede generar superficies girando curvas suaves, dadas en forma paramétrica, en torno de un eje de coordenadas. Cuando t va de a a b, una curva suave $x = F(t)$ y $y = G(t)$ se recorre exactamente una vez. Al girar esta curva en torno del eje x para $y \geq 0$, se obtiene la superficie de revolución cuya área de la superficie es

$$S = \int_a^b 2\pi y\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

Véase la sección 5.4. Los *problemas del 48 al 54 se relacionan con tales superficies.*

48. Deduzca una fórmula para el área de la superficie generada al girar la curva $x = F(t)$, $y = G(t)$ para $a \leq t \leq b$ en torno del eje y para $x \geq 0$ y demuestre que el resultado está dado por

$$S = \int_a^b 2\pi x\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

49. Una parametrización de una circunferencia de radio 1, con centro en $(1, 0)$ en el plano xy, está dada por $x = 1 + \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, para $0 \leq t \leq 2\pi$. Determine el área de la superficie cuando esta curva se hace girar alrededor del eje y.

50. Determine el área de la superficie que se genera al hacer girar, alrededor del eje x, la curva $x = \cos t$, $y = 3 + \operatorname{sen} t$, para $0 \leq t \leq 2\pi$.

51. Determine el área de la superficie que se obtiene al hacer girar, alrededor del eje x, la curva $x = 2 + \cos t$, $y = 1 + \operatorname{sen} t$, para $0 \leq t \leq 2\pi$.

52. Determine el área de la superficie que se genera al hacer girar, alrededor del eje y, la curva $x = (2/3)t^{3/2}$, $y = 2\sqrt{t}$, para $0 \leq t \leq 2\sqrt{3}$

53. Determine el área de la superficie que se produce al hacer girar, alrededor del eje y, la curva $x = t + \sqrt{7}$, $y = t^2/2 + \sqrt{7}t$, para $-\sqrt{7} \leq t \leq \sqrt{7}$

54. Determine el área de la superficie que se genera al hacer girar, alrededor del eje x, la curva $x = t^2/2 + at$, $y = t + a$, para $-\sqrt{a} \leq t \leq \sqrt{a}$.

Evalúe las integrales en los problemas 55 y 56.

55. $\displaystyle\int_0^1 (x^2 - 4y)\,dx$, donde $x = t + 1$, $y = t^3 + 4$.

56. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} xy\,dy$, donde $x = \sec t$, $y = \tan t$.

57. Determine el área de la región entre la curva $x = e^{2t}$, $y = e^{-t}$ y el eje x, de $t = 0$ a $t = \ln 5$. Haga un bosquejo.

58. La trayectoria de un proyectil lanzado desde el nivel del suelo con una velocidad de v_0 pies por segundo y un ángulo a con respecto del suelo, está dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = (v_0\cos\alpha)t, \qquad y = -16t^2 + (v_0\operatorname{sen}\alpha)t$$

(a) Demuestre que la trayectoria es una parábola.

(b) Determine el tiempo del vuelo.

(c) Demuestre que el rango (distancia horizontal recorrida) es $(v_0^2/32)$ sen 2α.

(d) Para un v_0 dado, ¿qué valor de α da el mayor rango posible?

59. Modifique el análisis de la cicloide en el texto (y el diagrama anexo) para el caso en que el punto P está a $b < a$ unidades del centro de la rueda. Demuestre que las ecuaciones paramétricas correspondientes son

$$x = at - b \operatorname{sen} t, \qquad y = a - b \cos t$$

Bosqueje la gráfica de estas ecuaciones (llamada **cicloide reducida**) cuando $a = 8$ y $b = 4$.

60. Siga las instrucciones del problema 59 para el caso $b > a$ (una rueda con brida, como en un tren), mostrando que obtiene las mismas ecuaciones paramétricas. Bosqueje la gráfica de estas ecuaciones (llamada **cicloide prolata**) cuando $a = 6$ y $b = 8$.

61. Considere un círculo de radio b que rueda, sin resbalar, dentro de un círculo fijo de radio a, $a > b$. Un punto P sobre el círculo que rueda describe una curva llamada **hipocicloide**. Determine ecuaciones paramétricas para la hipocicloide. *Sugerencia:* coloque el origen O de las coordenadas cartesianas en el centro del círculo mayor fijo, y haga que el punto $A(a, O)$ sea una posición del punto P. Denote como B el punto móvil de tangencia de ambos círculos, y sea t el parámetro dado por la medida en radianes del ángulo AOB (véase la figura 11).

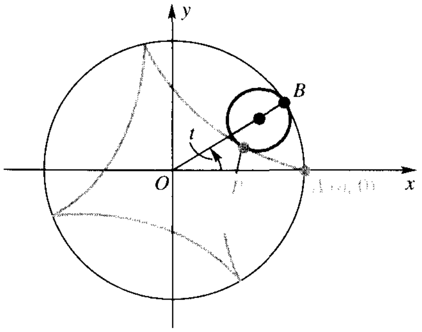


Figura 11

62. Demuestre que si $b = a/4$ en el problema 61, las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide se pueden simplificar como

$$x = a \cos^3 t, \qquad y = a \operatorname{sen}^3 t$$

Esto se llama una **hipocicloide de cuatro cúspides**. Bosquéjela con cuidado y demuestre que su ecuación cartesiana es $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

63. La curva descrita por un punto sobre un círculo de radio b, cuando éste rueda sin resbalar sobre la parte externa de un círculo fijo de radio a, es una **epicicloide**. Demuestre que ésta tiene ecuaciones paramétricas

$$x = (a + b) \cos t - b \cos \frac{a + b}{b} t$$
$$y = (a + b) \operatorname{sen} t - b \operatorname{sen} \frac{a + b}{b} t$$

(Véase la sugerencia en el problema 61).

64. Si $b = a$, las ecuaciones en el problema 63 son

$$x = 2a \cos t - a \cos 2t$$
$$y = 2a \operatorname{sen} t - a \operatorname{sen} 2t$$

Determine una ecuación cartesiana de la epicicloide mediante la eliminación del parámetro t.

65. Si $b = a/3$ en el problema 61, obtenemos una hipocicloide de tres cúspides, llamada una **deltoide**, con ecuaciones paramétricas

$$x = \left(\frac{a}{3}\right)(2 \cos t + \cos 2t), \qquad y = \left(\frac{a}{3}\right)(2 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t)$$

Determine la longitud de la deltoide.

66. Considere la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

(a) Demuestre que su perímetro es

$$P = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t}\, dt,$$

donde e es la excentricidad.

C (b) La integral de la parte (a) es una *integral elíptica*. Se ha estudiado con amplitud y se sabe que el integrando no tiene una antiderivada elemental, de modo que debemos recurrir a métodos de aproximación para evaluar a P. Haga esto cuando $a = 1$ y $e = \frac{1}{4}$ mediante la regla parabólica con $n = 4$. (Su respuesta debe ser parecida a 2π. ¿Por qué?).

CAS (c) Repita la parte (b) usando $n = 20$.

CAS **67.** La curva paramétrica dada por $x = \cos at$ y $y = \operatorname{sen} bt$ se conoce como una figura de *Lissajous*. La coordenada x oscila a veces entre 1 y -1 cuando t va de 0 a 2π, mientras que la coordenada y oscila b veces en el mismo intervalo para t. Este comportamiento se repite en cada intervalo de longitud 2π. El movimiento completo ocurre en un cuadrado unitario. Grafique las siguientes figuras de *Lissajous* para un rango de t que garantice que la figura resultante sea una curva cerrada. En cada caso, cuente el número de veces que la curva toca los bordes horizontales y verticales del cuadrado unitario.

(a) $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$

(b) $x = \operatorname{sen} 3t$, $y = \cos 5t$

(c) $x = \cos 5t$, $y = \operatorname{sen} 15t$

(d) $x = \operatorname{sen} 2t$, $y = \cos 9t$

CAS **68.** Trace la figura de Lissajous definida mediante $x = \cos 2t$, $y = \operatorname{sen} 7t$, $0 \le t \le 2\pi$. Explique por qué ésta es una curva cerrada, aunque su gráfica no parece ser cerrada.

CAS **69.** Trace las figuras de Lissajous para las siguientes combinaciones de a y b para $0 \le t \le 2\pi$.

(a) $a = 1, b = 2$

(b) $a = 4, b = 8$

(c) $a = 5, b = 10$

(d) $a = 2, b = 3$

(e) $a = 6, b = 9$

(f) $a = 12, b = 18$

CAS **70.** Utilice los resultados de los problemas del 67 al 69 (y si es necesario alguno más) para explicar cómo y en cuántas ocasiones la curva toca los lados o esquinas del cuadrado para $0 \le t < 2\pi$ relacionado con la razón a/b. *Sugerencia:* si una curva toca a una esquina de un cuadrado, cuenta como la mitad de un contacto.

CAS **71.** Grafique las siguientes curvas paramétricas. En cada caso, describa con palabras la forma en que se mueve el punto sobre la curva.

(a) $x = \cos(t^2 - t)$, $y = \operatorname{sen}(t^2 - t)$

(b) $x = \cos(2t^2 + 3t + 1)$, $y = \operatorname{sen}(2t^2 + 3t + 1)$

(c) $x = \cos(-2 \ln t)$, $y = \operatorname{sen}(-2 \ln t)$

(d) $x = \cos(\operatorname{sen} t)$, $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)$

CAS **72.** Con un sistema de álgebra por computadora trace las siguientes curvas paramétricas para $0 \le t \le 2$. Describa la forma de la curva en cada caso y las similitudes y diferencias entre todas las curvas.

(a) $x = t, y = t^2$ (b) $x = t^3, y = t^6$
(c) $x = -t^4, y = -t^8$ (d) $x = t^5, y = t^{10}$

CAS EXPL **73.** Trace la gráfica de la hipocicloide (véase el problema 61)

$$x = (a - b)\cos t + b\cos\frac{a - b}{b}t,$$
$$y = (a - b)\operatorname{sen} t - b\operatorname{sen}\frac{a - b}{b}t$$

para valores apropiados de t en cada uno de los siguientes casos:

(a) $a = 4, b = 1$ (b) $a = 3, b = 1$
(c) $a = 5, b = 2$ (d) $a = 7, b = 4$

Experimente con otros valores enteros positivos para a y b, y luego establezca una conjetura acerca de la longitud del intervalo necesario para t, de modo que la curva regrese al punto de partida y alrededor del número de cúspides. ¿Qué puede decir si a/b es irracional?

CAS EXPL **74.** Trace la gráfica de la epicicloide (véase el problema 63)

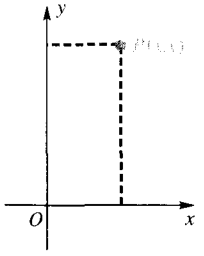
$$x = (a + b)\cos t - b\cos\frac{a + b}{b}t,$$
$$y = (a + b)\operatorname{sen} t - b\operatorname{sen}\frac{a + b}{b}t$$

para diversos valores de a y b. ¿Qué conjeturas puede hacer (véase el problema 73)?

75. Trace la **hoja de Descartes** $x = 3t/(t^3 + 1)$, $y = 3t^2/(t^3 + 1)$. Luego determine los valores de t para los que esta gráfica esté en cada uno de los cuatro cuadrantes.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** simple; cerrada; simple **2.** paramétrica; parámetro **3.** cicloide **4.** $(dy/dt)/(dx/dt)$

10.5 El sistema de coordenadas polares



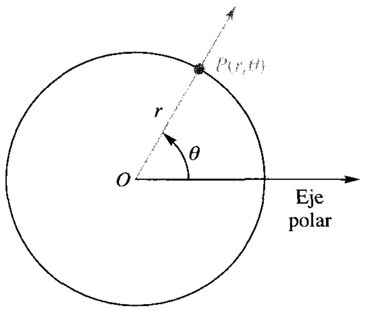
Coordenadas cartesianas

Figura 1

Dos franceses, Pierre de Fermat (1601-1665) y René Descartes (1596-1650), introdujeron lo que ahora se llama el sistema de coordenadas *cartesianas, o rectangulares*. Su idea fue especificar cada punto P en el plano, dando dos números (x, y), sus distancias dirigidas a una pareja de ejes perpendiculares (figura 1). Ahora, este concepto es tan familiar que lo usamos casi sin pensar. No obstante, es la idea fundamental en geometría analítica y permite el desarrollo del cálculo según lo dado hasta ahora.

Dar las distancias dirigidas a una pareja de ejes perpendiculares no es la única forma de especificar un punto. Otra forma de hacer esto es dar sus *coordenadas polares*.

Coordenadas polares Comenzamos con una semirrecta fija, llamada el **eje polar**, que emana de un punto fijo O, llamado **polo** u **origen** (véase la figura 2). Por costumbre, el eje polar se elige como horizontal y apuntando hacia la derecha, por lo cual podemos identificarlo con el eje x positivo en el sistema de coordenadas rectangulares. Cualquier punto P (distinto del polo) es la intersección de una única circunferencia con centro en O y un único rayo que sale de O. Si r es el radio de la circunferencia y θ es uno de los ángulos que el rayo forma con el eje polar, entonces (r, θ) es una pareja de **coordenadas polares** para P (figura 2). La figura 3 muestra varios puntos ubicados en una retícula polar.



Coordenadas polares

Figura 2

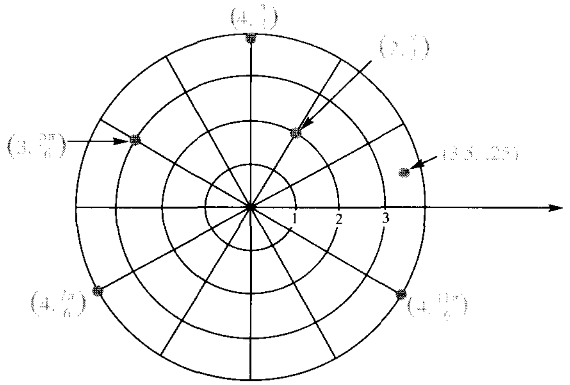


Figura 3

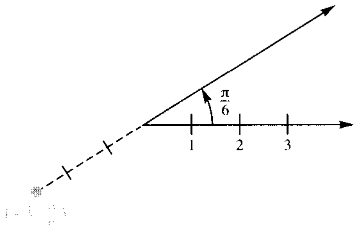


Figura 4

Observe un nuevo fenómeno que no ocurría con las coordenadas cartesianas. Cada punto tiene una infinidad de coordenadas polares, debido a que los ángulos $\theta + 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, tienen el mismo lado final. Por ejemplo, el punto con coordenadas polares $(4, \pi/2)$ también tiene coordenadas $(4, 5\pi/2)$, $(4, 9\pi/2)$, $(4, -3\pi/2)$, y así sucesivamente. Hay otras representaciones más porque permitimos que r sea negativo. En este caso, (r, θ) está sobre el rayo opuesto directamente al lado final de θ y a $|r|$ unidades del origen. Así, el punto con coordenadas polares $(-3, \pi/6)$ es como se muestra en la figura 4, y $(-4, 3\pi/2)$ es otro conjunto de coordenadas para $(4, \pi/2)$. El origen tiene coordenadas $(0, \theta)$, donde θ es cualquier ángulo.

Ecuaciones polares Algunos ejemplos de ecuaciones polares son

$$r = 8 \operatorname{sen} \theta \quad \text{y} \quad r = \frac{2}{1 - \cos \theta}$$

Las ecuaciones polares, como las rectangulares, se visualizan mejor mediante sus gráficas. La **gráfica de una ecuación polar** es el *conjunto de puntos tales que cada uno tiene, al menos, un par de coordenadas polares que satisfacen la ecuación*. La forma más básica de bosquejar una gráfica es construir una tabla de valores, ubicar los puntos correspondientes y luego unir estos puntos. Esto es precisamente lo que hacen una calculadora gráfica o un sistema algebraico por computadora para graficar una ecuación polar.

EJEMPLO 1 Grafique la ecuación polar $r = 8 \operatorname{sen} \theta$.

SOLUCIÓN Se sustituye los múltiplos de $\pi/6$ por θ y se calculan los valores de r correspondientes. Vea la tabla de la figura 5. Observe que mientras θ se incrementa de 0 a 2π la gráfica de la figura 5 se traza dos veces. ■

EJEMPLO 2 Grafique $r = \dfrac{2}{1 - \cos \theta}$.

SOLUCIÓN Véase la figura 6. ■

Observe un fenómeno que no ocurría con las coordenadas rectangulares. Las coordenadas $(-2, 3\pi/2)$ no satisfacen la ecuación. Pero el punto $P(-2, 3\pi/2)$ está sobre la gráfica, debido a que $(2, \pi/2)$ especifica el mismo punto y satisface la ecuación. Concluimos que *un conjunto de coordenadas cuyo punto correspondiente está sobre la gráfica de una ecuación no necesariamente satisface la ecuación.* Este hecho causa muchas dificultades; debemos aprender a vivir con ellas.

θ	r
0	0
$\pi/6$	4
$\pi/3$	6.93
$\pi/2$	8
$2\pi/3$	6.93
$5\pi/6$	4
π	0
$7\pi/6$	−4
$4\pi/3$	−6.93
$3\pi/2$	−8
$5\pi/3$	−6.93
$11\pi/6$	−4

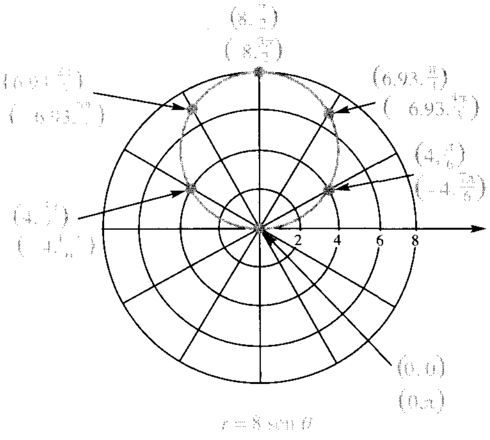


Figura 5

θ	r
0	–
$\pi/4$	6.8
$\pi/2$	2
$3\pi/4$	1.2
π	1
$5\pi/4$	1.2
$3\pi/2$	2
$7\pi/4$	6.8
2π	–

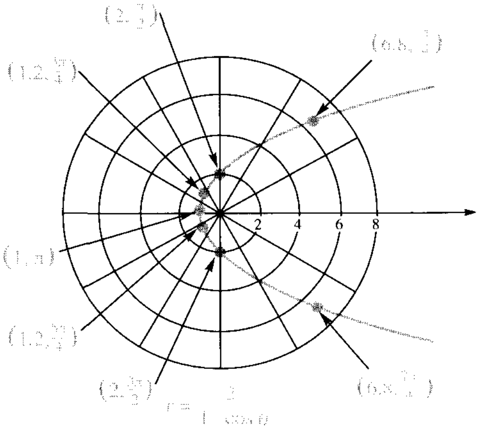


Figura 6

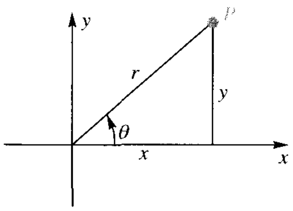


Figura 7

Relación con las coordenadas cartesianas Supongamos que el eje polar coincide con el eje x positivo del sistema cartesiano. Entonces, las coordenadas polares (r, θ) de un punto P y las coordenadas cartesianas (x, y) del mismo punto se relacionan mediante las ecuaciones.

Polares a cartesianas	**Cartesianas a polares**
$x = r\cos\theta$	$r^2 = x^2 + y^2$
$y = r\operatorname{sen}\theta$	$\tan\theta = y/x$

El hecho de que esto ocurre para un punto P en el primer cuadrante es claro en la figura 7; es fácil mostrarlo para los puntos de los demás cuadrantes.

EJEMPLO 3 Determine las coordenadas cartesianas correspondientes a $(4, \pi/6)$ y las coordenadas polares correspondientes a $\left(-3, \sqrt{3}\right)$.

SOLUCIÓN Si $(r, \theta) = (4, \pi/6)$, entonces

$$x = 4\cos\frac{\pi}{6} = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$y = 4\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = 4\cdot\frac{1}{2} = 2$$

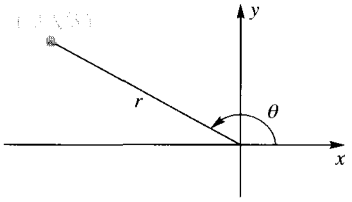


Figura 8

Si $(x, y) = \left(-3, \sqrt{3}\right)$, (véase la figura 8)

$$r^2 = (-3)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 12$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{-3}$$

Un valor de (r, θ) es $\left(2\sqrt{3}, 5\pi/6\right)$. Otro es $\left(-2\sqrt{3}, -\pi/6\right)$. ■

A veces podemos identificar la gráfica de una ecuación polar encontrando su forma cartesiana equivalente. He aquí un ejemplo.

Cuidado

Como r puede ser igual a 0, existe un peligro potencial de multiplicar ambos lados de una ecuación polar por r o de dividir ambos lados entre r. En el primer caso, estaríamos agregando el polo a la gráfica; en el segundo, podríamos eliminar el polo de la gráfica. En el ejemplo 4 multiplicamos ambos lados de $r = 8\operatorname{sen}\theta$ por r, pero no causamos ningún daño, pues el polo ya estaba en la gráfica, como el punto con coordenada θ igual a cero.

EJEMPLO 4 Demuestre que la gráfica de $r = 8\operatorname{sen}\theta$ (ejemplo 1) es una circunferencia y que la gráfica de $r = 2/(1-\cos\theta)$ (ejemplo 2) es una parábola, cuando ambas gráficas se cambian a coordenadas cartesianas.

SOLUCIÓN Si multiplicamos $r = 8\operatorname{sen}\theta$ por r, obtenemos

$$r^2 = 8r\operatorname{sen}\theta$$

lo cual, en coordenadas cartesianas, es

$$x^2 + y^2 = 8y$$

y que podemos escribir en forma sucesiva como

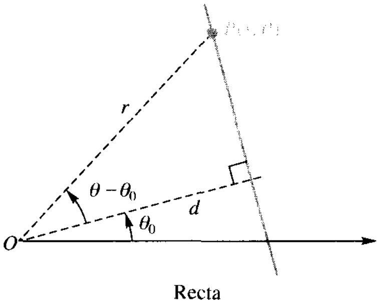
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 8y &= 0 \\ x^2 + y^2 - 8y + 16 &= 16 \\ x^2 + (y-4)^2 &= 16 \end{aligned}$$

Esta última es la ecuación de una circunferencia de radio 4 con centro en $(0, 4)$.

La segunda ecuación se maneja con los siguientes pasos.

$$\begin{aligned} r &= \frac{2}{1-\cos\theta} \\ r - r\cos\theta &= 2 \\ r - x &= 2 \\ r &= x + 2 \\ r^2 &= x^2 + 4x + 4 \\ x^2 + y^2 &= x^2 + 4x + 4 \\ y^2 &= 4(x+1) \end{aligned}$$

Reconocemos la última ecuación como la de una parábola con vértice en $(-1, 0)$ y foco en el origen. ■

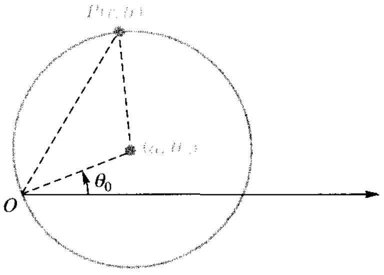


Recta

Figura 9

Ecuaciones polares para rectas, circunferencias y cónicas Si una recta pasa por el polo, tiene la ecuación sencilla $\theta = \theta_0$. Si la recta no pasa por el polo, está a cierta distancia $d > 0$ de él. Sea θ_0 el ángulo entre el eje polar y la perpendicular desde el polo hasta la recta dada (figura 9). Entonces, si $P(r, \theta)$ es un punto cualquiera de la recta, $\cos(\theta - \theta_0) = d/r$, o

$$\boxed{\text{Recta:} \quad r = \frac{d}{\cos(\theta - \theta_0)}}$$



Circunferencia

Figura 10

Si una circunferencia de radio a está centrada en el polo, su ecuación es simplemente $r = a$. Si está centrada en (r_0, θ_0), su ecuación es más complicada, a menos que elijamos $r_0 = a$, como en la figura 10. Entonces, por la ley de los cosenos, $a^2 = r^2 + a^2 - 2ra \cos(\theta - \theta_0)$, que se simplifica como

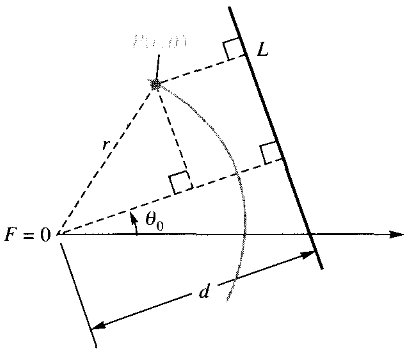
$$\boxed{\text{Circunferencia:} \quad r = 2a\cos(\theta - \theta_0)}$$

Los casos $\theta_0 = 0$ y $\theta_0 = \pi/2$ son particularmente agradables. El primero da $r = 2a \cos \theta$; el segundo da $r = 2a \cos(\theta - \pi/2)$; es decir, $r = 2a \operatorname{sen} \theta$. Este último debe compararse con el ejemplo 1.

Por último, si una cónica (elipse, parábola o hipérbola) se coloca de modo que su foco esté en el polo y su directriz esté a d unidades de distancia, como en la figura 11, entonces la ecuación familiar que define a la cónica $|PF| = e|PL|$ toma la forma

$$r = e[d - r\cos(\theta - \theta_0)]$$

o en forma equivalente,



Cónico

Figura 11

$$\boxed{\text{Cónica:} \quad r = \frac{ed}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}}$$

De nuevo, hay un interés especial en los casos $\theta_0 = 0$ y $\theta_0 = \pi/2$. Observe en particular que si $e = 1$, $d = 2$ y $\theta_0 = 0$, tenemos la ecuación del ejemplo 2.

Resumimos nuestros resultados en la tabla de la siguiente página.

EJEMPLO 5 Determine la ecuación de la elipse horizontal con excentricidad 1/2, foco en el polo y directriz vertical 10 unidades a la derecha del polo.

SOLUCIÓN

$$r = \frac{\frac{1}{2}\cdot 10}{1 + \frac{1}{2}\cos\theta} = \frac{10}{2 + \cos\theta}$$ ■

EJEMPLO 6 Identifique y bosqueje la gráfica de $r = \dfrac{7}{2 + 4\operatorname{sen}\theta}$.

SOLUCIÓN La ecuación sugiere una cónica con eje mayor vertical. Al colocarla en la forma que se muestra en la tabla de ecuaciones polares obtenemos

$$r = \frac{7}{2 + 4\operatorname{sen}\theta} = \frac{\frac{7}{2}}{1 + 2\operatorname{sen}\theta} = \frac{2\left(\frac{7}{4}\right)}{1 + 2\operatorname{sen}\theta}$$

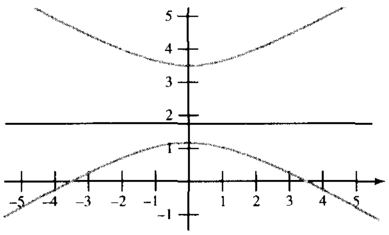
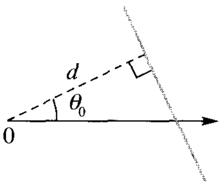
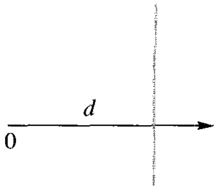
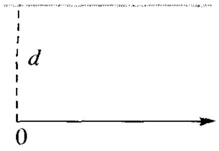
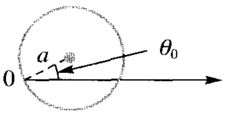
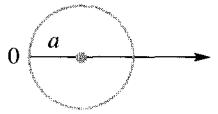
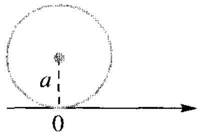
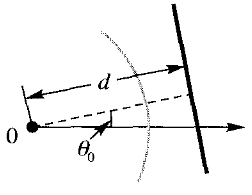
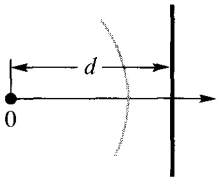
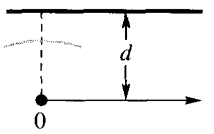


Figura 12

que reconocemos como la ecuación polar de una hipérbola con $e = 2$, foco en el polo y directriz horizontal a $\frac{7}{4}$ unidades por arriba del eje polar (figura 12). ■

Resumen de ecuaciones polares

Tipo de figura	Caso general	$\theta_0 = 0$	$\theta_0 = \pi/2$
Recta	 $r = \frac{d}{\cos(\theta - \theta_0)}$	 $r = \frac{d}{\cos\theta}$	 $r = \frac{d}{\operatorname{sen}\theta}$
Circunferencia	 $r = 2a\cos(\theta - \theta_0)$	 $r = 2a\cos\theta$	 $r = 2a \operatorname{sen}\theta$
Elipse ($0 < e < 1$) **Parábola** ($e = 1$) **Hipérbola** ($e > 1$)	 $r = \frac{ed}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$	 $r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$	 $r = \frac{ed}{1 + e \operatorname{sen}\theta}$

Revisión de conceptos

1. Cada punto del plano tiene una pareja única (x, y) de coordenadas cartesianas, pero ______ parejas (r, θ) de coordenadas polares.

2. Las relaciones $x =$ ______ y $y =$ ______ ligan las coordenadas cartesianas y polares; además, ______ $= x^2 + y^2$.

3. La gráfica de la ecuación polar $r = 5$ es un(a) ______; la gráfica de $\theta = 5$ es una ______.

4. La gráfica de la ecuación polar $r = ed/(1 + e\cos\theta)$ es un(a) ______.

Conjunto de problemas 10.5

1. Ubique los puntos cuyas coordenadas polares son $\left(3, \frac{1}{3}\pi\right)$, $\left(1, \frac{1}{2}\pi\right)$, $\left(4, \frac{1}{3}\pi\right)$, $(0, \pi)$, $(1, 4\pi)$, $\left(3, \frac{11}{7}\pi\right)$, $\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{2}\pi\right)$, y $(4, 0)$.

2. Ubique los puntos cuyas coordenadas polares son $(3, 2\pi)$, $\left(2, \frac{1}{2}\pi\right)$, $\left(4, -\frac{1}{3}\pi\right)$, $(0, 0)$, $(1, 54\pi)$, $\left(3, -\frac{1}{6}\pi\right)$, $\left(1, \frac{1}{2}\pi\right)$, y $\left(3, -\frac{3}{2}\pi\right)$.

3. Ubique los puntos cuyas coordenadas polares son $(3, 2\pi)$, $\left(-2, \frac{1}{3}\pi\right)$, $\left(-2, -\frac{1}{4}\pi\right)$, $(-1, 1)$, $(1, -4\pi)$, $\left(\sqrt{3}, -\frac{7}{6}\pi\right)$, $\left(-2, \frac{1}{4}\pi\right)$, y $\left(-1, -\frac{1}{2}\pi\right)$.

4. Ubique los puntos cuyas coordenadas polares son $\left(3, \frac{9}{4}\pi\right)$, $\left(-2, \frac{1}{2}\pi\right)$, $\left(-2, -\frac{1}{3}\pi\right)$, $(-1, -1)$, $(1, -7\pi)$, $\left(-3, -\frac{1}{6}\pi\right)$, $\left(-2, -\frac{1}{2}\pi\right)$, y $\left(3, -\frac{33}{2}\pi\right)$.

5. Ubique los puntos con las siguientes coordenadas polares. Para cada punto, dé otras cuatro parejas de coordenadas polares, dos con r positivo y dos con r negativo.

(a) $\left(1, \frac{1}{2}\pi\right)$
(b) $\left(-1, \frac{1}{4}\pi\right)$
(c) $\left(\sqrt{2}, -\frac{1}{3}\pi\right)$
(d) $\left(-\sqrt{2}, \frac{5}{2}\pi\right)$

6. Ubique los puntos con las siguientes coordenadas polares. Para cada punto, dé otras cuatro parejas de coordenadas polares, dos con r positivo y dos con r negativo.

(a) $\left(3\sqrt{2}, \frac{7}{2}\pi\right)$
(b) $\left(-1, \frac{15}{4}\pi\right)$
(c) $\left(-\sqrt{2}, -\frac{2}{3}\pi\right)$
(d) $\left(-2\sqrt{2}, \frac{29}{2}\pi\right)$

7. Determine las coordenadas cartesianas de los puntos del problema 5.

8. Determine las coordenadas cartesianas de los puntos del problema 6.

9. Determine las coordenadas polares de los puntos con las coordenadas cartesianas dadas.

(a) $(3\sqrt{3}, 3)$ (b) $(-2\sqrt{3}, 2)$

(c) $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ (d) $(0, 0)$

10. Determine las coordenadas polares de los puntos con las coordenadas cartesianas dadas.

(a) $(-3/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ (b) $(-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2)$

(c) $(0, -2)$ (d) $(3, -4)$

En cada uno de los problemas del 11 al 16, bosqueje la gráfica de la ecuación cartesiana dada y luego determine su ecuación polar.

11. $x - 3y + 2 = 0$

12. $x = 0$

13. $y = -2$

14. $x - y = 0$

15. $x^2 + y^2 = 4$

16. $x^2 = 4py$

En los problemas del 17 al 22 determine las ecuaciones cartesianas de las gráficas de las ecuaciones polares dadas.

17. $\theta = \frac{1}{2}\pi$

18. $r = 3$

19. $r \cos\theta + 3 = 0$

20. $r - 5\cos\theta = 0$

21. $r \operatorname{sen}\theta - 1 = 0$

22. $r^2 - 6r\cos\theta - 4r\operatorname{sen}\theta + 9 = 0$

En los problemas del 23 al 36 dé el nombre de la curva con la ecuación polar dada. Si es una cónica, dé su excentricidad. Bosqueje la gráfica.

23. $r = 6$

24. $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$

25. $r = \dfrac{3}{\operatorname{sen}\theta}$

26. $r = \dfrac{-4}{\cos\theta}$

27. $r = 4\operatorname{sen}\theta$

28. $r = -4\cos\theta$

29. $r = \dfrac{4}{1 + \cos\theta}$

30. $r = \dfrac{4}{1 + 2\operatorname{sen}\theta}$

31. $r = \dfrac{6}{2 + \operatorname{sen}\theta}$

32. $r = \dfrac{6}{4 - \cos\theta}$

33. $r = \dfrac{4}{2 + 2\cos\theta}$

34. $r = \dfrac{4}{2 + 2\cos(\theta - \pi/3)}$

35. $r = \dfrac{4}{\frac{1}{2} + \cos(\theta - \pi)}$

36. $r = \dfrac{4}{3\cos(\theta - \pi/3)}$

37. Demuestre que la ecuación polar de la circunferencia con centro (c, α) y radio a es $r^2 + c^2 - 2rc\cos(\theta - \alpha) = a^2$.

38. Demuestre que $r = a\operatorname{sen}\theta + b\cos\theta$ representa una circunferencia, y determine su centro y radio.

39. Determine la longitud del lado recto de la cónica general $r = ed/[1 + e\cos(\theta - \theta_0)]$ en términos de e y d.

40. Sean r_1 y r_2 las distancias mínima y máxima (**perihelio** y **afelio**, respectivamente) de la elipse $r = ed/[1 + e\cos(\theta - \theta_0)]$ a un foco. Demuestre que

(a) $r_1 = ed/(1 + e), r_2 = ed/(1 - e)$,

(b) el diámetro mayor es $= 2ed/(1 - e^2)$ y el diámetro menor es $= 2ed/\sqrt{1 - e^2}$.

41. El perihelio y el afelio de la órbita del asteroide Ícaro son 17 y 183 millones de millas, respectivamente. ¿Cuál es la excentricidad de su órbita elíptica?

42. La órbita de la Tierra alrededor del Sol es una elipse de excentricidad 0.0167 y diámetro mayor 185.8 millones de millas. Determine su perihelio.

43. La trayectoria de cierto cometa es una parábola, con el Sol en el foco. El ángulo entre el eje de la parábola y un rayo del Sol al cometa es 120° (medido desde el punto del perihelio respecto del Sol al cometa) cuando el cometa está a 100 millones de millas del Sol. ¿Qué tanto se acerca el cometa al Sol?

44. La posición de un cometa con una órbita elíptica altamente excéntrica (e muy cerca de 1) se mide con respecto de un eje polar fijo (el Sol está en un foco, pero el eje polar no es un eje de la elipse) en dos instantes, obteniendo los dos puntos $(4, \pi/2)$ y $(3, \pi/4)$ de la órbita. En este caso, las distancias se miden en unidades astronómicas (1 UA $\approx$ 93 millones de millas). Para la parte de la órbita cercana al Sol, suponga que $e = 1$, de modo que la órbita está dada por

$$r = \frac{d}{1 + \cos(\theta - \theta_0)}$$

(a) Los dos puntos dan dos condiciones sobre d y θ_0. Úselas para demostrar que $4.24\cos\theta_0 - 3.76\operatorname{sen}\theta_0 - 2 = 0$.

(b) Determine θ_0 mediante el método de Newton.

(c) ¿Qué tanto se acerca el cometa al Sol?

CAS **45.** Para graficar una ecuación polar, como $r = f(t)$, usando un graficador de ecuaciones paramétricas, usted debe reemplazar esta ecuación por $x = f(t)\cos t$ y $y = f(t)\operatorname{sen} t$. Estas ecuaciones se pueden obtener al multiplicar $r = f(t)$ por $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$, respectivamente. Confirme el análisis de las cónicas dado en el texto, graficando $r = 4e/(1 + e\cos t)$ para $e = 0.1, 0.5, 0.9, 1, 1.1$ y 1.3 en $[-\pi, \pi]$.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** una infinidad de **2.** $r\cos\theta$; $r\operatorname{sen}\theta$; r^2 **3.** circunferencia; recta **4.** cónica

---

10.6
Gráficas de ecuaciones polares

Las ecuaciones polares consideradas en la sección anterior condujeron a gráficas conocidas, principalmente rectas, circunferencias y cónicas. Ahora centraremos nuestra atención en gráficas más exóticas: cardioides, limaçons, lemniscatas, rosas y espirales. Las ecuaciones polares de estas curvas siguen siendo sencillas; las ecuaciones cartesianas correspondientes son algo complicadas. Así, vemos una de las ventajas de contar con más de un sistema de coordenadas. Algunas curvas tienen ecuaciones sencillas en un sistema; otras curvas tienen ecuaciones sencillas en un segundo sistema. Explotaremos esto más adelante en el libro cuando, con frecuencia, iniciemos la solución de un problema eligiendo un sistema de coordenadas adecuado.

La simetría nos puede ayudar a entender una gráfica. Aquí hay algunos criterios *suficientes* para la simetría en coordenadas polares. Los diagramas al margen le ayudarán a establecer su validez.

1. La gráfica de una ecuación polar es simétrica respecto del eje x (el eje polar) si al reemplazar (r, θ) por $(r, -\theta)$ (o por $(-r, \pi - \theta)$) se obtiene una ecuación equivalente (figura 1).
2. La gráfica de una ecuación polar es simétrica respecto del eje y (la recta $\theta = \pi/2$), si al reemplazar (r, θ) por $(-r, -\theta)$ (o por $(r, \pi - \theta)$) se obtiene una ecuación equivalente (figura 2).
3. La gráfica de una ecuación polar es simétrica respecto del origen (el polo) si al reemplazar (r, θ) por $(-r, \theta)$ (o por $(r, \pi + \theta)$ se obtiene una ecuación equivalente (figura 3).

Debido a la representación múltiple de los puntos en coordenadas polares, puede haber simetrías no identificadas por estos tres criterios (véase el problema 39).

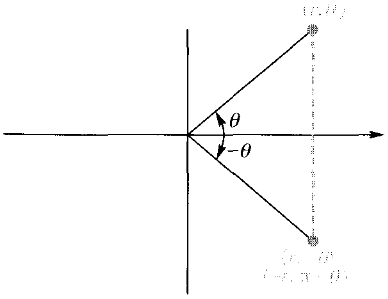


Figura 1

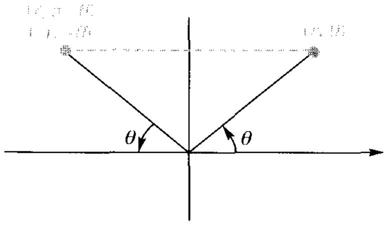


Figura 2

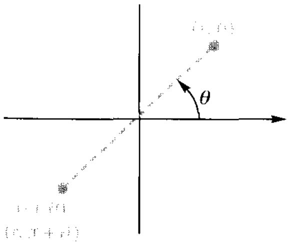


Figura 3

Cardiodes y limaçons Consideremos ecuaciones de la forma

$$r = a \pm b \cos \theta \qquad r = a \pm b \operatorname{sen} \theta$$

con a y b positivos. Sus gráficas se llaman **limaçons**, con los casos particulares en que $a = b$ se llaman **cardiodies**. La figura 4 muestra algunas gráficas típicas.

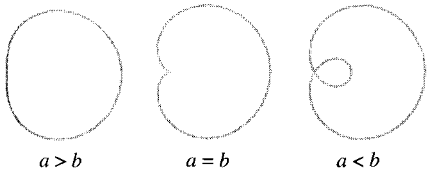


Figura 4

EJEMPLO 1 Analice la ecuación $r = 2 + 4 \cos \theta$, verifique sus simetrías y bosqueje su gráfica.

SOLUCIÓN Como coseno es una función par $[\cos(-\theta] = \cos \theta)$, la gráfica es simétrica respecto del eje x. Los otros criterios de simetría no se cumplen. La figura 5 contiene una tabla de valores y la gráfica. ■

θ	r
0	6
π/6	5.5
π/3	4
π/2	2
7π/12	1.0
2π/3	0
3π/4	–0.8
5π/6	–1.5
π	–2

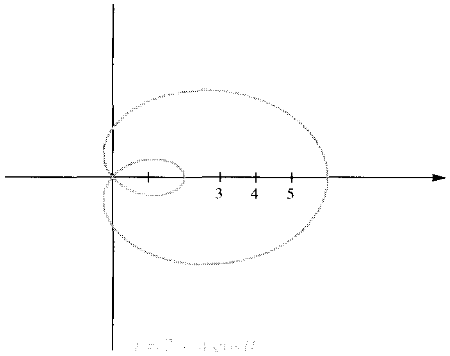


Figura 5

Lemniscatas Las gráficas de

$$r^2 = \pm a \cos 2\theta \qquad r^2 = \pm a \operatorname{sen} 2\theta$$

son curvas con figura de ocho, llamadas **lemniscatas**.

EJEMPLO 2 Analice la ecuación $r^2 = 8 \cos 2\theta$ en busca de simetrías y bosqueje su gráfica.

SOLUCIÓN Como $\cos(-2\theta) = \cos 2\theta$ y

$$\cos[2(\pi - \theta)] = \cos(2\pi - 2\theta) = \cos(-2\theta) = \cos 2\theta$$

La gráfica es simétrica respecto a ambos ejes. Es claro que también es simétrica con respecto al origen. La figura 6 muestra una tabla de valores y la gráfica. ■

θ	r
0	±2.8
π/12	±2.6
π/6	±2
π/4	0

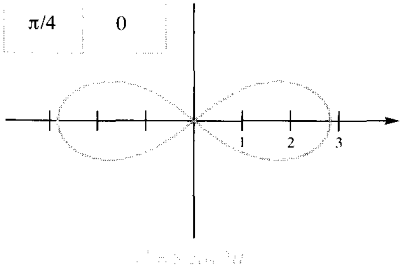


Figura 6

Rosas Las ecuaciones polares de la forma

$$r = a \cos n\theta \qquad r = a \operatorname{sen} n\theta$$

representan curvas con forma de flor llamadas **rosas**. La rosa tiene n pétalos si n es impar y $2n$ pétalos si n es par.

EJEMPLO 3 Analice $r = 4$ sen 2θ en busca de simetría y bosqueje su gráfica.

SOLUCIÓN Puede verificar que $r = 4$ sen 2θ satisface los tres criterios de simetría. Por ejemplo, cumple el criterio 1, pues

$$\operatorname{sen} 2(\pi - \theta) = \operatorname{sen}(2\pi - 2\theta) = -\operatorname{sen} 2\theta$$

de modo que al reemplazar (r, θ) por $(-r, \pi - \theta)$ se obtiene una ecuación equivalente.

La figura 7 muestra una tabla con una extensa lista de valores, para $0 \le \theta \le \pi/2$, y una con menos valores para $\pi/2 \le \theta \le 2\pi$, y la gráfica correspondiente. Las flechas sobre la curva indican la dirección en que $P(r, \theta)$ se mueve cuando θ aumenta de 0 a 2π. ■

θ	r	θ	r
0	0	$2\pi/3$	−3.5
$\pi/12$	2	$5\pi/6$	−3.5
$\pi/8$	2.8	π	0
$\pi/6$	3.5	$7\pi/6$	3.5
$\pi/4$	4	$4\pi/3$	3.5
$\pi/3$	3.5	$3\pi/2$	0
$3\pi/8$	2.8	$5\pi/3$	−3.5
$5\pi/12$	2	$11\pi/6$	−3.5
$\pi/2$	0	2π	0

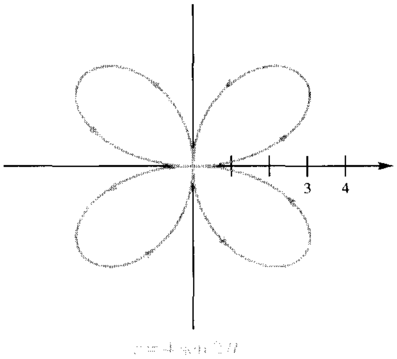


Figura 7

Espirales La gráfica de $r = a\theta$ es una **espiral de Arquímedes**; la gráfica de $r = ae^{b\theta}$ es una **espiral logarítmica**.

EJEMPLO 4 Bosqueje la gráfica de $r = \theta$ para $\theta \ge 0$.

SOLUCIÓN Omitimos la tabla de valores, pero observe que la gráfica cruza el eje polar en $(0, 0)$, $(2\pi, 2\pi)$, $(4\pi, 4\pi)$,... y cruza su extensión a la izquierda en (π, π), $(3\pi, 3\pi)$, $(5\pi, 5\pi)$,..., como en la figura 8. ■

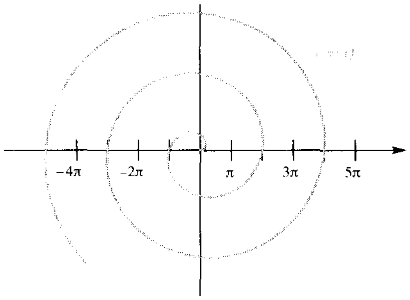


Figura 8

Intersección de curvas en coordenadas polares En coordenadas cartesianas, todos los puntos de intersección de dos curvas se pueden determinar resolviendo las ecuaciones de las curvas en forma simultánea. Pero en coordenadas polares esto no siempre es así, pues un punto P tiene muchas parejas de coordenadas polares y una pareja puede satisfacer la ecuación polar de una curva, y una pareja diferente puede satisfacer la ecuación polar de la otra curva. Por ejemplo (véase la figura 9), la circunferencia $r = 4\cos\theta$ corta a la recta $\theta = \pi/3$ en dos puntos, el polo y $(2, \pi/3)$ y no obstante, sólo este último punto es solución común de las dos ecuaciones. Esto ocurre debido a que las coordenadas del polo que satisfacen la ecuación de la recta son $(0, \pi/3)$ y las que satisfacen la ecuación de la circunferencia son $(0, \pi/2 + n\pi)$.

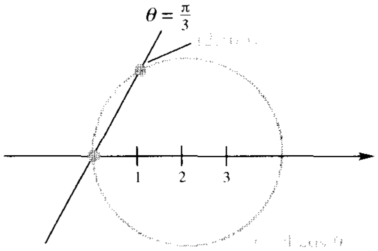


Figura 9

Nuestra conclusión es ésta. Para determinar todas las intersecciones de dos curvas dadas sus ecuaciones polares, resuelva las ecuaciones en forma simultánea; luego grafique las dos ecuaciones con cuidado para descubrir otros posibles puntos de intersección.

EJEMPLO 5 Determine los puntos de intersección de las dos cardioides $r = 1 + \cos\theta$ y $r = 1 - $ sen θ.

SOLUCIÓN Si eliminamos r de ambas ecuaciones, obtenemos $1 + \cos\theta = 1 - \operatorname{sen}\theta$. Así, $\cos\theta = -\operatorname{sen}\theta$, o $\tan\theta = -1$. Concluimos que $\theta = \frac{3}{4}\pi$ o $\theta = \frac{7}{4}\pi$, lo que da los dos puntos de intersección $\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi\right)$ y $\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{7}{4}\pi\right)$. Sin embargo, las gráficas de la figura 10 muestran que nos falta un tercer punto de intersección, el polo. La razón de su omisión es que $r = 0$ en $r = 1 + \cos\theta$ cuando $\theta = \pi$, pero $r = 0$ en $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$ cuando $\theta = \pi/2$. ■

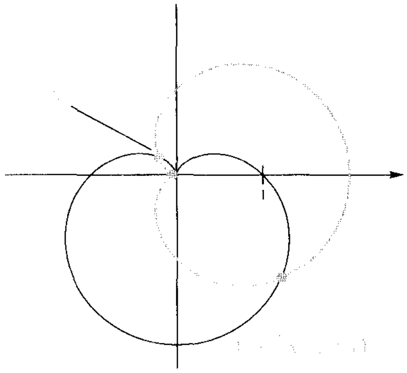


Figura 10

Revisión de conceptos

1. La gráfica de $r = 3 + 2\cos\theta$ es un(a) ________.

2. La gráfica de $r = 2 + 2\cos\theta$ es un(a) ________.

3. La gráfica de $r = 4$ sen $n\theta$ es un(a) _______ con n pétalos si n es _________ y $2n$ pétalos si n es ____________.

4. La gráfica de $r = \theta/3$ es un(a) ___________.

Conjunto de problemas 10.6

En los problemas del 1 al 32 bosqueje la gráfica de la ecuación polar dada y verifique su simetría (véanse los ejemplos del 1 al 3).

1. $\theta^2 - \pi^2/16 = 0$

2. $(r - 3)\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

3. $r \operatorname{sen}\theta + 4 = 0$

4. $r = -4\sec\theta$

5. $r = 2\cos\theta$

6. $r = 4 \operatorname{sen}\theta$

7. $r = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}$

8. $r = \dfrac{4}{1 + \operatorname{sen}\theta}$

9. $r = 3 - 3\cos\theta$ (cardioide)

10. $r = 5 - 5\operatorname{sen}\theta$ (cardioide)

11. $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$ (cardioide)

12. $r = \sqrt{2} - \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta$ (cardioide)

13. $r = 1 - 2\operatorname{sen}\theta$ (limaçon)

14. $r = 4 - 3\cos\theta$ (limaçon)

15. $r = 2 - 3\operatorname{sen}\theta$ (limaçon)

16. $r = 5 - 3\cos\theta$ (limaçon)

17. $r^2 = 4\cos 2\theta$ (lemniscata)

18. $r^2 = 9\operatorname{sen} 2\theta$ (lemniscata)

19. $r^2 = -9\cos 2\theta$ (lemniscata)

20. $r^2 = -16\cos 2\theta$ (lemniscata)

21. $r = 5\cos 3\theta$ (rosa de tres pétalos)

22. $r = 3\operatorname{sen} 3\theta$ (rosa de tres pétalos)

23. $r = 6\operatorname{sen} 2\theta$ (rosa de cuatro pétalos)

24. $r = 4\cos 2\theta$ (rosa de cuatro pétalos)

25. $r = 7\cos 5\theta$ (rosa de cinco pétalos)

26. $r = 3\operatorname{sen} 5\theta$ (rosa de cinco pétalos)

27. $r = \frac{1}{2}\theta, \theta \geq 0$ (espiral de Arquímedes)

28. $r = 2\theta, \theta \geq 0$ (espiral de Arquímedes)

29. $r = e^{\theta}, \theta \geq 0$ (espiral logarítmica)

30. $r = e^{\theta/2}, \theta \geq 0$ (espiral logarítmica)

31. $r = \dfrac{2}{\theta}, \theta > 0$ (espiral logarítmica)

32. $r = -\dfrac{1}{\theta}, \theta > 0$ (espiral logarítmica)

En los problemas del 33 al 38 bosqueje las curvas dadas y determine sus puntos de intersección.

33. $r = 6, r = 4 + 4\cos\theta$

34. $r = 1 - \cos\theta, r = 1 + \cos\theta$

35. $r = 3\sqrt{3}\cos\theta, r = 3\operatorname{sen}\theta$

36. $r = 5, r = \dfrac{5}{1 - 2\cos\theta}$

37. $r = 6\operatorname{sen}\theta, r = \dfrac{6}{1 + 2\operatorname{sen}\theta}$

38. $r^2 = 4\cos 2\theta, r = 2\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta$

39. Las condiciones para simetría dadas en el texto son condiciones suficientes, pero no necesarias. Dé un ejemplo de una ecuación polar $r = f(\theta)$ cuya gráfica sea simétrica respecto del eje y, aunque al reemplazar (r, θ) por $(-r, -\theta)$ o $(r, \pi - \theta)$ no se obtenga una ecuación equivalente.

40. Sean a y b números positivos fijos y suponga que AP es parte de la recta que pasa por $(0, 0)$, con A sobre la recta $x = a$ y $|AP| = b$. Determine la ecuación polar y la ecuación rectangular para el conjunto de puntos P (llamado *conchoide*) y bosqueje su gráfica.

41. Sean F y F' puntos fijos con coordenadas polares $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, respectivamente. Muestre que el conjunto de puntos P que satisface $|PF||PF'| = a^2$ es una lemniscata, determinando su ecuación polar.

42. Un segmento de recta L de longitud $2a$ tiene sus dos extremos en los ejes x y y, respectivamente. El punto P está sobre L y es tal que OP es perpendicular a L. Demuestre que el conjunto de puntos que satisface esta condición es una rosa de cuatro pétalos, determinando su ecuación polar.

43. Determine la ecuación polar de la curva descrita mediante las siguientes ecuaciones cartesianas.

(a) $y = 45$

(b) $x^2 + y^2 = 36$

(c) $x^2 - y^2 = 1$

(d) $4xy = 1$

(e) $y = 3x + 2$

(f) $3x^2 + 4y = 2$

(g) $x^2 + 2x + y^2 - 4y - 25 = 0$

Las computadoras y calculadoras gráficas ofrecen una maravillosa oportunidad para experimentar con la graficación de ecuaciones polares de la forma $r = f(\theta)$. En algunos casos, estos apoyos requieren que las ecuaciones se escriban en forma paramétrica. Como $x = r \cos\theta = f(\theta)\cos\theta$ y $y = r \operatorname{sen}\theta = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$, usted puede usar la capacidad de graficación paramétrica para graficar $x = f(t)\cos t$ y $y = f(t)\operatorname{sen} t$ como un conjunto de ecuaciones paramétricas.

GC **44.** Grafique la curva $r = \cos(8\theta/5)$ usando la capacidad de graficación paramétrica de su calculadora gráfica o computadora. Observe que es necesario determinar el dominio adecuado para θ. Suponiendo que comience en $\theta = 0$, usted debe determinar el valor de θ que haga que la curva comience a repetirse por sí misma. Explique por qué el dominio correcto es $0 \leq \theta \leq 10\pi$.

45. Relacione las ecuaciones polares con las gráficas etiquetadas I–VIII en la figura 11, justificando sus elecciones.

(a) $r = \cos(\theta/2)$
(b) $r = \sec(3\theta)$
(c) $r = 2 - 3\,\mathrm{sen}(5\theta)$
(d) $r = 1 - 2\,\mathrm{sen}(5\theta)$
(e) $r = 3 + 2\cos\theta$
(f) $r = \theta\cos\theta$
(g) $r = 1/\theta^{3/2}$
(h) $r = 2\cos 3\theta$

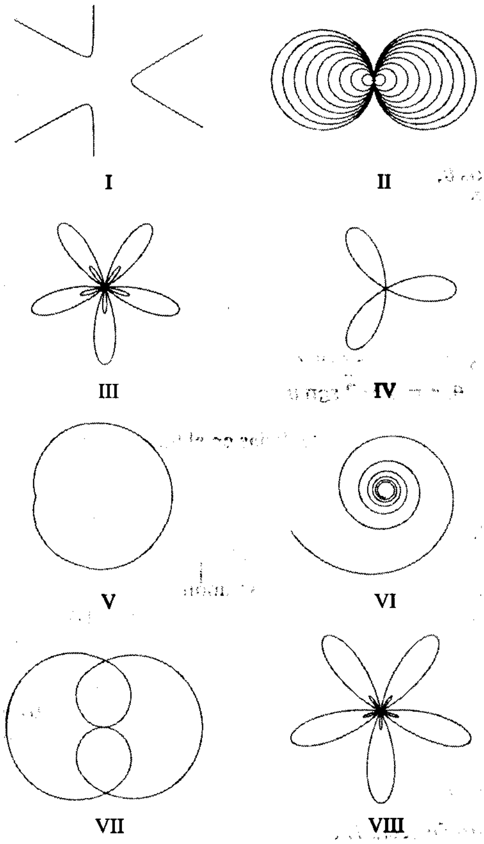


Figura 11

GC *En los problemas del 46 al 49 use una computadora o calculadora gráfica para graficar le ecuación dada. Asegúrese de elegir un intervalo suficientemente grande para el parámetro, de modo que se pueda trazar toda la figura.*

46. $r = \sqrt{1 - 0.5\,\mathrm{sen}^2\theta}$

47. $r = \cos(13\theta/5)$

48. $r = \mathrm{sen}(5\theta/7)$

49. $r = 1 + 3\cos(\theta/3)$

GC EXPL **50.** En muchos casos, las gráficas están relacionadas entre sí mediante una rotación. Aquí exploramos este concepto.

(a) ¿Cuál es la relación de las gráficas de $r = 1 + \mathrm{sen}(\theta - \pi/3)$ y $r = 1 + \mathrm{sen}(\theta + \pi/3)$ con la gráfica de $r = 1 + \mathrm{sen}\,\theta$?

(b) ¿Cuál es la relación de la gráfica de $r = 1 + \mathrm{sen}\,\theta$ con la gráfica de $r = 1 - \mathrm{sen}\,\theta$?

(c) ¿Cuál es la relación de la gráfica de $r = 1 + \mathrm{sen}\,\theta$ con la gráfica de $r = 1 + \cos\theta$?

(d) ¿Cuál es la relación de la gráfica de $r = f(\theta)$ con la gráfica de $r = f(\theta - \alpha)$?

GC EXPL **51.** Analice la familia de curvas dadas por $r = a + b\cos(n(\theta + \phi))$, donde a, b y ϕ son números reales y n es un entero positivo. Al responder las siguientes preguntas, asegúrese de graficar un número suficiente de ejemplos para justificar sus conclusiones.

(a) ¿Cuál es la relación de las gráficas tales que $\phi = 0$ con aquellas para las que $\phi \neq 0$?

(b) ¿Cómo cambia la gráfica al aumentar n?

(c) ¿Cómo cambian la magnitud relativa y el signo de a y b a la naturaleza de la gráfica?

52. Analice la familia de curvas definidas mediante las ecuaciones polares $r = |\cos n\theta|$, donde n es algún entero positivo. ¿Cómo depende el número de pétalos de n?

53. Las gráficas polares se pueden usar para representar varias espirales. Las espirales pueden desenrollarse en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario. Determine las condiciones sobre c para que la *espiral de Arquímedes*, $r = c\theta$, se desenrolle en un sentido o en el otro.

54. Bosqueje la *espiral recíproca* dada por $r = c/\theta$. Para $c > 0$, ¿se desenrolla en la dirección de las manecillas del reloj?

55. Las siguientes ecuaciones polares son representadas por seis gráficas en la figura 12. Relacione cada gráfica con su ecuación.

(a) $r = \mathrm{sen}\,3\theta + \mathrm{sen}^2\,2\theta$
(b) $r = \cos 2\theta + \cos^2 4\theta$
(c) $r = \mathrm{sen}\,4\theta + \mathrm{sen}^2\,5\theta$
(d) $r = \cos 2\theta + \cos^2 3\theta$
(e) $r = \cos 4\theta + \cos^2 4\theta$
(f) $r = \mathrm{sen}\,4\theta + \mathrm{sen}^2\,4\theta$

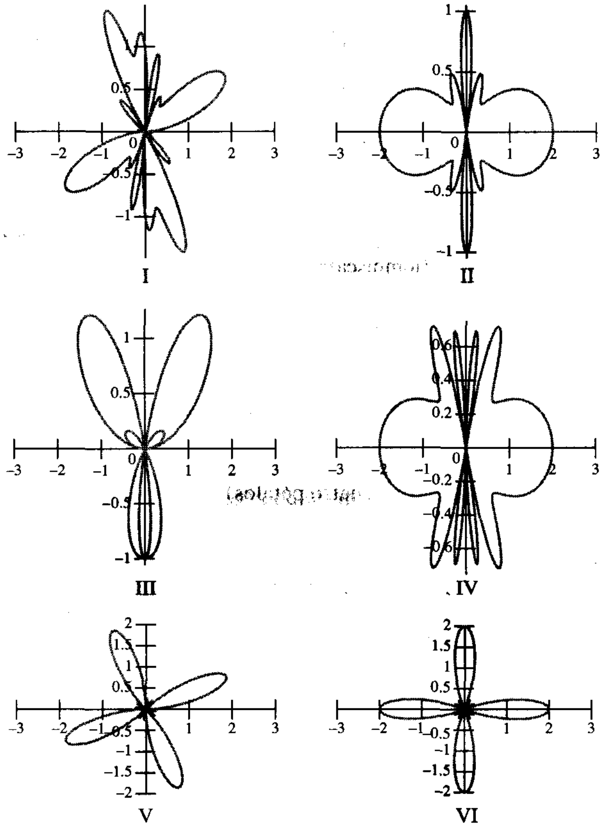


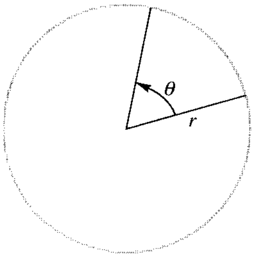
Figura 12

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** limaçon **2.** cardioide **3.** rosa; impar, par **4.** espiral

10.7
Cálculo en coordenadas polares

Los dos problemas básicos en cálculo son la determinación de la pendiente de una recta tangente y el área de una región curva. Aquí analizaremos ambos problemas, pero en el contexto de coordenadas polares. El problema del área desempeña un papel central en el resto del libro, así que lo analizaremos primero.

En coordenadas cartesianas, el bloque de construcción fundamental en problemas de área era el rectángulo. En coordenadas polares, es el sector circular (una región con forma de rebanada de pastel, como la de la figura 1). Con base en que el área de un círculo es πr^2, inferimos que el área de un sector con ángulo central de θ radianes es $(\theta/2\pi)\pi r^2$; es decir,



$A = \frac{1}{2}\theta r^2$

Figura 1

$$\boxed{\text{Área de un sector:} A = \frac{1}{2}\theta r^2}$$

Área en coordenadas polares Para comenzar, supongamos que $r = f(\theta)$ determina una curva en el plano, donde f es una función continua, no negativa para $\alpha \leq \theta \leq \beta$ y $\beta - \alpha \leq 2\pi$. Las curvas $r = f(\theta)$, $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ acotan una región R (la que se muestra a la izquierda en la figura 2), cuya área $A(R)$ queremos determinar.

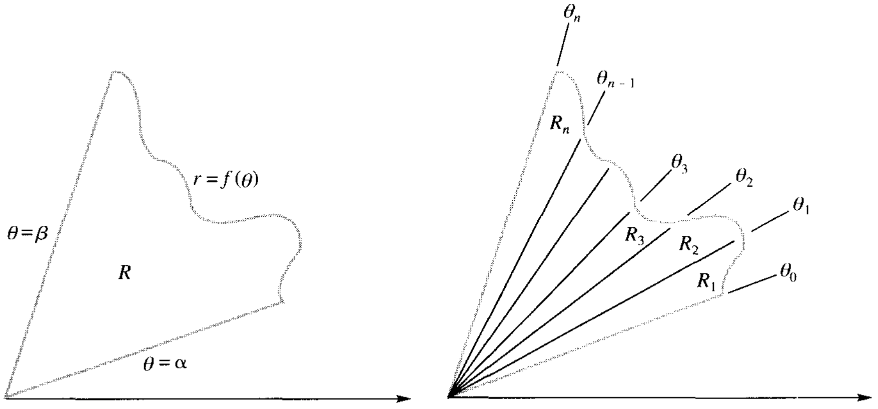


Figura 2

Dividimos el intervalo $[\alpha, \beta]$ en n subintervalos por medio de números $\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n = \beta$, rebanando con esto a R en n regiones más pequeñas con forma de rebanada $R_1, R_2, \ldots, R_n$ como se muestra en la mitad derecha de la figura 2. Es claro que $A(R) = \mathrm{A}(\mathrm{R}_1) + A(R_2) + \cdots + A(R_n)$.

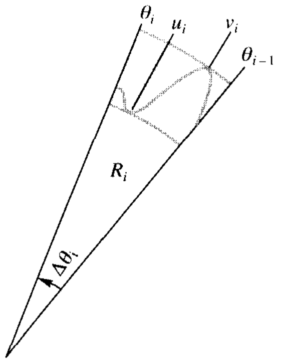


Figura 3

Aproximamos el área $A(R_i)$ de la i-ésima rebanada; de hecho, lo hacemos de dos formas. En el i-ésimo intervalo $[\theta_{i-1}\ \theta_i]$, f alcanza su valor mínimo y su valor máximo, por ejemplo, en u_i y v_i, respectivamente (figura 3). Así, si $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$

$$\tfrac{1}{2}[f(u_i)]^2\,\Delta\theta_i \leq A(R_i) \leq \tfrac{1}{2}[f(v_i)]^2\,\Delta\theta_i$$

y entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(u_i)]^2\,\Delta\theta_i \leq \sum_{i=1}^{n} A(R_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(v_i)]^2\,\Delta\theta_i$$

El primer y tercer miembros de esta desigualdad son sumas de Riemann de la misma integral: $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}[f(\theta)]^2\,d\theta$. Si hacemos tender a cero la norma de la partición, obtenemos (mediante el teorema del emparedado) la fórmula para el área

$$\boxed{A = \tfrac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2\,d\theta}$$

Puntos equicordales

Las limaçons comparten con los círculos la propiedad de tener un punto equicordal (un punto desde el cual todas las cuerdas tienen la misma longitud). Para la limaçon $r = 2 + \cos\theta$, del ejemplo 1, todas las cuerdas que pasan por el polo tienen longitud 4. Observe que esta limaçon tiene área $9\pi/2$, mientras que la circunferencia correspondiente de diámetro 4 tiene área 4π. Así, el hecho de tener cuerdas iguales en todas las direcciones respecto de un punto no basta para determinar el área.

He aquí un famoso problema no resuelto, planteado por vez primera en 1916. ¿*Una región plana puede tener dos puntos equicordales*? Una respuesta correcta a esta pregunta (ya sea un ejemplo de tal región o una demostración de que tal región no existe) le haría famoso instantáneamente. No obstante, le sugerimos que resuelva los problemas al final de esta sección antes de enfrentar este reto.

Por supuesto, esta fórmula puede memorizarse, pero preferimos que recuerde cómo se dedujo. De hecho, notará que las tres palabras familiares *rebanar, aproximar* e *integrar* son la clave para los problemas de área en coordenadas polares. Ilustraremos ahora lo que esto significa.

EJEMPLO 1 Determine el área de la región dentro de la limaçon $r = 2 + \cos\theta$.

SOLUCIÓN La gráfica se muestra en la figura 4; observe que θ varía de 0 a 2π.

≋ Para una aproximación rápida, podríamos observar que la región se parece mucho a un círculo de radio 2. Por lo tanto, esperamos que la respuesta sea aproximadamente $\pi 2^2 = 4\pi$. Para determinar el área exacta, rebanamos, aproximamos e integramos.

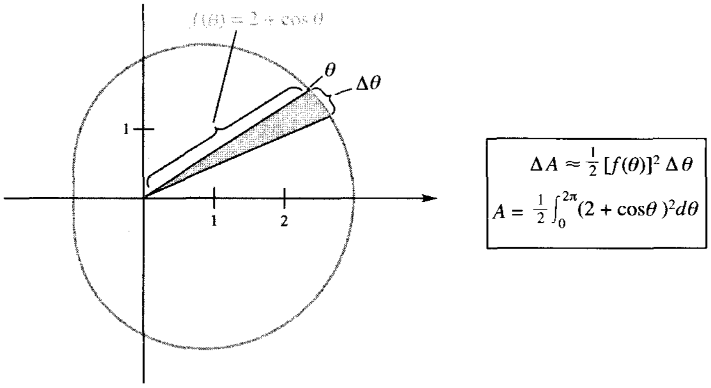

$f(\theta) = 2 + \cos\theta$
θ
$\Delta\theta$
1
1
2
$\Delta A \approx \frac{1}{2}[f(\theta)]^2\,\Delta\theta$
$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2 + \cos\theta)^2 d\theta$

Figura 4

Por simetría, podemos duplicar la integral de 0 a π. Así

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi}(2 + \cos\theta)^2\,d\theta = \int_0^{\pi}(4 + 4\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi} 4\,d\theta + 4\int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1 + \cos 2\theta)\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi}\frac{9}{2}\,d\theta + 4\int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta + \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos 2\theta\cdot 2\,d\theta \\ &= \left[\frac{9}{2}\,\theta\right]_0^{\pi} + [4\,\mathrm{sen}\,\theta]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{4}\mathrm{sen}\,2\theta\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{9\pi}{2} \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 Determine el área de un pétalo de la rosa de cuatro pétalos $r = 4$ sen 2θ.

≋ **SOLUCIÓN** La rosa completa se bosquejó en el ejemplo 3 de la sección anterior. Aquí sólo mostramos el pétalo del primer cuadrante (figura 5). Este pétalo tiene 4 unidades de longitud y promedia cerca de 1.5 unidades de ancho, lo cual da 6 como estimación de su área. El área exacta está dada por

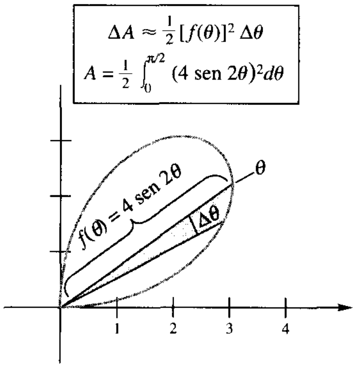

$\Delta A \approx \frac{1}{2}[f(\theta)]^2\,\Delta\theta$
$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(4\,\mathrm{sen}\,2\theta)^2 d\theta$
$f(\theta) = 4\,\mathrm{sen}\,2\theta$
$\Delta\theta$
θ
1
2
3
4

Figura 5

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 16\,\mathrm{sen}^2\,2\theta\,d\theta = 8\int_0^{\pi/2}\frac{1 - \cos 4\theta}{2}\,d\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/2} d\theta - \int_0^{\pi/2}\cos 4\theta\cdot 4\,d\theta \\ &= [4\theta]_0^{\pi/2} - [\mathrm{sen}\,4\theta]_0^{\pi/2} = 2\pi \end{aligned}$$

■

$$\Delta A \approx \frac{1}{2}[3\,\mathrm{sen}^2\theta - (1+\cos\theta)^2]\,\Delta\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi}[3\,\mathrm{sen}^2\theta - (1+\cos\theta)^2]d\theta$$

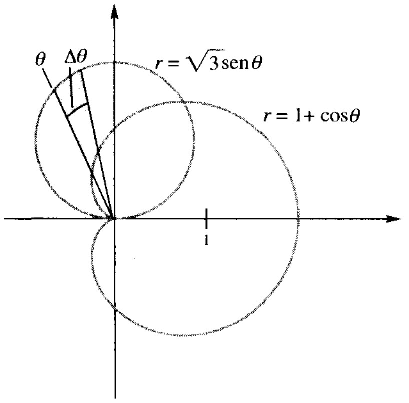


Figura 6

EJEMPLO 3 Determine el área de la región fuera de la cardioide $r = 1 + \cos\theta$ y dentro de la circunferencia $r = \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\theta$.

SOLUCIÓN Las gráficas de las dos curvas aparecen en la figura 6. Necesitaremos las coordenadas θ de los puntos de intersección. Tratemos de resolver las dos ecuaciones en forma simultánea.

$$\begin{aligned}
1 + \cos\theta &= \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\theta \\
1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta &= 3\,\mathrm{sen}^2\theta \\
1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta &= 3(1 - \cos^2\theta) \\
4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 2 &= 0 \\
2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 &= 0 \\
(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) &= 0 \\
\cos\theta = \frac{1}{2} \quad &\text{o} \quad \cos\theta = -1 \\
\theta = \frac{\pi}{3} \quad &\text{o} \quad \theta = \pi
\end{aligned}$$

Ahora rebanamos, aproximamos e integramos.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi}[3\,\mathrm{sen}^2\theta - (1+\cos\theta)^2]\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi}[3\,\mathrm{sen}^2\theta - 1 - 2\cos\theta - \cos^2\theta]\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi}\left[\frac{3}{2}(1-\cos 2\theta) - 1 - 2\cos\theta - \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\right]d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi}[-2\cos\theta - 2\cos 2\theta]\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}[-2\,\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}\,2\theta]_{\pi/3}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2}\left[2\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1.299
\end{aligned}$$

■

Tangentes en coordenadas polares En coordenadas cartesianas, la pendiente m de la recta tangente a una curva está dada por $m = dy/dx$. Rápidamente desechamos a $dr/d\theta$ como la fórmula correspondiente para la pendiente en coordenadas polares. Si $r = f(\theta)$ determina la curva, escribimos

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta = f(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta$$

Así,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta y/\Delta\theta}{\Delta x/\Delta\theta} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$$

Es decir,

$$m = \frac{f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta}{-f(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta + f'(\theta)\cos\theta}$$

Esta fórmula recién deducida se simplifica cuando la gráfica de $r = f(\theta)$ pasa por el polo. Por ejemplo, supongamos que para algún ángulo α se tiene $r = f(\alpha) = 0$ y $f'(\alpha) \neq 0$. Entonces (en el polo), nuestra fórmula para m es

$$m = \frac{f'(\alpha)\,\mathrm{sen}\,\alpha}{f'(\alpha)\cos\alpha} = \tan\alpha$$

Como la recta $\theta = \alpha$ también tiene pendiente $\tan \alpha$, concluimos que esta recta es tangente a la curva en el polo. Deducimos el útil hecho de que *las rectas tangentes en el polo se pueden determinar resolviendo la ecuación* $f(\theta) = 0$. A continuación ilustramos esto.

EJEMPLO 4 Considere la ecuación polar $r = 4 \operatorname{sen} 3\theta$.

(a) Determine la pendiente de la recta tangente en $\theta = \pi/6$ y $\theta = \pi/4$.
(b) Determine las rectas tangentes en el polo.
(c) Bosqueje la gráfica.
(d) Determine el área de un pétalo.

SOLUCIÓN

(a) $$m = \frac{f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\operatorname{sen}\theta}{-f(\theta)\operatorname{sen}\theta + f'(\theta)\cos\theta} = \frac{4\operatorname{sen}3\theta\cos\theta + 12\cos 3\theta\operatorname{sen}\theta}{-4\operatorname{sen}3\theta\operatorname{sen}\theta + 12\cos 3\theta\cos\theta}$$

En $\theta = \pi/6$,

$$m = \frac{4\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 12\cdot 0\cdot\frac{1}{2}}{-4\cdot 1\cdot\frac{1}{2} + 12\cdot 0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\sqrt{3}$$

En $\theta = \pi/4$,

$$m = \frac{4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 12\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{-4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 12\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2-6}{-2-6} = \frac{1}{2}$$

(b) Hacemos $f(\theta) = 4\operatorname{sen}3\theta = 0$ y despejamos. Esto implica que $\theta = 0, \theta = \pi/3, \theta = 2\pi/3, \theta = \pi, \theta = 4\pi/3$, y $\theta = 5\pi/3$.

(c) Después de observar que

$$\operatorname{sen}3(\pi - \theta) = \operatorname{sen}(3\pi - 3\theta) = \operatorname{sen}3\pi\cos 3\theta - \cos 3\pi\operatorname{sen}3\theta = \operatorname{sen}3\theta$$

lo cual implica simetría respecto del eje *y*, obtenemos una tabla de valores y bosquejamos la gráfica que se muestra en la figura 7.

θ	r
0	0
$\pi/12$	2.8
$\pi/6$	4
$\pi/4$	2.8
$\pi/3$	0
$5\pi/12$	−2.8
$\pi/2$	−4

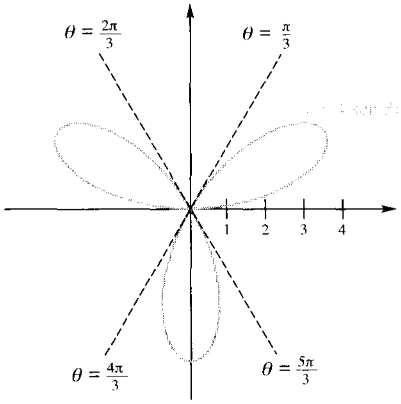


Figura 7

(d) $$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}(4\operatorname{sen}3\theta)^2\,d\theta = 8\int_0^{\pi/3}\operatorname{sen}^2 3\theta\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/3}(1 - \cos 6\theta)\,d\theta = 4\int_0^{\pi/3}d\theta - \frac{4}{6}\int_0^{\pi/3}\cos 6\theta\cdot 6\,d\theta$$

$$= \left[4\theta - \frac{2}{3}\operatorname{sen}6\theta\right]_0^{\pi/3} = \frac{4\pi}{3}$$ ■

Revisión de conceptos

1. La fórmula para el área A de un sector de un círculo de radio r y ángulo θ (en radianes) es $A =$_____.

2. La fórmula de la pregunta 1 conduce a la fórmula para el área A de la región acotada por la curva $r = f(\theta)$ entre $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$, es decir, $A =$ _____.

3. A partir de la fórmula de la pregunta 2, concluimos que el área de la región dentro de la cardioide $r = 2 + 2\cos\theta$ se puede expresar como $A =$ _____.

4. Las rectas tangentes a la curva polar $r = f(\theta)$ en el polo se pueden determinar resolviendo la ecuación _____.

Conjunto de problemas 10.7

En los problemas del 1 al 10 bosqueje la gráfica de la ecuación dada y determine el área de la región acotada por ella.

1. $r = a, a > 0$

2. $r = 2a\cos\theta, a > 0$

3. $r = 2 + \cos\theta$

4. $r = 5 + 4\cos\theta$

5. $r = 3 - 3\operatorname{sen}\theta$

6. $r = 3 + 3\operatorname{sen}\theta$

7. $r = a(1 + \cos\theta), a > 0$

8. $r^2 = 6\cos 2\theta$

9. $r^2 = 9 \operatorname{sen} 2\theta$ **10.** $r^2 = a \cos 2\theta, a > 0$

11. Bosqueje la limaçon $r = 3 - 4 \operatorname{sen} \theta$ y determine el área de la región dentro de su rizo menor.

12. Bosqueje la limaçon $r = 2 - 4 \cos \theta$ y determine el área de la región dentro de su rizo menor.

13. Bosqueje la limaçon $r = 2 - 3 \cos \theta$ y determine el área de la región dentro de su rizo mayor.

14. Bosqueje un pétalo de la rosa de cuatro pétalos $r = 3 \cos 2\theta$ y determine el área de la región encerrada por éste.

15. Bosqueje la rosa de tres pétalos $r = 4 \cos 3\theta$ y determine el área de toda la región encerrada por ella.

16. Bosqueje la rosa de tres pétalos $r = 2 \operatorname{sen} 3\theta$ y determine el área de la región encerrada por ella.

17. Determine el área de la región encerrada por las dos circunferencias concéntricas $r = 7$ y $r = 10$.

18. Bosqueje la región que está dentro de la circunferencia $r = 3 \operatorname{sen} \theta$ y fuera de la cardioide $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$, y calcule su área.

19. Bosqueje la región que está fuera de la circunferencia $r = 2$ y dentro de la lemniscata $r^2 = 8 \cos 2\theta$, y calcule su área.

20. Bosqueje la limaçon $r = 3 - 6 \operatorname{sen} \theta$ y calcule el área de la región que está dentro de su rizo mayor, pero fuera de su rizo menor.

21. Bosqueje la región en el primer cuadrante que está dentro de la cardioide $r = 3 + 3 \cos \theta$ y fuera de la cardioide $r = 3 + 3 \operatorname{sen} \theta$ y determine su área.

22. Bosqueje la región en el segundo cuadrante que está dentro de la cardioide $r = 2 + 2 \operatorname{sen} \theta$ y fuera de la cardioide $r = 2 + 2 \cos \theta$ y determine su área.

23. Determine la pendiente de la recta tangente a cada una de las curvas siguientes, en $\theta = \pi/3$.

(a) $r = 2 \cos \theta$ (b) $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$

(c) $r = \operatorname{sen} 2\theta$ (d) $r = 4 - 3 \cos \theta$

24. Determine todos los puntos de la cardioide $r = a(1 + \cos \theta)$ tales que la recta tangente sea

(a) horizontal, y (b) vertical.

25. Determine todos los puntos sobre la limaçon $r = 1 - 2 \operatorname{sen} \theta$ donde la recta tangente sea horizontal.

26. Sea $r = f(\theta)$, donde f es continua en el intervalo cerrado $[\alpha, \beta]$. Deduzca la siguiente fórmula para la longitud L de la curva polar correspondiente de $\theta = \alpha$ a $\theta = \beta$.

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\, d\theta$$

27. Use la fórmula del problema 26 para determinar el perímetro de la cardioide $r = a(1 + \cos \theta)$.

28. Determine la longitud de la espiral logarítmica $r = e^{\theta/2}$ de $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$.

29. Determine el área total de la rosa $r = a \cos n\theta$, donde n es un entero positivo.

30. Bosqueje la gráfica de la *estrofoide* $r = \sec \theta - 2 \cos \theta$ y determine el área de su rizo.

31. Considere los dos circunferencias $r = 2a \operatorname{sen} \theta$ y $r = 2b \cos \theta$, con a y b positivos.

(a) Determine el área de la región dentro de ambas circunferencias.

(b) Muestre que las dos circunferencias se intersecan en ángulos rectos.

32. Suponga que un planeta de masa m gira alrededor del Sol (localizado en el polo) con momento angular constante $mr^2\, d\theta/dt$. Deduzca la segunda Ley de Kepler: la línea del Sol al planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.

33. Primer problema del chivo Un chivo está atado a la orilla de un estanque circular de radio a mediante una cuerda de longitud ka $(0 < k \le 2)$. Utilice el método de esta sección para hallar su área de pastizal (el área sombreada de la figura 8). *Nota:* ya resolvimos este problema antes (problema 77 de la sección 6.8); usted debe lograr que sus respuestas coincidan.

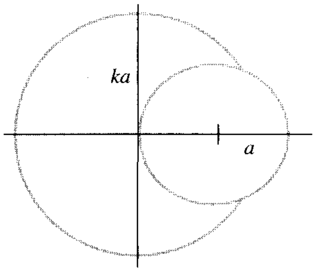


Figura 8

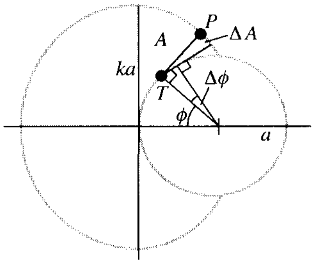


Figura 9

34. Segundo problema del chivo Resuelva el problema 33 de nuevo, pero suponga que el estanque tiene una cerca alrededor, de modo que, al formar la cuña A, la cuerda se enrolla en torno de la cerca (figura 9). *Sugerencia:* si usted es muy ambicioso, trate de usar el método de esta sección. Pero también puede notar que en la cuña A,

$$\Delta A \approx \frac{1}{2}|PT|^2\, \Delta\phi$$

lo cual conduce a una suma de Riemann para una integral. La respuesta final es $a^2(\pi k^2/2 + k^3/3)$, resultado que necesitamos en el problema 35.

C **35. Tercer problema del chivo** Un chivo no atado pasta dentro de un terreno comprendido dentro de una cerca circular de radio a; otro chivo pasta atado fuera de la cerca del problema 34. Determine la longitud de la cuerda si los dos chivos tienen la misma área de pastizales.

CAS *Use una computadora para resolver los problemas del 36 al 39. En cada caso, asegúrese de hacer primero una estimación mental. Observe la fórmula de la longitud en el problema 26.*

36. Determine las longitudes de las limaçons $r = 2 + \cos \theta$ y $r = 2 + 4 \cos \theta$ (véase el ejemplo 1 de esta sección y el ejemplo 1 de la sección 10.6).

37. Determine el área y la longitud de la rosa de tres pétalos $r = 4 \operatorname{sen} 3\theta$ (véase el ejemplo 4).

38. Determine el área y la longitud de la lemniscata $r^2 = 8 \cos 2\theta$ (véase el ejemplo 2 de la sección 10.6).

39. Trace la curva $r = 4 \operatorname{sen}(3\theta/2), 0 \le \theta \le 4\pi$, y luego determine su longitud.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $\frac{1}{2}r^2\theta$

2. $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2\, d\theta$ **3.** $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} (2 + 2\cos\theta)^2\, d\theta$

4. $f(\theta) = 0$

10.8 Repaso del capítulo

Examen de conceptos

Responda con verdadero o falso a cada una de las siguientes afirmaciones. Prepárese para justificar su respuesta.

1. La gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ es una parábola para todas las opciones de a, b y c.

2. El vértice de una parábola está a la mitad del camino entre el foco y la directriz.

3. Un vértice de la elipse está más cerca de una directriz que de un foco.

4. El punto sobre una parábola más cercano a su foco es el vértice.

5. Las hipérbolas $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ y $y^2/b^2 - x^2/a^2 = 1$ tienen las mismas asíntotas.

6. La circunferencia C de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, con $b < a$, satisface $2\pi b < C < 2\pi a$.

7. Mientras menor sea la excentricidad e de una elipse, más circular será la elipse.

8. La elipse $6x^2 + 4y^2 = 24$ tiene sus focos sobre el eje x.

9. La ecuación $x^2 - y^2 = 0$ representa una hipérbola.

10. La ecuación $(y^2 - 4x + 1)^2 = 0$ representa una parábola.

11. Si $k \neq 0$, $x^2/a^2 - y^2/b^2 = k$ es una ecuación de una hipérbola.

12. Si $k \neq 0$, $x^2/a^2 + y^2/b^2 = k$ es una ecuación de una elipse.

13. La distancia entre los focos de la gráfica de $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ es $2\sqrt{a^2 - b^2}$.

14. La gráfica de $x^2/9 - y^2/8 = -2$ no interseca al eje x.

15. La luz que emana de un punto entre un foco y el vértice más cercano de un espejo elíptico se reflejará más allá del otro foco.

16. Una elipse que se traza usando una cuerda con 8 unidades de longitud unida a 2 focos, separados 2 unidades, tendrá un diámetro menor de longitud $\sqrt{60}$ unidades.

17. La gráfica de $x^2 + y^2 + Cx + Dy + F = 0$ es una circunferencia, un punto, o el conjunto vacío.

18. La gráfica de $2x^2 + y^2 + Cx + Dy + F = 0$ no puede ser un punto único.

19. La gráfica de $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dyx + Ey + F = 0$ es la intersección de un plano con un cono de dos hojas para cualquier elección de A, B, C, D, E y F.

20. En un sistema de coordenadas adecuado, la intersección de un plano con un cono de dos hojas tendrá una ecuación de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

21. La gráfica de una hipérbola debe pasar por los cuatro cuadrantes.

22. Si una de las secciones cónicas pasa por los cuatro puntos $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(0, -1)$, debe ser una circunferencia.

23. La representación paramétrica de una curva es única.

24. La gráfica de $x = 2t^3$, $y = t^3$ es una recta.

25. Si $x = f(t)$ y $y = g(t)$, entonces podemos determinar una función h tal que $y = h(x)$.

26. La curva con representación paramétrica $x = \ln t$ y $y = t^2 - 1$ pasa por el origen.

27. Si $x = f(t)$ y $y = g(t)$, y si existen f'' y g'', entonces $d^2y/dx^2 = g''(t)/f''(t)$ siempre que $f''(t) \neq 0$.

28. Una curva puede tener más de una recta tangente en un punto en la curva.

29. La gráfica de la ecuación polar $r = 4\, cos(\theta - \pi/3)$ es una circunferencia.

30. Cada punto del plano tiene una infinidad de conjuntos de coordenadas polares.

31. Todos los puntos de intersección de las gráficas de las ecuaciones polares $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$ se pueden encontrar resolviendo estas dos ecuaciones en forma simultánea.

32. Si f es una función impar, entonces la gráfica de $r = f(\theta)$ es simétrica con respecto del eje y (la recta $\theta = \pi/2$).

33. Si f es una función par, entonces la gráfica de $r = f(\theta)$ es simétrica con respecto del eje x (la recta $\theta = 0$).

34. La gráfica de $r = 4 \cos 3\theta$ es una rosa de tres pétalos cuya área es menor que la mitad de la de la circunferencia $r = 4$.

Problemas de examen

1. Con base en la lista numerada, elija la respuesta correcta y anótela en el espacio en blanco.

(1) sin gráfica
(2) un único punto
(3) una recta única
(4) dos rectas paralelas
(5) dos rectas que se intersecan
(6) una circunferencia
(7) una parábola
(8) una elipse
(9) una hipérbola
(10) ninguna de las anteriores

(a) ____ $x^2 - 4y^2 = 0$
(b) ____ $x^2 - 4y^2 = 0.01$
(c) ____ $x^2 - 4 = 0$
(d) ____ $x^2 - 4x + 4 = 0$
(e) ____ $x^2 + 4y^2 = 0$
(f) ____ $x^2 + 4y^2 = x$
(g) ____ $x^2 + 4y^2 = -x$
(h) ____ $x^2 + 4y^2 = -1$
(i) ____ $(x^2 + 4y - 1)^2 = 0$
(j) ____ $3x^2 + 4y^2 = -x^2 + 1$

En cada problema del 2 al 10 dé el nombre de la cónica que tiene la ecuación dada. Determine sus vértices y focos, y bosqueje su gráfica.

2. $y^2 - 6x = 0$

3. $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$

4. $25x^2 - 36y^2 + 900 = 0$

5. $x^2 + 9y = 0$

6. $x^2 - 4y^2 - 16 = 0$

7. $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$

8. $9x^2 + 9y^2 - 225 = 0$

9. $r = \dfrac{5}{2 + 2\operatorname{sen}\theta}$

10. $r(2 + \cos\theta) = 3$

En cada problema del 11 al 18 determine la ecuación cartesiana de la cónica con las propiedades dadas.

11. Vértices $(\pm 4, 0)$ y excentricidad $\frac{1}{2}$

12. Excentricidad 1, foco $(0, -3)$ y vértice $(0, 0)$

13. Excentricidad 1, vértice $(0, 0)$, simétrica respecto del eje x, y que pasa por el punto $(-1, 3)$

14. Excentricidad $\frac{5}{3}$ y vértices $(0, \pm 3)$

15. Vértices $(\pm 2, 0)$ y asíntotas $x \pm 2y = 0$

16. Parábola con foco $(3, 2)$ y vértice $(3, 3)$

17. Elipse con centro $(1, 2)$, foco $(4, 2)$ y diámetro mayor 10

18. Hipérbola con vértices $(2, 0)$ y $(2, 6)$ y excentricidad $\frac{10}{3}$

En los problemas del 19 al 22 use el proceso de completar el cuadrado para transformar la ecuación dada a una forma canónica. Luego proporcione el nombre de la curva correspondiente y bosqueje su gráfica.

19. $4x^2 + 4y^2 - 24x + 36y + 81 = 0$

20. $4x^2 + 9y^2 - 24x - 36y + 36 = 0$

21. $x^2 + 8x + 6y + 28 = 0$

22. $3x^2 - 10y^2 + 36x - 20y + 68 = 0$

23. Una rotación de ejes con $\theta = 45°$ transforma $x^2 + 3xy + y^2 = 10$ en $ru^2 + sv^2 = 10$. Determine r y s, dé el nombre de la cónica correspondiente y determine la distancia entre sus focos.

24. Determine el ángulo de rotación θ necesario para eliminar el término del producto cruzado en $7x^2 + 8xy + y^2 = 9$. Luego obtenga la ecuación correspondiente en uv e identifique la cónica que representa.

En los problemas del 25 al 28 se da la representación paramétrica de una curva. Elimine el parámetro para obtener la correspondiente ecuación cartesiana. Haga un bosquejo de la curva dada.

25. $x = 6t + 2,\ y = 2t;\ -\infty < t < \infty$

26. $x = 4t^2,\ y = 4t;\ -1 \le t \le 2$

27. $x = 4 \operatorname{sen} t - 2,\ y = 3 \cos t + 1;\ 0 \le t \le 2\pi$

28. $x = 2 \sec t,\ y = \tan t;\ -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$

En los problemas 29 y 30 determine las ecuaciones de la recta tangente en $t = 0$.

29. $x = 2t^3 - 4t + 7,\ y = t + \ln(t + 1)$

30. $x = 3e^{-t},\ y = \frac{1}{2}e^t$

31. Determine la longitud de la curva $x = 1 + t^{3/2}$, $y = 2 + t^{3/2}$, desde $t = 0$ hasta $t = 9$.

32. Determine la longitud de la curva $x = \cos t + t \operatorname{sen} t$, $y = \operatorname{sen} t - t \cos t$, desde 0 hasta 2π. Haga un bosquejo de la gráfica.

En los problemas del 33 al 44 analice la ecuación polar dada y bosqueje su gráfica.

33. $r = 6 \cos \theta$

34. $r = \dfrac{5}{\operatorname{sen} \theta}$

35. $r = \cos 2\theta$

36. $r = \dfrac{3}{\cos \theta}$

37. $r = 4$

38. $r = 5 - 5 \cos \theta$

39. $r = 4 - 3 \cos \theta$

40. $r = 2 - 3 \cos \theta$

41. $\theta = \frac{2}{3}\pi$

42. $r = 4 \operatorname{sen} 3\theta$

43. $r^2 = 16 \operatorname{sen} 2\theta$

44. $r = -\theta,\ \theta \ge 0$

45. Determine una ecuación cartesiana de la gráfica de

$$r^2 - 6r(\cos \theta + \operatorname{sen} \theta) + 9 = 0$$

y luego bosqueje la gráfica.

46. Determine una ecuación cartesiana de la gráfica de $r^2 \cos 2\theta = 9$ y luego bosqueje la gráfica.

47. Determine la pendiente de la tangente a la gráfica de $r = 3 + 3 \cos \theta$ en el punto sobre la gráfica correspondiente en donde $\theta = \frac{1}{6}\pi$.

48. Bosqueje las gráficas de $r = 5 \operatorname{sen} \theta$ y $r = 2 + \operatorname{sen} \theta$ y determine sus puntos de intersección.

49. Determine el área de la región acotada por la gráfica de $r = 5 - 5 \cos \theta$.

50. Determine el área de la región que está fuera de la limaçon $r = 2 + \operatorname{sen} \theta$ y dentro de la circunferencia $r = 5 \operatorname{sen} \theta$.

51. El piloto de un automóvil de carreras corría en una pista elíptica $x^2/400 + y^2/100 = 1$ y perdió el control en el punto $(16, 6)$; a partir de ese punto, continuó sobre la recta tangente hasta chocar contra un árbol en $(14, k)$. Determine k.

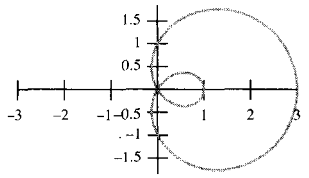
52. Relacione cada ecuación polar con su gráfica.

(a) $r = 1 - 2 \operatorname{sen} \theta$

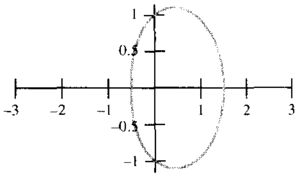
(b) $r = 1 + \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{2}$

(c) $r = 1 + 2 \cos \theta$

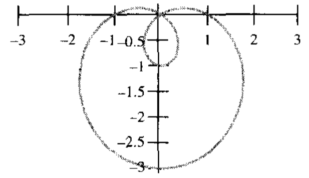
(d) $r = 1 + \dfrac{\cos \theta}{2}$



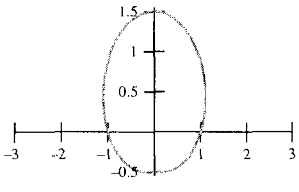
I



II



III



IV

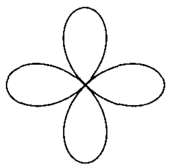
53. Relacione cada ecuación polar con su gráfica.

(a) $r = 4 \cos 2\theta$

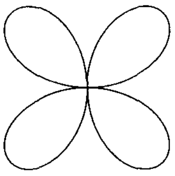
(b) $r = 3 \cos 3\theta$

(c) $r = 5 \cos 5\theta$

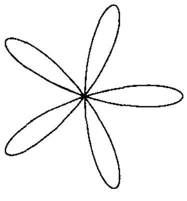
(d) $r = 3 \operatorname{sen} 2\theta$



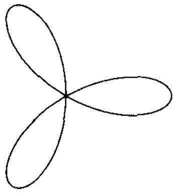
I



II



III



IV

PROBLEMAS DE REPASO E INTRODUCCIÓN

En los problemas del 1 al 6 trace la curva cuya ecuación paramétrica se proporciona.

1. $x = 2t, y = t - 3; 1 \leq t \leq 4$

2. $x = t/2, y = t^2; -1 \leq t \leq 2$

3. $x = 2 \cos t, y = 2 \operatorname{sen} t; 0 \leq t \leq 2\pi$

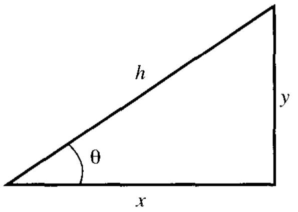
4. $x = 2 \operatorname{sen} t, y = -2 \cos t; 0 \leq t \leq 2\pi$

5. $x = t, y = \tan 2t; -\pi/4 < t < \pi/4$

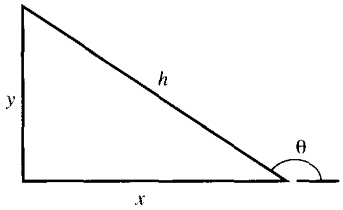
6. $x = \cosh t, y = \operatorname{senh} t; -4 \leq t \leq 4$

En los problemas 7 y 8 determine expresiones para x y y en términos de h y θ.

7.



8.



En los problemas del 9 al 12 determine la longitud de la curva dada.

9. $x = t, y = 3t^{3/2}; 0 \leq t \leq 4$

10. $x = t + 2, y = 2t - 3; 1 \leq t \leq 5$

11. $x = a \cos 2t, y = a \operatorname{sen} 2t; 0 \leq t \leq \pi/2$

12. $x = \tanh t, y = \operatorname{sech} t; 0 \leq t \leq 4$

13. Determine el punto en la recta $y = 2x + 1$ que es más cercano al punto $(0, 3)$. ¿Cuál es la distancia mínima entre el punto y la recta?

14. Determine ecuaciones paramétricas de la forma $x = a_1 t + b_1$ y $y = a_2 t + b_2$ para la recta que pasa por los puntos $(1, -1)$ y $(3, 3)$.

15. Un objeto que se mueve a lo largo del eje x tiene posición $s(t) = t^2 - 6t + 8$.

(a) Determine la velocidad y la aceleración.

(b) ¿Cuándo el objeto se está moviendo hacia adelante?

16. Un objeto que se encuentra inicialmente en reposo en $x = 20$, tiene aceleración $a = 2$.

(a) Determine la velocidad y la posición.

(b) ¿Cuándo el objeto llega a la posición 100?

En los problemas del 17 al 20 haga un bosquejo de la sección cónica dada.

17. $8x = y^2$

18. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

19. $x^2 - 4y^2 = 0$

20. $x^2 - y^2 = 4$

En los problemas del 21 al 24 haga un bosquejo de la gráfica de la ecuación polar dada.

21. $r = 2$

22. $\theta = \pi/6$

23. $r = 4 \operatorname{sen} \theta$

24. $r = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}\cos \theta}$

CAPÍTULO 11 Geometría en el espacio y vectores

11.1 Coordenadas cartesianas en el espacio tridimensional
11.2 Vectores
11.3 El producto punto
11.4 El producto cruz
11.5 Funciones con valores vectoriales y movimiento curvilíneo
11.6 Rectas y curvas en el espacio tridimensional
11.7 Curvatura y componentes de la aceleración
11.8 Superficies en el espacio tridimensional
11.9 Coordenadas cilíndricas y esféricas
11.10 Repaso del capítulo

11.1

Coordenadas cartesianas en el espacio tridimensional

Hemos llegado a una transición importante en nuestro estudio del cálculo. Hasta ahora, hemos viajado a través de ese ámbito amplio y llano conocido como plano euclidiano, o espacio bidimensional. Hemos aplicado los conceptos del cálculo a funciones de una sola variable, cuyas gráficas se pueden trazar en el plano. Vamos a estudiar el cálculo de variables en tres dimensiones. Nuevamente exploraremos todas las ideas familiares (como límite, derivada, integral) desde una perspectiva superior.

Para comenzar, considere tres ejes de coordenadas mutuamente perpendiculares (los ejes x, y, z) con sus ceros en un punto común O, llamado el *origen.* Aunque estas líneas se pueden orientar de cualquier forma deseada, seguiremos la costumbre de pensar en los ejes y y z como si estuvieran en el plano del papel, con sus direcciones positivas hacia la derecha y hacia arriba, respectivamente. Entonces, el eje x es perpendicular al papel y suponemos que su extremo positivo apunta hacia nosotros, formando así un **sistema de mano derecha**. Le llamamos así porque, si los dedos de la mano derecha se doblan de modo que se curven desde el eje x positivo hacia el eje y positivo, el pulgar apunta en la dirección del eje z positivo (figura 1).

Los tres ejes determinan tres planos: yz, xz y xy, que dividen al espacio en ocho octantes (figura 2). A cada punto P del espacio le corresponde una terna ordenada de números (x, y, z), sus **coordenadas cartesianas**, que miden sus distancias dirigidas a los tres planos (figura 3).

La ubicación de puntos en el primer octante (el octante donde las tres coordenadas son positivas) es relativamente fácil. En las figuras 4 y 5 ilustramos algo más difícil, localizando dos puntos de otros octantes, los puntos $P(2, -3, 4)$ y $Q(-3, 2, -5)$.

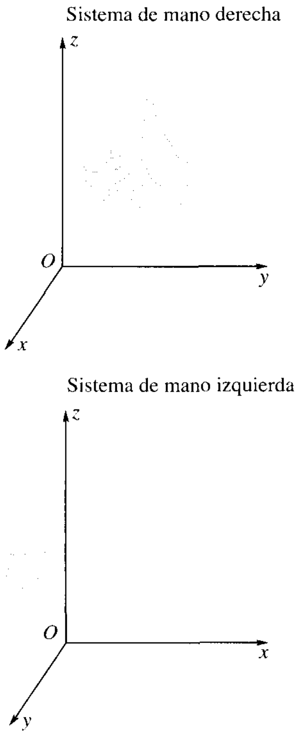


Figura 1

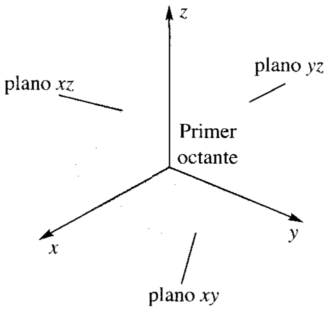


Figura 2

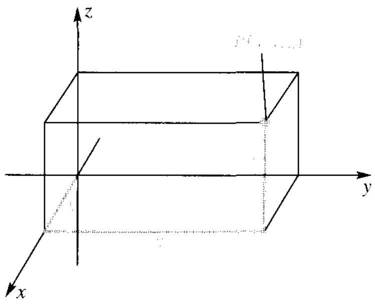


Figura 3

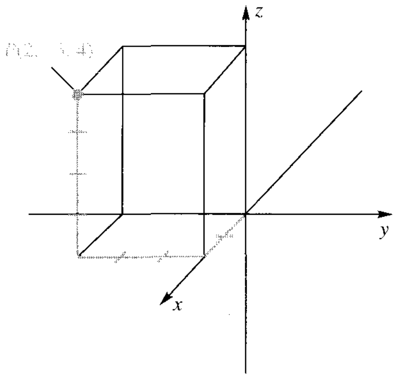


Figura 4

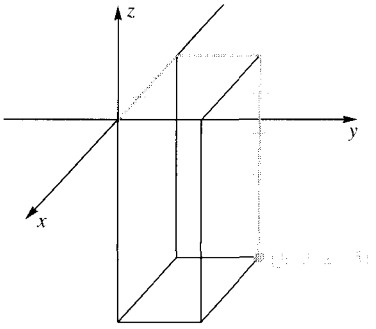


Figura 5

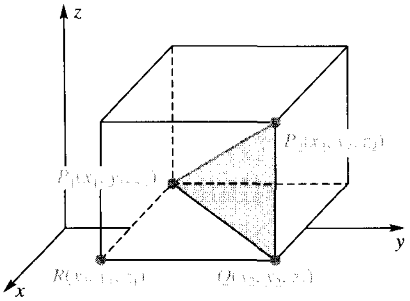


Figura 6

La fórmula de la distancia Considere dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2\, z_2)$ en el espacio tridimensional ($x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2, z_1 \neq z_2$). Ellos determinan un **paralelepípedo** (es decir, una caja rectangular) con P_1 y P_2 como vértices opuestos y con aristas paralelas a los ejes de coordenadas (figura 6). Los triángulos P_1QP_2 y P_1RQ son triángulos rectángulos y, por el teorema de Pitágoras.

$$|P_1P_2|^2 = |P_1Q|^2 + |QP_2|^2$$

y

$$|P_1Q|^2 = |P_1R|^2 + |RQ|^2$$

Así,

$$\begin{aligned} |P_1P_2|^2 &= |P_1R|^2 + |RQ|^2 + |QP_2|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \end{aligned}$$

Esto da la **fórmula de la distancia** en el espacio tridimensional, que es correcta, aunque algunas de las coordenadas sean idénticas.

$$\boxed{|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

EJEMPLO 1 Determine la distancia entre los puntos $P(2, -3, 4)$ y $Q(-3, 2, -5)$, graficados en las figuras 4 y 5.

SOLUCIÓN

$$|PQ| = \sqrt{(-3 - 2)^2 + (2 + 3)^2 + (-5 - 4)^2} = \sqrt{131} \approx 11.45 \qquad \blacksquare$$

Esferas y sus ecuaciones Hay un pequeño paso de la fórmula de la distancia a la ecuación de una esfera. Por una **esfera** entendemos el conjunto de todos los puntos del espacio tridimensional que están a una distancia constante (el radio) de un punto fijo (el centro). (Recuerde que una circunferencia se define como el conjunto de puntos *en un plano* que están a una distancia constante de un punto fijo). De hecho, si (x, y, z) es un punto sobre la esfera de radio r con centro en (h, k, l), entonces (véase la figura 7)

$$\boxed{(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2}$$

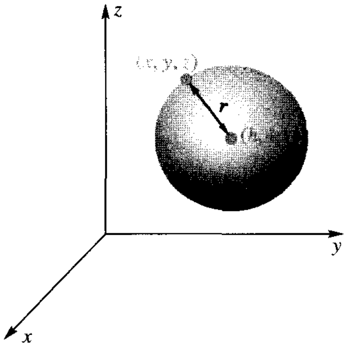


Figura 7

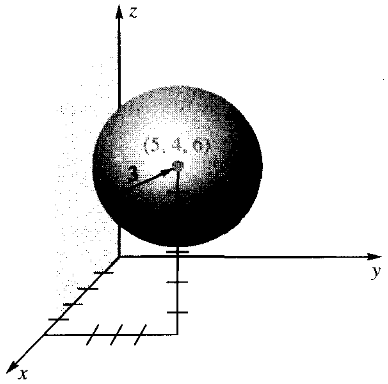


Figura 8

Llamamos a esto la **ecuación canónica de una esfera.**

En forma desarrollada, la ecuación del recuadro se puede escribir como

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

Recíprocamente, la gráfica de cualquier ecuación de esta forma es una esfera, un punto (una esfera degenerada) o el conjunto vacío. Para ver por qué, considere el siguiente ejemplo.

¿Qué es una esfera?

Hemos definido una esfera como el conjunto de puntos que se encuentran a una distancia dada de un punto fijo, es decir, aquellos puntos (x, y, z) que satisfacen $(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$. Al igual que para el caso del "círculo", que en ocasiones queremos decir los puntos en y dentro de la frontera del círculo (es decir, cuando hablamos del "área" de un círculo será πr^2), hay veces que con "esfera" queremos indicar la frontera junto con el interior. (En ocasiones, esto se denomina bola o esfera sólida). En otras palabras, a veces queremos definir el conjunto de puntos que satisfacen $(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 \leq r^2$. Cuando digamos que el volumen de una esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$, por supuesto será con esta última interpretación. Por lo regular, el contexto de un problema indica acerca de cuál "esfera" estaremos hablando.

EJEMPLO 2 Determine el centro y el radio de la esfera con ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 8y - 12z + 68 = 0$$

y bosqueje su gráfica.

SOLUCIÓN Usamos el proceso de completar el cuadrado.

$$(x^2 - 10x + \quad) + (y^2 - 8y + \quad) + (z^2 - 12z + \quad) = -68$$

$$(x^2 - 10x + 25) + (y^2 - 8y + 16) + (z^2 - 12z + 36) = -68 + 25 + 16 + 36$$

$$(x - 5)^2 + (y - 4)^2 + (z - 6)^2 = 9$$

Así, la ecuación representa una esfera con centro en (5, 4, 6) y radio 3. Su gráfica aparece en la figura 8. ■

Si después de completar el cuadrado en el ejemplo 2, la ecuación hubiese sido

$$(x - 5)^2 + (y - 4)^2 + (z - 6)^2 = 0$$

entonces la gráfica sería el único punto (5, 4, 6); si el lado derecho fuese negativo, la gráfica sería el conjunto vacío.

Otro resultado sencillo que es consecuencia de la fórmula de la distancia es la **fórmula del punto medio**. Si $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ son los extremos de un segmento de recta, entonces el punto medio $M(m_1, m_2, m_3)$ tiene coordenadas

$$\boxed{m_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad m_2 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad m_3 = \frac{z_1 + z_2}{2}}$$

En otras palabras, para calcular las coordenadas del punto medio de un segmento, sólo hay que considerar la media de las coordenadas correspondientes de los extremos.

EJEMPLO 3 Determine la ecuación de la esfera tal que uno de sus diámetros es el segmento de recta que une $(-1, 2, 3)$ y $(5, -2, 7)$ (figura 9).

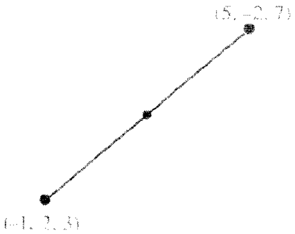


Figura 9

SOLUCIÓN El centro de la esfera está en el punto medio del segmento, es decir, en $(2, 0, 5)$; el radio r satisface

$$r^2 = (5 - 2)^2 + (-2 - 0)^2 + (7 - 5)^2 = 17$$

Concluimos que la ecuación de la esfera es

$$(x - 2)^2 + y^2 + (z - 5)^2 = 17 \qquad ■$$

Gráficas en el espacio tridimensional Fue natural considerar primero una ecuación cuadrática debido a su relación con la fórmula de la distancia. Pero es de suponer que una **ecuación lineal** en x, y y z, es decir, una ecuación de la forma

$$Ax + By + Cz = D, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$

debería ser más fácil de analizar. (Observe que $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ es una forma compacta de decir que A, B y C no todas son cero). De hecho, en la sección 11.3 mostraremos que la gráfica de una ecuación lineal es un plano. Suponiendo por el momento que esto es verdad, veamos cómo graficar tal ecuación.

Si, como ocurrirá con frecuencia, el plano corta a los tres ejes, primero determinamos estos puntos de intersección; es decir, encontramos las intersecciones con los ejes x, y, z. Estos tres puntos determinan el plano y nos permiten obtener sus **trazas** (con los planos de coordenadas), que son las rectas de intersección de ese plano con los planos de coordenadas. Entonces, con sólo un poco de arte, podemos sombrear el plano.

EJEMPLO 4 Bosqueje la gráfica de $3x + 4y + 2z = 12$.

SOLUCIÓN Para determinar la intersección con el eje x, hacemos y y z iguales a cero y despejamos x, obteniendo $x = 4$. El punto correspondiente es $(4, 0, 0)$. De manera similar, las intersecciones con los ejes y y z son $(0, 3, 0)$ y $(0, 0, 6)$. A continuación, unimos estos puntos mediante segmentos de recta para obtener las trazas. Luego sombreamos (la parte del primer octante de) el plano, obteniendo con ello el resultado que aparece en la figura 10. ■

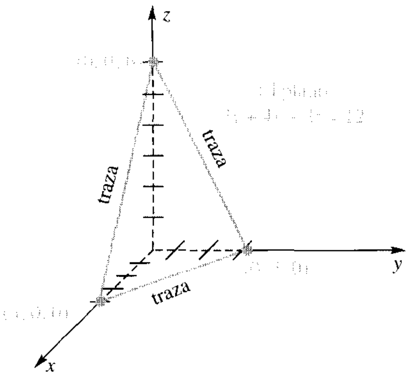


Figura 10

¿Qué pasa si el plano no corta a los tres ejes? Esto puede ocurrir, por ejemplo, si falta una de las variables en la ecuación del plano (es decir, tiene un coeficiente igual a cero).

EJEMPLO 5 Bosqueje la gráfica de la ecuación lineal

$$2x + 3y = 6$$

en el espacio tridimensional.

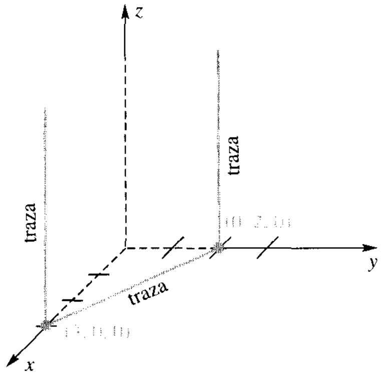


Figura 11

SOLUCIÓN Las intersecciones con los ejes x y y son $(3, 0, 0)$ y $(0, 2, 0)$, respectivamente, y estos puntos determinan la traza en el plano xy. El plano nunca cruza el eje z (x y y no pueden anularse simultáneamente), de modo que el plano es paralelo al eje z. Hemos bosquejado la gráfica en la figura 11. ■

Observe que en cada uno de nuestros ejemplos, la gráfica de una ecuación en el espacio tridimensional fue una *superficie*. Esto contrasta con el caso del espacio bidimensional, donde la gráfica de una ecuación era por lo general una *curva*. Diremos mucho más acerca de la graficación de ecuaciones y las superficies correspondientes en la sección 11.8.

Curvas en el espacio tridimensional

En la sección 5.4 vimos curvas parametrizadas en el plano. Este concepto se generaliza con facilidad a tres dimensiones. Una curva en el espacio tridimensional está determinada por las ecuaciones paramétricas

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t); \quad a \leq t \leq b$$

Decimos que una curva es **suave** si $f'(t)$, $g'(t)$ y $h'(t)$ existen y no son simultáneamente iguales a cero.

El concepto de longitud de arco también se generaliza con facilidad a curvas en el espacio tridimensional. Para la curva paramétrica definida anteriormente, la longitud de arco es

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\, dt$$

EJEMPLO 6 La posición de un objeto en el instante t está dada mediante la curva definida paramétricamente por $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = t/\pi$ para $0 \leq t \leq 2\pi$. Haga un bosquejo de esta curva y determine su longitud de arco.

SOLUCIÓN Comenzamos construyendo una tabla de valores de t, x, y y z; luego conectamos los puntos en el espacio tridimensional; la curva se muestra en la figura 12. La longitud de arco es

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2 + (1/\pi)^2}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1/\pi^2}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 1/\pi^2}\, dt \\ &= 2\pi\sqrt{1 + 1/\pi^2} \end{aligned}$$

■

La curva en el ejemplo 6 se denomina **hélice**. Observe que si ignoramos (por un momento) el movimiento en la dimensión z, el objeto está en un movimiento circular uniforme. Al introducir otra vez el movimiento a la dimensión z, que sube con velocidad constante, vemos que el objeto está girando y girando con un movimiento ascendente, muy parecido a una escalera de caracol (espiral).

≋ He aquí otra forma de obtener la longitud de esta curva. La hélice está totalmente en la superficie de un cilindro circular recto, como se muestra en la figura 13. Ahora imagine que el cilindro se corta, como se indica, y que se "desenrolla" para formar un rectángulo. La hélice será una diagonal del rectángulo, de modo que tendrá longitud $\sqrt{4 + 4\pi^2} = \sqrt{4\pi^2(1 + 1/\pi^2)} = 2\pi\sqrt{1 + 1/\pi^2}$.

t	x	y	z
0	1	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{4}$
π	-1	0	1
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{5}{4}$
$\frac{3\pi}{2}$	0	-1	$\frac{3}{2}$
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{7}{4}$
2π	1	0	2

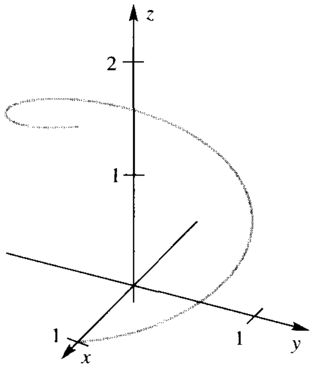


Figura 12

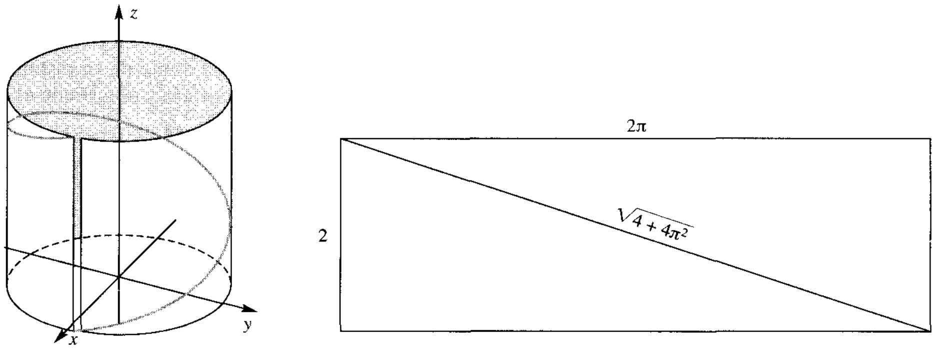


Figura 13

Revisión de conceptos

1. Los números x, y, z en (x, y, z) se llaman las ______ de un punto en el espacio tridimensional.

2. La distancia entre los puntos $(-1, 3, 5)$ y (x, y, z) es ______.

3. La ecuación $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 5)^2 = 16$ determina una esfera con centro ______ y radio ______.

4. La gráfica de $3x - 2y + 4z = 12$ es un ______ cuya intersección con el eje x es ______, con el eje y es ______ y con el eje z es ______.

Conjunto de problemas 11.1

1. Localice los puntos cuyas coordenadas son $(1, 2, 3)$, $(2, 0, 1)$, $(-2, 4, 5)$, $(0, 3, 0)$ y $(-1, -2, -3)$. En los casos adecuados, muestre la "caja", como en las figuras 4 y 5.

2. Siga las instrucciones del problema 1 para $\left(\sqrt{3}, -3, 3\right)$, $(0, \pi, -3)$, $\left(-2, \frac{1}{3}, 2\right)$, $(0, \pi, -3)$, $(-2, 1/3, 2)$ y $(0, 0, e)$.

3. ¿Qué tienen de particular las coordenadas de todos los puntos del plano yz? ¿Y los puntos del eje z?

4. ¿Qué tienen de particular las coordenadas de todos los puntos del plano xz? ¿Y los puntos del eje y?

5. Calcule la distancia entre las siguientes parejas de puntos.

(a) $(6, -1, 0)$ y $(1, 2, 3)$

(b) $(-2, -2, 0)$ y $(2, -2, -3)$

(c) $(e, \pi, 0)$ y $\left(-\pi, -4, \sqrt{3}\right)$

6. Demuestre que $(4, 5, 3)$, $(1, 7, 4)$ y $(2, 4, 6)$ son vértices de un triángulo equilátero.

7. Demuestre que $(2, 1, 6)$, $(4, 7, 9)$ y $(8, 5, -6)$ son vértices de un triángulo rectángulo. *Sugerencia:* sólo los triángulos rectángulos satisfacen el Teorema de Pitágoras.

8. Calcule la distancia de $(2, 3, -1)$ a

(a) el plano xy,
(b) el eje y, y
(c) el origen.

9. Una caja rectangular tiene sus caras paralelas a los planos de coordenadas y tiene a $(2, 3, 4)$ y $(6, -1, 0)$ como los extremos de una diagonal principal. Bosqueje la caja y calcule las coordenadas de sus ocho vértices.

10. El punto $P(x, 5, z)$ está en una línea que pasa por $Q(2, -4, 3)$ y es paralela a uno de los ejes de coordenadas. ¿Cuál eje debe ser y qué valores tienen x y z?

11. Escriba la ecuación de la esfera con el centro y radio dados.

(a) $(1, 2, 3); 5$

(b) $(-2, -3, -6); \sqrt{5}$

(c) $\left(\pi, e, \sqrt{2}\right); \sqrt{\pi}$

12. Determine la ecuación de la esfera con centro en $(2, 4, 5)$ y que es tangente al plano xy.

En los problemas del 13 al 16 complete los cuadrados para determinar el centro y el radio de la esfera con la ecuación dada (véase el ejemplo 2).

13. $x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 14y - 8z + 1 = 0$

14. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 10z + 34 = 0$

15. $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4x + 8y + 16z - 13 = 0$

16. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 4y - 22z + 77 = 0$

En los problemas del 17 al 24 bosqueje las gráficas de las ecuaciones dadas. Comience bosquejando las trazas en los planos de coordenadas (véanse los ejemplos 4 y 5).

17. $2x + 6y + 3z = 12$

18. $3x - 4y + 2z = 24$

19. $x + 3y - z = 6$

20. $-3x + 2y + z = 6$

21. $x + 3y = 8$

22. $3x + 4z = 12$

23. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

24. $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 4$

En los problemas del 25 al 32 determine la longitud de arco de la curva dada.

25. $x = t, y = t, z = 2t; 0 \leq t \leq 2$

26. $x = t/4, y = t/3, z = t/2; 1 \leq t \leq 3$

27. $x = t^{3/2}, y = 3t, z = 4t; 1 \leq t \leq 4$

28. $x = t^{3/2}, y = t^{3/2}, z = t; 2 \leq t \leq 4$

29. $x = t^2, y = (4/3)t^{3/2}, z = t; 0 \leq t \leq 8$

30. $x = t^2, y = \frac{4\sqrt{3}}{3}t^{3/2}, z = 3t; 1 \leq t \leq 4$

31. $x = 2\cos t, y = 2\operatorname{sen} t, z = 3t; -\pi \leq t \leq \pi$

32. $x = 2\cos t, y = 2\operatorname{sen} t, z = t/20; 0 \leq t \leq 8\pi$

CAS *En los problemas del 33 al 36 encuentre una integral definida para la longitud de arco de la curva dada. Utilice la regla de la parábola con $n = 10$ o un CAS para aproximar la integral.*

33. $x = \sqrt{t}, y = t, z = t; 1 \leq t \leq 6$

34. $x = t, y = t^2, z = t^3; 1 \leq t \leq 2$

35. $x = 2\cos t, y = \operatorname{sen} t, z = t; 0 \leq t \leq 6\pi$

36. $x = \operatorname{sen} t, y = \cos t, z = \operatorname{sen} t; 0 \leq t \leq 2\pi$

37. Determine la ecuación de la esfera que tiene al segmento que une $(-2, 3, 6)$ y $(4, -1, 5)$ como diámetro (véase el ejemplo 3).

38. Determine las ecuaciones de las esferas tangentes con radios iguales y centros en $(-3, 1, 2)$ y $(5, -3, 6)$.

39. Determine la ecuación de la esfera tangente a los tres planos de coordenadas, si su radio es 6 y su centro está en el primer octante.

40. Determine la ecuación de la esfera con centro $(1, 1, 4)$ que es tangente al plano $x + y = 12$.

41. Describa la gráfica de cada ecuación en el espacio tridimensional.

(a) $z = 2$

(b) $x = y$

(c) $xy = 0$

(d) $xyz = 0$

(e) $x^2 + y^2 = 4$

(f) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

42. La esfera $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 10$ corta al plano $z = 2$ en una circunferencia. Determine el centro y el radio de la circunferencia.

43. Un punto P se mueve de modo que su distancia a $(1, 2, -3)$ es el doble de su distancia a $(1, 2, 3)$. Demuestre que P está sobre una esfera y determine el centro y el radio de ésta.

44. Un punto P se mueve de modo que su distancia a $(1, 2, -3)$ es igual a su distancia a $(2, 3, 2)$. Determine la ecuación del plano donde se encuentra P.

45. Las esferas sólidas $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 \leq 4$ y $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 3)^2 \leq 4$ se intersecan en un sólido. Calcule su volumen.

46. Resuelva el problema 45 suponiendo que la segunda esfera es $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 3)^2 \leq 9$.

CAS **47.** La curva definida mediante $x = a\cos t, y = a\operatorname{sen} t, z = ct$ es una hélice. Mantenga fija a y utilice un CAS para obtener una gráfica paramétrica de la hélice para diferentes valores de c. ¿Cuál es el efecto que tiene c en la forma de la curva?

CAS **48.** Para la hélice que se describe en el problema 47, mantenga fija c y utilice un CAS para obtener una gráfica paramétrica para diferentes valores de a. ¿Cuál es el efecto que tiene a en la forma de la curva?

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** coordenadas **2.** $\sqrt{(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 5)^2}$ **3.** $(-1, 3, 5); 4$ **4.** plano; $4; -6; 3$

11.2 Vectores

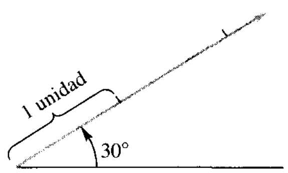


Figura 1

Muchas cantidades que aparecen en la ciencia (por ejemplo, longitud, masa, volumen y carga eléctrica) pueden especificarse con un solo número. Estas cantidades (y los números que los miden) se denominan **escalares**. Otras cantidades, tales como velocidad, fuerza, torca y desplazamiento, requieren una magnitud y una dirección para especificarlos por completo. A tales cantidades les llamamos **vectores** y los representamos mediante flechas (segmentos de recta dirigidos). La longitud de la flecha representa la **magnitud**, o longitud, del vector; su dirección es la **dirección** del vector. El vector en la figura 1 tiene longitud de 2.3 unidades y dirección 30° al noreste (o 30° respecto al eje x positivo).

Las flechas que dibujamos, como las que se disparan desde un arco, tienen dos extremos. Aquél en donde va la pluma (el punto inicial), denominado **cola**, y la punta

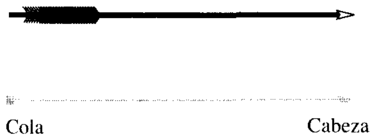


Figura 2

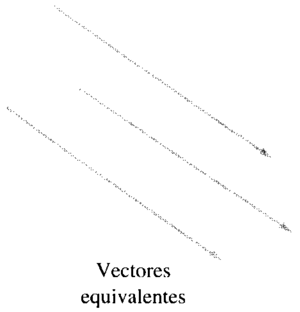
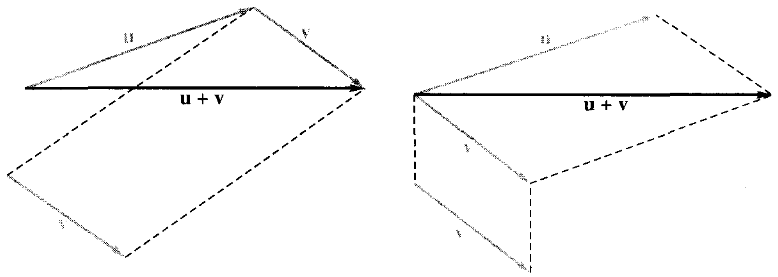


Figura 3

(el punto terminal) denominado la **cabeza** o punta (figura 2). Dos vectores se consideran **equivalentes** si tienen la misma magnitud y dirección (figura 3). Por medio de letras en negritas como **u** y **v** simbolizaremos a los vectores. Como esto es difícil hacerlo en la escritura normal, usted podría emplear $\vec{u}$ y $\vec{v}$. La magnitud, o longitud, de un vector **u** se simboliza con $\|\mathbf{u}\|$.

En general, consideramos a los vectores en tres dimensiones, esto es, sus puntos inicial y final son puntos en el espacio tridimensional. Sin embargo, existen muchas aplicaciones en donde los vectores se encuentran en el plano *xy*. El contexto del problema indicará si los vectores son de dos o de tres dimensiones..

Operaciones con vectores Para determinar la **suma**, o **resultante**, de **u** y **v**, mueva **v**, sin cambiar su magnitud ni su dirección, hasta que su punto inicial coincida con el punto final de **u**. Entonces **u** + **v** es el vector que conecta la cola de **u** con la cabeza de **v**. Este método (llamado *ley del triángulo*) se ilustra en la parte izquierda de la figura 4.



Dos formas equivalentes para sumar vectores

Figura 4

Como una forma alternativa para determinar **u** + **v**, mueva **v** de modo que su punto inicial coincida con el de **u**. Luego **u** + **v** es el vector con este punto inicial común y que coincide con la diagonal del paralelogramo que tiene a **u** y a **v** como lados. Este método (denominado *ley del paralelogramo*) se ilustra en la parte derecha de la figura 4.

Estos dos métodos son formas equivalentes de definir lo que queremos decir con la suma de dos vectores. Debe convencerse de que la suma de vectores es conmutativa y asociativa; esto es

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

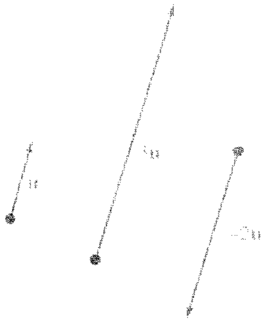


Figura 5

Si **u** es un vector, entonces 3**u** es el vector con la misma dirección que **u** pero tres veces más largo; −2**u** es el doble de largo pero dirigido en sentido opuesto (figura 5). En general, *c***u**, denominada **multiplicación por escalar** de **u**, tiene magnitud $|c|$ veces la de **u**, y está dirigido en la misma dirección o en sentido opuesto, dependiendo de si *c* es positiva o negativa. En particular, (−1)**u** (por lo regular se escribe −**u**) tiene la misma longitud que **u**, pero en dirección opuesta. Se denomina el **negativo** de **u**, ya que cuando lo sumamos a **u**, el resultado es un vector que no es más que un punto. Este último vector (el único vector sin una dirección bien definida) se denomina **vector cero** (o vector nulo) y se denota con **0**. Es el elemento identidad para la suma; esto es, $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$. Por último, la resta se define por medio de

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$$

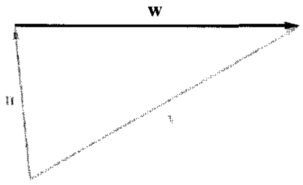


Figura 6

EJEMPLO 1 En la figura 6 exprese **w** en términos de **u** y **v**.

SOLUCIÓN Como **u** + **w** = **v**, se sigue que

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$$

■

Si *P* y *Q* son puntos en el plano, entonces $\overrightarrow{PQ}$ denota al vector con cola en *P* y cabeza en *Q*.

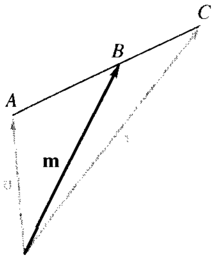


Figura 7

EJEMPLO 2 En la figura 7, $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Exprese **m** en términos de **u** y **v**.

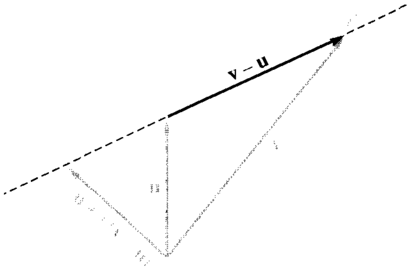


Figura 8

SOLUCIÓN

$$\mathbf{m} = \mathbf{u} + \overrightarrow{AB} = \mathbf{u} + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \mathbf{u} + \tfrac{2}{3}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \tfrac{1}{3}\mathbf{u} + \tfrac{2}{3}\mathbf{v}$$

Con mayor generalidad, si $\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{AC}$, donde en donde $0 < t < 1$, entonces

$$\mathbf{m} = (1 - t)\mathbf{u} + t\mathbf{v} \qquad \blacksquare$$

La expresión que se acaba de obtener para **m** también puede escribirse como

$$\mathbf{u} + t(\mathbf{v} - \mathbf{u})$$

Si permitimos que t varíe en el rango de todos los escalares, obtenemos el conjunto de todos los vectores con colas en el mismo punto que la de **u** y cabezas en la recta ℓ (véase la figura 8). Este hecho será importante posteriormente, cuando describamos rectas mediante el lenguaje de vectores.

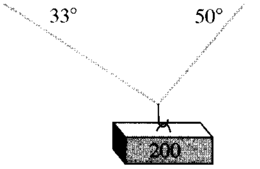


Figura 9

Una aplicación Una fuerza tiene una magnitud y una dirección. Si dos fuerzas **u** y **v** actúan en un punto, la fuerza resultante en el punto es la suma vectorial de las dos fuerzas.

EJEMPLO 3 Un peso de 200 newtons está sostenido por dos alambres, como se muestra en la figura 9. Determine la magnitud de la tensión en cada alambre.

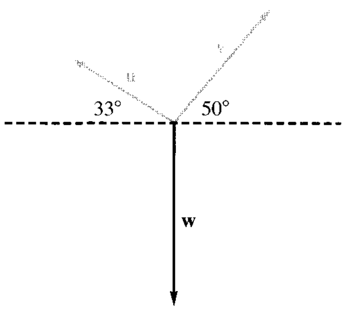


Figura 10

SOLUCIÓN Todas las fuerzas están en un plano, de modo que los vectores en este problema son de dos dimensiones. El peso **w** y las dos tensiones **u** y **v** son fuerzas que se comportan como vectores (figura 10). Cada uno de estos vectores puede expresarse como la suma de una componente horizontal y una vertical. El peso está en equilibrio, así que (1) la magnitud de la fuerza hacia la izquierda debe ser igual a la magnitud de la fuerza hacia la derecha, y (2) la magnitud de la fuerza hacia arriba debe ser igual a la magnitud de la fuerza hacia abajo. En otras palabras, la fuerza neta es cero. Así que,

$$(1) \qquad \|\mathbf{u}\|\cos 33^\circ = \|\mathbf{v}\|\cos 50^\circ$$

$$(2) \qquad \|\mathbf{u}\|\operatorname{sen} 33^\circ + \|\mathbf{v}\|\operatorname{sen} 50^\circ = \|\mathbf{w}\| = 200$$

Cuando despejamos $\|\mathbf{v}\|$ en (1) y lo sustituimos en (2), obtenemos

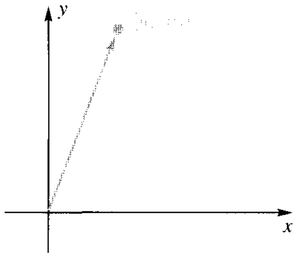
$$\|\mathbf{u}\|\operatorname{sen} 33^\circ + \frac{\|\mathbf{u}\|\cos 33^\circ}{\cos 50^\circ}\operatorname{sen} 50^\circ = 200$$

o

$$\|\mathbf{u}\| = \frac{200}{\operatorname{sen} 33^\circ + \cos 33^\circ \tan 50^\circ} \approx 129.52 \text{ newtons}$$

Entonces

$$\|\mathbf{v}\| = \frac{\|\mathbf{u}\|\cos 33^\circ}{\cos 50^\circ} \approx \frac{129.52 \cos 33^\circ}{\cos 50^\circ} \approx 168.99 \text{ newtons} \qquad \blacksquare$$

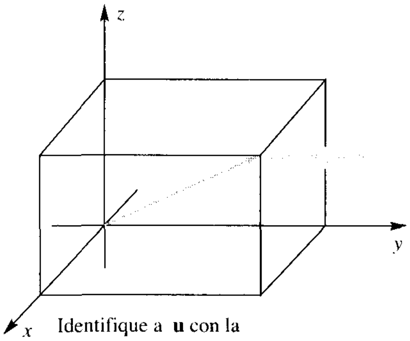


Identifique **u** con el par ordenado $\langle u_1, u_2\rangle$

Figura 11

Enfoque algebraico de vectores Para un vector dado **u**, en el plano, elegimos como su representante la flecha que tiene su cola en el origen (figura 11). Esta flecha está determinada de manera única por las coordenadas u_1 y u_2 de su cabeza; esto es, el vector **u** está descrito por completo mediante el par ordenado $\langle u_1, u_2\rangle$. Los números u_1 y u_2 se denominan las **componentes** del vector **u**. Escribimos $\langle u_1, u_2\rangle$ en lugar de (u_1, u_2) para distinguir al vector que inicia en el origen y termina en el punto con coordenadas u_1 y u_2, del punto que tiene coordenadas u_1 y u_2.

Para vectores tridimensionales, la generalización es directa. Representamos al vector mediante una flecha que inicia en el origen y termina en el punto con coordenadas u_1, u_2 y u_3 y denotamos a este vector mediante $\langle u_1, u_2, u_3\rangle$ (véase la figura 12). En el resto de esta sección, desarrollamos las propiedades de los vectores en tres dimensiones; los resultados para vectores en dos dimensiones deben ser obvios.



Identifique a **u** con la terna ordenada $<u_1, u_2, u_3>$.

Figura 12

Los vectores $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ son iguales si y sólo si las componentes correspondientes son iguales; esto es, $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ y $u_3 = v_3$. Para multiplicar un vector **u** por un escalar c, multiplicamos cada componente por c; esto es,

$$c\mathbf{u} = \mathbf{u}c = \langle cu_1, cu_2, cu_3\rangle$$

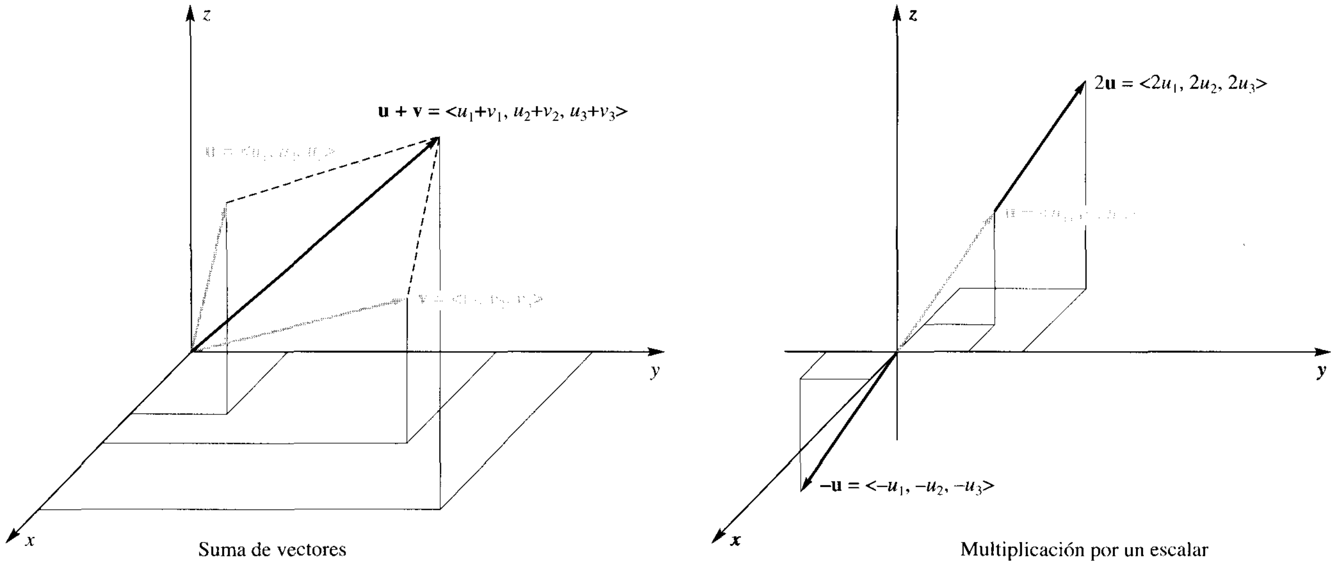
La notación $-\mathbf{u}$ indica al vector $(-1)\mathbf{u} = \langle -u_1, -u_2, -u_3 \rangle$. El vector con todas sus componentes iguales a cero se denomina vector cero; esto es, $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$. La suma de los dos vectores **u** y **v** es

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3 \rangle$$

El vector $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ se define como

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-1)\mathbf{v} = \langle u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3 \rangle$$

La figura 13 indica que estas definiciones son equivalentes a las definiciones geométricas que se dieron anteriormente en esta sección.



Suma de vectores

Multiplicación por un escalar

Figura 13

Vectores en el espacio bidimensional

A continuación están las definiciones para vectores en dos dimensiones. Si $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ y c es un escalar, entonces

$$c\mathbf{u} = \langle cu_1, cu_2 \rangle$$
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2 \rangle$$
$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \langle u_1 - v_1, u_2 - v_2 \rangle$$
$$\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle; \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$$
$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Tres vectores especiales en el espacio tridimensional son $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$ y $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$. Éstos se denominan **vectores unitarios estándar**, **vectores canónicos** o **vectores básicos**. Cada vector $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ puede escribirse en términos de **i**, **j** y **k**, como sigue:

$$\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$$

La **magnitud** de un vector es la longitud de la flecha que lo representa. Si la flecha inicia en el origen y termina en (u_1, u_2, u_3), entonces su longitud puede determinarse con facilidad, con base en la fórmula de la distancia:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(u_1 - 0)^2 + (u_2 - 0)^2 + (u_3 - 0)^2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Al igual que en la recta numérica, $|c|$ proporciona la distancia desde el origen al punto c, $\|\mathbf{u}\|$ proporciona la distancia del origen al punto en el espacio cuya terna ordenada es $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ (figura 14). Con base en esta interpretación algebraica de vectores, se pueden establecer con facilidad las siguientes reglas para hacer operaciones con vectores.

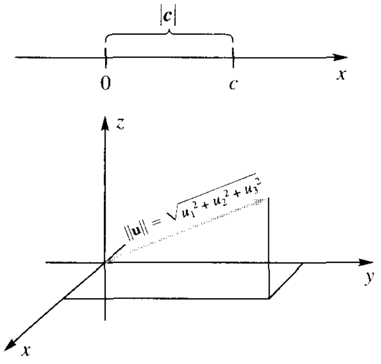


Figura 14

Teorema A

Para cualesquiera vectores **u**, **v** y **w** y cualesquiera escalares a y b, se cumplen las siguientes relaciones.

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
3. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$
4. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
5. $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$
6. $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$
7. $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$
8. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$
9. $\|a\mathbf{u}\| = |a|\|\mathbf{u}\|$

Demostración Ilustramos la demostración de las reglas 6 y 9 para el caso de vectores tridimensionales.

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= a(\langle u_1, u_2, u_3\rangle + \langle v_1, v_2, v_3\rangle) \\ &= a\langle u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3\rangle \\ &= \langle a(u_1 + v_1), a(u_2 + v_2), a(u_3 + v_3)\rangle \\ &= \langle au_1 + av_1, au_2 + av_2, au_3 + av_3\rangle \\ &= \langle au_1, au_2, au_3\rangle + \langle av_1, av_2, av_3\rangle \\ &= a\langle u_1, u_2, u_3\rangle + a\langle v_1, v_2, v_3\rangle \\ &= a\mathbf{u} + a\mathbf{v} \end{aligned}$$

Esto demuestra la regla 6. Ahora, para la regla 9

$$\begin{aligned} \|a\mathbf{u}\| &= \|\langle au_1, au_2, au_3\rangle\| \\ &= \sqrt{(au_1)^2 + (au_2)^2 + (au_3)^2} \\ &= \sqrt{a^2(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)} \\ &= \sqrt{a^2}\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = |a|\ \|\mathbf{u}\| \end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 4 Sea $\mathbf{u} = \langle 1, 1, 2\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 0, -1, 2\rangle$. Determine (a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y (b) $\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$ y expréselos en términos de $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$. Determine (c) $\|\mathbf{u}\|$ y (d) $\|-3\mathbf{u}\|$.

SOLUCIÓN

(a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle 1, 1, 2\rangle + \langle 0, -1, 2\rangle = \langle 1 + 0, 1 + (-1), 2 + 2\rangle$
$= \langle 1, 0, 4\rangle = 1\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 4\mathbf{k} = \mathbf{i} + 4\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{u} - 2\mathbf{v} = \langle 1, 1, 2\rangle - 2\langle 0, -1, 2\rangle = \langle 1 - 0, 1 - (-2), 2 - 4\rangle$
$= \langle 1, 3, -2\rangle = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

(c) $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$

(d) $\|-3\mathbf{u}\| = |-3|\|\mathbf{u}\| = 3\sqrt{6}$ ■

Definición Vector unitario

Un vector que tiene longitud uno se denomina **vector unitario.**

División de un vector entre un escalar

Con frecuencia hablaremos de "dividir" un vector $\mathbf{v}$ entre un escalar c. Esto significará multiplicar el vector por el recíproco de c. Es decir,

$$\frac{\mathbf{v}}{c} = \frac{1}{c}\mathbf{v}$$

siempre que, por supuesto $c \neq 0$. La expresión de la derecha es simplemente un escalar por un vector, que se definió anteriormente en esta sección. Por supuesto, dividir un vector entre otro no tiene sentido.

EJEMPLO 5 Sea $\mathbf{v} = \langle 4, -3\rangle$. Determine $\|\mathbf{v}\|$ y determine un vector unitario $\mathbf{u}$ con la misma dirección que $\mathbf{v}$.

SOLUCIÓN En este problema, todos los vectores son de dos dimensiones. La longitud, o magnitud, de $\mathbf{v}$ es $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$. Para determinar $\mathbf{u}$, dividimos $\mathbf{v}$ entre su longitud $\|\mathbf{v}\|$; esto es,

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\langle 4, -3\rangle}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{\langle 4, -3\rangle}{5} = \frac{1}{5}\langle 4, -3\rangle = \left\langle \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right\rangle$$

Entonces, la longitud de $\mathbf{u}$ es

$$\|\mathbf{u}\| = \left\|\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right\| = \left\|\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}\right\| = \left|\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\right|\|\mathbf{v}\| = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\|\mathbf{v}\| = 1$$ ■

Revisión de conceptos

1. Los vectores se distinguen de los escalares en que los vectores tienen _____ y _____.

2. Dos vectores se consideran equivalentes si _____.

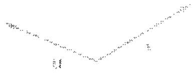
3. Si la cola de $\mathbf{v}$ coincide con la cabeza de $\mathbf{u}$, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es el vector con cola en _____ y cabeza en _____.

4. El vector $\mathbf{u} = \langle 6, 3, 3\rangle$ tiene longitud _____ veces la del vector $\mathbf{u} = \langle 2, 1, 1\rangle$.

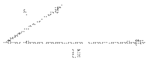
Conjunto de problemas 11.2

En los problemas del 1 al 4 dibuje el vector **w**.

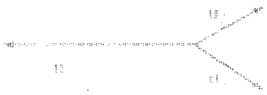
1. $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \frac{3}{2}\mathbf{v}$



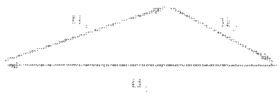
2. $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$



3. $\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$



4. $\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$



5. La figura 15 es un paralelogramo. Exprese **w** en términos de **u** y de **v**.

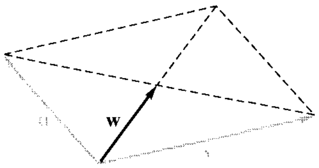


Figura 15

6. En el triángulo grande de la figura 16, **m** es una mediana (biseca el lado en el que está dibujado). Exprese **m** y **n** en términos de **u** y **v**.

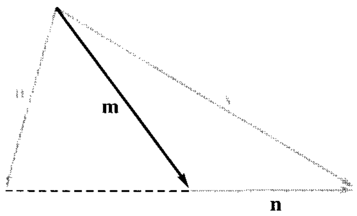


Figura 16

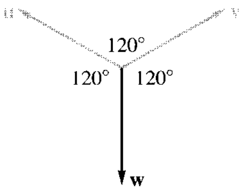


Figura 17

7. En la figura 17, $\mathbf{w} = -(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ y $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$. Determine $\|\mathbf{w}\|$.

8. Resuelva el problema 7, si el ángulo superior es de 90° y los ángulos laterales miden 135°.

En los problemas del 9 al 12 para los vectores bidimensionales **u** *y* **v**, *determine la suma* $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, *la diferencia* $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ *y las magnitudes* $\|\mathbf{u}\|$ *y* $\|\mathbf{v}\|$.

9. $\mathbf{u} = \langle -1, 0\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 4\rangle$

10. $\mathbf{u} = \langle 0, 0\rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 4\rangle$

11. $\mathbf{u} = \langle 12, 12\rangle, \mathbf{v} = \langle -2, 2\rangle$

12. $\mathbf{u} = \langle -0.2, 0.8\rangle, \mathbf{v} = \langle -2.1, 1.3\rangle$

En los problemas del 13 al 16, para los vectores tridimensionales **u** *y* **v**, *determine la suma* $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, *la diferencia* $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ *y las magnitudes* $\|\mathbf{u}\|$ *y* $\|\mathbf{v}\|$.

13. $\mathbf{u} = \langle -1, 0, 0\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 4, 0\rangle$

14. $\mathbf{u} = \langle 0, 0, 0\rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 3, 1\rangle$

15. $\mathbf{u} = \langle 1, 0, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 0, 0\rangle$

16. $\mathbf{u} = \langle 0.3, 0.3, 0.5\rangle, \mathbf{v} = \langle 2.2, 1.3, -0.9\rangle$

C **17.** En la figura 18, cada una de las fuerzas **u** y **v** tienen magnitud de 50 libras. Determine la magnitud y dirección de la fuerza **w**, necesaria para contrarrestar **u** y **v**.

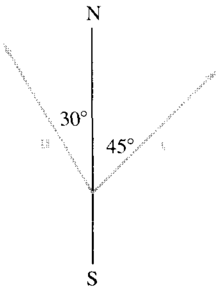


Figura 18

≈ **18.** Mark empuja un poste en la dirección S 30° E (30° al este del sur) con una fuerza de 60 libras. Dan empuja el mismo poste en la dirección S 60° O con una fuerza de 80 libras. ¿Cuál es la magnitud y dirección de la fuerza resultante?

≈ **19.** Un peso de 300 newtons descansa en un plano inclinado liso (con fricción insignificante) que forma un ángulo de 30° con la horizontal. ¿Qué fuerza paralela al plano mantendrá al peso sin que se deslice hacia abajo? *Sugerencia:* considere la fuerza de 300 newtons hacia abajo como la suma de dos fuerzas, una paralela al plano y una perpendicular a él.

C **20.** Un objeto con peso de 258.5 libras se mantiene en equilibrio mediante dos sogas que forman ángulos de 27.34° y 39.22°, respectivamente, con la vertical. Determine la magnitud de la fuerza ejercida por cada soga sobre el objeto.

C **21.** Un viento con velocidad de 45 millas por hora sopla en dirección N 20° O. Un aeroplano que vuela a 425 millas por hora con aire en calma, se supone que avanza directamente hacia el norte. ¿Cuál debe ser la dirección del aeroplano y qué tan rápido vuela respecto al suelo?

22. Un barco está navegando con rumbo al sur a 20 millas por hora. Un hombre camina hacia el oeste (es decir, en ángulo recto al lado de la nave) cruza la cubierta a 3 millas por hora. ¿Cuál es la magnitud y dirección de su velocidad relativa a la superficie del agua?

23. Julie vuela en medio de un viento que sopla a 40 millas por hora en dirección sur; entonces, descubre que, cuando dirige su aeroplano en la dirección N 60° E, tiene rumbo este. Determine la velocidad relativa (velocidad con aire en calma) del aeroplano.

C **24.** ¿Cuál debe ser la dirección y velocidad relativa necesarias para que un aeroplano vuele a 837 millas por hora con rumbo norte, si está soplando un viento de 63 millas por hora en la dirección S 11.5° E?

25. Demuestre todas las partes del teorema A para el caso de vectores bidimensionales.

26. Demuestre las partes de la 1 a la 5, 7 y 8 del teorema A para el caso de vectores tridimensionales.

27. Demuestre, por medio de métodos vectoriales, que el segmento de recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado.

28. Demuestre que los puntos medios de los cuatro lados de un cuadrilátero arbitrario son los vértices de un paralelogramo.

29. Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ los lados de un polígono, acomodados en orden cíclico, como se muestra para el caso $n = 7$ en la figura 19. Demuestre que

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

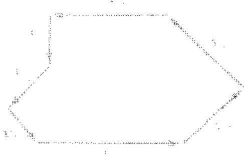


Figura 19

30. Suponga que n puntos están igualmente espaciados en una circunferencia, y sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ los vectores desde el centro del círculo a estos n puntos. Demuestre que $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$.

31. Considere una mesa triangular horizontal con ángulos en cada vértice menores de 120°. En los vértices hay poleas sin fricción sobre las cuales se pasan cuerdas atadas en P, cada una con un peso W sujeto, como se muestra en la figura 20. Demuestre que, en equilibrio, los tres ángulos en P son iguales; esto es, demuestre que $\alpha + \beta = \alpha + \gamma = \beta + \gamma = 120°$.

32. Demuestre que el punto P del triángulo del problema 31 que minimiza $|AP| + |BP| + |CP|$ es el punto en donde los tres ángulos en P son iguales. *Sugerencia:* sean A', B' y C' los puntos en donde están sujetos los pesos. Entonces el centro de gravedad está localizado $\frac{1}{3}(|AA'| + |BB'| + |CC'|)$ unidades debajo del plano del triángulo. El sistema está en equilibrio cuando el centro de gravedad de los tres pesos es el más bajo.

33. Suponga que los pesos en A, B y C del problema 31 son $3w$, $4w$ y $5w$, respectivamente. Cuando hay equilibrio, determine los tres ángulos en P. ¿Ahora qué cantidad geométrica (como en el problema 32) se minimiza?

34. Una compañía construirá una planta para fabricar refrigeradores, que se venderán en las ciudades A, B y C, en cantidades a, b y c cada año, respectivamente. ¿Cuál es la mejor ubicación de la planta, esto es, la ubicación que minimizará los costos de envío (véase el problema 33)?

35. Una araña (candelabro) de 100 libras está sostenida por cuatro alambres sujetos al techo, en las cuatro esquinas de un cuadrado. Cada alambre forma un ángulo de 45° con la horizontal. Determine la magnitud de la tensión en cada alambre.

36. Repita el problema 35 para el caso en donde son *tres* alambres fijos en el techo, en las tres esquinas de un triángulo equilátero.

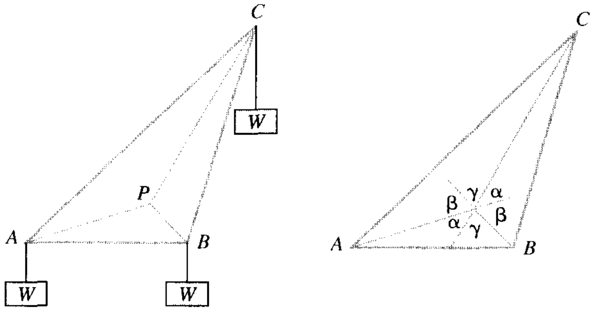


Figura 20

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** magnitud; dirección **2.** tienen la misma magnitud y la misma dirección **3.** la cola de **u**; la cabeza de **v** **4.** 3

11.3 El producto punto

Hemos estudiado la multiplicación por escalar, esto es, la multiplicación de un vector **u** por un escalar c. El resultado $c\mathbf{u}$ siempre es un vector. Ahora introducimos una multiplicación para dos vectores **u** y **v**. Se denomina **producto punto** o **producto escalar**, y se simboliza por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Para vectores bidimensionales, lo definimos como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle u_1, u_2 \rangle \cdot \langle v_1, v_2 \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

y para vectores tridimensionales como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \cdot \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

EJEMPLO 1 Sean $\mathbf{u} = \langle 0, 1, 1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -1, 1 \rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 6, -3, 3 \rangle$. Calcule cada uno de los siguientes, si están definidos: (a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, (b) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$, (c) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$, (d) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ y (e) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$.

SOLUCIÓN

(a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle 0, 1, 1 \rangle \cdot \langle 2, -1, 1 \rangle = (0)(2) + (1)(-1) + (1)(1) = 0$

(b) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \langle 2, -1, 1 \rangle \cdot \langle 0, 1, 1 \rangle = (2)(0) + (-1)(1) + (1)(1) = 0$

(c) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \langle 2, -1, 1 \rangle \cdot \langle 6, -3, 3 \rangle = (2)(6) + (-1)(-3) + (1)(3) = 18$

(d) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \langle 0, 1, 1 \rangle \cdot \langle 0, 1, 1 \rangle = 0^2 + 1^2 + 1^2 = 2$

(e) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ no está definida. La cantidad $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ es un *escalar*. Un escalar producto punto con un vector no tiene sentido. ■

Las propiedades del producto punto se establecen con facilidad. (Véanse los problemas del 46 al 50). Observe que este teorema, así como los demás de esta sección, se aplica a vectores tanto de dos como de tres dimensiones.

Teorema A Propiedades del producto punto

Si **u**, **v** y **w** son vectores y c es un escalar, entonces

1. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$
2. $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$
3. $c(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})=(c\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}$
4. $\mathbf{0}\cdot\mathbf{u}=0$
5. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=\|\mathbf{u}\|^2$

Para enfatizar la importancia del producto punto, ofrecemos la siguiente fórmula alterna para él; ésta incluye las propiedades geométricas de los vectores **u** y **v**.

Teorema B

Si θ es el ángulo no negativo más pequeño entre los vectores no nulos **u** y **v**, entonces

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta$$

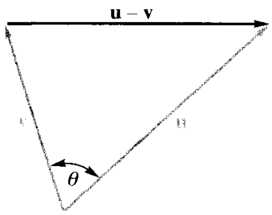


Figura 1

Demostración Para probar este resultado, aplicamos la ley de los cosenos al triángulo de la figura 1.

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta$$

Por otra parte, con base en las propiedades del producto punto, establecidas en el teorema A,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})\\ &= \mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) - \mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})\\ &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\end{aligned}$$

Al igualar las dos expresiones para $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2$ se obtiene

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\\ -2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta &= -2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta\end{aligned}$$

■

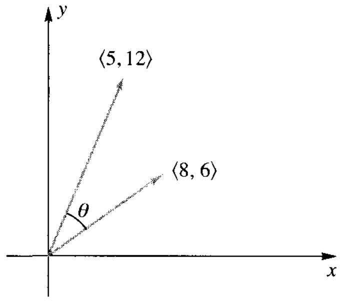


Figura 2

EJEMPLO 2 Determine el ángulo entre $\mathbf{u}=\langle 8,6\rangle$ y $\mathbf{v}=\langle 5,12\rangle$ (véase la figura 2).

SOLUCIÓN Al despejar $\cos\theta$ en el teorema B se obtiene

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{(8)(5)+(6)(12)}{(10)(13)} = \frac{112}{130} \approx 0.862$$

Entonces

$$\theta \approx \cos^{-1}(0.862) \approx 0.532 \text{ radianes (o } 30.5^\circ)$$

■

Una consecuencia importante del teorema B es el siguiente.

Teorema C Criterio de perpendicularidad

Dos vectores **u** y **v** son perpendiculares si y sólo si su producto punto, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ es cero.

Demostración Dos vectores no nulos son perpendiculares si y sólo si el ángulo no negativo más pequeño entre ellos es $\pi/2$; esto es, si y sólo si $\cos\theta = 0$. Pero $\cos\theta = 0$, si y sólo si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$. (Este resultado es válido para vectores nulos, siempre que acordemos que un vector cero es perpendicular a cualquier otro vector). ■

Definición Ortogonal

Los vectores que son perpendiculares se dice que son **ortogonales**.

EJEMPLO 3 Determine los ángulos entre cada uno de los tres pares de vectores del ejemplo 1. ¿Qué pares son ortogonales?

SOLUCIÓN Para los vectores **u** y **v**, tenemos

$$\cos\theta_1 = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{(0)(2) + (1)(-1) + (1)(1)}{\|\langle 0, 1, 1\rangle\|\|\langle 2, -1, 1\rangle\|} = \frac{0}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = 0$$

Para los vectores **u** y **w**, tenemos

$$\cos\theta_2 = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{w}\|} = \frac{(0)(6) + (1)(-3) + (1)(3)}{\|\langle 0, 1, 1\rangle\|\|\langle 6, -3, 3\rangle\|} = \frac{0}{\sqrt{2}\left(3\sqrt{6}\right)} = 0$$

Por último, para los vectores **v** y **w**, tenemos

$$\cos\theta_3 = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|} = \frac{(2)(6) + (-1)(-3) + (1)(3)}{\|\langle 2, -1, 1\rangle\|\|\langle 6, -3, 3\rangle\|} = \frac{18}{\sqrt{6}\left(3\sqrt{6}\right)} = 1$$

Así que la pareja **u** y **v** y la pareja **u** y **w** son ortogonales, ya que $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$. Observe que para la pareja **v** y **w**, el coseno del ángulo entre los vectores es 1, indicando que $\theta_3 = 0$; es decir, los vectores apuntan en la misma dirección. ■

Recuerde que todo vector **u** en el plano puede escribirse como $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$, en donde $\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle$ y $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$, y que todo vector **v** en el espacio tridimensional puede escribirse como $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ en donde, en este caso, $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle$ y $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$.

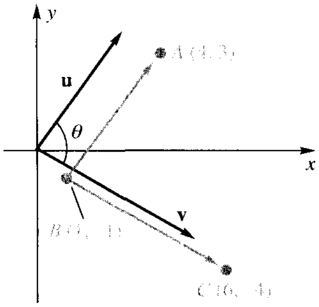


Figura 3

EJEMPLO 4 Determine la medida del ángulo ABC, en donde los tres puntos son $A(4,3)$, $B(1,-1)$ y $C(6,-4)$ como en la figura 3.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \overrightarrow{BA} = (4 - 1)\mathbf{i} + (3 + 1)\mathbf{j} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} = \langle 3, 4\rangle \\
\mathbf{v} &= \overrightarrow{BC} = (6 - 1)\mathbf{i} + (-4 + 1)\mathbf{j} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} = \langle 5, -3\rangle \\
\|\mathbf{u}\| &= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \\
\|\mathbf{v}\| &= \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{34} \\
\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= (3)(5) + (4)(-3) = 3 \\
\cos\theta &= \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{5\sqrt{34}} \approx 0.1029 \\
\theta &\approx 1.468 \text{ (alrededor de } 84.09^\circ)
\end{aligned}$$

■

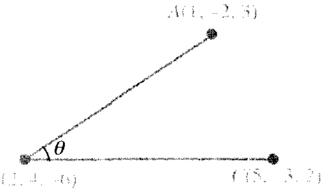


Figura 4

EJEMPLO 5 Determine la medida del ángulo ABC, en donde los tres puntos son $A(1,-2,3)$, $B(2,4,-6)$ y $C(5,-3,2)$ (véase la figura 4).

SOLUCIÓN Primero determinamos los vectores **u** y **v** (saliendo del origen) equivalentes a $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$. Esto se realiza restando las coordenadas de los puntos iniciales de las coordenadas de los puntos terminales, o sea,

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \overrightarrow{BA} = \langle 1 - 2, -2 - 4, 3 + 6\rangle = \langle -1, -6, 9\rangle \\
\mathbf{v} &= \overrightarrow{BC} = \langle 5 - 2, -3 - 4, 2 + 6\rangle = \langle 3, -7, 8\rangle
\end{aligned}$$

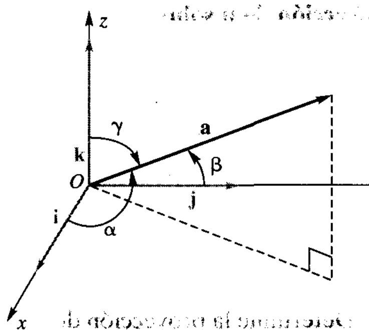


Figura 5

Así,

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{(-1)(3) + (-6)(-7) + (9)(8)}{\sqrt{1 + 36 + 81}\sqrt{9 + 49 + 64}} \approx 0.9251$$

$$\theta = 0.3894 \text{ radianes} \quad (\text{alrededor de } 22.31°)$$ ■

Ángulos y cosenos directores Los ángulos más pequeños y no negativos entre un vector no nulo **a** y los vectores básicos **i, j** y **k** son los **ángulos directores** de **a**; se denotan como α, β y γ respectivamente, como se muestra en la figura 5. Por lo general, es más conveniente trabajar con los **cosenos directores** $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$. Si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, entonces

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{i}\|} = \frac{a_1}{\|\mathbf{a}\|},$$

$$\cos\beta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{j}\|} = \frac{a_2}{\|\mathbf{a}\|},$$

$$\cos\gamma = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{k}\|} = \frac{a_3}{\|\mathbf{a}\|}$$

Observe que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a_1^2}{\|\mathbf{a}\|^2} + \frac{a_2^2}{\|\mathbf{a}\|^2} + \frac{a_3^2}{\|\mathbf{a}\|^2} = 1$$

El vector $\langle\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\rangle$ es un vector unitario con la misma dirección que **a**.

EJEMPLO 6 Calcule los ángulos directores para el vector $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

SOLUCIÓN Como $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + 3^2} = 5\sqrt{2}$,

$$\cos\alpha = \frac{4}{5\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}, \quad \cos\beta = -\frac{5}{5\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\gamma = \frac{3}{5\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$$

y

$$\alpha \approx 55.55°, \qquad \beta = 135°, \qquad \gamma \approx 64.90°$$ ■

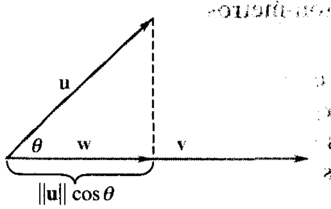


Figura 6

Proyecciones Sean **u** y **v** vectores, y sea θ el ángulo entre ellos. Por ahora supondremos que $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Sea **w** el vector en la dirección de **v** que tiene magnitud $\|\mathbf{u}\|\cos\theta$ (véase la figura 6). Ya que **w** tiene la misma dirección que **v**, sabemos que $\mathbf{w} = c\mathbf{v}$ para algún escalar c. Por otra parte, la *magnitud* de **w** debe ser $\|\mathbf{u}\|\cos\theta$. Así que,

$$\|\mathbf{u}\|\cos\theta = \|\mathbf{w}\| = \|c\mathbf{v}\| = c\|\mathbf{v}\|$$

Por lo tanto, la constante c es

$$c = \frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{v}\|}\cos\theta = \frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{v}\|}\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}$$

Así que

$$\mathbf{w} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\right)\mathbf{v}$$

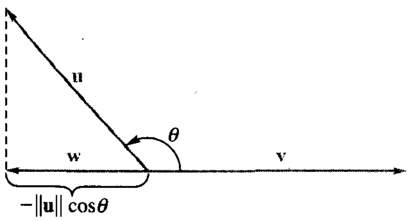


Figura 7

Para $\pi/2 < \theta \leq \pi$, definimos **w** como el vector en la recta determinada por **v**, pero que apunta en dirección opuesta a **v** (véase la figura 7). La magnitud de este vector es $\|\mathbf{w}\| = -\|\mathbf{u}\|\cos\theta = c\|\mathbf{v}\|$ para algún escalar positivo c. Así, $c = (-\|\mathbf{u}\|\cos\theta)/(\|\mathbf{v}\|) = -\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|^2$. Como **w** apunta en dirección *opuesta* a **v**, tenemos $\mathbf{w} = -c\mathbf{v} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|^2)\mathbf{v}$. Por lo tanto, en ambos casos tenemos $\mathbf{w} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|^2)\mathbf{v}$. El vector **w** se denomina **vec-**

tor proyección de u sobre v, y en ocasiones sólo **proyección de u sobre v**, y se denota por $\text{pr}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$:

$$\text{pr}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\right)\mathbf{v}$$

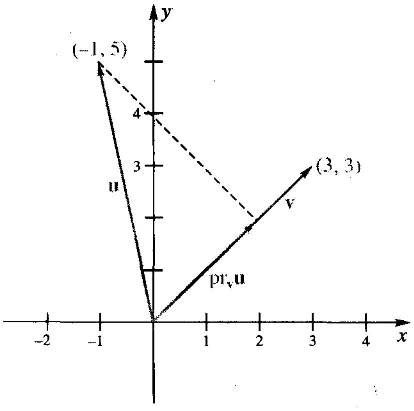


Figura 8

La **proyección escalar de u sobre v** se define como $\|\mathbf{u}\|\cos\theta$. Es positiva, cero o negativa, dependiendo de si **u** es agudo, recto θ obtuso. Cuando $0 \le \theta \le \pi/2$, a proyección escalar es igual a la magnitud de $\text{pr}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$, y cuando $\pi/2 < \theta \le \pi$, la proyección escalar es igual al opuesto de la magnitud de $\text{pr}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$.

EJEMPLO 7 Sean $\mathbf{u} = \langle -1, 5\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 3, 3\rangle$. Determine la proyección de **u** sobre **v** y la proyección escalar de **u** sobre **v**.

SOLUCIÓN La figura 8 muestra los dos vectores. La proyección vectorial es

$$\text{pr}_{\langle 3,3\rangle}\langle -1, 5\rangle = \left(\frac{\langle -1, 5\rangle\cdot\langle 3, 3\rangle}{\|\langle 3, 3\rangle\|^2}\right)\langle 3, 3\rangle = \frac{-3+15}{3^2+3^2}\langle 3, 3\rangle = \langle 2, 2\rangle = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

y la proyección escalar es

$$\|\mathbf{u}\|\cos\theta = \|\langle -1, 5\rangle\|\frac{\langle -1, 5\rangle\cdot\langle 3, 3\rangle}{\|\langle -1, 5\rangle\|\|\langle 3, 3\rangle\|} = \frac{-3+15}{\sqrt{3^2+3^2}} = 2\sqrt{2} \qquad \blacksquare$$

El trabajo realizado por una fuerza constante **F** *al mover un objeto a lo largo de la recta de P a Q es la magnitud de la fuerza en la dirección del movimiento por la distancia movida.* Así, si **D** es el vector de P a Q, el trabajo hecho es

$$(\text{Proyección escalar de } \mathbf{F} \text{ sobre } \mathbf{D})\|\mathbf{D}\| = \big(\|\mathbf{F}\|\cos\theta\big)\|\mathbf{D}\|$$

Esto es,

$$\boxed{\text{Trabajo} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{D}}$$

EJEMPLO 8 Una fuerza $\mathbf{F} = 8\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ en newtons mueve un objeto desde $(1, 0)$ hasta $(7, 1)$, en donde la distancia se mide en metros (figura 9). ¿Cuánto trabajo se realizó?

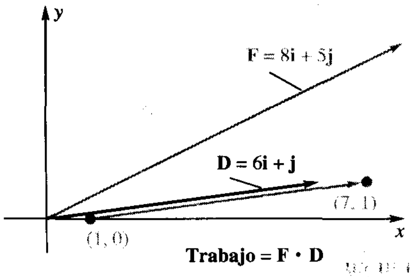


Figura 9

SOLUCIÓN Sea **D** el vector de $(1, 0)$ a $(7, 1)$; esto es, sea $\mathbf{D} = 6\mathbf{i} + \mathbf{j}$. Entonces

$$\text{Trabajo} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{D} = (8)(6) + (5)(1) = 53 \text{ newton-metros} = 53 \text{ joules} \qquad \blacksquare$$

Planos Una manera fructífera de describir un plano es mediante el lenguaje de los vectores. Sea $\mathbf{n} = \langle A, B, C\rangle$ un vector fijo no nulo y $P_1(x_1, y_1, z_1)$ un punto fijo. El conjunto de puntos $P(x, y, z)$ que satisfacen $\overrightarrow{P_1P}\cdot\mathbf{n} = 0$ es el **plano** que pasa por P_1 perpendicular a **n**. Como cada plano contiene un punto y es perpendicular a algún vector, un plano se puede caracterizar de esta manera.

Para obtener la ecuación cartesiana del plano, escriba el vector $\overrightarrow{P_1P}$ en forma de componentes; es decir,

$$\overrightarrow{P_1P} = \langle x - x_1, y - y_1, z - z_1\rangle$$

Entonces $\overrightarrow{P_1P}\cdot\mathbf{n} = 0$ es equivalente a

$$\boxed{A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0}$$

Esta ecuación (en la que al menos uno de los números A, B y C es distinto de cero) se llama la **forma canónica para la ecuación de un plano o ecuación canónica de un plano.**

Si eliminamos los paréntesis y simplificamos, la ecuación en el recuadro toma la forma de la ecuación lineal general

$$Ax + By + Cz = D, \qquad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$

Así, cada plano tiene una ecuación lineal. Recíprocamente, la gráfica de una ecuación lineal en el espacio tridimensional es siempre un plano. Para ver esto último, sea (x_1, y_1, z_1) un punto que satisface la ecuación; es decir,

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 = D$$

Al restar esta ecuación de la anterior, obtenemos la ecuación del recuadro y ya sabemos que ésta representa un plano.

EJEMPLO 9 Determine la ecuación del plano que pasa por $(5, 1, -2)$ y es perpendicular a $\mathbf{n} = \langle 2, 4, 3 \rangle$. Luego, calcule el ángulo entre este plano y el plano con ecuación $3x - 4y + 7z = 5$.

SOLUCIÓN Para realizar la primera tarea, simplemente aplique la ecuación canónica de un plano al problema en cuestión, con lo que se obtiene

$$2(x - 5) + 4(y - 1) + 3(z + 2) = 0$$

o en forma equivalente,

$$2x + 4y + 3z = 8$$

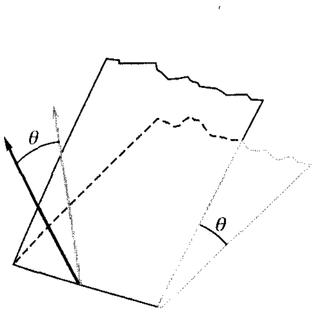


Figura 10

Un vector $\mathbf{m}$ perpendicular al segundo plano es $\mathbf{m} = \langle 3, -4, 7 \rangle$. El ángulo θ entre dos planos es el ángulo entre sus normales (figura 10). Así

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{m}\|\|\mathbf{n}\|} = \frac{(3)(2) + (-4)(4) + (7)(3)}{\sqrt{9 + 16 + 49}\sqrt{4 + 16 + 9}} \approx 0.2375$$

$$\theta \approx 76.26°$$

En realidad, hay dos ángulos entre dos planos, pero éstos son *suplementarios.* El proceso recién descrito llevará a alguno de ellos. El otro, si se desea, se obtiene restando el primer valor de 180°. En nuestro caso, sería 103.74°. ■

EJEMPLO 10 Demuestre que la distancia L del punto (x_0, y_0, z_0) al plano $Ax + By + Cz = D$ está dada por la fórmula

$$L = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

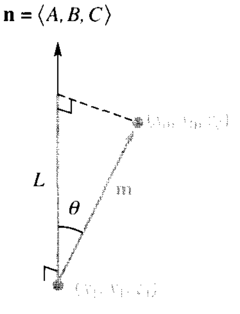


Figura 11

SOLUCIÓN Sea (x_1, y_1, z_1) un punto en el plano y sea $\mathbf{m} = \langle x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1 \rangle$ el vector de (x_1, y_1, z_1) a (x_0, y_0, z_0), como en la figura 11. Ahora, $\mathbf{n} = \langle A, B, C \rangle$ es un vector perpendicular al plano dado, aunque podría apuntar en la dirección opuesta a la de nuestra figura. El número L que buscamos es la longitud de la proyección de $\mathbf{m}$ sobre $\mathbf{n}$. Así,

$$\begin{aligned} L &= |\|\mathbf{m}\|\cos\theta| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|} \\ &= \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}$$

Pero (x_1, y_1, z_1) está en el plano, de modo que

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 = D$$

Al sustituir este resultado en la expresión para L obtenemos la fórmula deseada. ■

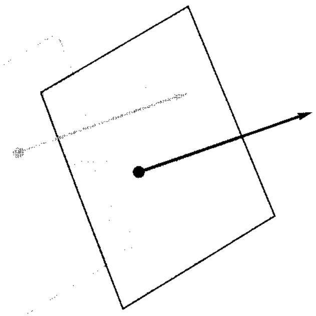


Figura 12

EJEMPLO 11 Calcule la distancia entre los planos paralelos $3x - 4y + 5z = 9$ y $3x - 4y + 5z = 4$.

SOLUCIÓN Los planos son paralelos, pues el vector $\langle 3, -4, 5\rangle$ es perpendicular a ambos (figura 12). Es fácil ver que el punto $(1, 1, 2)$ está en el primer plano. Encontramos la distancia L de $(1, 1, 2)$ al segundo plano usando la fórmula del ejemplo 10.

$$L = \frac{|3(1) - 4(1) + 5(2) - 4|}{\sqrt{9 + 16 + 25}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} \approx 0.7071 \quad ■$$

Revisión de conceptos

1. El producto punto de $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ se define como ______. La formulación geométrica correspondiente para $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ es ______, en donde θ es el ángulo que forman $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

2. Dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales si y sólo si su producto punto es ______.

3. El trabajo realizado por una fuerza constante F al mover un objeto a lo largo del vector $\mathbf{D}$ está dado por ______.

4. Un vector normal al plano $Ax + By + Cz = D$ es ______.

Conjunto de problemas 11.3

1. Sean $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{c} = -5\mathbf{j}$. Determine cada uno de los siguientes:

(a) $2\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$ (b) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$

(c) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (d) $(-2\mathbf{a} + 3\mathbf{b})\cdot 5\mathbf{c}$

(e) $\|\mathbf{a}\|\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}$ (f) $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - \|\mathbf{b}\|$

2. Sean $\mathbf{a} = \langle 3, -1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, -1\rangle$ y $\mathbf{c} = \langle 0, 5\rangle$. Determine cada uno de los siguientes:

(a) $-4\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ (b) $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$

(c) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$ (d) $2\mathbf{c}\cdot(3\mathbf{a} + 4\mathbf{b})$

(e) $\|\mathbf{b}\|\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ (f) $\|\mathbf{c}\|^2 - \mathbf{c}\cdot\mathbf{c}$

3. Determine el coseno del ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ y haga un bosquejo.

(a) $\mathbf{a} = \langle 1, -3\rangle, \mathbf{b} = \langle -1, 2\rangle$ (b) $\mathbf{a} = \langle -1, -2\rangle, \mathbf{b} = \langle 6, 0\rangle$

(c) $\mathbf{a} = \langle 2, -1\rangle, \mathbf{b} = \langle -2, -4\rangle$

(d) $\mathbf{a} = \langle 4, -7\rangle, \mathbf{b} = \langle -8, 10\rangle$

4. Determine el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ y haga un bosquejo.

(a) $\mathbf{a} = 12\mathbf{i}, \mathbf{b} = -5\mathbf{i}$

(b) $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \mathbf{b} = -8\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$

(c) $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$

(d) $\mathbf{a} = \sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{b} = 3\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}$

5. Sean $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Determine cada uno de los siguientes:

(a) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ (b) $(\mathbf{a} + \mathbf{c})\cdot\mathbf{b}$

(c) $\mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|$ (d) $(\mathbf{b} - \mathbf{c})\cdot\mathbf{a}$

(e) $\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|}$ (f) $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - \|\mathbf{b}\|^2$

6. Sean $\mathbf{a} = \langle\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, -1, 1\rangle$, y $\mathbf{c} = \langle -2, 2, 1\rangle$. Determine cada uno de los siguientes:

(a) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ (b) $(\mathbf{a} - \mathbf{c})\cdot\mathbf{b}$

(c) $\mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|$ (d) $(\mathbf{b} - \mathbf{c})\cdot\mathbf{a}$

(e) $\dfrac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{\|\mathbf{b}\|\|\mathbf{c}\|}$ (f) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} - \|\mathbf{a}\|^2$

7. Para los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ del problema 6, determine el ángulo entre cada par de vectores.

8. Sean $\mathbf{a} = \langle\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, -1, 0\rangle$, y $\mathbf{c} = \langle -2, -2, 1\rangle$. Determine el ángulo entre cada pareja de vectores.

9. Para los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ del problema 6, determine los cosenos y los ángulos directores.

10. Para los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ del problema 8, determine los cosenos y los ángulos directores.

11. Demuestre que los vectores $\langle 6, 3\rangle$ y $\langle -1, 2\rangle$ son ortogonales.

12. Demuestre que los vectores $\mathbf{a} = \langle 1, 1, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, -1, 0\rangle$ y $\mathbf{c} = \langle -1, -1, 2\rangle$ son mutuamente ortogonales, esto es, cada pareja de vectores es ortogonal.

13. Muestre que los vectores $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{c} = 2\mathbf{k}$ son mutuamente ortogonales, esto es, cada pareja de vectores es ortogonal.

14. Si $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, ¿qué puede decir acerca de las magnitudes relativas de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$?

15. Determine dos vectores de longitud 10, cada uno de los cuales sea perpendicular a $-4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $4\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

16. Determine todos los vectores perpendiculares a $\langle 1, -2, -3\rangle$ y a $\langle -3, 2, 0\rangle$.

17. Determine el ángulo ABC si los puntos son $A(1, 2, 3)$, $B(-4, 5, 6)$, y $C(1, 0, 1)$.

18. Demuestre que el triángulo ABC es un triángulo rectángulo si los vértices son $A(6, 3, 3)$, $B(3, 1, -1)$ y $C(-1, 10, -2.5)$. *Sugerencia:* compruebe el ángulo en B.

19. ¿Para qué valores de c son ortogonales $\langle c, 6\rangle$ y $\langle c, -4\rangle$?

20. ¿Para qué valores de c son ortogonales $2c\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$ y $3\mathbf{i} + c\mathbf{j}$?

21. ¿Para qué valores de c y d son ortogonales $\mathbf{u} = c\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} + d\mathbf{k}$?

22. ¿Para cuáles valores de a, b y c los tres vectores $\langle a, 0, 1\rangle$, $\langle 0, 2, b\rangle$ y $\langle 1, c, 1\rangle$ son mutuamente ortogonales?

En los problemas del 23 al 28 determine cada una de las proyecciones, si $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ *y* $\mathbf{w} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.

23. $\mathrm{pr}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$

24. $\mathrm{pr}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{v}$

25. $\mathrm{pr}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{w}$

26. $\mathrm{pr}_{\mathbf{u}}(\mathbf{w} - \mathbf{v})$

27. $\mathrm{pr}_{\mathbf{j}}\,\mathbf{u}$

28. $\mathrm{pr}_{\mathbf{i}}\,\mathbf{u}$

En los problemas del 29 al 34 determine cada una de las proyecciones dadas, si $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}$ *y* $\mathbf{w} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

29. $\mathrm{pr}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$

30. $\mathrm{pr}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{v}$

31. $\mathrm{pr}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{w}$

32. $\mathrm{pr}_{\mathbf{u}}(\mathbf{w} + \mathbf{v})$

33. $\mathrm{pr}_{\mathbf{k}}\,\mathbf{u}$

34. $\mathrm{pr}_{\mathbf{j}}\,\mathbf{u}$

35. Determine una expresión sencilla para cada uno de los siguientes casos, en donde $\mathbf{u}$ es un vector arbitrario.

(a) $\mathrm{pr}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{u}$

(b) $\mathrm{pr}_{-\mathbf{u}}\,\mathbf{u}$

36. Determine una expresión sencilla para cada uno de los siguientes casos, en donde $\mathbf{u}$ es un vector arbitrario.

(a) $\mathrm{pr}_{\mathbf{u}}(-\mathbf{u})$

(b) $\mathrm{pr}_{-\mathbf{u}}(-\mathbf{u})$

37. Determine la proyección escalar de $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ sobre $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

38. Determine la proyección escalar de $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ sobre $\mathbf{v} = -\sqrt{5}\mathbf{i} + \sqrt{5}\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

39. Un vector $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ que parte del origen apunta hacia el primer octante (es decir, la parte del espacio tridimensional en donde todas las componentes son positivas). Si $\|\mathbf{u}\| = 5$, determine z.

40. Si $\alpha = 46°$ y $\beta = 108°$ son los ángulos directores para un vector $\mathbf{u}$, determine dos posibles valores para el tercer ángulo.

41. Determine dos vectores perpendiculares $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tales que cada uno sea perpendicular a $\mathbf{w} = \langle -4, 2, 5\rangle$.

42. Determine el vector que parte del origen, cuyo punto final es el punto medio del segmento que une $(3, 2, -1)$ y $(5, -7, 2)$.

43. ¿Cuáles de las siguientes expresiones no tienen sentido?

(a) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})$

(b) $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}) + \mathbf{w}$

(c) $\|\mathbf{u}\|(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})$

(d) $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}$

44. ¿Cuáles de las siguientes expresiones no tienen sentido?

(a) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v} + \mathbf{w})$

(b) $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\|\mathbf{w}\|$

(c) $\|\mathbf{u}\|\cdot(\mathbf{v} + \mathbf{w})$

(d) $(\mathbf{u} + \mathbf{v})\mathbf{w}$

En los problemas del 45 al 50 proporcione una demostración de la propiedad que se indica para vectores bidimensionales. Utilice $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$, *y* $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2\rangle$.

45. $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$

46. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$

47. $c(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = (c\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}$

48. $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$

49. $\mathbf{0}\cdot\mathbf{u} = 0$

50. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$

51. Dados los dos vectores no paralelos $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y otro vector $\mathbf{r} = 7\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$, determine escalares k y m tales que $\mathbf{r} = k\mathbf{a} + m\mathbf{b}$.

52. Dados los dos vectores no paralelos $a = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ y otro vector $\mathbf{r} = 6\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$, determine escalares k y m tales que $r = ka + mb$.

53. Demuestre que el vector $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ es perpendicular a la recta con ecuación $ax + by = c$. *Sugerencia:* suponga que $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos en la recta, y muestre que $\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{P_1P_2} = 0$.

54. Demuestre que $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$.

55. Demuestre que $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{4}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$.

56. Determine el ángulo entre una diagonal principal de un cubo y una de sus caras.

57. Determine el menor ángulo positivo entre las diagonales principales de una caja rectangular de 4 por 6 por 10 pies.

58. Calcule los ángulos formados por las diagonales de un cubo.

59. Determine el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$ newtons al mover un objeto 10 metros al norte (es decir, en la dirección $\mathbf{j}$).

60. Determine el trabajo realizado por una fuerza de 100 newtons que actúa en la dirección S 70° E al mover un objeto 30 metros hacia el este.

61. Determine el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F} = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ libras al mover un objeto de $(1, 0)$ a $(6, 8)$, donde la distancia está en pies.

62. Determine el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F} = -5\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ newtons al mover un objeto 12 metros al norte.

63. Calcule el trabajo realizado por una fuerza $\mathbf{F} = -4\mathbf{k}$ newtons para mover un objeto de $(0, 0, 8)$ a $(4, 4, 0)$, donde la distancia está dada en metros.

64. Determine el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ libras al mover un objeto de $(2, 1, 3)$ a $(9, 4, 6)$, donde la distancia está dada en pies.

En los problemas del 65 al 68 determine la ecuación del plano que tiene el vector normal dado $\mathbf{n}$, *y que pasa por el punto P dado.*

65. $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; $P(1, 2, -3)$

66. $\mathbf{n} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 1\mathbf{k}$; $P(-2, -3, 4)$

67. $\mathbf{n} = \langle 1, 4, 4\rangle$; $P(1, 2, 1)$

68. $\mathbf{n} = \langle 0, 0, 1\rangle$; $P(1, 2, -3)$

69. Determine el menor de los ángulos que forman los dos planos de los problemas 65 y 66.

70. Determine la ecuación del plano que pasa por $(-1, 2, -3)$ y es paralelo al plano $2x + 4y - z = 6$.

71. Determine la ecuación del plano que pasa por $(-4, -1, 2)$ y que es paralelo

(a) al plano xy,

(b) al plano $2x - 3y - 4z = 0$

72. Determine la ecuación del plano que pasa por el origen y es paralelo a

(a) el plano xy

(b) el plano $x + y + z = 1$

73. Calcule la distancia de $(1, -1, 2)$ al plano $x + 3y + Z = 7$.

74. Calcule la distancia de $(2, 6, 3)$ al plano $-3x + 2y + z = 9$.

75. Calcule la distancia entre los planos paralelos $-3x + 2y + z = 9$ y $6x - 4y - 2z = 19$.

76. Calcule la distancia entre los planos paralelos $5x - 3y - 2z = 5$ y $-5x + 3y + 2z = 7$.

77. Calcule la distancia de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 6y - 8z = 0$ al plano $3x + 4y + z = 15$.

78. Determine la ecuación del plano tal que todos sus puntos son equidistantes de $(-2, 1, 4)$ y $(6, 1, -2)$.

79. Demuestre la **desigualdad de Cauchy-Schwartz** para vectores bidimensionales:

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$$

80. Demuestre la **desigualdad del triángulo** (véase la figura 13) para vectores bidimensionales.

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

Sugerencia: utilice el producto punto para calcular $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$; luego utilice la desigualdad de Cauchy–Schwartz del problema 79.

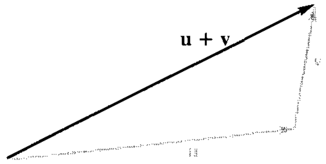


Figura 13

81. Un peso de 30 libras está suspendido por tres cables con tensiones resultantes $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$, $-8\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$, y $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$. Determine a, b y c, de modo que la fuerza neta apunta hacia arriba.

82. Muestre que el trabajo hecho por una fuerza constante F sobre un objeto que mueve en una trayectoria completa alrededor de un polígono cerrado es 0.

83. Sean $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ vectores fijos. Demuestre que $(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0$ es la ecuación de una esfera y determine su centro y su radio.

84. Refine el método del ejemplo 10, mostrando que la distancia L entre los planos paralelos $Ax + By + Cz = D$ y $Ax + By + Cz = E$ es

$$L = \frac{|D - E|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

85. Las medianas de un triángulo se encuentran en un punto P (el centroide, por el problema 30 de la sección 5.6), que está a dos tercios del camino de un vértice al punto medio del lado opuesto. Demuestre que P es la cabeza del vector de posición $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})/3$, donde $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, y $\mathbf{c}$ son los vectores de posición de los vértices, y use esto para determinar P si los vértices son $(2, 6, 5)$, $(4, -1, 2)$, y $(6, 1, 2)$.

86. Sean $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, y $\mathbf{d}$ los vectores de posición de los vértices de un tetraedro. Demuestre que las rectas que unen los vértices con los centroides de las caras opuestas se cortan en un punto P, y dé una fórmula vectorial sencilla para él, generalizando con ello el problema 85.

87. Suponga que los tres planos de coordenadas que acotan al primer octante son espejos. Un rayo de luz con dirección $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ se refleja de manera sucesiva en los planos xy, xz y yz. Determine la dirección del rayo después de cada reflexión y establezca una conclusión sencilla en relación con el rayo reflejado final.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$; $\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta$ **2.** 0 **3.** $\mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$ **4.** $\langle A, B, C \rangle$

11.4
El producto cruz

El producto punto de dos vectores es un escalar. Hemos explorado algunos de sus usos en la sección anterior. Ahora presentamos el **producto cruz** (o producto vectorial); también tendrá muchos usos. El producto cruz $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ de $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ se define como

$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \langle u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1 \rangle}$$

En esta forma, la fórmula es difícil de recordar y su significado no es obvio. Observe lo único que es obvio: el producto cruz de dos vectores es un vector.

Para ayudarnos a recordar la fórmula para el producto cruz, tengamos presente un tema de un curso anterior de matemáticas, a saber, los *determinantes*. En primer lugar, el valor de un determinante 2×2 es

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Entonces, el valor de un determinante 3×3 es (desarrollando a lo largo del primer renglón)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

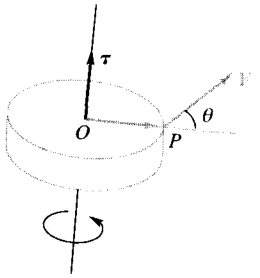
$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Torca

El producto cruz desempeña un papel importante en mecánica. Sea O un **punto fijo** en un cuerpo y suponga que se aplica una fuerza $\mathbf{F}$ en otro punto P del cuerpo. Entonces, $\mathbf{F}$ tiende a hacer girar el cuerpo en torno de un eje que pasa por O y que es perpendicular al plano de OP y $\mathbf{F}$. El vector

$$\tau = \overrightarrow{OP} \times \mathbf{F}$$

es la **torca.** Apunta en la dirección del eje y tiene magnitud $\|\overrightarrow{OP}\|\|\mathbf{F}\|$ sen θ, que es justamente el momento de fuerza en torno al eje debido a $\mathbf{F}$.



Al usar determinantes, podemos escribir la definición de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ como

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

Observe que los componentes del vector $\mathbf{u}$ de la izquierda aparecen en el segundo renglón, mientras que los del vector $\mathbf{v}$ de la derecha están en el tercer renglón. Esto es importante, pues si intercambiamos las posiciones de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, estamos cambiando el segundo y tercer renglones del determinante, lo cual cambia el signo de su valor, como usted podrá comprobar. Así

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$$

que a veces se llama *ley anticonmutativa.*

EJEMPLO 1 Sean $\mathbf{u} = \langle 1, -2, -1 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -2, 4, 1 \rangle$. Calcule $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ usando la definición de determinante

SOLUCIÓN

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

■

Interpretación geométrica de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ Como el producto punto, el producto cruz adquiere un significado de su interpretación geométrica

Teorema A

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores en el espacio tridimensional y θ el ángulo entre ellos. Entonces

1. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0 = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$, esto es, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es perpendicular tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{v}$;
2. $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ forman una terna derecha;
3. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$ sen θ.

Demostración Sean $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

(1) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = u_1(u_2v_3 - u_3v_2) + u_2(u_3v_1 - u_1v_3) + u_3(u_1v_2 - u_2v_1)$. Al eliminar paréntesis, los seis términos se cancelan por parejas. Ocurre algo similar al desarrollar $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.

(2) El significado de obtener un sistema de mano derecha con la terna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ se ilustra en la figura 1. Ahí, θ es el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, y los dedos de la mano derecha se doblan en la dirección de la rotación con ángulo θ que hace a $\mathbf{u}$ coincidir con $\mathbf{v}$. Es difícil establecer en forma analítica que la terna indicada es de la mano derecha, pero usted podría comprobarlo con unos cuantos ejemplos. Observe en particular que $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, y por definición sabemos que la terna $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ es de mano derecha.

(3) Necesitamos la identidad de Lagrange

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$$

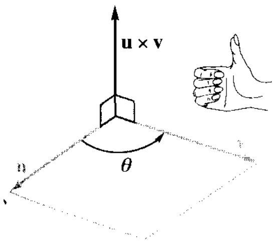


Figura 1

cuya demostración es un ejercicio algebraico sencillo (problema 31). Usamos esta identidad para escribir

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta)^2\\ &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2(1-\cos^2\theta)\\ &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2\operatorname{sen}^2\theta\end{aligned}$$

Como $0 \le \theta \le \pi$, sen $\theta \ge 0$. Al tomar la raíz cuadrada principal se obtiene

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\operatorname{sen}\theta \qquad \blacksquare$$

Es importante contar con interpretaciones geométricas para $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$. Aunque originalmente definimos tales productos en términos de sus componentes, los que dependen de la elección de un sistema coordenado, en realidad son independientes de los sistemas de coordenadas. Son cantidades geométricas intrínsecas, y usted obtendrá los mismos resultados para $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ sin importar cómo introduzca las coordenadas utilizadas para calcularlos.

He aquí una sencilla consecuencia del teorema A (parte 3) y del hecho de que los vectores son paralelos si y sólo si el ángulo θ entre ellos es 0° o 180°.

Teorema B

Dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en el espacio tridimensional son paralelos si y sólo si $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = 0$.

Aplicaciones

Nuestra primera aplicación es para determinar la ecuación del plano que pasa por tres puntos no colineales.

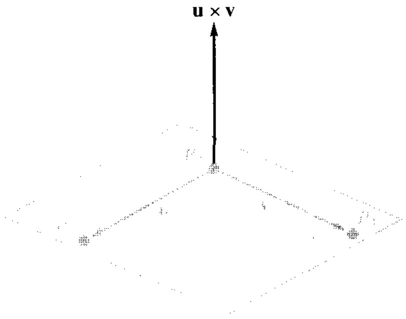


Figura 2

EJEMPLO 2 Determine la ecuación del plano (figura 2) que pasa por los tres puntos $P_1(1,-2,3)$, $P_2(4,1,-2)$ y $P_3(-2,-3,0)$.

SOLUCIÓN Sean $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_2P_1} = \langle -3,-3,5\rangle$ y $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_2P_3} = \langle -6,-4,2\rangle$. Con base en la primera parte del teorema A, sabemos que

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -3 & -3 & 5\\ -6 & -4 & 2\end{vmatrix} = 14\mathbf{i} - 24\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$

es perpendicular tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{v}$, y por lo tanto al plano que los contiene. El plano que pasa por $(4,1,-2)$ con normal $14\mathbf{i}-24\mathbf{j}-6\mathbf{k}$ tiene ecuación (véase la sección 11.3)

$$14(x-4) - 24(y-1) - 6(z+2) = 0$$

o

$$14x - 24y - 6z = 44 \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Muestre que el área de un paralelogramo con $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ como lados adyacentes es $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|$.

SOLUCIÓN Recuerde que el área de un paralelogramo es el producto de su base por su altura. Ahora vea la figura 3 y utilice el hecho de que $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\operatorname{sen}\theta$. $\blacksquare$

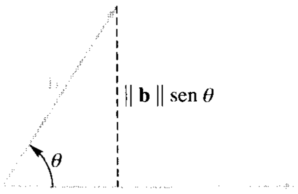


Figura 3

EJEMPLO 4 Demuestre que el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ es

$$V = |\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})| = \left|\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\right|$$

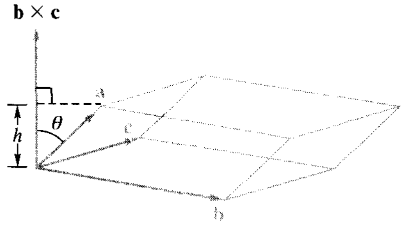


Figura 4

SOLUCIÓN Tenga como referencia la figura 4 y considere el paralelogramo determinado por **b** y **c** como la base del paralelepípedo. El área de esta base es $\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\|$, por el ejemplo 3; la altura h del paralelepípedo es el valor absoluto de la proyección escalar de **a** sobre **b** × **c**. Así,

$$h = \|\mathbf{a}\||\cos\theta| = \frac{\|\mathbf{a}\||\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\times\mathbf{c}\|} = \frac{|\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|}{\|\mathbf{b}\times\mathbf{c}\|}$$

y

$$V = h\|\mathbf{b}\times\mathbf{c}\| = |\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|$$ ■

Suponga que los vectores **a**, **b** y **c** del ejemplo anterior están en el *mismo* plano. En este caso, el paralelepípedo tiene altura cero, por lo que el volumen sería cero. ¿La fórmula para el volumen da $V = 0$? Si **a** se encuentra en el plano determinado por **b** y **c**, entonces cualquier vector perpendicular a **b** y a **c** también será perpendicular a **a**. El vector **b** × **c** es perpendicular a **b** y a **c**; por lo tanto, **b** × **c** es perpendicular a **a**. Así que, $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = 0$.

Compruebe los casos extremos

Nunca lea un libro de matemáticas en forma pasiva; es mejor plantearse preguntas al ir leyendo. En particular, usted debe revisar los casos extremos siempre que sea posible. Aquí observamos el caso donde los vectores **a**, **b** y **c** están en el *mismo* plano. El volumen del paralelepípedo debe ser igual a cero y, en realidad, la fórmula sigue dando el valor cero. ¿Qué ocurre en el ejemplo 3 si los vectores **b** y **c** son paralelos?

Propiedades algebraicas Propiedades algebraicas Las reglas para el cálculo del producto cruz se resumen en el siguiente teorema. La demostración de este teorema consiste en escribir todo en términos de componentes y se dejará como ejercicio..

Teorema C

Si **u**, **v** y **w** son vectores en el espacio tridimensional y k es un escalar, entonces

1. $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = -(\mathbf{v}\times\mathbf{u})$ (ley distributiva por la izquierda);
2. $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = (\mathbf{u}\times\mathbf{v}) + (\mathbf{u}\times\mathbf{w})$ (ley anticonmutativa);
3. $k(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = (k\mathbf{u})\times\mathbf{v} = \mathbf{u}\times(k\mathbf{v})$;
4. $\mathbf{u}\times\mathbf{0} = \mathbf{0}\times\mathbf{u} = \mathbf{0}, \mathbf{u}\times\mathbf{u} = \mathbf{0}$;
5. $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = \mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$;
6. $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}$.

Una vez que se dominen las reglas del teorema C, los cálculos complicados con vectores se pueden realizar con facilidad. Lo ilustramos con el cálculo de un producto cruz de otra manera. Necesitaremos los siguientes productos, sencillos pero importantes.

$$\boxed{\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}}$$

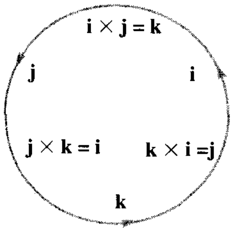


Figura 5

Estos resultados tienen un orden cíclico que puede recordarse recurriendo a la figura 5.

EJEMPLO 5 Calcule $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ si $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

SOLUCIÓN Recurrimos al teorema C; en particular, a la ley distributiva y a la ley anticonmutativa.

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\times\mathbf{v} &= (3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})\times(4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k})\\ &= 12(\mathbf{i}\times\mathbf{i}) + 6(\mathbf{i}\times\mathbf{j}) - 9(\mathbf{i}\times\mathbf{k}) - 8(\mathbf{j}\times\mathbf{i}) - 4(\mathbf{j}\times\mathbf{j})\\ &\quad + 6(\mathbf{j}\times\mathbf{k}) + 4(\mathbf{k}\times\mathbf{i}) + 2(\mathbf{k}\times\mathbf{j}) - 3(\mathbf{k}\times\mathbf{k})\\ &= 12(\mathbf{0}) + 6(\mathbf{k}) - 9(-\mathbf{j}) - 8(-\mathbf{k}) - 4(\mathbf{0})\\ &\quad + 6(\mathbf{i}) + 4(\mathbf{j}) + 2(-\mathbf{i}) - 3(\mathbf{0})\\ &= 4\mathbf{i} + 13\mathbf{j} + 14\mathbf{k}\end{aligned}$$

Los expertos podrían hacer la mayor parte de esto en su mente; a los novatos podría parecerles mejor el método del determinante. ■

Revisión de conceptos

1. El producto cruz de $\mathbf{u} = \langle -1, 2, 1\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 3, 1, -1\rangle$ está dado por un determinante específico; al evaluar este determinante obtenemos $\mathbf{u} \times \mathbf{v} =$_____.

2. Geométricamente, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es un vector perpendicular al plano de **u** y **v** y tiene longitud $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| =$_____.

3. El producto cruz es anticonmutativo; es decir, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} =$_____.

4. Dos vectores son _____ si y sólo si su producto cruz es **0**.

Conjunto de problemas 11.4

1. Sean $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$. Determine lo siguiente:

(a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
(b) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
(c) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
(d) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

2. Si $\mathbf{a} = \langle 3, 3, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -2, -1, 0\rangle$ y $\mathbf{c} = \langle -2, -3, -1\rangle$, determine lo siguiente:

(a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
(b) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
(c) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
(d) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

3. Determine todos los vectores perpendiculares a los dos vectores $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

4. Determine todos los vectores perpendiculares a los dos vectores $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

5. Determine los vectores unitarios perpendiculares al plano determinado por los tres puntos $(1, 3, 5)$, $(3, -1, 2)$ y $(4, 0, 1)$.

6. Determine los vectores unitarios perpendiculares al plano determinado por los tres puntos $(-1, 3, 0)$, $(5, 1, 2)$ y $(4, -3, -1)$.

7. Calcule el área del paralelogramo con $a = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ como lados adyacentes.

8. Calcule el área del paralelogramo con $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ como lados adyacentes.

9. Calcule el área del triángulo con $(3, 2, 1)$, $(2, 4, 6)$ y $(-1, 2, 5)$ como vértices.

10. Calcule el área del triángulo con $(1, 2, 3)$, $(3, 1, 5)$ y $(4, 5, 6)$ como vértices.

En los problemas del 11 al 14 determine la ecuación del plano que pasa por los puntos dados.

11. $(1, 3, 2)$, $(0, 3, 0)$ y $(2, 4, 3)$

12. $(1, 1, 2)$, $(0, 0, 1)$ y $(-2, -3, 0)$

13. $(7, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ y $(0, 0, 5)$

14. $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ y $(0, 0, c)$ (Ninguno de a, b y c es cero).

15. Determine la ecuación del plano que pasa por $(2, 5, 1)$ y que es paralelo al plano $x - y + 2z = 4$.

16. Determine la ecuación del plano que pasa por $(0, 0, 2)$ y que es paralelo al plano $x + y + z = 1$

17. Determine la ecuación del plano que pasa por $(-1, -2, 3)$ y que es perpendicular a los planos $x - 3y + 2z = 7$ y $2x - 2y - z = -3$.

18. Determine la ecuación del plano que pasa por $(2, -1, 4)$ y que es perpendicular a los planos $x + y + z = 2$ y $x - y - z = 4$.

19. Determine la ecuación del plano que pasa por $(2, -3, 2)$ y que es paralelo al plano de los vectores $4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.

20. Determine la ecuación del plano que pasa por el origen que es perpendicular al plano xy y al plano $3x - 2y + z = 4$.

21. Determine la ecuación del plano que pasa por $(6, 2, -1)$ y que es perpendicular a la recta de intersección de los planos $4x - 3y + 2z + 5 = 0$ y $3x + 2y - z + 11 = 0$.

22. Sean **a** y **b** vectores no paralelos y sea **c** un vector cualquiera no nulo. Demuestre que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ es un vector en el plano de **a** y **b**.

23. Calcule el volumen del paralelepípedo con aristas $\langle 2, 3, 4\rangle$, $\langle 0, 4, -1\rangle$ y $\langle 5, 1, 3\rangle$ (véase el ejemplo 4).

24. Calcule el volumen del paralelepípedo con aristas $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.

25. Sea K el paralelepípedo determinado por $\mathbf{u} = \langle 3, 1, 2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, 1, 2\rangle$, y $\mathbf{w} = \langle 1, 3, 3\rangle$.

(a) Calcule el volumen de K.
(b) Calcule el área de la cara determinada por **u** y **v**.
(c) Calcule el ángulo entre **u** y el plano que contiene a la cara determinada por **v** y **w**.

26. La fórmula para el volumen de un paralelepípedo deducida en el ejemplo 4 no debe depender de la forma en que nombramos a los vectores como **a**, **b** o **c**. Use este resultado para explicar por qué $|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})| = |\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c})| = |\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})|$.

27. ¿Cuáles de las siguientes expresiones *no* tienen sentido?

(a) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
(b) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
(c) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$
(d) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + k$
(e) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + k$
(f) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} + \mathbf{d})$
(g) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$
(h) $(k\mathbf{u}) \times \mathbf{v}$

28. Muestre que si **a**, **b**, **c** y **d** están todos en el mismo plano, entonces $(a \times b) \times (c \times d) = 0$.

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{0}$$

29. Se sabe que el volumen de un tetraedro está dado por $\frac{1}{3}$ (área de la base)(altura). Con base en esto, demuestre que el volumen del tetraedro con aristas **a**, **b** y **c** es $\frac{1}{6}|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$.

30. Calcule el volumen del tetraedro con vértices $(-1, 2, 3)$, $(4, -1, 2)$, $(5, 6, 3)$ y $(1, 1, -2)$ (véase el problema 29).

31. Demuestre la **identidad de Lagrange**,

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$$

Sin utilizar el teorema A,

32. Demuestre la ley distributiva por la izquierda,

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$$

33. Use el problema 32 y la ley anticonmutativa para demostrar la ley distributiva por la derecha.

34. Si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, ¿qué puede concluir acerca de **u** y **v**?

35. Use el ejemplo 3 para desarrollar una fórmula para el área del triángulo con vértices $P(a, 0, 0)$, $Q(0, b, 0)$ y $R(0, 0, c)$ que aparece en la parte izquierda de la figura 6.

36. Demuestre que el triángulo con vértices (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) tiene área igual a la mitad del valor absoluto del determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

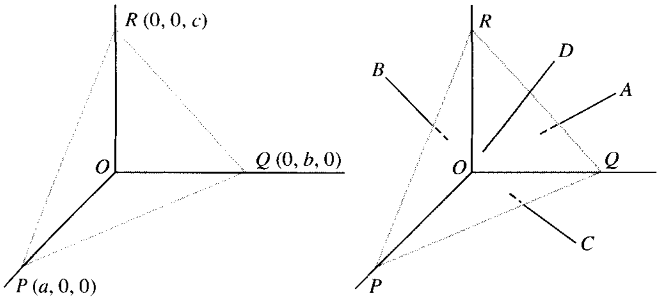


Figura 6

37. Un Teorema de Pitágoras en el espacio tridimensional Como en la figura 6, sean P, Q, R y O los vértices de un tetraedro (con un ángulo recto) y sean A, B, C y D las áreas de las caras opuestas, respectivamente. Muestre que $A^2 + B^2 + C^2 = D^2$.

38. Sean **a**, **b** y **c** vectores con su punto inicial común, de modo que determinen un tetraedro; sean **m**, **n**, **p** y **q** vectores perpendiculares a las cuatro caras, apuntando hacia fuera, y cuya longitud es igual al área de la cara correspondiente. Muestre que $\mathbf{m} + \mathbf{n} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{0}$.

39. Sean **a**, **b** y $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ las tres aristas de un triángulo con longitudes a, b y c, respectivamente. Use la identidad de Lagrange y la fórmula $2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2$ para demostrar la **fórmula de Herón** para el área A de un triángulo,

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde s es el semiperímetro $(a + b + c)/2$.

40. Use el método del ejemplo 5 para demostrar directamente que si $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$, entonces

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}$$

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $\langle -3, 2, -7 \rangle$ o $-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$ **2.** $\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \operatorname{sen} \theta$ **3.** $-(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$ **4.** paralelos

11.5

Funciones con valores vectoriales y movimiento curvilíneo

Recuerde que una función f es una regla que asocia a cada miembro, t, de un conjunto (el dominio) un único valor, $f(t)$, de un segundo conjunto (figura 1). El conjunto de valores así obtenido es el rango de la función. Hasta este punto del libro, nuestras funciones han sido funciones reales (funciones con valores escalares) de una variable real; es decir, tanto el dominio como el rango han sido conjuntos de números reales. Un ejemplo común es $f(t) = t^2$, que asocia a cada número real el número real t^2.

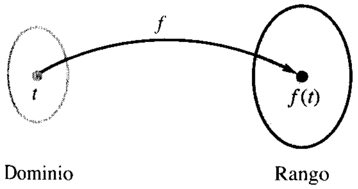


Figura 1

Ahora ofrecemos la primera de muchas generalizaciones (figura 2). Una función con **valores vectoriales F** de una variable real t asocia a cada número real t un vector $\mathbf{F}(t)$. Así,

$$\mathbf{F}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$$

en donde f, g y h son funciones ordinarias con valores reales. Un ejemplo típico es

$$\mathbf{F}(t) = t^2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = \langle t^2, e^t, 2 \rangle$$

Observe nuestro uso de la letra en negritas; esto nos ayuda a distinguir entre funciones vectoriales y funciones escalares.

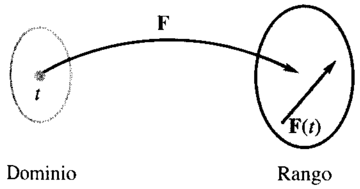


Figura 2

Cálculo para funciones vectoriales

El concepto más fundamental en cálculo es el de límite. Intuitivamente, $\lim_{t \to c} \mathbf{F}(t) = \mathbf{L}$ significa que el vector $\mathbf{F}(t)$ tiende hacia el vector **L** cuando t tiende a c. De forma alterna, significa que el vector $\mathbf{F}(t) - \mathbf{L}$ se aproxima a **0** cuando $t \to c$ (figura 3). La definición $\varepsilon - \delta$ precisa es casi idéntica a la dada para funciones con valores reales en la sección 1.2.

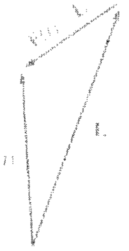


Figura 3

Definición Límite de una función con valores vectoriales

Decir que $\lim_{t \to c} \mathbf{F}(t) = \mathbf{L}$ significa que, para cada $\varepsilon > 0$ dada (sin importar lo pequeño que sea), existe una correspondiente $\delta > 0$ tal que $\|\mathbf{F}(t) - \mathbf{L}\| < \varepsilon$, siempre que $0 < |t - c| < \delta$, es decir,

$$0 < |t - c| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{F}(t) - \mathbf{L}\| < \varepsilon$$

La definición de $\lim_{t\to c} \mathbf{F}(t)$ es casi la misma que nuestra definición de límite del capítulo 1, una vez que interpretemos $\|\mathbf{F}(t) - \mathbf{L}\|$ como la longitud del vector $\mathbf{F}(t) - \mathbf{L}$. Nuestra definición dice que podemos hacer $\mathbf{F}(t)$ tan cercano como queramos (a menos de ε) a $\mathbf{L}$(aquí la distancia se mide en el espacio tridimensional), siempre que tomemos a t suficientemente cerca (a menos de δ) de c. El teorema siguiente, que se demuestra para vectores de dos dimensiones en el apéndice A.2, teorema D, proporciona la relación entre el límite de $\mathbf{F}(t)$ y los límites de las componentes de $\mathbf{F}(t)$.

Vectores en dos dimensiones

Las definiciones y teoremas en esta sección se dan para vectores tridimensionales. Los resultados para vectores en dos dimensiones deben ser obvios. Por ejemplo, si $\mathbf{F}(t) = \langle f(t), g(t)\rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, entonces el teorema A establece

$$\lim_{t\to c} \mathbf{F}(t) = \left[\lim_{t\to c} f(t)\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{t\to c} g(t)\right]\mathbf{j}$$

Teorema A

Sea $\mathbf{F}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$. Entonces $\mathbf{F}$ tiene un límite en c si y sólo si f, g y h tienen límites en c. En este caso,

$$\lim_{t\to c} \mathbf{F}(t) = \left[\lim_{t\to c} f(t)\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{t\to c} g(t)\right]\mathbf{j} + \left[\lim_{t\to c} h(t)\right]\mathbf{k}$$

Como se podría esperar, todos los teoremas estándar de límite se cumplen. Además, la continuidad tiene su significado usual; esto es, $\mathbf{F}$ es **continua** en c si $\lim_{t\to c} \mathbf{F}(t) = \mathbf{F}(c)$. Del teorema A, es claro que $\mathbf{F}$ es continua en c si y sólo si f, g y h son continuas allí. Por último, la **derivada** $\mathbf{F}'(t)$ se define igual que para funciones con valores reales mediante

$$\mathbf{F}'(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\mathbf{F}(t + \Delta t) - \mathbf{F}(t)}{\Delta t}$$

Esto también puede escribirse en términos de componentes.

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}'(t) &= \\
&\lim_{\Delta t\to 0} \frac{[f(t + \Delta t)\mathbf{i} + g(t + \Delta t)\mathbf{j} + h(t + \Delta t)\mathbf{k}] - [f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}]}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}\mathbf{i} + \lim_{\Delta t\to 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}\mathbf{j} \\
&\qquad + \lim_{\Delta t\to 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t}\mathbf{k} \\
&= f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

En resumen, si $\mathbf{F}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, entonces

$$\boxed{\mathbf{F}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k} = \langle f'(t), g'(t), h'(t)\rangle}$$

EJEMPLO 1 Si $\mathbf{F}(t) = (t^2 + t)\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, determine $\mathbf{F}'(t)$, $\mathbf{F}''(t)$ y el ángulo θ entre $\mathbf{F}'(0)$ y $\mathbf{F}''(0)$.

SOLUCIÓN $\mathbf{F}'(t) = (2t + 1)\mathbf{i} + e^t\mathbf{j}$ y $\mathbf{F}''(t) = 2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j}$. Así, $\mathbf{F}'(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{F}''(0) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, y

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{F}'(0)\cdot\mathbf{F}''(0)}{\|\mathbf{F}'(0)\|\|\mathbf{F}''(0)\|} = \frac{(1)(2) + (1)(1) + (0)(0)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}\sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{5}}$$

$$\theta \approx 0.3218 \text{ radianes} \quad (\text{alrededor de } 18.43^\circ)$$ ■

A continuación están las reglas para la derivación.

Teorema B **Fórmulas de derivación**

Sean **F** y **G** funciones con valores vectoriales, diferenciables y sea p una función con valores reales, diferenciable, y c un escalar. Entonces

1. $D_t[\mathbf{F}(t) + \mathbf{G}(t)] = \mathbf{F}'(t) + \mathbf{G}'(t)$
2. $D_t[c\mathbf{F}(t)] = c\mathbf{F}'(t)$
3. $D_t[p(t)\mathbf{F}(t)] = p(t)\mathbf{F}'(t) + p'(t)\mathbf{F}(t)$
4. $D_t[\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{G}(t)] = \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{G}'(t) + \mathbf{G}(t) \cdot \mathbf{F}'(t)$
5. $D_t[\mathbf{F}(t) \times \mathbf{G}(t)] = \mathbf{F}(t) \times \mathbf{G}'(t) + \mathbf{F}'(t) \times \mathbf{G}(t)$
6. $D_t[\mathbf{F}(p(t))] = \mathbf{F}'(p(t))p'(t)$ (Regla de la cadena)

Demostración Demostramos la fórmula 4 y dejamos el resto al lector. Sean

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(t) &= f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k},\\ \mathbf{G}(t) &= g_1(t)\mathbf{i} + g_2(t)\mathbf{j} + g_3(t)\mathbf{k}\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}D_t[\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{G}(t)] &= D_t\left[f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t) + f_3(t)g_3(t)\right]\\ &= f_1(t)g_1'(t) + g_1(t)f_1'(t) + f_2(t)g_2'(t) + g_2(t)f_2'(t)\\ &\qquad + f_3(t)g_3'(t) + g_3(t)f_3'(t)\\ &= \left[f_1(t)g_1'(t) + f_2(t)g_2'(t) + f_3(t)g_3'(t)\right]\\ &\qquad + \left[g_1(t)f_1'(t) + g_2(t)f_2'(t) + g_3(t)f_3'(t)\right]\\ &= \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{G}'(t) + \mathbf{G}(t) \cdot \mathbf{F}'(t)\end{aligned}$$

■

Como las derivadas de funciones con valores vectoriales se determinan derivando sus componentes, es natural definir la integración en términos de componentes; es decir, si $\mathbf{F}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$,

$$\int \mathbf{F}(t)\,dt = \left[\int f(t)\,dt\right]\mathbf{i} + \left[\int g(t)\,dt\right]\mathbf{j} + \left[\int h(t)\,dt\right]\mathbf{k}$$

$$\int_a^b \mathbf{F}(t)\,dt = \left[\int_a^b f(t)\,dt\right]\mathbf{i} + \left[\int_a^b g(t)\,dt\right]\mathbf{j} + \left[\int_a^b h(t)\,dt\right]\mathbf{k}$$

EJEMPLO 2 Si $\mathbf{F}(t) = t^2\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, determine

(a) $D_t\left[t^3\mathbf{F}(t)\right]$ (b) $\int_0^1 \mathbf{F}(t)\,dt$.

SOLUCIÓN

(a) $$\begin{aligned}D_t\left[t^3\mathbf{F}(t)\right] &= t^3(2t\mathbf{i} - e^{-t}\mathbf{j}) + 3t^2(t^2\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} - 2\mathbf{k})\\ &= 5t^4\mathbf{i} + (3t^2 - t^3)e^{-t}\mathbf{j} - 6t^2\mathbf{k}\end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned}\int_0^1 \mathbf{F}(t)\,dt &= \left(\int_0^1 t^2\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_0^1 e^{-t}\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int_0^1 (-2)\,dt\right)\mathbf{k}\\ &= \tfrac{1}{3}\mathbf{i} + (1 - e^{-1})\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\end{aligned}$$

■

Movimiento curvilíneo Vamos a utilizar la teoría desarrollada hasta este momento para funciones con valores vectoriales para estudiar el movimiento de un punto en el espacio. Suponga que t mide el tiempo y que las coordenadas de un punto en movimiento están dadas mediante las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$. Entonces el vector

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

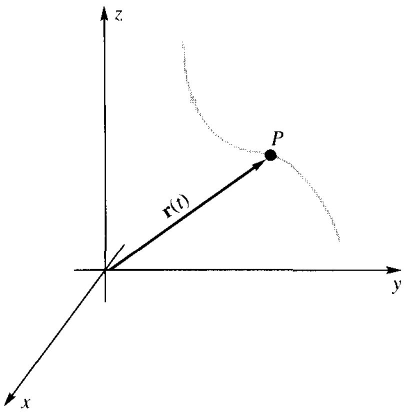


Figura 4

que suponemos sale del origen, se denomina vector **posición del punto**. Conforme t varía, la cabeza de $\mathbf{r}(t)$ describe la trayectoria del punto móvil P (figura 4). Ésta es una curva, y al movimiento correspondiente le llamamos **movimiento curvilíneo**.

En analogía con el movimiento rectilíneo (en línea recta), definimos la **velocidad** $\mathbf{v}(t)$ y la **aceleración** $\mathbf{a}(t)$ del punto móvil P mediante

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = f''(t)\mathbf{i} + g''(t)\mathbf{j} + h''(t)\mathbf{k}$$

Como

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

es claro (con base en la figura 5) que $\mathbf{v}(t)$ tiene la dirección de la recta tangente. El vector aceleración $\mathbf{a}(t)$ apunta hacia el lado **cóncavo** de la curva (es decir, el lado hacia donde se dobla la curva).

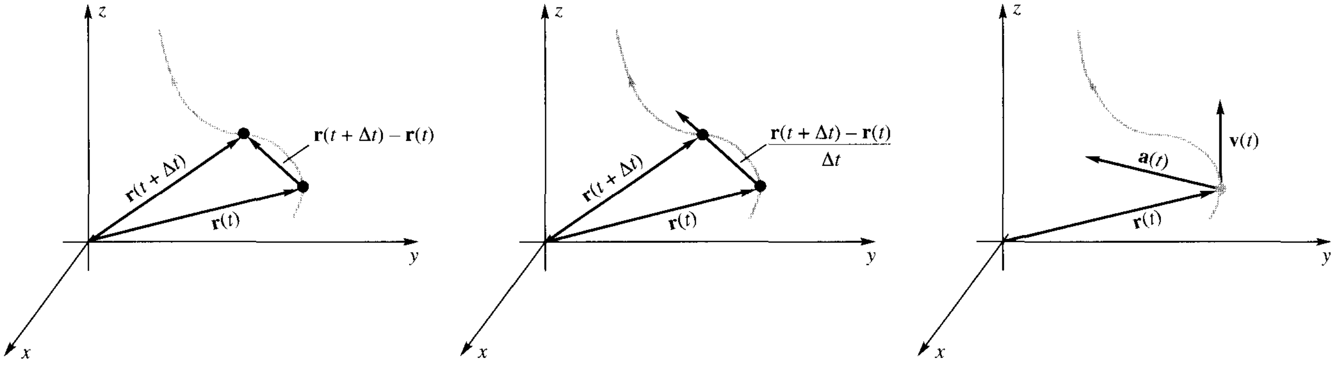


Figura 5

Si $\mathbf{r}(t)$ es el vector posición de un objeto, entonces la longitud de arco de la trayectoria que describe desde el instante $t = a$ hasta el instante $t = b$ es

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\, dt = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt$$

Por lo tanto, la longitud de arco acumulada desde el instante $t = a$ hasta un instante arbitrario t es

$$s = \int_a^t \sqrt{[f'(u)]^2 + [g'(u)]^2 + [h'(u)]^2}\, du = \int_a^t \|\mathbf{r}'(u)\|\, du$$

Por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, la derivada de la longitud de arco acumulada, ds/dt, es

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} = \|\mathbf{r}'(t)\|$$

Pero la derivada (es decir, la razón de cambio) de la longitud de arco acumulada es lo que consideramos la **rapidez**. Así, la rapidez de un objeto es

$$\text{rapidez} = \frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\| = \|\mathbf{v}(t)\|$$

Observe que la rapidez de un objeto es una cantidad escalar, mientras que la velocidad es un vector.

Una de las aplicaciones más importantes del movimiento curvilíneo, **movimiento circular uniforme**, surge en dos dimensiones. Suponga que un objeto se mueve en el plano xy en contra de las manecillas del reloj, alrededor de un círculo con centro en $(0,0)$ y radio a, con una rapidez angular constante de ω radianes por segundo. Si su posición inicial es $(a,0)$, entonces su vector posición es

$$\mathbf{r}(t) = a\cos\omega t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathbf{j}$$

EJEMPLO 3 Determine la velocidad, aceleración y rapidez para el movimiento circular uniforme.

SOLUCIÓN Derivamos el vector posición $\mathbf{r}(t) = a\cos\omega t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathbf{j}$ para obtener $\mathbf{v}(t)$ y $\mathbf{a}(t)$.

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -a\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathbf{i} + a\omega\cos\omega t\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = -a\omega^2\cos\omega t\,\mathbf{i} - a\omega^2\sin\omega t\,\mathbf{j}$$

La rapidez es

$$\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{(-a\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t)^2 + (a\omega\cos\omega t)^2}$$

$$= \sqrt{a^2\omega^2(\mathrm{sen}^2\,\omega t + \cos^2\omega t)} = a\omega$$

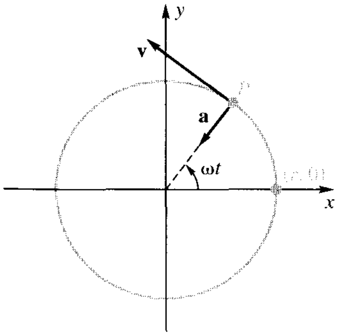


Figura 6

Observe que si consideramos a **a** como si saliera de P, entonces **a** apunta directamente hacia el origen y es perpendicular al vector velocidad **v** (figura 6). ■

En el ejemplo 6 de la sección 11.1, vimos un caso particular de una **hélice**. Aquí generalizamos un poco ese concepto y decimos que la trayectoria que describe un objeto cuyo vector posición está dado mediante

$$\mathbf{r}(t) = a\cos\omega t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$$

es una **hélice**. Si sólo observamos las componentes x y y del movimiento, vemos un movimiento circular uniforme, y si sólo observamos la componente z del movimiento tenemos un movimiento rectilíneo uniforme. Cuando reunimos estos dos, vemos que el objeto traza una espiral conforme se mueve cada vez más hacia arriba (suponiendo que $c > 0$).

EJEMPLO 4 Determine la velocidad, aceleración y rapidez para el movimiento a lo largo de una hélice.

SOLUCIÓN Los vectores velocidad y aceleración son

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -a\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathbf{i} + a\omega\cos\omega t\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = -a\omega^2\cos\omega t\,\mathbf{i} - a\omega^2\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathbf{j}$$

La rapidez es

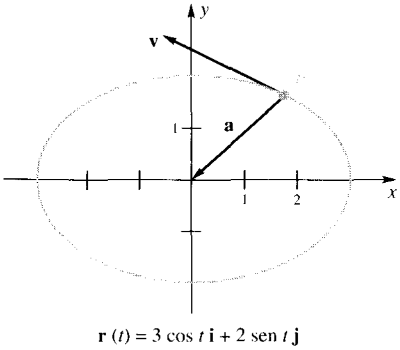
$$\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{(-a\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t)^2 + (a\omega\cos\omega t)^2 + c^2} = \sqrt{a^2\omega^2 + c^2}$$ ■

EJEMPLO 5 Las ecuaciones paramétricas para un objeto que se mueve en el plano son $x = 3\cos t$ y $y = 2\,\mathrm{sen}\,t$, en donde t representa el tiempo y $0 \le t \le 2\pi$. Sea P la posición del objeto.

(a) Grafique la trayectoria de P.
(b) Determine expresiones para la velocidad $\mathbf{v}(t)$, la rapidez $\|\mathbf{v}(t)\|$ y la aceleración $\mathbf{a}(t)$.
(c) Determine los valores máximo y mínimo de la rapidez y los puntos en donde ocurren.
(d) Demuestre que el vector aceleración, si parte de P, siempre apunta hacia el origen.

SOLUCIÓN

(a) Como $x^2/9 + y^2/4 = 1$, la trayectoria es la elipse que se muestra en la figura 7.
(b) El vector posición es



$\mathbf{r}(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j}$

Figura 7

$$\mathbf{r}(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j}$$

y así

$$\mathbf{v}(t) = -3 \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + 2 \cos t\, \mathbf{j}$$

$$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{9 \operatorname{sen}^2 t + 4 \cos^2 t} = \sqrt{5 \operatorname{sen}^2 t + 4}$$

$$\mathbf{a}(t) = -3 \cos t\, \mathbf{i} - 2 \operatorname{sen} t\, \mathbf{j}$$

(c) Como la rapidez está dada mediante $\sqrt{5 \operatorname{sen}^2 t + 4}$, la rapidez máxima de 3 ocurre cuando sen $t = \pm 1$, esto es, cuando $t = \pi/2$ o $3\pi/2$. Esto corresponde a los puntos $(0, \pm 2)$ de la elipse. De forma análoga, la rapidez mínima de 2 ocurre en donde sen $t = 0$, que corresponde a los puntos $(\pm 3, 0)$.

(d) Observe que $\mathbf{a}(t) = -\mathbf{r}(t)$. Así, si hacemos partir a $\mathbf{a}(t)$ en P, este vector apuntará y alcanzará exactamente el origen. Concluimos que $\|\mathbf{a}(t)\|$ es máxima en $(\pm 3, 0)$ y mínima en $(0, \pm 2)$. ■

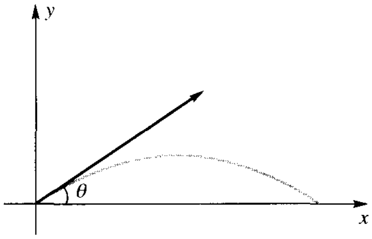


Figura 8

EJEMPLO 6 Un proyectil se dispara desde el origen, formando un ángulo θ respecto al eje x positivo, y con una velocidad inicial de v_0 pies por segundo (figura 8). Sin tomar en cuenta la fricción, determine expresiones para la velocidad $\mathbf{v}(t)$ y la posición $\mathbf{r}(t)$ y muestre que la trayectoria es una parábola.

SOLUCIÓN La aceleración debida a la gravedad es $\mathbf{a}(t) = -32\mathbf{j}$ pies por segundo por segundo. Las condiciones iniciales son $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$ y $\mathbf{v}(0) = v_0 \cos\theta\, \mathbf{i} + v_0 \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{j}$. Iniciando con $\mathbf{a}(t) = -32\mathbf{j}$, integramos dos veces,

$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}(t)\, dt = \int (-32)\, dt\, \mathbf{j} = -32t\, \mathbf{j} + \mathbf{C}_1$$

La condición $\mathbf{v}(0) = v_0 \cos\theta\, \mathbf{i} + v_0 \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{j}$ nos permiten evaluar $\mathbf{C}_1$ y se obtiene $\mathbf{C}_1 = v_0 \cos\theta\, \mathbf{i} + v_0 \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{j}$. Así,

$$\mathbf{v}(t) = (v_0 \cos\theta)\mathbf{i} + (v_0 \operatorname{sen}\theta - 32t)\mathbf{j}$$

y

$$\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v}(t)\, dt = (tv_0 \cos\theta)\mathbf{i} + (tv_0 \operatorname{sen}\theta - 16t^2)\mathbf{j} + \mathbf{C}_2$$

La condición $\mathbf{r}(0) = 0$ implica que $\mathbf{C}_2 = 0$, por lo que

$$\mathbf{r}(t) = (tv_0 \cos\theta)\mathbf{i} + (tv_0 \operatorname{sen}\theta - 16t^2)\mathbf{j}$$

Para determinar la ecuación de la trayectoria, eliminamos el parámetro t en las ecuaciones

$$x = (v_0 \cos\theta)t, \qquad y = (v_0 \operatorname{sen}\theta)t - 16t^2$$

Específicamente, despejamos a t en la primera ecuación y sustituimos en la segunda, obteniendo

$$y = (\tan\theta)x - \left(\frac{4}{v_0 \cos\theta}\right)^2 x^2$$

Ésta es la ecuación de una parábola. ■

EJEMPLO 7 Una pelota de beisbol se lanza con una velocidad inicial de 75 millas por hora (110 pies por segundo) haciendo 1 grado por encima de la horizontal en la dirección del eje x positivo y a una altura inicial de 8 pies. La posición inicial es $\mathbf{r}(0) = 8\mathrm{k}$. Además de la aceleración debida a la gravedad, el giro de la pelota provoca una aceleración de 2 pies por segundo por segundo en la dirección y positiva. ¿Cuál es la posición de la pelota cuando la componente x es 60.5 pies?

SOLUCIÓN El vector de posición inicial es $\mathbf{r}(0) = 8\mathbf{k}$ y el vector velocidad inicial es $\mathbf{v}(0) = 110 \cos 1°\mathbf{i} + 110 \operatorname{sen} 1°\mathbf{k}$. El vector aceleración es $a(t) = 2\mathbf{j} - 32\mathbf{k}$. Procediendo como en el ejemplo anterior, tenemos

$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}(t)\, dt = \int (2\mathbf{j} - 32\mathbf{k})\, dt = 2t\, \mathbf{j} - 32t\, \mathbf{k} + \mathbf{C}_1$$

Como $110 \cos 1°\mathbf{i} + 110 \operatorname{sen} 1°\mathbf{k} = \mathbf{v}(0) = \mathbf{C}_1$, tenemos

$$\mathbf{v}(t) = 110 \cos 1°\mathbf{i} + 2t\, \mathbf{j} + (110 \operatorname{sen} 1° - 32t)\mathbf{k}$$

Al integrar el vector velocidad se obtiene la posición:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \int \mathbf{v}(t)\,dt = \int \left[110\cos 1°\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + (110\,\text{sen}\,1° - 32t)\mathbf{k}\right]dt \\ &= 110(\cos 1°)t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \left[110(\text{sen}\,1°)t - 16t^2\right]\mathbf{k} + \mathbf{C}_2\end{aligned}$$

La posición inicial $\mathbf{r}(0) = 8\mathbf{k}$ implica que $\mathbf{C}_2 = 8\mathbf{k}$. Así,

$$\mathbf{r}(t) = 110(\cos 1°)t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \left[8 + 110(\text{sen}\,1°)t - 16t^2\right]\mathbf{k}$$

Ahora, debemos determinar el valor de t para el que la componente x es 60.5 pies. Haciendo $110(\cos 1°)t = 60.5$ se obtiene $t = 60.5/(110\cos 1°) \approx 0.55008$ segundos. La posición de la pelota en este instante es

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(0.55008) &= 110(\cos 1°)0.55008\mathbf{i} + (0.55008)^2\mathbf{j} \\ &\quad + \left[8 + 110(\text{sen}\,1°)0.55008 - 16(0.55008)^2\right]\mathbf{k} \\ &\approx 60.5\mathbf{i} + 0.303\mathbf{j} + 4.21\mathbf{k}\end{aligned}$$

Si este lanzamiento lo hubiera realizado un lanzador de las ligas mayores a un bateador de la misma liga, la pelota estaría justo por encima de la cintura (4.21 pies del suelo) y casi a 4 pulgadas (0.303 pies) del centro del *home*. ■

Leyes de Kepler del movimiento planetario (opcional) En el inicio del siglo XVII, Johannes Kepler heredó una colección de información planetaria del noble danés Tycho Brahe. Kepler dedicó años al estudio de la información y por medio de ensayo y error, y un poco de suerte, formuló sus tres leyes del movimiento planetario:

1. Los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos.
2. Una recta desde el Sol al planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.
3. El cuadrado de un periodo de la órbita del planeta es proporcional al cubo de su distancia media al Sol.

Sólo posteriormente se descubrió que las leyes de Kepler del movimiento planetario son una consecuencia de las leyes del movimiento de Newton. La Primera Ley de Kepler puede establecerse como

$$r(\theta) = \frac{r_0(1 + e)}{1 + e\cos\theta}$$

que es la ecuación polar de una elipse. Aquí $r(\theta)$ es la distancia del planeta al Sol para el ángulo θ, y e es la excentricidad de la elipse. El problema 48, que guía al lector a través de la deducción de la Primera Ley de Kepler, muestra que

$$e = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1 = \frac{1}{r_0 GM}\left(2\frac{dA}{dt}\right)^2 - 1$$

donde M es la masa del Sol, G es la constante gravitacional, r_0 es la distancia más corta del Sol al planeta, v_0 es la rapidez del planeta cuando está más cerca del Sol, y dA/dt es la razón de cambio en el área barrida por un segmento de recta que une al Sol con el planeta (una constante de acuerdo con la Segunda Ley de Kepler). Supondremos que se cumple la Primera Ley de Kepler.

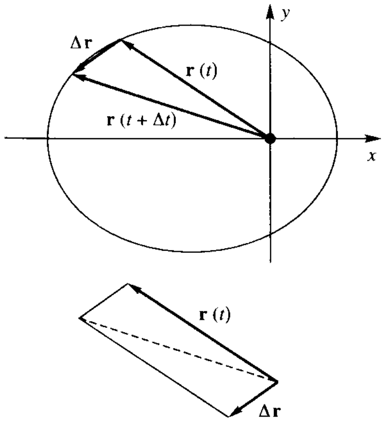


Figura 9

EJEMPLO 8 Deduzca la Segunda Ley de Kepler.

SOLUCIÓN Sea $\mathbf{r}(t)$ el vector de posición de un planeta en el instante t, y sea $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ su posición Δt unidades de tiempo después (figura 9). El área ΔA que barre en el tiempo Δt es aproximadamente la mitad del área del paralelogramo formado por $\mathbf{r}(t)$ y $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$. Utilizando el hecho de la sección anterior, que el área de un triángulo formado por dos vectores es un medio de la magnitud del producto cruz de los vectores, tenemos

$$\Delta A \approx \frac{1}{2}\|\mathbf{r}(t) \times \Delta\mathbf{r}\|$$

Así,

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} \approx \frac{1}{2}\left\|\mathbf{r}(t) \times \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}\right\|$$

de modo que, haciendo $\Delta t \to 0$, obtenemos

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\|\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)\|$$

La única fuerza que actúa sobre el planeta es la atracción gravitacional del Sol, la cual actúa en la recta que va del Sol al planeta y tiene magnitud $GMm/\|\mathrm{r}(t)\|^2$, en donde m es la masa del planeta. La Segunda Ley de Newton ($F = ma$) implica

$$-\frac{GMm}{\|\mathbf{r}(t)\|^3}\mathbf{r}(t) = m\mathbf{a}(t) = m\mathbf{r}''(t)$$

Al dividir ambos lados entre m se obtiene $\mathbf{r}''(t) = -(GM/\|\mathbf{r}(t)\|^3)\mathbf{r}(t)$.

En vista de esto, considere el vector $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)$ en la expresión anterior para dA/dt. Al derivar este vector mediante la propiedad 5 del teorema B se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)) &= \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t) + \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'(t)\\ &= \mathbf{r}(t) \times \left(-\frac{GM}{\|\mathbf{r}(t)\|^3}\mathbf{r}(t)\right) + \mathbf{0}\\ &= \left(-\frac{GM}{\|\mathbf{r}(t)\|^3}\right)\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}(t) = \mathbf{0}\end{aligned}$$

Esto nos dice que el vector $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)$ es una constante y como resultado de esto, su magnitud $\|\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)\|$ es constante. Por lo tanto, dA/dt es una constante. ■

EJEMPLO 9 Deduzca la Tercera Ley de Kepler.

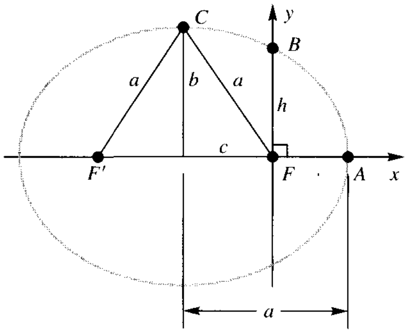


Figura 10

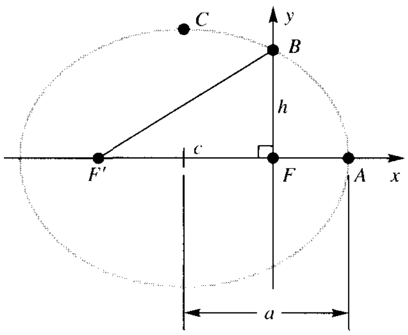


Figura 11

SOLUCIÓN Coloque al Sol en el origen y el eje x de modo que el perihelio del planeta (punto en la órbita más cercana al Sol) esté a lo largo del eje x. El perihelio ocurre en el punto A de la figura 10. Sea C el punto en la órbita que está en el eje menor, y sea B el punto en la órbita que está en la recta perpendicular al eje mayor en el origen, como se muestra en la figura 10. Sean a y b las longitudes medias de los ejes mayor y menor de la elipse, respectivamente, y sea c la distancia del centro de los dos focos a un foco. La propiedad cordal para las elipses dice que la suma de las distancias desde los focos a cualquier punto en la elipse es $2a$. Así que $\overline{F'C} + \overline{CF} = 2a$, y como $\overline{F'C} = \overline{CF}$, ,concluimos que $\overline{F'C} = \overline{CF} = a$. Otra aplicación de la propiedad cordal para el punto B da $\overline{F'B} + \overline{BF} = 2a$.

Al utilizar el Teorema de Pitágoras concluimos que $a^2 = b^2 + c^2$ y $(\overline{F'B})^2 = h^2 + (2c)^2$ (véase la figura 11). De lo anterior, $\overline{F'B} = 2a - \overline{BF} = 2a - h$. Reuniendo estos resultados se obtiene

$$h^2 + (2c)^2 = (\overline{F'B})^2 = (2a - h)^2 = 4a^2 - 4ah + h^2$$

de modo que concluimos que $4c^2 = 4a^2 - 4ah$, por lo que $c^2 = a^2 - ah$. Ya que $a^2 = b^2 + c^2$, concluimos que

$$a^2 - b^2 = c^2 = a^2 - ah$$

Así, $b^2 = ah$.

El punto B también ocurre cuando el ángulo θ es $\pi/2$. Utilizando la Primera Ley de Kepler,

$$h = r(\pi/2) = \frac{r_0(1 + e)}{1 + e\cos(\pi/2)} = \frac{1}{GM}\left(2\frac{dA}{dt}\right)^2$$

Suponga que T es el periodo del planeta. En una órbita alrededor del Sol, el área πab es barrida por completo. Por lo tanto, la razón promedio a la cual se barre el área es $\pi ab/T$, pero como dA/dt es constante (Segunda Ley de Kepler), $dA/dt = \pi ab/T$. Así

$$T = \frac{\pi ab}{dA/dt}$$

Ahora todo se reúne. Utilizando las relaciones $b^2 = ah$ y $h = \left(2\frac{dA}{dt}\right)^2/GM$ anteriores, tenemos

$$T^2 = \left(\frac{\pi ab}{dA/dt}\right)^2 = \frac{\pi^2 a^2}{(dA/dt)^2} ah = \frac{\pi^2 a^3}{(dA/dt)^2}\frac{(2\,dA/dt)^2}{GM} = \frac{4\pi^2}{GM}a^3$$

Lo más cerca que se encuentra el planeta del Sol es $a - c$ y lo más lejos es $a + c$. Al promedio de estos dos valores, $(a - c + a + c)/2 = a$, Kepler le llamó la distancia media al Sol. Así, la última fórmula implica que el cuadrado del periodo es proporcional al cubo de la distancia media al Sol. ■

Revisión de conceptos

1. Una función que asocia a cada número real un único vector se denomina un(a) ______.

2. La función $\mathbf{F}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ es continua en $t = c$, si y sólo si ______. La derivada de $\mathbf{F}$ está dada en términos de f y g mediante $\mathbf{F}'(t) =$ ______.

3. Si un punto se mueve a lo largo de una curva, de modo que está en el punto P en el instante t, entonces el vector $\mathbf{r}(t)$, que parte del origen hacia P, se denomina el vector _____ de P.

4. En términos de $\mathbf{r}(t)$, la velocidad es _____ y la aceleración es _____. El vector velocidad en t es _____ a la curva, mientras que el vector aceleración apunta al lado _____ de la curva.

Conjunto de problemas 11.5

En los problemas del 1 al 8 determine el límite que se pide o indique que no existe.

1. $\lim\limits_{t\to 1}\,[2t\,\mathbf{i} - t^2\mathbf{j}]$

2. $\lim\limits_{t\to 3}\,[2(t-3)^2\mathbf{i} - 7t^3\mathbf{j}]$

3. $\lim\limits_{t\to 1}\left[\frac{t-1}{t^2-1}\,\mathbf{i} - \frac{t^2+2t-3}{t-1}\,\mathbf{j}\right]$

4. $\lim\limits_{t\to -2}\left[\frac{2t^2-10t-28}{t+2}\,\mathbf{i} - \frac{7t^3}{t-3}\,\mathbf{j}\right]$

5. $\lim\limits_{t\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen} t\cos t}{t}\,\mathbf{i} - \frac{7t^3}{e^t}\,\mathbf{j} + \frac{t}{t+1}\,\mathbf{k}\right]$

6. $\lim\limits_{t\to \infty}\left[\frac{t\operatorname{sen} t}{t^2}\,\mathbf{i} - \frac{7t^3}{t^3-3t}\,\mathbf{j} - \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,\mathbf{k}\right]$

7. $\lim\limits_{t\to 0^+}\langle \ln(t^3), t^2\ln t, t\rangle$

8. $\lim\limits_{t\to 0}\left\langle e^{-1/t^2}, \frac{t}{|t|}, |t|\right\rangle$

9. Cuando no se da el dominio en la definición de una función con valores vectoriales, se entiende que el dominio es el conjunto de todos los escalares (reales) para los que la regla para la función tiene sentido y produce vectores reales (es decir, vectores con componentes reales). Determine el dominio de cada una de las siguientes funciones con valores vectoriales.

(a) $\mathbf{r}(t) = \frac{2}{t-4}\,\mathbf{i} + \sqrt{3-t}\,\mathbf{j} + \ln|4-t|\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{r}(t) = [\![t^2]\!]\mathbf{i} - \sqrt{20-t}\,\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ($[\![\ ]\!]$ denota la función máximo entero).

(c) $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \sqrt{9-t^2}\,\mathbf{k}$

10. Establezca el dominio de cada una de las siguientes funciones con valores vectoriales.

(a) $\mathbf{r}(t) = \ln(t-1)\mathbf{i} + \sqrt{20-t}\,\mathbf{j}$

(b) $\mathbf{r}(t) = \ln(t^{-1})\mathbf{i} + \tan^{-1} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$

(c) $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{9-t^2}}\,\mathbf{k}$

11. ¿Para cuáles valores de t es continua cada una de las funciones del problema 9?

12. ¿Para cuáles valores de t es continua cada una de las funciones del problema 10?

13. Determine $D_t\mathbf{r}(t)$ y $D_t^2\mathbf{r}(t)$ para cada una de las funciones siguientes:

(a) $\mathbf{r}(t) = (3t+4)^3\mathbf{i} + e^{t^2}\mathbf{j} + \mathbf{k}$

(b) $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen}^2 t\,\mathbf{i} + \cos 3t\,\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$

14. Determine $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$ para cada una de las siguientes funciones:

(a) $\mathbf{r}(t) = (e^t + e^{-t^2})\mathbf{i} + 2^t\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{r}(t) = \tan 2t\,\mathbf{i} + \arctan t\,\mathbf{j}$

15. Si $\mathbf{r}(t) = e^{-t}\mathbf{i} - \ln(t^2)\mathbf{j}$, determine $D_t[\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}''(t)]$.

16. Si $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} 3t\,\mathbf{i} - \cos 3t\,\mathbf{j}$, determine $D_t[\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}'(t)]$.

17. Si $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t-1}\,\mathbf{i} + \ln(2t^2)\mathbf{j}$ y $h(t) = e^{-3t}$, determine $D_t[h(t)\mathbf{r}(t)]$.

18. Si $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} 2t\,\mathbf{i} + \cosh t\,\mathbf{j}$ y $h(t) = \ln(3t-2)$, determine $D_t[h(t)\mathbf{r}(t)]$.

En los problemas del 19 al 30 determine la velocidad **v**, *la aceleración* **a** *y la rapidez s en el instante* $t = t_1$.

19. $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} + 5(t^2-1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k};\ t_1 = 1$

20. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (t-1)^2\mathbf{j} + (t-3)^3\mathbf{k};\ t_1 = 0$

21. $\mathbf{r}(t) = (1/t)\mathbf{i} + (t^2-1)^{-1}\mathbf{j} + t^5\mathbf{k};\ t_1 = 2$

22. $\mathbf{r}(t) = t^6\mathbf{i} + (6t^2-5)^6\mathbf{j} + t\mathbf{k};\ t_1 = 1$

23. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \left(\int_0^t x^2\,dx\right)\mathbf{j} + t^{2/3}\mathbf{k};\ t_1 = 2$

24. $\mathbf{r}(t) = \int_1^t [x^2\mathbf{i} + 5(x-1)^3\mathbf{j} + (\operatorname{sen}\pi x)\mathbf{k}]\,dx;\ t_1 = 2$

25. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k};\ t_1 = \pi$

26. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} 2t\,\mathbf{i} + \cos 3t\,\mathbf{j} + \cos 4t\,\mathbf{k};\ t_1 = \frac{\pi}{2}$

27. $\mathbf{r}(t) = \tan t\,\mathbf{i} + 3e^t\,\mathbf{j} + \cos 4t\,\mathbf{k};\ t_1 = \frac{\pi}{4}$

28. $\mathbf{r}(t) = \left(\int_t^1 e^x\,dx\right)\mathbf{i} + \left(\int_t^\pi \operatorname{sen}\pi\theta\,d\theta\right)\mathbf{j} + t^{2/3}\mathbf{k};\ t_1 = 2$

29. $\mathbf{r}(t) = t \operatorname{sen} \pi t\, \mathbf{i} + t \cos \pi t\, \mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k};\ t_1 = 2$

30. $\mathbf{r}(t) = \ln t\, \mathbf{i} + \ln t^2 \mathbf{j} + \ln t^3 \mathbf{k};\ t_1 = 2$

31. Demuestre que si la rapidez de una partícula móvil es constante, su vector aceleración siempre es perpendicular a su vector velocidad.

32. Pruebe que $\|\mathbf{r}(t)\|$ es constante si y sólo si $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$.

En los problemas del 33 al 38 determine la longitud de la curva con la ecuación vectorial dada.

33. $\mathbf{r}(t) = t\, \mathbf{i} + \operatorname{sen} t\, \mathbf{j} + \cos t\, \mathbf{k};\ 0 \le t \le 2$

34. $\mathbf{r}(t) = t \cos t\, \mathbf{i} + t \operatorname{sen} t\, \mathbf{j} + \sqrt{2}t\, \mathbf{k};\ 0 \le t \le 2$

35. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{6}t^2\mathbf{i} + \frac{2}{3}t^3\mathbf{j} + 6t\mathbf{k};\ 3 \le t \le 6$

36. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} - 2t^3\mathbf{j} + 6t^3\mathbf{k};\ 0 \le t \le 1$

37. $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} - 2t^3\mathbf{j} + 6t^3\mathbf{k};\ 0 \le t \le 1$

38. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{7}t^7\mathbf{i} - \sqrt{2}t^7\mathbf{j} + 6t^7\mathbf{k};\ 0 \le t \le 1$

En los problemas 39 y 40 $\mathbf{F}(t) = \mathbf{f}(u(t))$. Determine $\mathbf{F}'(t)$ *en términos de t.*

39. $\mathbf{f}(u) = \cos u\, \mathbf{i} + e^{3u}\mathbf{j}$ y $u(t) = 3t^2 - 4$

40. $\mathbf{f}(u) = u^2\mathbf{i} + \operatorname{sen}^2 u\, \mathbf{j}$ y $u(t) = \tan t$

Evalúe las integrales de los problemas 41 y 42.

41. $\displaystyle\int_0^1 (e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j})\, dt$

42. $\displaystyle\int_{-1}^1 [(1 + t)^{3/2}\mathbf{i} + (1 - t)^{3/2}\mathbf{j}]\, dt$

43. Un punto se mueve en la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ a una velocidad angular constante de 6 radianes por segundo, iniciando en $(5, 0)$. Determine expresiones para $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v}(t)$, $\|\mathbf{v}(t)\|$, y $\mathbf{a}(t)$ (véase el ejemplo 3).

44. Considere el movimiento de una partícula a lo largo de una hélice, dada por $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + \cos t\, \mathbf{j} + (t^2 - 3t + 2)\mathbf{k}$, en donde la componente $\mathbf{k}$ mide la altura, en metros, por arriba del suelo y $t \ge 0$.

(a) ¿En algún momento la partícula se mueve hacia abajo?

(b) ¿En algún momento la partícula se detiene?

(c) ¿En qué instantes llega a una posición de 12 metros por arriba del suelo?

(d) Cuando la partícula se encuentra 12 metros por arriba del suelo, ¿cuál es su velocidad?

EXPL **45.** En muchos lugares del sistema solar, una luna orbita un planeta, el cual da vueltas alrededor del Sol. En algunos casos las órbitas son casi circulares. Supondremos que estas órbitas son circulares con el Sol en el centro de la órbita del planeta y el planeta en el centro de la órbita de la luna. Además, supondremos que todo el movimiento está en un sencillo plano xy. Suponga que el tiempo en que el planeta da una vuelta alrededor del Sol, la luna da diez vueltas alrededor del planeta.

(a) Si el radio de la órbita de la luna es R_m y el radio de la órbita del planeta alrededor del Sol es R_p, demuestre que el movimiento de la luna con respecto al Sol, en el origen, podría ser dado mediante

$$x = R_p \cos t + R_m \cos 10t, \qquad y = R_p \operatorname{sen} t + R_m \operatorname{sen} 10t$$

CAS (b) Para $R_p = 1$ y $R_m = 0.1$, trace la trayectoria que describe la luna cuando el planeta da una vuelta alrededor del Sol.

(c) Determine un conjunto de valores para R_p, R_m y t, de modo que en el instante t la luna permanezca inmóvil con respecto al Sol.

46. Suponiendo que las órbitas de la Tierra alrededor del Sol y de la Luna alrededor de la Tierra están en el mismo plano y son circulares, podemos representar el movimiento de la Luna mediante

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= [93\cos(2\pi t) + 0.24\cos(26\pi t)]\mathbf{i}\\ &\quad + [93\operatorname{sen}(2\pi t) + 0.24\operatorname{sen}(26\pi t)]\mathbf{j}\end{aligned}$$

en donde $\mathbf{r}(t)$ se mide en millones de millas.

(a) ¿Cuáles son las unidades adecuadas para t?

CAS (b) Grafique la trayectoria de la Luna cuando la Tierra da una vuelta alrededor del Sol.

(c) ¿Cuál es el periodo de cada uno de los dos movimientos?

(d) ¿Cuál es la distancia máxima a la que se encuentra la Luna del Sol?

(e) ¿Cuál es la distancia mínima a la que se encuentra la Luna del Sol?

(f) ¿En algún momento la Luna está estacionaria con respecto al Sol?

(g) ¿Cuáles son la velocidad, la rapidez y la aceleración de la Luna cuando $t = 1/2$?

47. En términos generales, describa los siguientes movimientos "helicoidales":

(a) $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + \cos t\, \mathbf{j} + t\, \mathbf{k}$

(b) $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t^3\, \mathbf{i} + \cos t^3\, \mathbf{j} + t^3\, \mathbf{k}$

(c) $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen}(t^3 + \pi)\, \mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + \cos(t^3 + \pi)\, \mathbf{k}$

(d) $\mathbf{r}(t) = t \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + t \cos t\, \mathbf{j} + t\, \mathbf{k}$

(e) $\mathbf{r}(t) = t^{-2} \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + t^{-2} \cos t\, \mathbf{j} + t\, \mathbf{k},\ t > 0$

(f) $\mathbf{r}(t) = t^2 \operatorname{sen}(\ln t)\, \mathbf{i} + \ln t\, \mathbf{j} + t^2 \cos(\ln t)\, \mathbf{k},\ t > 1$

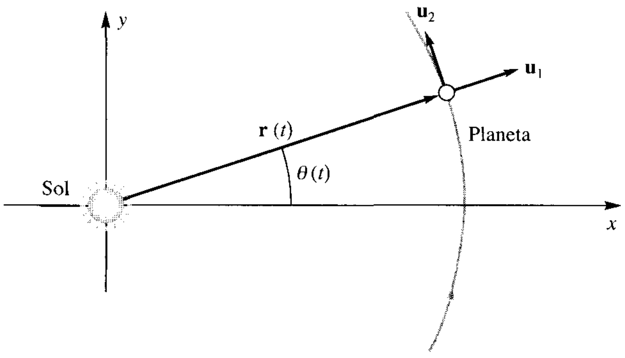


Figura 12

EXPL **48.** En este ejercicio deducirá la Primera Ley de Kepler, la cual dice que la trayectoria de los planetas es elíptica. Iniciamos con la notación. Coloque el sistema de coordenadas de modo que el Sol esté en el origen y la aproximación más cercana (perihelio) del planeta al Sol está en la parte positiva del eje x y ocurre en el instante $t = 0$. Sea $\mathbf{r}(t)$ el vector de posición y denótese con $r(t) = \|\mathbf{r}(t)\|$ la distancia al Sol en el instante t. Además, sea $\theta(t)$ el ángulo que el vector $\mathbf{r}(t)$ hace con el eje x positivo en el instante t. Así, $(r(t), \theta(t))$ es la representación en coordenadas polares de la posición del planeta. Sean $\mathbf{u}_1 = \mathbf{r}/r = (\cos\theta)\mathrm{i} + (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}$ y $\mathbf{u}_2 = (-\operatorname{sen}\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j}$. Los vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son vectores unitarios ortogonales que apuntan en las direcciones en que aumentan r y θ, respectivamente. La figura 12 resume esta notación. Con frecuencia omitiremos el argumento t, pero tenga presente que $\mathbf{r}, \theta, \mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son funciones de t. Un apóstrofo indica derivación con respecto al tiempo t.

(a) Demuestre que $\mathbf{u}_1' = \theta'\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_2' = -\theta'\mathbf{u}_1$.

(b) Demuestre que los vectores velocidad y aceleración satisfacen

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= r'\mathbf{u}_1 + r\theta'\mathbf{u}_2\\ \mathbf{a} &= (r'' - r(\theta')^2)\mathbf{u}_1 + (2r'\theta' + r\theta'')\mathbf{u}_2\end{aligned}$$

(c) Utilice el hecho de que la única fuerza que actúa sobre el planeta es la gravedad del Sol, para expresar $\mathbf{a}$ como un múltiplo de $\mathbf{u}_1$, luego explique cómo podemos concluir que

$$r'' - r(\theta')^2 = \frac{-GM}{r^2}$$

$$2r'\theta' + r\theta'' = 0$$

(d) Considere $\mathbf{r} \times \mathbf{r}'$, que en el ejemplo 8 mostramos que era un vector constante, digamos $\mathbf{D}$. Utilice el resultado de la parte (b) para mostrar que $\mathbf{D} = r^2\theta'\mathbf{k}$.

(e) Sustituya $t = 0$ para obtener $\mathbf{D} = r_0 v_0 \mathbf{k}$, donde $r_0 = r(0)$ y $v_0 = \|\mathbf{v}(0)\|$. Luego argumente que $r^2\theta' = r_0 v_0$ para toda t.

(f) Haga la sustitución $q = r'$ y utilice el resultado de la parte (e) para obtener la ecuación diferencial (no lineal) de primer orden en q:

$$q\frac{dq}{dr} = \frac{r_0^2 v_0^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2}$$

(g) Integre con respecto a r ambos lados de la ecuación anterior y utilice una condición inicial para obtener

$$q^2 = 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) + v_0^2\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)$$

(h) Sustituya $p = 1/r$ en la ecuación anterior para obtener

$$\frac{r_0^2 v_0^2}{(\theta')^2}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 = 2GM(p - p_0) + v_0^2\left(1 - \frac{p^2}{p_0^2}\right)$$

(i) Muestre que

$$\left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2 = \left(p_0 - \frac{p_0^2 GM}{v_0^2}\right)^2 - \left(p - \frac{p_0^2 GM}{v_0^2}\right)^2$$

(j) Con base en la parte (i) de inmediato podemos concluir que

$$\frac{dp}{d\theta} = \pm\sqrt{\left(p_0 - \frac{p_0^2 GM}{v_0^2}\right)^2 - \left(p - \frac{p_0^2 GM}{v_0^2}\right)^2}$$

Explique por qué, en este caso, el signo menos es el correcto.

(k) Separe las variables e integre para obtener

$$\cos^{-1}\left(\frac{p - p_0^2 GM/v_0^2}{p_0 - p_0^2 GM/v_0^2}\right) = \theta$$

(l) Por último, obtenga r como una función de θ:

$$r = \frac{r_0(1 + e)}{1 + e\cos\theta}$$

en donde $e = \dfrac{r_0 v_0^2}{GM} - 1$ es la excentricidad.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** función con valores vectoriales de una variable real. **2.** f y g son continuas en c; $f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}$ **3.** posición **4.** $\mathbf{r}'(t)$; $\mathbf{r}''(t)$; tangente; cóncavo

---

11.6

Rectas y curvas en el espacio tridimensional

La más simple de todas las curvas es una recta. Una recta queda determinada por un punto fijo P_0 y un vector fijo $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, que se denomina **vector dirección** de la recta. Es el conjunto de todos los puntos P tales que $\overrightarrow{P_0P}$ es paralelo a v; es decir, que satisfacen

$$\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v}$$

para algún número real t (figura 1). Si $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ y $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP}_0$ son los vectores de posición de P y P_0, respectivamente, entonces $\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, y la ecuación de la recta se puede escribir como

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$$

Si escribimos $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$ y $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$ e igualamos las componentes en la última ecuación, obtenemos

$$\boxed{x = x_0 + at, \qquad y = y_0 + bt, \qquad z = z_0 + ct}$$

Éstas son las **ecuaciones paramétricas** de la recta que pasa por (x_0, y_0, z_0) y que es paralela a $\mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle$. Los números a, b y c se llaman **números directores** para la recta. No son únicos; cualesquiera múltiplos no nulos ka, kb y kc también son números directores.

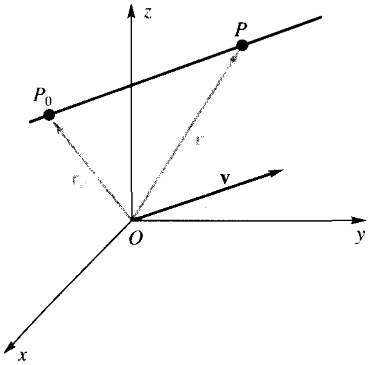


Figura 1

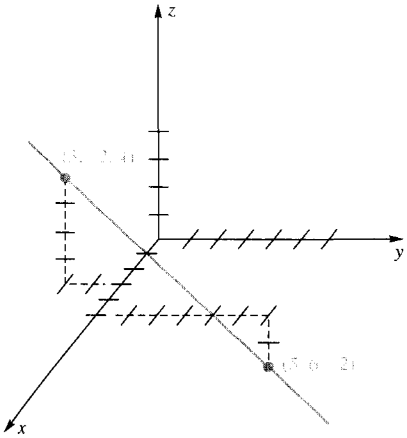


Figura 2

EJEMPLO 1 Determine ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por $(3, -2, 4)$ y $(5, 6, -2)$ (véase la figura 2).

SOLUCIÓN Un vector paralelo a la recta dada es

$$\mathbf{v} = \langle 5 - 3, 6 + 2, -2 - 4\rangle = \langle 2, 8, -6\rangle$$

Si elegimos (x_0, y_0, z_0) como $(3, -2, 4)$, obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$x = 3 + 2t, \qquad y = -2 + 8t, \qquad z = 4 - 6t$$

Observe que $t = 0$ determina al punto $(3, -2, 4)$, mientras que si $t = 1$ da $(5, 6, -2)$. De hecho, $0 \le t \le 1$ corresponde al segmento que une estos dos puntos. ■

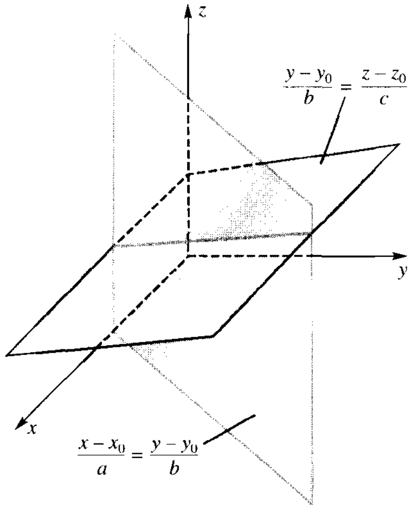

z
$\frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$
y
x
$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$

Figura 3

Si despejamos t en cada una de las ecuaciones paramétricas (suponiendo que a, b y c son todos no nulos) e igualamos los resultados, obtenemos las **ecuaciones simétricas** para la recta que pasa por (x_0, y_0, z_0) con números directores a, b, c; es decir,

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}$$

Ésta es la conjunción de las dos ecuaciones

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \quad \text{y} \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

que son ecuaciones de planos (figura 3); y por supuesto, la intersección de dos planos es una recta.

EJEMPLO 2 Determine las ecuaciones simétricas de la recta que es paralela al vector $\langle 4, -3, 2\rangle$ y pasa por $(2, 5, -1)$.

SOLUCIÓN

$$\frac{x - 2}{4} = \frac{y - 5}{-3} = \frac{z + 1}{2}$$ ■

EJEMPLO 3 Determine las ecuaciones simétricas de la recta de intersección de los planos

$$2x - y - 5z = -14 \quad \text{y} \quad 4x + 5y + 4z = 28$$

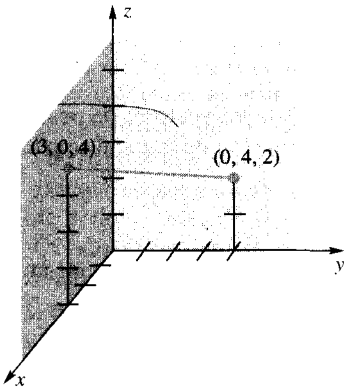


Figura 4

SOLUCIÓN Primero encontramos dos puntos sobre la recta. Cualesquiera dos puntos son útiles, pero optamos por determinar los puntos donde la recta corta los planos yz y xz (véase la figura 4). Obtenemos el primero haciendo $x = 0$ y resolviendo las ecuaciones resultantes $-y - 5z = -14y$ y $5y + 4z = 28$ en forma simultánea. Esto produce el punto $(0, 4, 2)$. Un procedimiento similar con $y = 0$ produce el punto $(3, 0, 4)$. En consecuencia, un vector paralelo a la línea requerida es

$$\langle 3 - 0, 0 - 4, 4 - 2\rangle = \langle 3, -4, 2\rangle$$

Al usar $(3, 0, 4)$ como (x_o, y_0, z_0), obtenemos

$$\frac{x - 3}{3} = \frac{y - 0}{-4} = \frac{z - 4}{2}$$

Una solución alternativa se basa en el hecho de que la recta de intersección de dos planos es perpendicular a las dos normales a estos planos. El vector $\mathbf{u} = \langle 2, -1, -5\rangle$ es normal al primer plano; $\mathbf{v} = \langle 4, 5, 4\rangle$ es normal al segundo. Como

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & -5 \\ 4 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 21\mathbf{i} - 28\mathbf{j} + 14\mathbf{k}$$

el vector $\mathbf{w} = \langle 21, -28, 14\rangle$ es paralelo a la recta pedida. Esto implica que $\frac{1}{7}\mathbf{w} = \langle 3, -4, 2\rangle$ también tiene esta propiedad. A continuación, determine otro punto sobre la línea de intersección, como $(3, 0, 4)$, y proceda como en la solución anterior. ■

EJEMPLO 4 Determine las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $(1, -2, 3)$ y que es perpendicular al eje x y a la recta

$$\frac{x - 4}{2} = \frac{y - 3}{-1} = \frac{z}{5}$$

SOLUCIÓN El eje x y la recta dada tienen direcciones $\mathbf{u} = \langle 1, 0, 0\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 2, -1, 5\rangle$, respectivamente. Un vector perpendicular a **u** y **v** es

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

La recta pedida es paralela a $\langle 0, -5, -1\rangle$ y también a $\langle 0, 5, 1\rangle$. Como el primer número director es cero, la recta no tiene ecuaciones simétricas. Sus ecuaciones paramétricas son

$$x = 1, \qquad y = -2 + 5t, \qquad z = 3 + t$$ ■

Recta tangente a una curva

Sea

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$$

el vector de posición que determina a una curva en el espacio tridimensional (figura 5). La recta tangente a la curva tiene vector dirección

$$\mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k} = \langle f'(t), g'(t), h'(t)\rangle$$

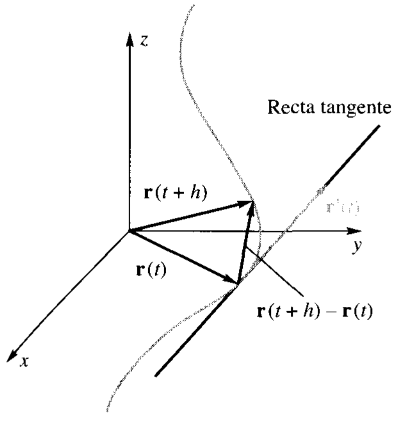


Figura 5

EJEMPLO 5 Determine las ecuaciones paramétricas y simétricas para la recta tangente a la curva determinada por

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \tfrac{1}{2}t^2\mathbf{j} + \tfrac{1}{3}t^3\mathbf{k}$$

en $P(2) = \left(2, 2, \frac{8}{3}\right)$.

SOLUCIÓN

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{r}'(2) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

de modo que la recta tangente tiene vector dirección $\langle 1, 2, 4\rangle$. Sus ecuaciones simétricas son

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - \frac{8}{3}}{4}$$

Las ecuaciones paramétricas son

$$x = 2 + t, \qquad y = 2 + 2t, \qquad z = \frac{8}{3} + 4t$$ ■

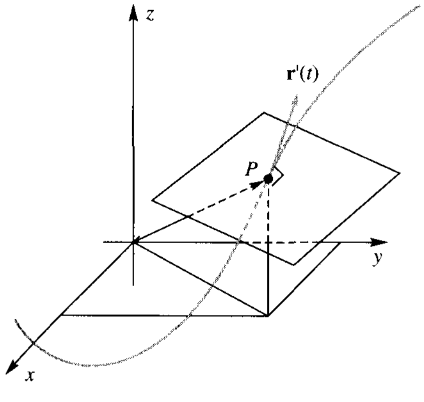


Figura 6

Existe exactamente un plano perpendicular a una curva suave en un punto dado P. Si tenemos un vector dirección para la recta tangente a la curva en P, entonces es un vector normal al plano (véase la figura 6). Éste, junto con el punto dado, es suficiente para obtener la ecuación del plano deseado.

EJEMPLO 6 Determine la ecuación del plano perpendicular a la curva $\mathbf{r}(t) = 2\cos \pi t\mathbf{i} + \operatorname{sen} \pi t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ en $P(2, 0, 8)$

SOLUCIÓN Lo primero que se debe hacer es obtener el valor de t que proporciona el punto dado. Al igualar las componentes z se obtiene $t^3 = 8$, dando $t = 2$. Una comprobación rápida verifica que $t = 2$ también proporciona las componentes x y y de P. Como $\mathbf{r}'(t) = -2\pi \operatorname{sen} \pi t\mathbf{i} + \pi \cos \pi t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$, vemos que el vector dirección para la recta tangente en P, que también es un vector normal para el plano deseado, es $\mathbf{r}'(2) = \pi\mathbf{j} + 12\mathbf{k} = \langle 0, \pi, 12\rangle$. Por lo tanto, la ecuación del plano es

$$0x + \pi y + 12z = D$$

Para determinar D, sustituimos $x = 2$, $y = 0$ y $z = 8$:

$$D = 0(2) + \pi(0) + 12(8) = 96$$

La ecuación del plano deseado es $\pi y + 12z = 96$. ■

Revisión de conceptos

1. Las ecuaciones paramétricas para una recta que pasa por $(1, -3, 2)$ y es paralela al vector $\langle 4, -2, -1\rangle$ son $x =$ ______, $y =$ ______, $z =$ ______.

2. Las ecuaciones simétricas de la recta de la pregunta 1 son ______.

3. Si $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} - 3t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, entonces $\mathbf{r}'(t) =$ ______.

4. Un vector paralelo a la recta tangente en $t = 1$ de la curva determinada por el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ de la pregunta 3 es ______. Esta recta tangente tiene ecuaciones simétricas ______.

Conjunto de problemas 11.6

En los problemas del 1 al 4 determine las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por la pareja de puntos dada.

1. $(1, -2, 3), (4, 5, 6)$

2. $(2, -1, -5), (7, -2, 3)$

3. $(4, 2, 3), (6, 2, -1)$

4. $(5, -3, -3), (5, 4, 2)$

En los problemas del 5 al 8 escriba las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones simétricas para la recta que pasa por el punto dado y es paralela al vector dado.

5. $(4, 5, 6), \langle 3, 2, 1\rangle$

6. $(-1, 3, -6), \langle -2, 0, 5\rangle$

7. $(1, 1, 1), \langle -10, -100, -1000\rangle$

8. $(-2, 2, -2), \langle 7, -6, 3\rangle$

En los problemas del 9 al 12 determine las ecuaciones simétricas de la recta de intersección de la pareja de planos dada.

9. $4x + 3y - 7z = 1, 10x + 6y - 5z = 10$

10. $x + y - z = 2, 3x - 2y + z = 3$

11. $x + 4y - 2z = 13, 2x - y - 2z = 5$

12. $x - 3y + z = -1, 6x - 5y + 4z = 9$

13. Determine las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por $(4, 0, 6)$ y es perpendicular al plano $x - 5y + 2z = 10$.

14. Determine las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por $(-5, 7, -2)$ y es perpendicular a $\langle 2, 1, -3\rangle$ y a $\langle 5, 4, -1\rangle$.

15. Determine las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $(5, -3, 4)$ que interseca al eje z en ángulo recto.

16. Determine las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por $(2, -4, 5)$ que es paralela al plano $3x + y - 2z = 5$ y es perpendicular a la recta

$$\frac{x+8}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

17. Encuentra la ecuación del plano que contiene a las rectas paralelas

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 3 - 4t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

18. Demuestre que las rectas

$$\frac{x-1}{-4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{-2}$$

y

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{6}$$

se intersecan, y determine la ecuación del plano que determinan.

19. Encuentre la ecuación del plano que contiene a la recta $x = 1 + 2t, y = -1 + 3t, z = 4 + t$ y al punto $(1, -1, 5)$.

20. Determine la ecuación del plano que contiene a la recta $x = 3t, y = 1 + t, z = 2t$ y es paralela a la intersección de los planos $2x - y + z = 0$ y $y + z + 1 = 0$.

21. Calcule la distancia entre las rectas oblicuas (rectas que no se intersecan y que no son paralelas) $x = 2 - t, y = 3 + 4t, z = 2t$ y $x = -1 + t, y = 2, z = -1 + 2t$ mediante los siguientes pasos.

(a) Observe, haciendo $t = 0$, que $(2, 3, 0)$ está en la primera recta.

(b) Determine la ecuación del plano π que pasa por $(2,3,0)$ paralelo a ambas rectas (es decir, cuya normal sea perpendicular a ambas).

(c) Determine un punto Q sobre la segunda recta.

(d) Calcule la distancia de Q al plano π. (Véase el ejemplo 10 de la sección 11.3).

Véase el problema 32 para otra forma de resolver este problema.

22. Calcule la distancia entre las rectas $x = 1 + 2t, y = -3 + 4t, z = -1 - t$ y $x = 4 - 2t, y = 1 + 3t, z = 2t$ (véase el problema 21).

23. Determine las ecuaciones simétricas de la recta tangente a la curva con ecuación

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 6\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$$

en $t = \pi/3$.

24. Determine las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva $x = 2t^2, y = 4t, z = t^3$ en $t = 1$.

25. Determine la ecuación del plano perpendicular a la curva $x = 3t, y = 2t^2, z = t^5$ en $t = -1$.

26. Determine la ecuación del plano perpendicular a la curva

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{i} + 3t\,\mathbf{j} + 2t\cos t\,\mathbf{k}$$

en $t = \pi/2$.

27. Considere la curva

$$\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i} + \sqrt{7t}\,\mathbf{j} + \sqrt{9 - 7t - 4t^2}\,\mathbf{k},\ 0 \le t \le \tfrac{1}{2}.$$

(a) Demuestre que la curva está sobre una esfera con centro en el origen.

(b) ¿Dónde corta la recta tangente en $t = \dfrac{1}{4}$ al plano xz?

28. Considere la curva $\mathbf{r}(t) = \mathrm{sen}\,t\cos t\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}^2\,t\,\mathbf{j} + \cos t\,\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(a) Demuestre que la curva se encuentra en una esfera centrada en el origen.

(b) Para $t = \pi/6$, ¿en dónde la recta tangente interseca al plano xy?

29. Considere la curva $\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + (1 - t^2)\,\mathbf{k}$.

(a) Demuestre que la curva se encuentra en un plano y determine la ecuación de este plano.

(b) Para $t = 2$, ¿en dónde la recta tangente interseca al plano xy?

30. Sea P un punto sobre un plano con vector normal $\mathbf{n}$, y Q un punto fuera del plano. Demuestre que el resultado del ejemplo 10 de la sección 11.3, la distancia d del punto Q al plano, puede expresarse como

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$$

y use este resultado para calcular la distancia de $(4, -2, 3)$ al plano $4x - 4y + 2z = 2$.

31. Distancia de un punto a una recta Sean P un punto sobre una recta con dirección $\mathbf{n}$ y Q un punto fuera de la recta (figura 7). Demuestre que la distancia d de Q a la recta está dada por

$$d = \frac{\|\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{n}\|}{\|\mathbf{n}\|}$$

y use este resultado para calcular cada distancia en las partes (a) y (b).

(a) De $Q(1, 0, -4)$ a la recta $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$

(b) De $Q(2, -1, 3)$ a la recta $x = 1 + 2t, y = -1 + 3t, z = -6t$

32. Distancia entre dos rectas Sean P y Q puntos sobre rectas oblicuas que no se cortan ni son paralelas, con direcciones $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$, y sea $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ (véase la figura 8). Demuestre que la distancia d entre estas rectas está dada por

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$$

y use este resultado para calcular la distancia entre cada pareja de rectas en las partes (a) y (b).

(a) $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-1}{2}$ y $\dfrac{x+4}{3} = \dfrac{y+5}{4} = \dfrac{z}{5}$

(b) $x = 1 + 2t, y = -2 + 3t, z = -4t$ y $x = 3t, \ y = 1 + t, \ z = -5t$

Respuestas a la revisión de conceptos:

1. $1 + 4t; -3 - 2t; 2 - t$ **2.** $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-2}{-1}$

3. $2t\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$ **4.** $\langle 2, -3, 3\rangle; \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{-3} = \dfrac{z-1}{3}$

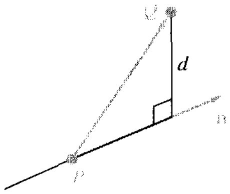


Figura 7

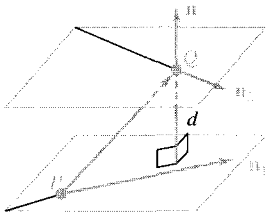


Figura 8

11.7 Curvatura y componentes de la aceleración

Queremos introducir un número llamado **curvatura**, que mide cuánto se dobla una curva en un punto dado. Una recta debería tener curvatura cero, y una curva que gira rápidamente debería tener una curvatura grande (figura 1).

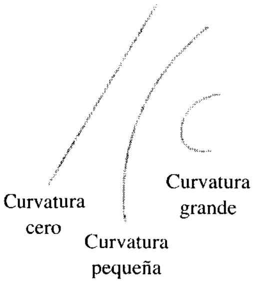


Figura 1

Sea $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ la posición de un objeto en el instante t. Supondremos que $\mathbf{r}'(t)$ es continua, y que $\mathbf{r}'(t)$ nunca es igual al vector cero. Esta última condición asegura que la longitud de arco acumulada $s(t)$ aumenta conforme t aumenta. Nuestra medida de curvatura implicará qué tan rápido cambia el vector tangente. En lugar de trabajar con el vector tangente $\mathbf{r}'(t)$ elegimos trabajar con el vector tangente unitario (figura 2)

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|}$$

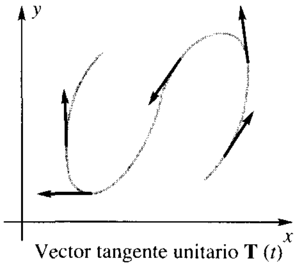


Figura 2

Para realizar la tarea de definir curvatura, consideramos la razón de cambio en el vector tangente unitario. Las figuras 3 y 4 ilustran este concepto para una curva dada. Conforme el objeto se mueve de los puntos A y B (figura 3) en el tiempo Δt, el vector

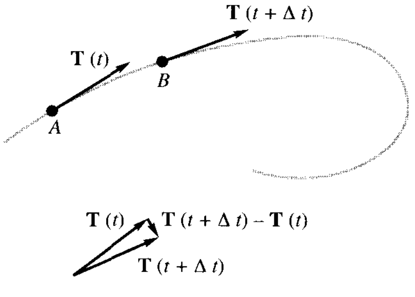


Figura 3

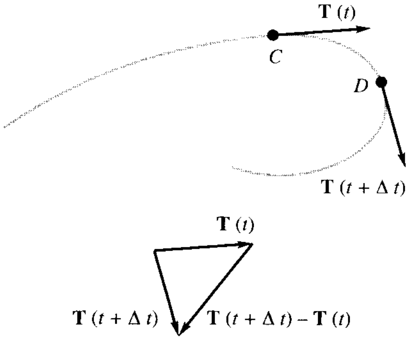


Figura 4

tangente unitario cambió muy poco; en otras palabras, la magnitud de $\mathbf{T}(t+\Delta t)-\mathbf{T}(t)$ es pequeña. Por otra parte, conforme el objeto se mueve de los puntos C a D (véase la figura 4), también en el tiempo Δt, el vector tangente unitario cambia bastante; en otras palabras, la magnitud de $\mathbf{T}(t+\Delta t)-\mathbf{T}(t)$ es grande. Por lo tanto, nuestra definición de curvatura, κ, es la magnitud de la tasa de cambio del vector tangente unitario con respecto a la longitud de arco; esto es,

$$\kappa = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\|$$

Derivamos con respecto a la longitud de arco s, en lugar de hacerlo con respecto al tiempo t, ya que queremos que la curvatura sea una propiedad intrínseca de la curva, no de lo rápido que el objeto se mueva a lo largo de la curva. (Imagine el movimiento circular, la curvatura del círculo no depende de que tan rápido el objeto gire alrededor de la curva).

En realidad, la definición de curvatura dada anteriormente no nos ayuda a calcular la curvatura de una curva en particular. Para determinar una fórmula que se pueda trabajar, procedemos como sigue. En la sección 11.5 vimos que la rapidez de un objeto podría expresarse como

$$\text{rapidez} = \|\mathbf{v}(t)\| = \frac{ds}{dt}$$

Como s aumenta conforme t aumenta, podemos aplicar el teorema de la función inversa (teorema 6.2B) para concluir que la inversa de $s(t)$ existe y

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{ds/dt} = \frac{1}{\|\mathbf{v}(t)\|}$$

Esto nos permite escribir

$$\kappa = \left\|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right\| = \left\|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{dt}{ds}\right\| = \left|\frac{dt}{ds}\right|\left\|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right\| = \frac{1}{\|\mathbf{v}(t)\|}\|\mathbf{T}'(t)\| = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

Algunos ejemplos importantes Para convencerlo de que la definición de curvatura es sensible, la ilustraremos con algunas curvas conocidas.

EJEMPLO 1 Demuestre que la curvatura de una recta es idénticamente cero.

SOLUCIÓN Para una recta, el vector tangente unitario es una constante, por lo que su derivada es 0. Pero, para ilustrar métodos vectoriales, damos una demostración algebraica. Si el movimiento es a lo largo de la recta cuya ecuación paramétrica está dada por

$$x = x_0 + at$$
$$y = y_0 + bt$$
$$z = z_0 + ct$$

entonces el vector de posición puede escribirse como

$$\mathbf{r}(t) = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + t\langle a, b, c \rangle$$

Así,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \langle a, b, c \rangle$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\langle a, b, c \rangle}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|} = \frac{\|\mathbf{0}\|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 0$$ ■

EJEMPLO 2 Determine la curvatura de una circunferencia de radio a.

SOLUCIÓN Suponemos que la circunferencia se encuentra en el plano xy y que tiene centro en el origen, por lo que el vector posición es

$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j}$$

Curvatura

La curvatura es un concepto relativamente sencillo. Sin embargo, los cálculos necesarios para determinar la curvatura con frecuencia son largos y complicados.

Así que

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -a \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j}$$

$$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2\cos^2 t} = a$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|} = \frac{-a\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j}}{a} = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$$

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|} = \frac{\|-\cos t\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}\|}{a} = \frac{1}{a}$$

Como κ es el recíproco del radio, circunferencias pequeñas tienen curvatura grande y circunferencias grandes tienen curvatura pequeña. Véase la figura 5.

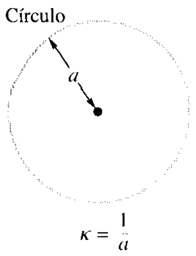


Figura 5

EJEMPLO 3 Determine la curvatura para la hélice $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$.

SOLUCIÓN

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -a\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 t + a^2\cos^2 t + c^2} = \sqrt{a^2 + c^2}$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|} = \frac{-a\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{-a\cos t\,\mathbf{i} - a\operatorname{sen} t\,\mathbf{j}}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|} = \frac{\|(-a\cos t\,\mathbf{i} - a\operatorname{sen} t\,\mathbf{j})/\sqrt{a^2 + c^2}\|}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{a}{a^2 + c^2}$$

Verificación de casos extremos

Una vez más, es instructivo comprobar los casos extremos. Si $c = 0$, entonces el movimiento está en un círculo con radio a y la curvatura es $a/(a^2 + 0^2) = 1/a$, que es la curvatura de un círculo con radio a. Si $c \to \infty$, entonces estamos estirando nuestra hélice en sentido vertical hacia una recta y

$$\lim_{c\to\infty} \frac{a}{a^2 + c^2} = 0$$

que es la curvatura de una recta. Ambos resultados son como se esperaban.

Para las tres curvas que se estudiaron hasta este punto, la recta, la circunferencia y la hélice, la curvatura es una constante. Este fenómeno sólo ocurre para curvas especiales. Por lo regular, la curvatura es una función de t.

Círculo de curvatura para curvas en el espacio de tres dimensiones

Los conceptos de radio de curvatura y círculo de curvatura se aplican con mayor generalidad a curvas en el espacio de tres dimensiones. El radio de curvatura aún es $R = 1/\kappa$, pero el círculo de curvatura es un concepto más complicado. El círculo de curvatura se encuentra por completo en el **plano osculante** (definido casi al final de esta sección). Para una curva plana, el plano osculante *es* el plano que contiene a la curva.

Radio y centro de curvatura para una curva plana Sea P un punto en una curva plana (es decir, una curva que se encuentra por completo en el plano xy) con curvatura distinta de cero. Considere el círculo tangente a la curva en P y que tiene la misma curvatura en ese punto. Su centro estará del lado cóncavo de la curva. Este círculo se llama **círculo de curvatura** o **círculo osculador**. Su radio $R = 1/\kappa$ es el **radio de curvatura** y su centro es el **centro de curvatura**. (Véase la figura 6). Estas nociones se ilustran en el ejemplo siguiente.

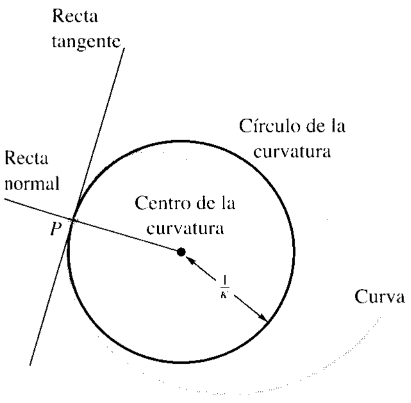


Figura 6

EJEMPLO 4 Determine la curvatura y radio de curvatura de la curva que describe el vector posición

$$\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$$

en los puntos $(0, 0)$ y en $(2, 1)$.

SOLUCIÓN

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 2\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}$$

$$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{2^2 + (2t)^2} = 2\sqrt{1 + t^2}$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|} = \frac{2\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}}{2\sqrt{1 + t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}\,\mathbf{i} + \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{T}'(t) = -\frac{t}{(1 + t^2)^{3/2}}\,\mathbf{i} + \frac{1}{(1 + t^2)^{3/2}}\,\mathbf{j}$$

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|} = \frac{\sqrt{\dfrac{t^2}{(1 + t^2)^3} + \dfrac{1}{(1 + t^2)^3}}}{2\sqrt{1 + t^2}} = \frac{1}{2(1 + t^2)^{3/2}}$$

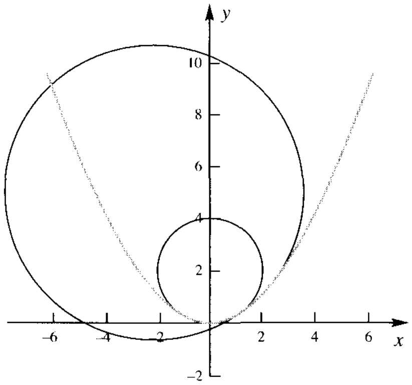


Figura 7

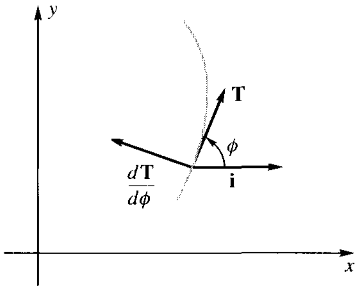


Figura 8

Los puntos (0, 0) y (2, 1) ocurren cuando $t = 0$ y $t = 1$, respectivamente. Así, los valores de la curvatura en estos puntos son

$$\kappa(0) = \frac{1}{2(1 + 0^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}$$

$$\kappa(1) = \frac{1}{2(1 + 1^2)^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

Así, los dos valores para los radios de curvatura son $1/\kappa(0) = 2$ y $1/\kappa(1) = 8/\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$. Los círculos de curvatura se muestran en la figura 7. ■

Otras fórmulas para la curvatura de una curva plana Sea ϕ el ángulo medido en el sentido contrario al de las manecillas del reloj desde i hasta **T** (véase la figura 8). Entonces

$$\mathbf{T} = \cos\phi\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{j}$$

de modo que

$$\frac{d\mathbf{T}}{d\phi} = -\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{i} + \cos\phi\,\mathbf{j}$$

Ahora, $d\mathbf{T}/d\phi$ es un vector unitario (longitud 1) y $\mathbf{T}\cdot d\mathbf{T}/d\phi = 0$. Además,

$$\kappa = \left\|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right\| = \left\|\frac{d\mathbf{T}}{d\phi}\frac{d\phi}{ds}\right\| = \left\|\frac{d\mathbf{T}}{d\phi}\right\|\left|\frac{d\phi}{ds}\right| = \left|\frac{d\phi}{ds}\right|$$

Esta fórmula para κ ayuda a nuestra comprensión intuitiva de la curvatura (mide la razón de cambio de ϕ respecto de s) y también nos permite dar una demostración bastante sencilla del siguiente teorema importante.

Teorema A

Considere una curva con ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, es decir, con ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$. Entonces

$$\kappa = \frac{|x'y'' - y'x''|}{\left[(x')^2 + (y')^2\right]^{3/2}}$$

En particular, si la curva es la gráfica de $y = g(x)$, entonces

$$\kappa = \frac{|y''|}{\left[1 + (y')^2\right]^{3/2}}$$

En la primera fórmula, los apóstrofos indican derivación respecto a t y respecto a x en la segunda fórmula.

Demostración Podríamos calcular κ directamente de la fórmula $\kappa = \|\mathbf{T}'(t)\|/\|\mathbf{r}'(t)\|$, una tarea que proponemos en el problema 78. Es un buen ejercicio (algo penoso) para la derivación y el manejo algebraico. Pero aquí usaremos la fórmula $\kappa = |d\phi/ds|$ deducida anteriormente. Consulte la figura 8, con base en la cual vemos que

$$\tan\phi = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'}{x'}$$

Al derivar ambos lados de esta ecuación respecto de t obtenemos

$$\sec^2\phi\,\frac{d\phi}{dt} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x')^2}$$

Entonces

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x')^2 \sec^2 \phi} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x')^2(1 + \tan^2 \phi)}$$

$$= \frac{x'y'' - y'x''}{(x')^2(1 + (y')^2/(x')^2)} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x')^2 + (y')^2}$$

Pero

$$\kappa = \left|\frac{d\phi}{ds}\right| = \left|\frac{d\phi}{dt}\frac{dt}{ds}\right| = \left|\frac{d\phi/dt}{ds/dt}\right| = \frac{|d\phi/dt|}{\left[(x')^2 + (y')^2\right]^{1/2}}$$

Cuando ponemos juntos estos dos resultados, obtenemos

$$\kappa = \frac{|x'y'' - y'x''|}{\left[(x')^2 + (y')^2\right]^{3/2}}$$

que es la primera afirmación del teorema.

Para obtener la segunda afirmación, basta con considerar $y = g(x)$ como la ecuación correspondiente a las ecuaciones paramétricas $x = t$, $y = g(t)$, de modo que $x' = 1$ y $x'' = 0$. Con lo que se obtiene la conclusión. ■

EJEMPLO 5 Determine la curvatura de la elipse

$$x = 3 \cos t, \qquad y = 2 \operatorname{sen} t$$

en los puntos que corresponden a $t = 0$ y $t = \pi/2$, es decir, en $(3, 0)$ y $(0, 2)$. Haga un bosquejo de la elipse en el que se muestre los correspondientes círculos de curvatura.

SOLUCIÓN De las ecuaciones dadas

$$x' = -3 \operatorname{sen} t, \qquad y' = 2 \cos t$$
$$x'' = -3 \cos t \qquad y'' = -2 \operatorname{sen} t$$

Así,

$$\kappa = \kappa(t) = \frac{|x'y'' - y'x''|}{\left[(x')^2 + (y')^2\right]^{3/2}} = \frac{6 \operatorname{sen}^2 t + 6 \cos^2 t}{\left[9 \operatorname{sen}^2 t + 4 \cos^2 t\right]^{3/2}}$$

$$= \frac{6}{\left[5 \operatorname{sen}^2 t + 4\right]^{3/2}}$$

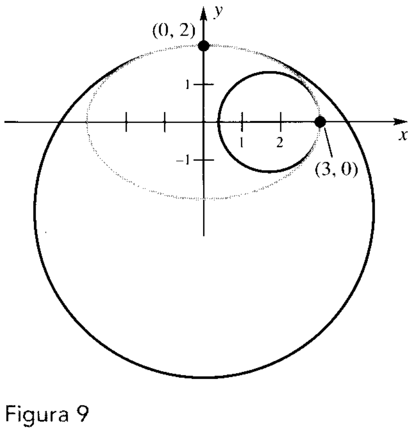


Figura 9

En consecuencia,

$$\kappa(0) = \frac{6}{4^{3/2}} = \frac{3}{4}$$

$$\kappa\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{6}{9^{3/2}} = \frac{2}{9}$$

Observe que $\kappa(0)$ es mayor que $\kappa(\pi/2)$, como debe ser. La figura 9 muestra el círculo de curvatura en $(3, 0)$, que tiene radio $\frac{4}{3}$, y el de $(0, 2)$, con radio $\frac{9}{2}$. ■

EJEMPLO 6 Determine la curvatura de $y = \ln|\cos x|$ en $x = \pi/3$.

SOLUCIÓN Empleamos la segunda fórmula del teorema A, observando que los apóstrofos indican derivación con respecto a x. Como $y' = -\tan x$ y $y'' = -\sec^2 x$,

$$\kappa = \frac{|-\sec^2 x|}{(1 + \tan^2 x)^{3/2}} = \frac{\sec^2 x}{(\sec^2 x)^{3/2}} = |\cos x|$$

En $x = \pi/3$, $\kappa = \frac{1}{2}$. ■

Componentes de la aceleración Para el movimiento a lo largo de la curva con vector de posición $\mathbf{r}(t)$, el vector tangente unitario es $\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t)/\|\mathbf{r}'(t)\|$. Este vector satisface

$$\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}(t) = 1$$

para toda t. Al derivar ambos lados respecto a t, y por medio de la regla del producto en el lado izquierdo, se obtiene

$$\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}'(t) + \mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}'(t) = 0$$

Esto se reduce $\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}'(t) = 0$, indicándonos que $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{T}'(t)$ son perpendiculares para toda t. En general, $\mathbf{T}'$ no es un vector unitario, así que definimos el **vector normal unitario principal** como

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$

Ahora, imagine que está conduciendo un automóvil en un camino sinuoso. Conforme el automóvil acelera, usted siente que es empujado en la dirección opuesta. Si el automóvil aumenta su velocidad, siente que es empujado hacia atrás, y cuando vira a la izquierda, usted siente un empuje hacia la derecha. Estas dos clases de aceleraciones se denominan componentes **tangencial** y **normal de la aceleración**, respectivamente. Lo que nos gustaría hacer es expresar el vector aceleración $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ en términos de estos dos componentes, es decir, en términos del vector tangente unitario $\mathbf{T}(t)$ y del vector normal unitario $\mathbf{N}(t)$. Para ser más específicos, nos gustaría determinar escalares, a_T y a_N tales que

$$\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$$

Para realizar esto, notamos que

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\mathbf{v}}{ds/dt}$$

por lo que

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt}\mathbf{T}$$

Al derivar ambos lados respecto a t, y empleando la regla del producto, se obtiene

$$\mathbf{v}' = \frac{ds}{dt}\mathbf{T}' + \mathbf{T}\frac{d^2s}{dt^2}$$

Al utilizar el hecho que $\mathbf{a} = \mathbf{v}'$, $\mathbf{T}' = \|\mathbf{T}'\|\mathbf{N}$, y $\|\mathbf{T}'\| = \kappa\dfrac{ds}{dt}$ tenemos

$$\mathbf{a} = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\|\mathbf{T}'\|\mathbf{N} = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\kappa\mathbf{N}$$

Las componentes tangencial y normal de la aceleración son

$$a_T = \frac{d^2s}{dt^2}$$

y

$$a_N = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\kappa$$

Estos resultados tienen sentido desde un punto de vista físico. Si usted acelera en un camino recto, entonces $a_T = \dfrac{d^2s}{dt^2} > 0$, y $\kappa = 0$ por lo que $a_N = 0$. Así, en este caso sentiría un empuje hacia atrás y ningún empuje hacia los lados. Por otra parte, si entra a una curva, con una velocidad constante (es decir, ds/dt es constante) entonces

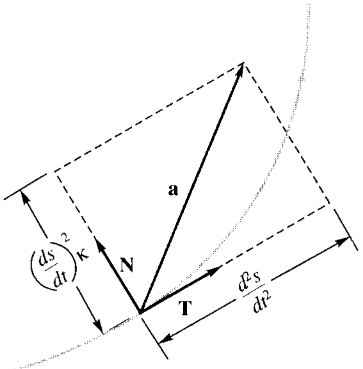


Figura 10

$a_T = \dfrac{d^2s}{dt^2} = 0$ y $\kappa > 0$, haciendo que a_N sea positiva. Por último, imagine que entra a una curva mientras acelera. En este caso, tanto a_T como a_N serán positivas y **a** apuntará hacia adentro y hacia adelante como se muestra en la figura 10. Usted sentiría que es jalado hacia atrás y hacia la derecha.

Para calcular a_N, parece que debemos calcular la curvatura κ. Sin embargo, puede evitarse observando que como **T** y **N** son ortogonales,

$$\|\mathbf{a}\|^2 = a_T^2 + a_N^2$$

así que podemos calcular

$$a_N = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_T^2}$$

El vector **N** puede calcularse de forma indirecta a partir de

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{a} - a_T\mathbf{T}}{a_N}$$

Formas vectoriales de las componentes de la aceleración Podemos escribir las fórmulas para las componentes de la aceleración en términos del vector de posición **r**. Iniciamos con

$$\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$$

y haciendo el producto punto con **T**, en ambos lados, se obtiene

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{T}\cdot(a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}) = a_T\mathbf{T}\cdot\mathbf{T} + a_N\mathbf{T}\cdot\mathbf{N} = a_T(1) + a_N(0) = a_T$$

Aquí hemos utilizado los hechos de que **T** es un vector unitario y que **T** y **N** son ortogonales. Por lo tanto,

$$a_T = \mathbf{T}\cdot\mathbf{a} = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}\cdot\mathbf{r}'' = \frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}'\|}$$

Podemos encontrar una fórmula análoga para a_N tomando el producto cruz con **T** en ambos lados.

$$\mathbf{T}\times\mathbf{a} = a_T\mathbf{T}\times\mathbf{T} + a_N\mathbf{T}\times\mathbf{N} = a_T\mathbf{0} + a_N(\mathbf{T}\times\mathbf{N}) = a_N(\mathbf{T}\times\mathbf{N})$$

Tomando la magnitud de ambos lados, se obtiene

$$\|\mathbf{T}\times\mathbf{a}\| = |a_N|\|\mathbf{T}\times\mathbf{N}\| = a_N\|\mathbf{T}\|\|\mathbf{N}\|\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = a_N(1)(1)(1) = a_N$$

Observe que $a_N = (ds/dt)^2\kappa > 0$, por lo que no son necesarios los signos de valor absoluto para a_N. Así que

$$a_N = \|\mathbf{T}\times\mathbf{a}\| = \left\|\frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}\times\mathbf{r}''\right\| = \frac{\|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|}$$

Por último, podemos encontrar una fórmula para la curvatura κ:

$$\kappa = \frac{a_N}{(ds/dt)^2} = \frac{\|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''\|/\|\mathbf{r}'\|}{\|\mathbf{r}'\|^2} = \frac{\|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|^3}$$

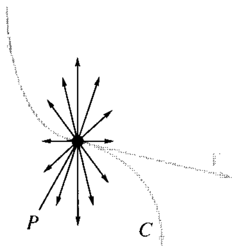


Figura 11

Binormal en P (opcional) Dada una curva C y el vector tangente unitario **T** en P, existe, por supuesto, un número infinito de vectores unitarios perpendiculares a **T** en P (figura 11). Seleccionaremos uno de ellos, $\mathbf{N} = \mathbf{T}'/\|\mathbf{T}'\|$, y le llamamos la normal principal. El vector

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N}$$

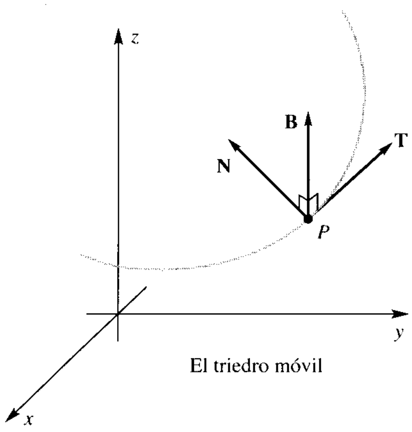


Figura 12

se denomina **el (vector) binormal**. También es un vector unitario y es perpendicular tanto a **T** como a **N** (¿por qué?)

Si el vector tangente unitario **T**, el vector normal principal **N** y el binormal **B** tienen sus puntos iniciales en *P*, forman un sistema de vectores unitarios de mano derecha, mutuamente perpendiculares, conocido como el **triedro** en *P* (figura 12). Este triedro móvil desempeña un papel crucial en un tema denominado geometría diferencial. El plano de **T** y **N** se conoce como **plano osculatriz** (u osculador) en *P*.

EJEMPLO 7 Determine **T**, **N** y **B** y las componentes normal y tangencial de la aceleración para el movimiento circular uniforme $\mathbf{r}(t) = a\cos\omega t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathbf{j}$.

SOLUCIÓN

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|} = \frac{-a\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathbf{i} + a\omega\cos\omega t\,\mathbf{j}}{\|-a\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathbf{i} + a\omega\cos\omega t\,\mathbf{j}\|} = -\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathbf{i} + \cos\omega t\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{T}'}{\|\mathbf{T}'\|} = \frac{-\omega\cos\omega t\,\mathbf{i} - \omega\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathbf{j}}{\|-\omega\cos\omega t\,\mathbf{i} - \omega\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathbf{j}\|} = -\cos\omega t\,\mathbf{i} - \mathrm{sen}\,\omega t\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\mathrm{sen}\,\omega t & \cos\omega t & 0 \\ -\cos\omega t & -\mathrm{sen}\,\omega t & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k}$$

$$a_T = \frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}'\|} = \frac{(-a\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t\mathbf{i} + a\omega\cos\omega t\mathbf{j})\cdot(-a\omega^2\cos\omega t\mathbf{i} - a\omega^2\,\mathrm{sen}\,\omega t\mathbf{j})}{a\omega} = 0$$

$$\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t & a\omega\cos\omega t & 0 \\ -a\omega^2\cos\omega t & -a\omega^2\,\mathrm{sen}\,\omega t & 0 \end{vmatrix} = a^2\omega^3\mathbf{k}$$

$$a_N = \frac{\|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|} = \frac{a^2\omega^3}{a\omega} = a\omega^2$$

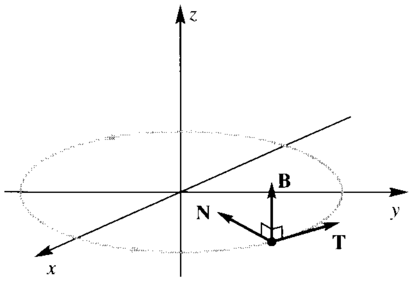


Figura 13

La componente tangencial de la aceleración es 0, ya que el objeto se mueve con rapidez uniforme. La componente normal de la aceleración es igual a la magnitud del vector aceleración. La figura 13 muestra los vectores **T**, **N** y **B**. ■

EJEMPLO 8 En el punto $\left(1, 1, \frac{1}{3}\right)$, determine **T**, **N** y **B**, a_T, a_N y κ para el movimiento curvilíneo

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \tfrac{1}{3}t^3\mathbf{k}$$

SOLUCIÓN

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}''(t) = 2\,\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}$$

En $t = 1$, que da el punto $\left(1, 1, \frac{1}{3}\right)$, tenemos

$$\mathbf{r}' = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'' = 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|} = \frac{\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{6}}$$

$$a_T = \frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}'\|} = \frac{6}{\sqrt{6}}$$

$$a_N = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \left\| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{\sqrt{6}} \|2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\| = \sqrt{2}$$

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{a} - a_T\mathbf{T}}{a_N} = \frac{(2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) - (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})}{\sqrt{2}} = \frac{-\mathbf{i} + \mathbf{k}}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{T} \times \mathbf{N} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|^3} = \frac{a_N}{\|\mathbf{r}'\|^2} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

■

Revisión de conceptos

1. La curvatura se define como la magnitud del vector _______.

2. La curvatura de un círculo de radio a es constante y tiene valor $\kappa =$ _______; la curvatura de una recta es _______.

3. El vector aceleración **a** puede expresarse como **a** = _____ **T** + _____ **N**.

4. Para el movimiento circular uniforme en el plano, la componente tangencial de la aceleración es _______.

Conjunto de problemas 11.7

En los problemas del 1 al 6 haga un bosquejo de la curva en el dominio indicado para t. Determine **v**, **a**, **T** *y* κ *en el punto donde* $t = t_1$.

1. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\mathbf{j};\quad 0 \le t \le 2; t_1 = 1$

2. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (2t + 1)\mathbf{j};\quad 0 \le t \le 2; t_1 = 1$

3. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} + 2\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{k};\quad 0 \le t \le 4\pi; t_1 = \pi$

4. $\mathbf{r}(t) = 5\cos t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + 5\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{k};\quad 0 \le t \le 4\pi; t_1 = \pi$

5. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{t^2}{8}\mathbf{i} + 5\cos t\,\mathbf{j} + 5\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{k};\quad 0 \le t \le 4\pi; t_1 = \pi$

6. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{t^2}{4}\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} + 2\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{k};\quad 0 \le t \le 4\pi; t_1 = \pi$

En los problemas del 7 al 14 determine el vector tangente unitario $\mathbf{T}(t)$ *y la curvatura* $\kappa(t)$ *en el punto donde* $t = t_1$. *Para calcular* κ, *sugerimos utilizar el teorema A, como en el ejemplo 5.*

7. $\mathbf{u}(t) = 4t^2\mathbf{i} + 4t\,\mathbf{j}; t_1 = \frac{1}{2}$

8. $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{3}t^3\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j}; t_1 = 1$

9. $\mathbf{z}(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + 4\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j}; t_1 = \pi/4$

10. $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j}; t_1 = \ln 2$

11. $x(t) = 1 - t^2, y(t) = 1 - t^3; t_1 = 1$

12. $x(t) = \mathrm{senh}\,t, y(t) = \cosh t; t_1 = \ln 3$

13. $x(t) = e^{-t}\cos t, y(t) = e^{-t}\,\mathrm{sen}\,t; t_1 = 0$

14. $\mathbf{r}(t) = t\cos t\,\mathbf{i} + t\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j}; t_1 = 1$

En los problemas del 15 al 26 haga un bosquejo de la curva en el plano xy. Luego, para el punto dado, determine la curvatura y el radio de curvatura. Por último, dibuje el círculo de curvatura en el punto. Sugerencia: *para la curvatura, utilizará la segunda fórmula en el teorema A, como en el ejemplo 6.*

15. $y = 2x^2, (1, 2)$

16. $y = x(x - 4)^2, (4, 0)$

17. $y = \mathrm{sen}\,x, \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

18. $y^2 = x - 1, (1, 0)$

19. $y^2 - 4x^2 = 20, (2, 6)$

20. $y^2 - 4x^2 = 20, (2, -6)$

21. $y = \cos 2x, \left(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\right)$

22. $y = e^{-x^2}, \left(1, 1/e\right)$

23. $y = \tan x, (\pi/4, 1)$

24. $y = \sqrt{x}, (1, 1)$

25. $y = \sqrt[3]{x}, (1, 1)$

26. $y = \tanh x, \left(\ln 2, \frac{3}{5}\right)$

En los problemas del 27 al 34 determine la curvatura κ, *el vector tangente unitario* **T**, *el vector normal unitario* **N** *y el vector binormal* **B** *en* $t = t_1$.

27. $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}t^2\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}; t_1 = 2$

28. $x = \mathrm{sen}\,3t, y = \cos 3t, z = t, t_1 = \pi/9$

29. $x = 7\,\mathrm{sen}\,3t, y = 7\cos 3t, z = 14t, t_1 = \pi/3$

30. $\mathbf{r}(t) = \cos^3 t\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}^3\,t\,\mathbf{k}; t_1 = \pi/2$

31. $\mathbf{r}(t) = 3\cosh(t/3)\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j}; t_1 = 1$

32. $\mathbf{r}(t) = e^{7t}\cos 2t\,\mathbf{i} + e^{7t}\,\mathrm{sen}\,2t\,\mathbf{j} + e^{7t}\mathbf{k}; t_1 = \pi/3$

33. $\mathbf{r}(t) = e^{-2t}\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j} + 2\sqrt{2}t\,\mathbf{k}; t_1 = 0$

34. $x = \ln t, y = 3t, z = t^2; t_1 = 2$

En los problemas del 35 al 40 determine el punto de la curva en el que la curvatura es máxima.

35. $y = \ln x$

36. $y = \mathrm{sen}\,x; -\pi \le x \le \pi$

37. $y = \cosh x$

38. $y = \mathrm{senh}\,x$

39. $y = e^x$

40. $y = \ln \cos x$ para $-\pi/2 < x < \pi/2$

En los problemas del 41 al 52 determine las componentes tangencial y normal (a_T y a_N) del vector aceleración en t. Luego evalúe en $t = t_1$. Véanse los ejemplos 7 y 8.

41. $\mathbf{r}(t) = 3t\,\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j};\ t_1 = \frac{1}{3}$

42. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\,\mathbf{j};\ t_1 = 1$

43. $\mathbf{r}(t) = (2t + 1)\mathbf{i} + (t^2 - 2)\mathbf{j};\ t_1 = -1$

44. $\mathbf{r}(t) = a \cos t\,\mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\,\mathbf{j};\ t_1 = \pi/6$

45. $\mathbf{r}(t) = a \cosh t\,\mathbf{i} + a \operatorname{senh} t\,\mathbf{j};\ t_1 = \ln 3$

46. $x(t) = 1 + 3t,\ y(t) = 2 - 6t;\ t_1 = 2$

47. $\mathbf{r}(t) = (t + 1)\mathbf{i} + 3t\,\mathbf{j} + t^2\mathbf{k};\ t_1 = 1$

48. $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3;\ t_1 = 2$

49. $x = e^{-t},\ y = 2t,\ z = e^t;\ t_1 = 0$

50. $\mathbf{r}(t) = (t - 2)^2\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + t\,\mathbf{k};\ t_1 = 2$

51. $\mathbf{r}(t) = \left(t - \frac{1}{3}t^3\right)\mathbf{i} - \left(t + \frac{1}{3}t^3\right)\mathbf{j} + t\,\mathbf{k};\ t_1 = 3$

52. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{j} + t^{-1}\mathbf{k},\ t > 0;\ t_1 = 1$

53. Bosqueje la trayectoria de una partícula tal que su vector de posición es $\mathbf{r} = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} 2t\,\mathbf{j},\ 0 \leq t \leq 2\pi$ (deberá obtener una figura con forma de ocho). ¿En qué momento se anula la aceleración? ¿En qué momento el vector aceleración apunta hacia el origen?

54. El vector de posición de una partícula en el instante $t \geq 0$ es

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t - t \cos t)\mathbf{j}$$

(a) Demuestre que la rapidez $ds/dt = t$.

(b) Demuestre que $a_T = 1$ y $a_N = t$.

55. Si, para una partícula, $a_T = 0$ para toda t, ¿qué puede concluir acerca de su rapidez? Si $a_N = 0$ para toda t, ¿qué puede concluir acerca de su curvatura?

56. Calcule **N** para la elipse

$$\mathbf{r}(t) = a \cos \omega t\,\mathbf{i} + b \operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{j}$$

57. Considere el movimiento de una partícula a lo largo de una hélice dada por $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + (t^2 - 3t + 2)\mathbf{k}$, donde la componente **k** mide la altura en metros por encima del suelo y $t \geq 0$. Si la partícula sale de la elipse y se mueve a lo largo de la recta tangente a la hélice, cuando está 12 metros por encima del suelo, proporcione el vector dirección para la recta.

58. Un objeto se mueve a lo largo de la curva $y = \operatorname{sen} 2x$. Sin hacer cálculos, decida dónde $a_N = 0$.

59. Un perro corre en sentido contrario al de las manecillas del reloj en torno de la circunferencia $x^2 + y^2 = 400$ (las distancias se miden en pies). En el punto $(-12, 16)$, corre a 10 pies/segundo y acelera a 5 pies/segundo por segundo. Exprese su aceleración **a** en el punto, primero en términos de **T** y **N** y luego en términos de **i** y **j**.

60. Un objeto se mueve a lo largo de la parábola $y = x^2$ con rapidez constante 4. Exprese **a** en el punto (x, x^2) en términos de **T** y **N**.

61. Un automóvil viaja con rapidez constante v y rodea una curva de nivel, que consideraremos como una circunferencia de radio R. Si el automóvil evita el deslizamiento hacia fuera, la fuerza de fricción horizontal F ejercida por el camino sobre los neumáticos debe, por lo menos, equilibrar la fuerza centrífuga que lo jala hacia fuera. La fuerza F satisface $F = \mu m g$, donde μ es el *coeficiente de fricción*, m es la masa del automóvil y g es la aceleración de la gravedad. Así, $\mu m g \geq m v^2/R$. *Dem*uestre que v_R, la rapidez límite después de la cual ocurre el derrape, satisface

$$v_R = \sqrt{\mu g R}$$

y use esto para determinar v_R para una curva con $R = 400$ pies y $\mu = 0.4$. Use $g = 32$ pies/segundo por segundo.

62. Considere de nuevo el automóvil del problema 61. Suponga que la curva está cubierta de hielo en su peor punto ($\mu = 0$), pero que tiene un peralte con un ángulo θ respecto de la horizontal (figura 14). Sea **F** la fuerza ejercida por el camino sobre el automóvil. Entonces, con la rapidez crítica v_R, $mg = \|\mathbf{F}\| \cos\theta$ y $m v_R^2/R = \|\mathbf{F}\| \operatorname{sen}\theta$.

(a) Demuestre que $v_R = \sqrt{Rg \tan\theta}$.

(b) Determine v_R para una curva con $R = 400$ pies y $\theta = 10°$.

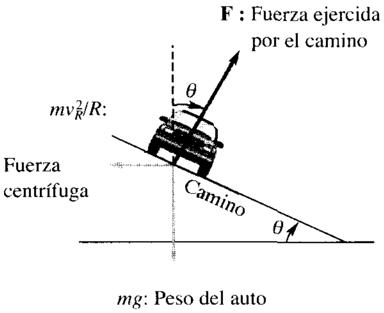


Figura 14

63. Demuestre que la segunda fórmula en el teorema A también se puede escribir como $\kappa = |y'' \cos^3 \phi|$, donde ϕ es el ángulo de inclinación de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$.

64. Demuestre que, para una curva plana, **N** apunta hacia el lado cóncavo de la curva. *Sugerencia:* un método es demostrar que

$$\mathbf{N} = (-\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{i} + \cos\phi\,\mathbf{j})\frac{d\phi/ds}{|d\phi/ds|}$$

Luego considere los casos $d\phi/ds > 0$ (la curva se dobla hacia la izquierda) y $d\phi/ds < 0$ (la curva se dobla hacia la derecha).

65. Demuestre que $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$. Deduzca un resultado similar para **T** en términos de **N** y **B**.

66. Demuestre que la curva

$$y = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^3 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

tiene primeras derivadas continuas y curvatura en todos los puntos.

EXPL **67.** Determine una curva dada por un polinomio $P_5(x)$ que proporcione una transición suave entre dos rectas horizontales. Es decir, suponga una función de la forma $P_5(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$, que proporciona una transición suave entre $y = 0$ para $x \leq 0$ y $y = 1$ para $x \geq 1$ de tal manera que la función, su derivada y la curvatura sean funciones continuas para todos los valores de x.

$$y = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ P_5(x) & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Sugerencia: $P_5(x)$ debe satisfacer las seis condiciones $P_5(0) = 0$, $P_5'(0) = 0$, $P_5''(0) = 0$, $P_5(1) = 1$, $P_5'(1) = 0$, y $P_5''(1) = 0$. Utilice estas seis condiciones para determinar $a_0, \ldots, a_5$ de manera única y de este modo encontrar $P_5(x)$.

68. Determine una curva dada por un polinomio $P_5(x)$ que proporcione una transición suave entre $y = 0$, para $x \leq 0$ y $y = x$ para $x \geq 1$.

EXPL **69.** Deduzca la fórmula para la curvatura en coordenadas polares

$$\kappa = \frac{|r^2 + 2(r')^2 - rr''|}{(r^2 + (r')^2)^{3/2}}$$

donde las derivadas se calculan respecto de θ.

En los problemas 70 al 75 use la fórmula del problema 69 para determinar la curvatura κ de lo siguiente:

70. La circunferencia: $r = 4 \cos \theta$

71. El cardioide: $r = 1 + \cos \theta$ en $\theta = 0$

72. $r = \theta$ en $\theta = 1$

73. $r = 4(1 + \cos \theta)$ en $\theta = \pi/2$

74. $r = e^{3\theta}$ en $\theta = 1$

75. $r = 4(1 + \operatorname{sen} \theta)$ en $\theta = \pi/2$

76. Demuestre que la curvatura de la curva polar $r = e^{6\theta}$ es proporcional a $1/r$.

77. Demuestre que la curvatura de la curva polar $r^2 = \cos 2\theta$ es directamente proporcional a r para $r > 0$.

78. Deduzca la primera fórmula para la curvatura en el teorema A trabajando directamente con $\kappa = \|\mathbf{T}'(t)\|/\|\mathbf{r}'(t)\|$.

GC **79.** Trace la gráfica de $x = 4 \cos t$, $y = 3 \operatorname{sen}(t + 0.5)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Estime sus curvaturas máxima y mínima observando la gráfica (la curvatura es el recíproco del radio de curvatura). Luego use una calculadora gráfica o un sistema algebraico por computadora para aproximar estos dos números con cuatro cifras decimales

80. Demuestre que el vector unitario binormal $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ tiene la propiedad que $\dfrac{d\mathbf{B}}{ds}$ es perpendicular a $\mathbf{B}$.

81. Demuestre que el vector unitario binormal $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ tiene la propiedad de que $\dfrac{d\mathbf{B}}{ds}$ es perpendicular a $\mathbf{T}$.

82. Utilizando los resultados obtenidos en los problemas 80 y 81, demuestre que $\dfrac{d\mathbf{B}}{ds}$ debe ser paralelo a $\mathbf{N}$ y, en consecuencia, debe existir un número τ que depende de s tal que $\dfrac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau(s)\mathbf{N}$. La función $\tau(s)$ se denomina la torsión de la curva y mide cuánto se dobla la curva del plano determinado por $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$.

83. Demuestre que para una curva plana la torsión es $\tau(s) = 0$.

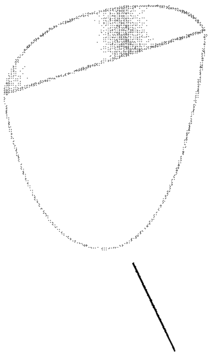
84. Demuestre que para una línea recta $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + a_0 t\mathbf{i} + b_0 t\mathbf{j} + c_0 t\mathbf{k}$, tanto κ como τ son iguales a cero.

C **85.** Una mosca está trepando a lo largo de un alambre helicoidal, de modo que su vector de posición es $\mathbf{r}(t) = 6 \cos \pi t\, \mathbf{i} + 6 \operatorname{sen} \pi t\, \mathbf{j} + 2t\, \mathbf{k}$, $t \geq 0$. ¿En qué punto la mosca chocará con la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ y qué distancia recorrerá para llegar allí (suponiendo que inició cuando $t = 0$)?

C **86.** La molécula del DNA humano es una hélice doble, cada una con alrededor de 2.9×10^8 vueltas completas. Cada hélice tiene radio de casi 10 angströms y se levanta alrededor de 34 angströms en cada vuelta completa (un angströms es 10^{-8} centímetros). ¿Cuál es la longitud total de tal hélice?

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}$ **2.** $1/a$; 0 **3.** $\dfrac{d^2s}{dt^2}$; $\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 \kappa$ **4.** 0

11.8
Superficies en el espacio tridimensional



Una sección transversal

Figura 1

La gráfica de una ecuación en tres variables, por lo general, es una superficie. Ya hemos visto dos ejemplos. La gráfica de $Ax + By + Cz = D$ es un plano; la gráfica de $(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$ es una esfera. La graficación de superficies puede realizarse mejor encontrando las intersecciones de la superficie con planos elegidos de manera adecuada. Estas intersecciones son las **secciones transversales** (véase la figura 1); aquellas intersecciones con los planos de coordenadas se llaman también **trazas**.

EJEMPLO 1 Dibuje la gráfica de

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$$

SOLUCIÓN Para encontrar la traza en el plano xy, hacemos $z = 0$ en la ecuación dada. La gráfica de la ecuación resultante

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

es una elipse. Las trazas en los planos xz y yz (obtenidas haciendo $y = 0$ y $x = 0$, respectivamente) también son elipses. Estas tres trazas aparecen en la figura 2 y nos ayudan a obtener una buena imagen de la superficie pedida (llamada elipsoide). ■

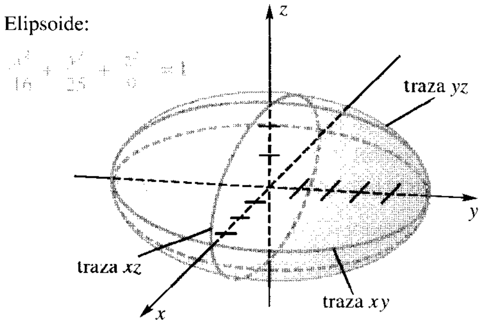


Figura 2

Si la superficie es muy complicada, podría ser útil mostrar las secciones transversales con muchos planos paralelos a los planos de coordenadas. En este caso, una computadora con capacidad gráfica puede ser muy útil. En la figura 3 mostramos una gráfica común generada por computadora, la gráfica de la "silla del mono" $z = x^3 - 3xy^2$. Hablaremos más sobre las gráficas generadas por computadora en el capítulo siguiente.

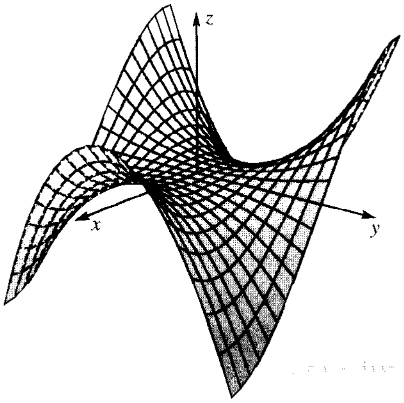


Figura 3

Cilindros Seguramente usted conoce los cilindros circulares rectos, por la geometría del bachillerato. En este caso, la palabra *cilindro* denotará una clase mucho más amplia de superficies.

Sea C una curva plana y l una recta que corte a C, pero que no esté en el plano de C. El conjunto de todos los puntos sobre rectas que son paralelas a l y que cortan a C se llama **cilindro** (figura 4).

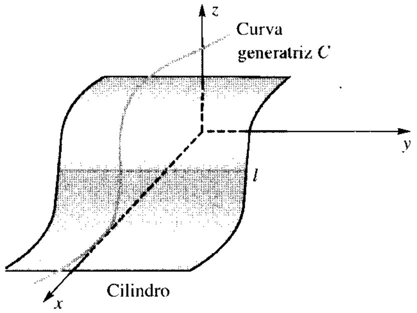


Figura 4

Los cilindros aparecen de manera natural al graficar una ecuación en el espacio tridimensional, que implica sólo dos variables. Considere como primer ejemplo

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

donde falta la variable z. Esta ecuación determina una curva C en el plano xy, una hipérbola. Además, si $(x_1, y_1, 0)$ satisface la ecuación, también lo hace (x_1, y_1, z). Conforme z recorre todos los valores reales, el punto (x_1, y_1, z) describe una recta paralela al eje z. Concluimos que la gráfica de la ecuación dada es un cilindro, un cilindro hiperbólico (figura 5).

Un segundo ejemplo es la gráfica de $z = \text{sen } y$ (figura 6).

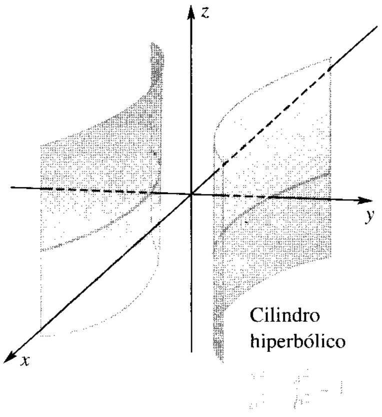


Figura 5

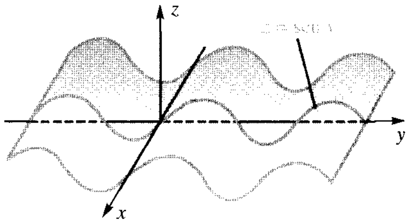


Figura 6

Superficies cuádricas Si una superficie es la gráfica en el espacio tridimensional de una ecuación de segundo grado, se le llama una **superficie cuádrica**. Las secciones planas de una superficie cuádrica son cónicas.

La ecuación general de segundo grado tiene la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

Es posible demostrar que cualquier ecuación de este tipo se puede reducir, mediante rotación y traslación de los ejes de coordenadas, en una de las dos formas

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0$$

o

$$Ax^2 + By^2 + Iz = 0$$

Las superficies cuádricas representadas por la primera de estas ecuaciones son simétricas respecto a los planos de coordenadas y al origen. Éstas se llaman **cuádricas centrales**.

En las figuras de la 7 a la 12 mostramos seis tipos generales de superficies cuádricas. Estúdielas con cuidado. Las gráficas fueron trazadas por un artista técnico; no esperamos que la mayoría de nuestros lectores pueda duplicarlas al hacer los problemas. Un dibujo más razonable para la mayoría de las personas es como el que mostramos en la figura 13 de nuestro siguiente ejemplo.

SUPERFICIES CUÁDRICAS

ELIPSOIDE: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Plano	Sección transversal
plano xy	Elipse
plano xz	Elipse
plano yz	Elipse
Paralelo al plano xy	Elipse, punto o conjunto vacío
Paralelo al plano xz	Elipse, punto o conjunto vacío
Paralelo al plano yz	Elipse, punto o conjunto vacío

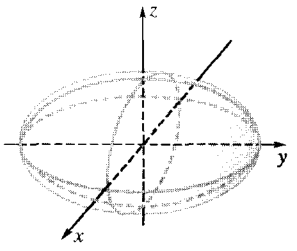


Figura 7

HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Plano	Sección transversal
plano xy	Elipse
plano xz	Hipérbola
plano yz	Hipérbola
Paralelo al plano xy	Elipse
Paralelo al plano xz	Hipérbola
Paralelo al plano yz	Hipérbola

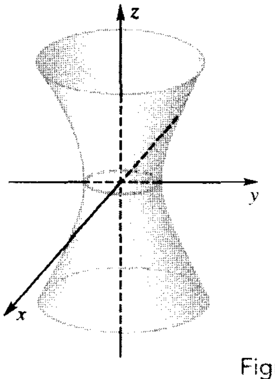


Figura 8

SUPERFICIES CUÁDRICAS (continuación)

HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Plano	Sección transversal
plano xy	Hipérbola
plano xz	Hipérbola
plano yz	Conjunto vacío
Paralelo al plano xy	Hipérbola
Paralelo al plano xz	Hipérbola
Paralelo al plano yz	Elipse, punto o conjunto vacío

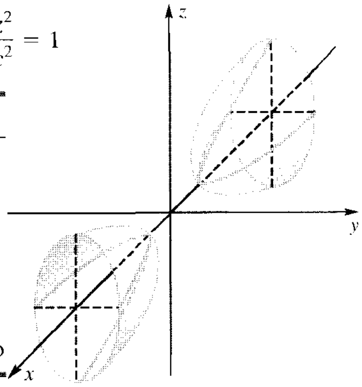


Figura 9

PARABOLOIDE ELÍPTICO: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

Plano	Sección transversal
plano xy	Punto
plano xz	Parábola
plano yz	Parábola
Paralelo al plano xy	Elipse, punto o conjunto vacío
Paralelo al plano xz	Parábola
Paralelo al plano yz	Parábola

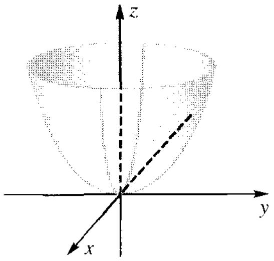


Figura 10

PARABOLOIDE HIPERBÓLICO: $z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$

Plano	Sección transversal
plano xy	Líneas rectas que se intersecan
plano xz	Parábola
plano yz	Parábola
Paralelo al plano xy	Hipérbola o líneas rectas que se intersecan
Paralelo al plano xz	Parábola
Paralelo al plano yz	Parábola

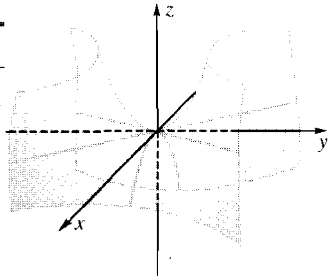


Figura 11

CONO ELÍPTICO: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

Plano	Sección transversal
plano xy	Punto
plano xz	Líneas rectas que se intersecan
plano yz	Líneas rectas que se intersecan
Paralelo al plano xy	Elipse o punto
Paralelo al plano xz	Hipérbola o líneas rectas que se intersecan
Paralelo al plano yz	Hipérbola o líneas rectas que se intersecan

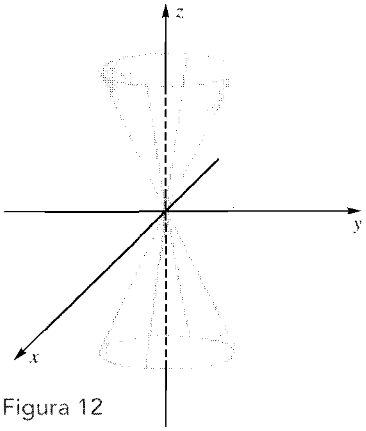


Figura 12

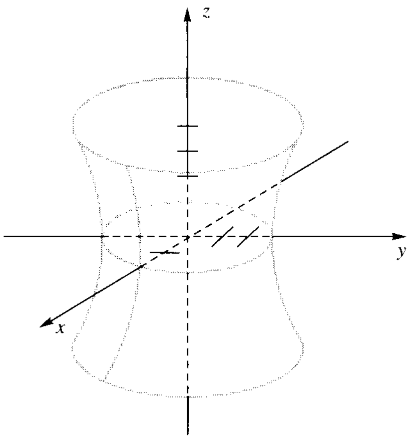


Figura 13

EJEMPLO 2 Analice la ecuación

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$$

y bosqueje su gráfica.

SOLUCIÓN Las trazas en los tres planos de coordenadas se obtienen haciendo $z = 0, y = 0$ y $x = 0$, respectivamente.

$$\text{plano } xy\text{:} \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \quad \text{una elipse}$$

$$\text{plano } xz\text{:} \quad \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1, \quad \text{una hipérbola}$$

$$\text{plano } yz\text{:} \quad \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1, \quad \text{una hipérbola}$$

Estas trazas se grafican en la figura 13. También mostramos las secciones transversales en los planos $z = 4$ y $z = -4$. Observe que al sustituir $z = \pm 4$ en la ecuación original obtenemos

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{16}{16} = 1$$

que es equivalente a

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{18} = 1$$

una elipse. ▨

EJEMPLO 3 Indique el nombre de la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones:

(a) $4x^2 + 4y^2 - 25z^2 + 100 = 0$

(b) $y^2 + z^2 - 12y = 0$

(c) $x^2 - z^2 = 0$

(d) $9x^2 + 4z^2 - 36y = 0$

SOLUCIÓN

(a) Al dividir ambos lados de esta ecuación entre -100 se obtiene la forma

$$-\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1$$

Su gráfica es un hiperboloide de dos hojas. No corta al plano xy, pero las secciones transversales en los planos paralelos a este plano (y al menos a 2 unidades de distancia de él) son circunferencias.

(b) La variable x no aparece, de modo que la gráfica es un cilindro paralelo al eje x. Como la ecuación se puede escribir en la forma $(y - 6)^2 + z^2 = 36$, su gráfica es un cilindro circular.

(c) Como falta la variable y, la gráfica es un cilindro. La ecuación dada se puede escribir como $(x - z)(x + z) = 0$; de modo que su gráfica consta de los dos planos $x = z$ y $x = -z$.

(d) La ecuación se puede escribir como

$$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = y$$

que tiene como gráfica un paraboloide elíptico. Es simétrico respecto al eje y. ▨

Revisión de conceptos

1. Las intersecciones de una superficie con los planos de coordenadas se llaman _______. Con mayor generalidad, las intersecciones con cualquier plano se llaman _______.

2. Al graficar las ecuaciones que implican sólo dos variables en el espacio tridimensional, éstas generan superficies llamadas _______. En particular, la gráfica de $x^2 + y^2 = 1$ es un cilindro circular recto común cuyo eje es el _______.

3. La gráfica de $3x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 12$ es una superficie llamada _______.

4. La gráfica de $4z = x^2 + 2y^2$ es una superficie llamada _______.

Conjunto de problemas 11.8

En los problemas del 1 al 20 indique el nombre y bosqueje la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones en el espacio tridimensional.

1. $4x^2 + 36y^2 = 144$ **2.** $y^2 + z^2 = 15$

3. $3x + 2z = 10$ **4.** $z^2 = 3y$

5. $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 13 = 0$

6. $2x^2 - 16z^2 = 0$

7. $4x^2 + 9y^2 + 49z^2 = 1764$

8. $9x^2 - y^2 + 9z^2 - 9 = 0$

9. $4x^2 + 16y^2 - 32z = 0$ **10.** $-x^2 + y^2 + z^2 = 0$

11. $y = e^{2z}$ **12.** $6x - 3y = \pi$

13. $x^2 - z^2 + y = 0$ **14.** $x^2 + y^2 - 4z^2 + 4 = 0$

15. $9x^2 + 4z^2 - 36y = 0$

16. $9x^2 + 25y^2 + 9z^2 = 225$

17. $5x + 8y - 2z = 10$ **18.** $y = \cos x$

19. $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ **20.** $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$

21. La gráfica de una ecuación en x, y y z es simétrica respecto del plano xy si al reemplazar z por $-z$ se obtiene una ecuación equivalente. ¿Qué condición conduce a una gráfica que es simétrica respecto a lo siguiente?

(a) El plano yz (b) El eje z (c) El origen

22. ¿Qué condición conduce a una gráfica que es simétrica respecto a lo siguiente?

(a) El plano xz (b) El eje y (c) El eje x

23. Determine la ecuación general de un elipsoide central que sea simétrico respecto a lo siguiente

(a) El origen (b) El eje x (c) El plano xy

24. Determine la ecuación general de un hiperboloide central de una hoja que sea simétrico respecto a lo siguiente

(a) El origen (b) El eje y (c) El plano xy

25. Determine la ecuación general de un hiperboloide central de dos hojas que sea simétrico respecto a lo siguiente

(a) El origen (b) El eje z (c) El plano yz

26. ¿Cuáles de las ecuaciones de los problemas del 1 al 20 tienen una gráfica que es simétrica respecto de lo siguiente?

(a) El plano xy (b) El eje z

27. Si la curva $z = x^2$, en el plano xz, gira en torno del eje z, la superficie resultante tiene la ecuación $z = x^2 + y^2$, obtenida como resultado de reemplazar x por $\sqrt{x^2 + y^2}$. Si $y = 2x^2$, en el plano xy, se gira en torno del eje y, ¿cuál es la ecuación de la superficie resultante?

28. Determine la ecuación de la superficie que se obtiene al girar la curva $z = 2y$, en el plano yz, en torno del eje z.

29. Determine la ecuación de la superficie que se obtiene al girar la curva $4x^2 + 3y^2 = 12$, en el plano xy, en torno del eje y.

30. Determine la ecuación de la superficie que se obtiene al girar la curva $4x^2 - 3y^2 = 12$, en el plano xy, en torno del eje x.

31. Determine las coordenadas de los focos de la elipse dada como la intersección de $z = x^2/4 + y^2/9$ con el plano $z = 4$.

32. Determine las coordenadas del foco de la parábola dada como la intersección de $z = x^2/4 + y^2/9$ con el plano $x = 4$.

33. Calcule el área de la sección transversal elíptica obtenida de la superficie $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ al ser cortada con el plano $z = h$, $-c < h < c$. *Recuerde: el* área de la elipse $x^2/A^2 + y^2/B^2 = 1$ es πAB.

34. Demuestre que el volumen del sólido acotado por el paraboloide elíptico $x^2/a^2 + y^2/b^2 = h - z$, $h > 0$, y el plano xy es $\pi abh^2/2$, es decir, el volumen es la mitad del área de la base por la altura. *Sugerencia:* use el método de las rebanadas de la sección 5.2.

35. Demuestre que la proyección en el plano xz de la curva dada como la intersección de las superficies $y = 4 - x^2$ y $y = x^2 + z^2$ es una elipse, y determine sus diámetros mayor y menor.

36. Bosqueje el triángulo en el plano $y = x$ que está arriba del plano $z = y/2$, por debajo del plano $z = 2y$, y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 8$. Luego calcule el área de este triángulo.

37. Demuestre que la espiral $\mathbf{r} = t \cos t\, \mathbf{i} + t \,\text{sen}\, t\, \mathbf{j} + t\, \mathbf{k}$ está en el cono circular $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. ¿En qué superficie está la espiral $\mathbf{r} = 3t \cos t\, \mathbf{i} + t \,\text{sen}\, t\, \mathbf{j} + t\, \mathbf{k}$?

38. Demuestre que la curva determinada por $r = t\, \mathbf{i} + t\, \mathbf{j} + t^2\, \mathbf{k}$ es una parábola y determine las coordenadas de su foco.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** trazas; secciones transversales **2.** cilindros; eje z **3.** elipsoide **4.** paraboloide elíptico

11.9
Coordenadas cilíndricas y esféricas

Proporcionar las coordenadas cartesianas (rectangulares) (x, y, z) es sólo una de muchas formas de especificar la posición de un punto en el espacio tridimensional. Otros dos tipos de coordenadas que desempeñan un papel importante en el cálculo son las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) y las coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ). El significado de los tres tipos de coordenadas se ilustra para el mismo punto P de la figura 1.

El **sistema de coordenadas cilíndricas** usa las coordenadas polares r y θ (sección 10.5) en vez de las coordenadas cartesianas x y y en el plano. La coordenada z es la misma que en coordenadas cartesianas. Por lo general, pediremos que $r \geq 0$, y restringiremos θ de modo que $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

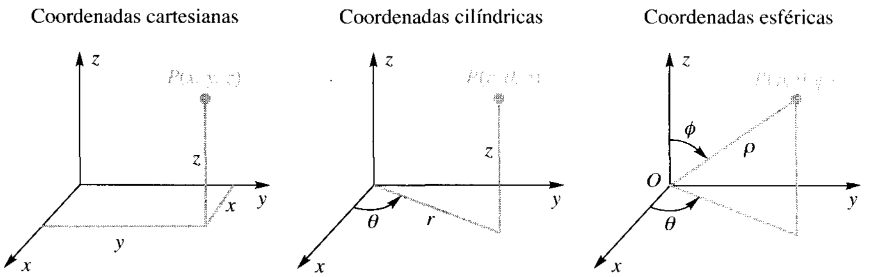
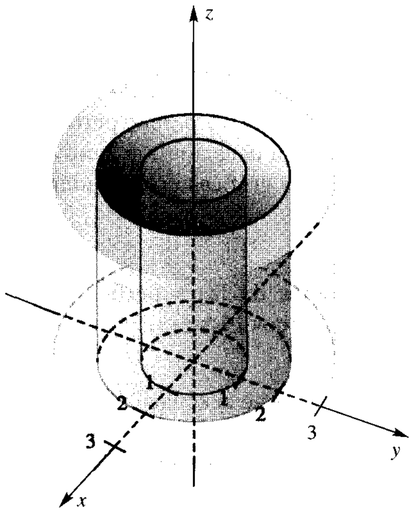


Figura 1

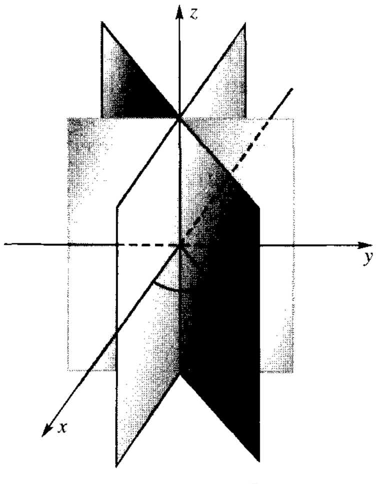
Un punto P tiene **coordenadas esféricas** (ρ, θ, ϕ), si ρ (rho) es la distancia $|OP|$ del origen a P, θ es el ángulo polar asociado con la proyección P' de P sobre el plano xy, y ϕ es el ángulo entre el eje z positivo y el segmento de recta OP. Pediremos que

$$\rho \geq 0, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi, \qquad 0 \leq \phi \leq \pi$$



Los cilindros $r = 1$, $r = 2$, $r = 3$

Figura 2



Los planos $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$

Figura 3

Coordenadas cilíndricas

Si un sólido o una superficie tienen un eje de simetría, con frecuencia es bueno orientarlo de modo que su eje sea el eje z, para luego usar coordenadas cilíndricas. En particular, observe la sencillez de la ecuación de un cilindro circular con eje de simetría en el eje z (figura 2) y la de un plano que contiene al eje z (véase la figura 3). En la figura 3 hemos permitido que $r < 0$.

Las coordenadas cilíndricas y cartesianas están relacionadas mediante las siguientes ecuaciones:

Cilíndricas a cartesianas	**Cartesianas a cilíndricas**
$x = r\cos\theta$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = r\,\text{sen}\,\theta$	$\tan\theta = y/x$
$z = z$	$z = z$

Con estas relaciones, podemos ir y regresar entre los dos sistemas de coordenadas.

EJEMPLO 1 Determine

(a) las coordenadas cartesianas del punto con coordenadas cilíndricas $(4, 2\pi/3, 5)$

(b) las coordenadas cilíndricas del punto con coordenadas cartesianas $(-5, -5, 2)$.

SOLUCIÓN

(a) $x = 4\cos\dfrac{2\pi}{3} = 4\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -2$

$$y = 4\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = 4\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}$$

$$z = 5$$

Así que las coordenadas cartesianas de $(4, 2\pi/3, 5)$ son $\left(-2, 2\sqrt{3}, 5\right)$.

(b) $$r = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{-5}{-5} = 1$$

$$z = 2$$

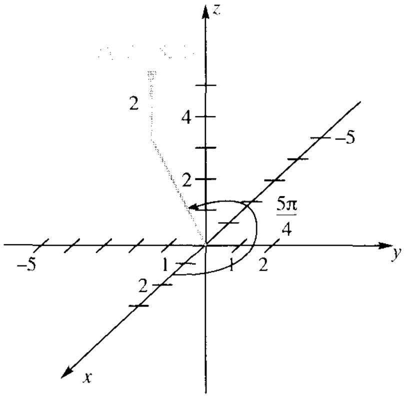


Figura 4

La figura 4 indica que θ está entre $\pi/2$ y π. Como $\tan\theta = 1$, debemos tener $\theta = 5\pi/4$. Las coordenadas cilíndricas de $(-5, -5, 2)$ son $\left(5\sqrt{2}, 5\pi/4, 2\right)$.

EJEMPLO 2 Determine las ecuaciones en coordenadas cilíndricas del paraboloide y el cilindro cuyas ecuaciones cartesianas son $x^2 + y^2 = 4 - z$ y $x^2 + y^2 = 2x$.

SOLUCIÓN

Paraboloide: $r^2 = 4 - z$

Cilindro: $r^2 = 2r\cos\theta$ o (de forma equivalente) $r = 2\cos\theta$

La división de una ecuación entre una variable crea la posibilidad de perder una solución. Por ejemplo, al dividir $x^2 = x$ entre x da $x = 1$ y se pierde la solución $x = 0$. De manera análoga, al dividir $r^2 = 2r\cos\theta$ entre r se obtiene $r = 2\cos\theta$ y parece perderse la solución $r = 0$ (el origen). Sin embargo, el origen satisface la ecuación $r = 2\cos\theta$ con coordenadas $(0, \pi/2)$. Así, $r^2 = 2r\cos\theta$ y $r = 2\cos\theta$ tienen gráficas polares idénticas (véase el recuadro CUIDADO al margen de la sección 10.5). ■

EJEMPLO 3 Determine las ecuaciones cartesianas de las superficies cuyas ecuaciones en coordenadas cilíndricas son $r^2 + 4z^2 = 16$ y $r^2\cos 2\theta = z$.

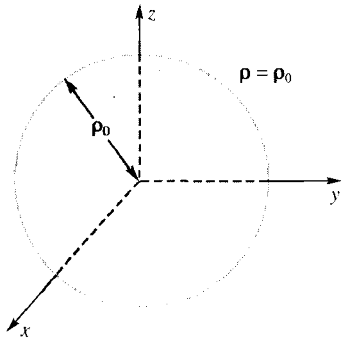


Figura 5

SOLUCIÓN Como $r^2 = x^2 + y^2$, la superficie $r^2 + 4z^2 = 16$ tiene la ecuación cartesiana $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ o $x^2/16 + y^2/16 + z^2/4 = 1$. Su gráfica es un elipsoide.

Como $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$, la segunda ecuación se puede escribir como $r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta = z$. En coordenadas cartesianas se convierte en $x^2 - y^2 = z$, cuya gráfica es un paraboloide hiperbólico. ■

Coordenadas esféricas

Cuando un sólido o una superficie son simétricos respecto a un punto, es muy probable que las coordenadas esféricas desempeñen un papel de simplificación. En particular, una esfera con centro en el origen (figura 5) tiene la ecuación sencilla $\rho = \rho_0$. Además, observe que la ecuación de un cono con eje a lo largo del eje z y vértice en el origen (véase la figura 6) es $\phi = \phi_0$.

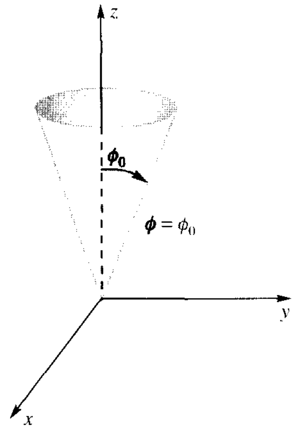


Figura 6

Es fácil determinar las relaciones entre coordenadas esféricas y cilíndricas y entre las coordenadas esféricas y cartesianas. La siguiente tabla muestra algunas de estas relaciones.

De esféricas a cartesianas	De cartesianas a esféricas
$x = \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta$	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
$y = \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$	$\tan\theta = y/x$
$z = \rho\cos\phi$	$\cos\phi = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

EJEMPLO 4 Determine las coordenadas cartesianas del punto P con coordenadas esféricas $(8, \pi/3, 2\pi/3)$.

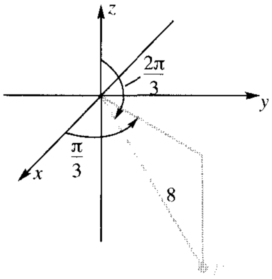


Figura 7

SOLUCIÓN En la figura 7 hemos trazado el punto P.

$$x = 8 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} = 8 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$y = 8 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = 8 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$$

$$z = 8 \cos \frac{2\pi}{3} = 8\left(-\frac{1}{2}\right) = -4$$

Así, P tiene coordenadas cartesianas $(2\sqrt{3}, 6, -4)$. ■

EJEMPLO 5 Describa la gráfica de $\rho = 2 \cos \phi$.

SOLUCIÓN Cambiamos a coordenadas cartesianas. Multiplicamos ambos lados por ρ para obtener

$$\rho^2 = 2\rho \cos \phi$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2z$$

$$x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$$

La gráfica es una esfera de radio 1 con centro en el punto con coordenadas cartesianas $(0, 0, 1)$. ■

EJEMPLO 6 Determine la ecuación del paraboloide $z = x^2 + y^2$ en coordenadas esféricas.

SOLUCIÓN Al sustituir x, y y z se obtiene

$$\begin{aligned}
\rho \cos \phi &= \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta \\
\rho \cos \phi &= \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) \\
\rho \cos \phi &= \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \\
\cos \phi &= \rho \operatorname{sen}^2 \phi \\
\rho &= \cos \phi \csc^2 \phi
\end{aligned}$$

Observe que $\phi = \pi/2$ da $\rho = 0$, lo cual muestra que no perdemos el origen cuando cancelamos ρ en el cuarto paso. ■

Coordenadas esféricas en geografía Los geógrafos y navegantes usan un sistema de coordenadas íntimamente relacionado con las coordenadas esféricas, el sistema de latitud y longitud. Suponga que la Tierra es una esfera con centro en el origen, que el eje z positivo pasa por el Polo Norte y que el eje x positivo pasa por el meridiano principal (el de Greenwich) (véase la figura 8). Por convención, las longitudes se especifican en grados al este o al oeste del meridiano de Greenwich, y las latitudes en grados al norte o al sur del ecuador. Es muy sencillo determinar las coordenadas esféricas a partir de estos datos.

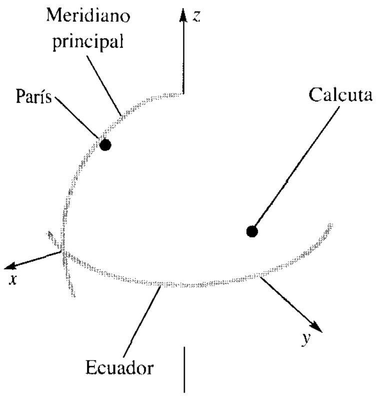


Figura 8

EJEMPLO 7 Suponiendo que la Tierra es una esfera de radio igual a 3960 millas, determine la distancia, siguiendo un círculo máximo, de París (longitud 2.2° E, latitud 48.4° N) a Calcuta (longitud 88.2° E, latitud 22.3° N).

SOLUCIÓN Primero calculamos los ángulos esféricos θ y ϕ para las dos ciudades.

París: $\theta = 2.2^\circ \approx 0.0384$ radianes

$\phi = 90^\circ - 48.4^\circ = 41.6^\circ \approx 0.7261$ radianes

Calcuta: $\theta = 88.2^\circ \approx 1.5394$ radianes

$\phi = 90^\circ - 22.3^\circ = 67.7^\circ \approx 1.1816$ radianes

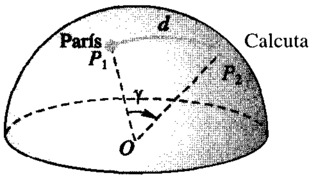


Figura 9

Usando estos datos y $\rho = 3960$ millas, determinamos las coordenadas cartesianas, como se muestra en el ejemplo 4.

París:	$P_1(2627.2, 100.9, 2961.3)$
Calcuta:	$P_2(115.1, 3662.0, 1502.6)$

A continuación, en relación con la figura 9, determinamos γ, el ángulo entre $\overrightarrow{OP}_1$ y $\overrightarrow{OP}_2$.

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{OP}_1 \cdot \overrightarrow{OP}_2}{\|\overrightarrow{OP}_1\|\|\overrightarrow{OP}_2\|} \approx \frac{(2627.2)(115.1) + (100.9)(3662) + (2961.3)(1502.6)}{(3960)(3960)}$$
$$\approx 0.3266$$

Así, $\gamma \approx 1.2381$ radianes y la distancia siguiendo un círculo máximo d es

$$d = \rho\gamma \approx (3960)(1.2381) \approx 4903 \text{ millas}$$ ■

Revisión de conceptos

1. En coordenadas cilíndricas, la gráfica de $r = 6$ es un(a) ______; en coordenadas esféricas, la gráfica de $\rho = 6$ es un(a) ______.

2. En coordenadas cilíndricas, la gráfica de $\theta = \pi/6$ es un(a) ______; en coordenadas esféricas, la gráfica de $\phi = \pi/6$ es un(a) ______.

3. La ecuación ______ relaciona ρ con r y z.

4. La ecuación $\rho^2 = 4\rho\cos\phi$ en coordenadas esféricas se convierte en la ecuación ______ cuando se escribe en coordenadas cartesianas.

Conjunto de problemas 11.9

1. Construya una tabla, como la que está justo antes del ejemplo 4, que proporciona las relaciones entre las coordenadas cilíndricas y las esféricas.

2. Cambie las siguientes coordenadas cilíndricas a coordenadas esféricas.

(a) $(1, \pi/2, 1)$ (b) $(-2, \pi/4, 2)$

3. Cambie las siguientes coordenadas cilíndricas a coordenadas cartesianas.

(a) $(6, \pi/6, -2)$ (b) $(4, 4\pi/3, -8)$

4. Cambie las siguientes coordenadas esféricas a coordenadas cartesianas.

(a) $(8, \pi/4, \pi/6)$ (b) $(4, \pi/3, 3\pi/4)$

5. Cambie las siguientes coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas.

(a) $\left(2, -2\sqrt{3}, 4\right)$ (b) $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{3}\right)$

6. Cambie las siguientes coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas.

(a) $(2, 2, 3)$ (b) $\left(4\sqrt{3}, -4, 6\right)$

En los problemas del 7 al 16 bosqueje la gráfica de la ecuación cilíndrica o esférica dada.

7. $r = 5$

8. $\rho = 5$

9. $\phi = \pi/6$

10. $\theta = \pi/6$

11. $r = 3\cos\theta$

12. $r = 2\,\text{sen}\,2\theta$

13. $\rho = 3\cos\phi$

14. $\rho = \sec\phi$

15. $r^2 + z^2 = 9$

16. $r^2\cos^2\theta + z^2 = 4$

En los problemas del 17 al 30 haga el cambio pedido en la ecuación dada.

17. $x^2 + y^2 = 9$ a coordenadas cilíndricas

18. $x^2 - y^2 = 25$ a coordenadas cilíndricas

19. $x^2 + y^2 + 4z^2 = 10$ a coordenadas cilíndricas

20. $x^2 + y^2 + 4z^2 = 10$ a coordenadas esféricas

21. $2x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 0$ a coordenadas esféricas

22. $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ a coordenadas esféricas

23. $r^2 + 2z^2 = 4$ a coordenadas esféricas

24. $\rho = 2\cos\phi$ a coordenadas cilíndricas

25. $x + y = 4$ a coordenadas cilíndricas

26. $x + y + z = 1$ a coordenadas esféricas

27. $x^2 + y^2 = 9$ a coordenadas esféricas

28. $r = 2\,\text{sen}\,\theta$ a coordenadas cartesianas

29. $r^2\cos 2\theta = z$ a coordenadas cartesianas

30. $\rho\,\text{sen}\,\phi = 1$ a coordenadas cartesianas

31. La parábola $z = 2x^2$ en el plano xz se hace girar alrededor del eje z. Escriba la ecuación de la superficie resultante en coordenadas cilíndricas.

32. La hipérbola $2x^2 - z^2 = 2$, en el plano xz, se hace girar alrededor del eje z. Escriba la ecuación de la superficie resultante en coordenadas cilíndricas.

🄲 **33.** Determine la distancia mediante círculos máximos entre St. Paul (longitud 93.1° O, latitud 45° N) y Oslo (longitud 10.5° E, latitud 59.6° N). Véase el ejemplo 7.

🄲 **34.** Determine la distancia mediante círculos máximos entre Nueva York (longitud 74° O, latitud 40.4° N) y Greenwich (longitud 0°, latitud 51.3° N).

🄲 **35.** Determine la distancia mediante círculos máximos entre St. Paul (longitud 93.1° O, latitud 45° N) y Turín, Italia (longitud 7.4° E, latitud 45° N).

🄲 **36.** ¿Cuál es la distancia a lo largo del paralelo a 45° entre St. Paul y Turín? Véase el problema 35.

🄲 **37.** ¿Qué tanto se acerca al Polo Norte la ruta del círculo máximo de St. Paul a Turín? Véase el problema 35.

38. Sean $(\rho_1, \theta_1, \phi_1)$ y $(\rho_2, \theta_2, \phi_2)$ las coordenadas esféricas de dos puntos y sea d la distancia en línea recta entre ellos. Demuestre que

$$d = \{(\rho_1 - \rho_2)^2 + 2\rho_1\rho_2[1 - \cos(\theta_1 - \theta_2)\operatorname{sen}\phi_1 \operatorname{sen}\phi_2 - \cos\phi_1 \cos\phi_2]\}^{1/2}$$

39. Sean (a, θ_1, ϕ_1) y (a, θ_2, ϕ_2) dos puntos sobre la esfera $\rho = a$. Demuestre (usando el problema 38) que la distancia mediante un círculo máximo entre este puntos es $a\gamma$, donde $0 \leq \gamma \leq \pi$ y

$$\cos\gamma = \cos(\theta_1 - \theta_2)\operatorname{sen}\phi_1 \operatorname{sen}\phi_2 + \cos\phi_1 \cos\phi_2$$

40. Como tal vez haya imaginado, hay una fórmula sencilla para expresar la distancia mediante círculos máximos directamente, en términos de la longitud y la latitud. Sean (α_1, β_1) y (α_2, β_2) las coordenadas de longitud y latitud de dos puntos sobre la superficie de la Tierra, donde interpretamos N y E como positivos y S y O como negativos. Demuestre que la distancia mediante un círculo máximo entre estos puntos es 3960γ millas, donde $0 \leq \gamma \leq \pi$ y

$$\cos\gamma = \cos(\alpha_1 - \alpha_2)\cos\beta_1 \cos\beta_2 + \operatorname{sen}\beta_1 \operatorname{sen}\beta_2$$

🄲 **41.** Use el problema 40 para determinar la distancia mediante un círculo máximo entre cada par de lugares.

(a) Nueva York y Greenwich (véase el problema 34)
(b) St. Paul y Turín (véase problema 35)
(c) Turín y el Polo Sur (utilice $\alpha_1 = \alpha_2$)
(d) Nueva York y Ciudad del Cabo (18.4° E, 33.9° S)
(e) Dos puntos en el ecuador con longitudes 100° E y 80° O, respectivamente.

42. Es fácil ver que la gráfica de $\rho = 2a\cos\phi$ es una esfera de radio a, situada en el plano xy en el origen. Pero, ¿cuál es la gráfica de $\rho = 2a\operatorname{sen}\phi$?

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** cilindro circular; esfera **2.** plano; cono **3.** $\rho^2 = r^2 + z^2$ **4.** $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$

11.10 Repaso del capítulo

Examen de conceptos

Responda con verdadero o falso a cada una de las siguientes afirmaciones. Prepárese para justificar su respuesta.

1. Cada punto del espacio tridimensional tiene un conjunto único de coordenadas cartesianas.

2. La ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 9 = 0$ representa una esfera.

3. La ecuación lineal $Ax + By + Cz = D$ representa un plano en el espacio tridimensional, siempre que A, B y C no sean todos iguales a cero.

4. En el espacio tridimensional, la ecuación $Ax + By = C$ representa una recta.

5. Los planos $3x - 2y + 4z = 12$ y $3x - 2y + 4z = -12$ son paralelos y están a 24 unidades de distancia.

6. El vector $\langle 1, -2, 3 \rangle$ es paralelo al plano $2x - 4y + 6z = 5$.

7. La recta $x = 2t - 1$, $y = 4t + 2$, $z = 6t - 5$ pasa por el punto $(0, 4, -2)$.

8. Si $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ es un vector unitario, entonces a, b y c son los cosenos directores de $\mathbf{u}$.

9. Los vectores $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y $6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ son perpendiculares.

10. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores unitarios, entonces el ángulo θ entre ellos satisface $\cos\theta = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

11. El producto punto para vectores satisface la ley asociativa.

12. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores cualesquiera, entonces $\|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$.

13. $\|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$ para vectores no nulos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, si y sólo si $\mathbf{u}$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{v}$.

14. Si $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$, entonces $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

15. Si $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ son perpendiculares, entonces $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$.

16. Para cualesquiera dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$,

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

17. La función con valores vectoriales $\langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ es continua en $t = a$ si y sólo si f, g y h son continuas en $t = a$.

18. $D_t[\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{F}(t)] = 2\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{F}'(t)$.

19. Para cualquier vector $\mathbf{u}$, $\| \|\mathbf{u}\|\mathbf{u} \| = \|\mathbf{u}\|^2$.

20. Para cualquier vector $\mathbf{u}$, $\|\mathbf{u}\| \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \|\mathbf{u}\|$.

21. Para todos los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{v} \times \mathbf{u}\|$.

22. Si $\mathbf{u}$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{v}$, entonces $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

23. El producto cruz de dos vectores unitarios es un vector unitario.

24. Al multiplicar cada componente de un vector $\mathbf{v}$ por el escalar a se multiplica la longitud de $\mathbf{v}$ por a.

25. Para cualesquiera vectores no nulos y no perpendiculares $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ con ángulo θ entre ellos, $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|/(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \tan\theta$.

26. Si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ y $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{u}$ o $\mathbf{v}$ es $\mathbf{0}$.

27. El volumen del paralelepípedo determinado por $2\mathbf{i}$, $2\mathbf{j}$ y $\mathbf{j} \times \mathbf{i}$ es 4.

28. Para todos los vectores **u**, **v** y **w**,

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$$

29. Si $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ es un vector en el plano $b_1x + b_2y + b_3z = 0$, entonces $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$.

30. Cualquier recta se puede representar mediante ecuaciones paramétricas y ecuaciones simétricas.

31. Cuando $\kappa(t) = 0$ para toda t, la trayectoria es una línea recta.

32. Una elipse tiene su curvatura máxima en los puntos del eje mayor.

33. La curvatura depende de la forma de la curva y de la rapidez con que uno se mueve a lo largo de la curva.

34. La curvatura de la curva determinada por $x = 3t + 4$ y $y = 2t - 1$ es cero para toda t.

35. La curvatura de la curva determinada por $x = 2 \cos t$ y $y = 2$ sen t es 2 para toda t.

36. Si $\mathbf{T} = \mathbf{T}(t)$ es un vector tangente unitario para una curva suave, entonces $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{T}'(t)$ son perpendiculares.

37. Si $v = \|\mathbf{v}\|$ es la rapidez de una partícula que se mueve a lo largo de una curva suave, entonces $|dv/dt|$ es la magnitud de la aceleración.

38. Si $y = f(x)$ y $y'' = 0$ en todas partes, entonces la curvatura de ésta es cero.

39. Si $y = f(x)$ y y'' es una constante, entonces la curvatura de esta curva es constante.

40. Si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, entonces $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, o ambas **u** y **v** son **0**.

41. Si $\|\mathbf{r}(t)\| = 1$ para toda t, entonces $\|\mathbf{r}'(t)\| =$ constante.

42. Si $\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t) =$ constante, entonces $\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}'(t) = 0$.

43. Para un movimiento a lo largo de la hélice, **N** siempre apunta hacia el eje z.

44. Si la velocidad del movimiento a lo largo de la curva tiene magnitud constante, entonces no puede haber aceleración.

45. **T**, **N** y **B** dependen sólo de la forma de la curva y no de la rapidez del movimiento a lo largo de ella.

46. Si **v** es perpendicular a **a**, entonces la rapidez de movimiento a lo largo de la curva debe ser constante.

47. Si **v** es perpendicular a **a**, entonces la trayectoria del movimiento debe ser una circunferencia.

48. Las únicas curvas con curvatura constante son las líneas rectas y las circunferencias.

49. Las curvas dadas por $\mathbf{r}_1(t) = \text{sen}\, t\, \mathbf{i} + \cos t\, \mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}_2(t) = \text{sen}\, t^3\mathbf{i} + \cos t^3\mathbf{j} + t^9\mathbf{k}$ para $0 \le t \le 1$ son idénticas.

50. Los movimientos a lo largo de las curvas dadas por $\mathbf{r}_1(t) = \text{sen}\, t\, \mathbf{i} + \cos t\, \mathbf{j} + t^3\, \mathbf{k}$ y $\mathbf{r}_2(t) = \text{sen}\, t^3\mathbf{i} + \cos t^3\mathbf{j} + t^9\mathbf{k}$ para $0 \le t \le 1$ son idénticos.

51. La longitud de una curva dada es independiente de la parametrización utilizada para describir la curva.

52. Si una curva está sobre un plano, entonces el vector binormal **B** debe ser constante.

53. Si $\|\mathbf{r}(t)\| =$ constante, entonces $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{0}$.

54. La curva dada como la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el plano $ax + by + cz = 0$ tiene curvatura constante 1.

55. La gráfica de la ecuación $\phi = 0$ es el eje z (en este caso, ϕ es una coordenada esférica).

56. La gráfica de $y = x^2$ en el espacio tridimensional es un paraboloide.

57. Si restringimos ρ, θ y ϕ de modo que $\rho \ge 0, 0 \le \theta < 2\pi$ y $0 \le \phi \le \pi$, entonces cada punto del espacio tridimensional tiene un conjunto único de coordenadas esféricas.

Problemas de examen

1. Determine la ecuación de la esfera con $(-2, 3, 3)$ y $(4, 1, 5)$ como extremos de un diámetro.

2. Determine el centro y el radio de la esfera con ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 8z = 0$.

3. Sean $a = \langle 2, -5\rangle$, $b = \langle 1, 1\rangle$ y $c = \langle -6, 0\rangle$. Determine cada uno de lo siguiente:

(a) $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ (b) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
(c) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (d) $(4\mathbf{a} + 5\mathbf{b}) \cdot 3\mathbf{c}$
(e) $\|\mathbf{c}\|\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}$ (f) $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} - \|\mathbf{c}\|$

4. Determine el coseno del ángulo entre **a** y **b** y haga un bosquejo de los vectores.

(a) $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \mathbf{b} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
(b) $\mathbf{a} = -5\mathbf{i} - 3\mathbf{j}, \mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$
(c) $\mathbf{a} = \langle 7, 0\rangle, \mathbf{b} = \langle 5, 1\rangle$

5. Sean $a = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Determine cada uno de lo siguiente, si es que están definidos.

(a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ (b) $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$
(c) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ (d) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$
(e) $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$ (f) $\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\|$

6. Determine el ángulo entre cada pareja de vectores.

(a) $\mathbf{a} = \langle 1, 5, -1\rangle, \mathbf{b} = \langle 0, 1, 3\rangle$
(b) $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

7. Bosqueje los dos vectores de posición $a = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. Luego encuentre lo siguiente:

(a) sus longitudes
(b) sus cosenos directores
(c) el vector unitario con la misma dirección que **a**
(d) el ángulo θ entre **a** y **b**

8. Sean $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Determine lo siguiente:

(a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (b) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
(c) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ (d) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

9. Determine todos los vectores perpendiculares a los dos vectores $3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

10. Obtenga los vectores unitarios perpendiculares al plano determinado por los tres puntos $(3, -6, 4)$, $(2, 1, 1)$ y $(5, 0, -2)$.

11. Escriba la ecuación del plano que pasa por el punto $(-5, 7, -2)$ y que satisface cada condición.

(a) Paralelo al plano xz
(b) Perpendicular al eje x
(c) Paralelo a los ejes x y y
(d) Paralelo al plano $3x - 4y + z = 7$

12. Un plano que pasa por $(2, -4, -5)$ es perpendicular a la recta que une los puntos $(-1, 5, -7)$ y $(4, 1, 1)$.

(a) Escriba una ecuación vectorial para el plano.

(b) Determine una ecuación cartesiana para el plano.

(c) Bosqueje el plano dibujando sus trazas.

13. Determine el valor de C tal que el plano $x + 5y + Cz + 6 = 0$, sea perpendicular al plano $4x - y + z - 17 = 0$.

14. Determine una ecuación cartesiana para el plano que pasa por los tres puntos $(2, 3, -1)$, $(-1, 5, 2)$ y $(-4, -2, 2)$.

15. Determine ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por $(-2, 1, 5)$ y $(6, 2, -3)$.

16. Determine los puntos donde la recta de intersección de los planos $x - 2y + 4z - 14 = 0$ y $-x + 2y - 5z + 30 = 0$ corta a los planos yz y xz.

17. Escriba la ecuación de la recta del problema 16 en forma paramétrica.

18. Determine ecuaciones simétricas para la recta que pasa por $(4, 5, 8)$ y es perpendicular al plano $3x + 5y + 2z = 30$. Bosqueje el plano y la recta.

19. Escriba una ecuación vectorial para la recta que pasa por $(2, -2, 1)$ y $(-3, 2, 4)$.

20. Bosqueje la curva cuya ecuación vectorial es $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}$, $-2 \le t \le 3$.

21. Determine las ecuaciones simétricas para la recta tangente a la curva del problema 20 en el punto donde $t = 2$. Además, determine la ecuación del plano normal en este punto.

22. Determine $\mathbf{r}'(\pi/2)$, $\mathbf{T}(\pi/2)$, y $\mathbf{r}''(\pi/2)$ if

$$\mathbf{r}(t) = \langle t \cos t, t \operatorname{sen} t, 2t \rangle$$

23. Calcule la longitud de la curva

$$\mathbf{r}(t) = e^t \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + e^t \cos t\,\mathbf{j} + e^t\,\mathbf{k}, \qquad 1 \le t \le 5$$

24. Dos fuerzas $\mathbf{F}_1 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{F}_2 = 3\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$ se aplican en un punto. ¿Qué fuerza $\mathbf{F}$ debe aplicarse en el punto para contrarrestar la resultante de estas dos fuerzas?

25. ¿Qué rumbo y qué velocidad (con aire en calma) se requieren para que un aeroplano vuele a 450 millas por hora en dirección norte, si sopla un viento de 100 millas por hora en la dirección N 60° E?

26. Si $\mathbf{r}(t) = \langle e^{2t}, e^{-t} \rangle$, determine cada uno de lo siguiente:

(a) $\lim\limits_{t \to 0} \mathbf{r}(t)$ (b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\mathbf{r}(0 + h) - \mathbf{r}(0)}{h}$

(c) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \mathbf{r}(t)\,dt$ (d) $D_t[t\mathbf{r}(t)]$

(e) $D_t[\mathbf{r}(3t + 10)]$ (f) $D_t[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t)]$

27. Calcule $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$ para cada uno de lo siguiente:

(a) $\mathbf{r}(t) = (\ln t)\mathbf{i} - 3t^2\mathbf{j}$ (b) $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos 2t\,\mathbf{j}$

(c) $\mathbf{r}(t) = \tan t\,\mathbf{i} - t^4\mathbf{j}$

28. Suponga que un objeto se mueve de modo que su vector de posición en el instante t es

$$\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}$$

Determine $\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{a}(t)$ y $\kappa(t)$ en $t = \ln 2$.

29. Si $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ es el vector de posición de una partícula móvil en el instante t, determine los componentes tangencial y normal a_T y a_N, del vector aceleración en $t = 1$.

Para cada ecuación en los problemas del 30 al 38 indique el nombre y bosqueje la gráfica en el espacio tridimensional.

30. $x^2 + y^2 = 81$ **31.** $x^2 + y^2 + z^2 = 81$

32. $z^2 = 4y$ **33.** $x^2 + z^2 = 4y$

34. $3y - 6z - 12 = 0$ **35.** $3x + 3y - 6z - 12 = 0$

36. $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$

37. $3x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 36 = 0$

38. $3x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 36 = 0$

39. Escriba las siguientes ecuaciones cartesianas por medio de coordenadas cilíndricas.

(a) $x^2 + y^2 = 9$ (b) $x^2 + 4y^2 = 16$

(c) $x^2 + y^2 = 9z$ (d) $x^2 + y^2 + 4z^2 = 10$

40. Determine la ecuación cartesiana correspondiente a cada una de las siguientes ecuaciones en coordenadas cilíndricas.

(a) $r^2 + z^2 = 9$ (b) $r^2 \cos^2 \theta + z^2 = 4$

(c) $r^2 \cos 2\theta + z^2 = 1$

41. Escriba las siguientes ecuaciones por medio de coordenadas esféricas.

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (b) $2x^2 + 2y^2 - 2z^2 = 0$

(c) $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ (d) $x^2 + y^2 = z$

42. Determine la distancia (en línea recta) entre los puntos cuyas coordenadas esféricas son $(8, \pi/4, \pi/6)$ y $(4, \pi/3, 3\pi/4)$.

43. Determine la distancia entre los planos paralelos $2x - 3y + \sqrt{3}z = 4$ y $2x - 3y + \sqrt{3}z = 9$.

44. Determine el ángulo agudo entre los planos $2x - 4y + z = 7$ y $3x + 2y - 5z = 9$

45. Demuestre que si la rapidez de una partícula en movimiento es constante, entonces sus vectores de velocidad y aceleración son ortogonales.

PROBLEMAS DE REPASO E INTRODUCCIÓN

En los problemas del 1 al 4 bosqueje una gráfica del cilindro o de la superficie cuádrica.

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 64$

2. $x^2 + z^2 = 4$

3. $z = x^2 + 4y^2$

4. $z = x^2 - y^2$

En los problemas del 5 al 8 determine la derivada que se indica.

5. (a) $\frac{d}{dx}2x^3$ (b) $\frac{d}{dx}5x^3$

(c) $\frac{d}{dx}kx^3$ (d) $\frac{d}{dx}ax^3$

6. (a) $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} 2x$ (b) $\frac{d}{dt}\operatorname{sen} 17t$

(c) $\frac{d}{dt}\operatorname{sen} at$ (d) $\frac{d}{dt}\operatorname{sen} bt$

7. (a) $\frac{d}{da}\operatorname{sen} 2a$ (b) $\frac{d}{da}\operatorname{sen} 17a$

(c) $\frac{d}{da}\operatorname{sen} ta$ (d) $\frac{d}{da}\operatorname{sen} sa$

8. (a) $\frac{d}{dt}e^{4t+1}$ (b) $\frac{d}{dx}e^{-7x+4}$

(c) $\frac{d}{dx}e^{ax+b}$ (d) $\frac{d}{dx}e^{tx+s}$

En los problemas del 9 al 12 indique si la función es continua y si es diferenciable en el punto dado.

9. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ en $x = 2$

10. $f(x) = \tan x$ en $x = \pi/2$

11. $f(x) = |x - 4|$ en $x = 4$

12. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en $x = 0$

En los problemas 13 y 14 determine los valores máximo y mínimo de la función en el intervalo dado. Utilice el criterio de la segunda derivada para determinar si cada punto estacionario es un máximo o un mínimo.

13. $f(x) = 3x - (x - 1)^3$ en $[0, 4]$

14. $f(x) = x^4 - 18x^3 + 113x^2 - 288x + 252$ en $[2, 6]$

15. Un bote se construirá en forma de cilindro circular recto de altura h y radio r. Determine el área de la superficie del bote (incluyendo la base y la tapa), sólo como función de r, si el volumen será de 8 pies cúbicos.

16. Una caja tridimensional sin tapa se fabricará de un material que tiene un costo, para los lados, de \$1 por pie cuadrado y para la base, de \$3 por pie cuadrado. La caja tendrá una capacidad de 27 pies cúbicos. Sean l, w y h, respectivamente, la longitud, ancho y altura de la caja. Como la caja debe contener 27 pies cúbicos, debemos tener $lwh = 27$, o de forma equivalente, $h = 27/(lw)$. Utilice esta expresión para h, a fin de encontrar una fórmula para el costo de una caja que tiene longitud l y ancho w.

CAPÍTULO 12 Derivadas para funciones de dos o más variables

12.1 Funciones de dos o más variables
12.2 Derivadas parciales
12.3 Límites y continuidad
12.4 Diferenciabilidad
12.5 Derivadas direccionales y gradientes
12.6 La regla de la cadena
12.7 Planos tangentes y aproximaciones
12.8 Máximos y mínimos
12.9 Método de multiplicadores de Lagrange
12.10 Repaso del capítulo

12.1

Funciones de dos o más variables

Hasta ahora hemos enfatizado dos tipos de funciones. El primero, ejemplificado por $f(x) = x^2$, asocia al número real x otro número real $f(x)$. Le llamamos una función real de una variable real. El segundo tipo de función, ilustrado por $\mathbf{f}(x) = \langle x^3, e^x \rangle$, asocia al número real x un vector $\mathbf{f}(x)$. Le llamamos una función vectorial de una variable real.

Ahora nos fijaremos en una **función real de dos variables reales**, es decir, una función f (figura 1) que asigna a cada pareja ordenada (x, y) en algún conjunto D del plano un (único) número real $f(x, y)$. Dos ejemplos son:

(1) $$f(x, y) = x^2 + 3y^2$$

(2) $$g(x, y) = 2x\sqrt{y}$$

Observe que $f(-1, 4) = (-1)^2 + 3(4)^2 = 49$ y $g(-1, 4) = 2(-1)\sqrt{4} = -4$.

El conjunto D es el **dominio** de la función. Si éste no se especifica, consideramos a D como el dominio natural, es decir, el conjunto de todos los puntos (x, y) en el plano para los cuales la regla de la función tiene sentido y proporciona un valor numérico real. Para $f(x, y) = x^2 + 3y^2$, el dominio natural es todo el plano; para $g(x, y) = 2x\sqrt{y}$, es $\{(x, y): -\infty < x < \infty, y \geq 0\}$. El **rango** de una función es su conjunto de valores. Si $z = f(x, y)$, decimos que x y y son las **variables independientes** y z es la **variable dependiente**.

Todo lo que hemos dicho se extiende de manera natural a funciones reales de tres variables reales (o hasta de n variables reales). Nos sentiremos con la libertad de usar tales funciones sin mayores comentarios.

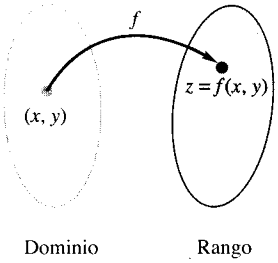


Figura 1

EJEMPLO 1 En el plano xy, bosqueje el dominio natural de

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{y - x^2}}{x^2 + (y - 1)^2}$$

SOLUCIÓN Para que esta regla tenga sentido, debemos excluir a $\{(x, y): y < x2\}$ y al punto $(0, 1)$. El dominio resultante se muestra en la figura 2. ■

Gráficas Por la **gráfica** de una función f de dos variables entendemos la gráfica de la ecuación $z = f(x, y)$. Esta gráfica será, por lo general, una superficie (figura 3) y, como a cada (x, y) del dominio le corresponde únicamente un valor z, cada recta perpendicular al plano xy corta a la superficie en a lo más un punto.

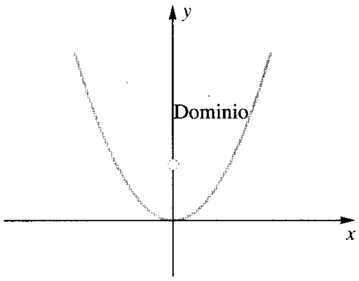


Figura 2

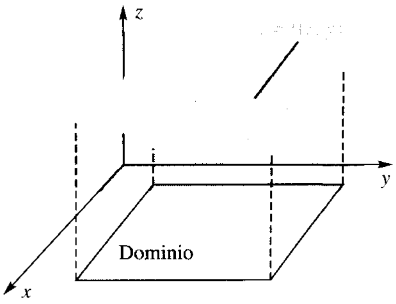


Figura 3

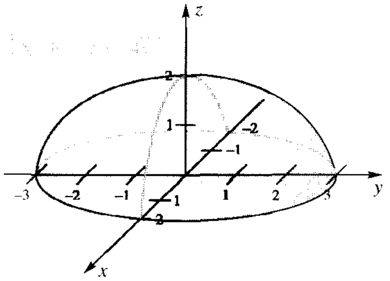


Figura 4

EJEMPLO 2 Bosqueje la gráfica de $f(x, y) = \frac{1}{3}\sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$.

SOLUCIÓN Sea $z = \frac{1}{3}\sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$ y observe que $z \geq 0$. Si elevamos al cuadrado ambos lados y simplificamos, obtenemos la ecuación

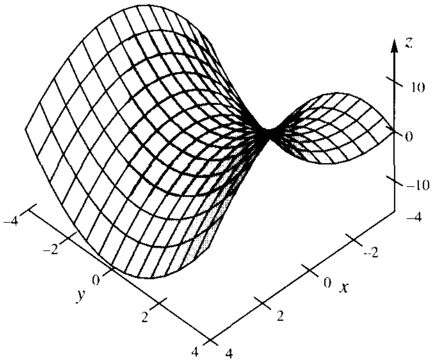
$$9x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$$

que reconocemos como la ecuación de un elipsoide (véase la sección 11.8). La gráfica de la función dada es la mitad superior de este elipsoide; se muestra en la figura 4. ■

EJEMPLO 3 Bosqueje la gráfica de $z = f(x, y) = y^2 - x^2$.

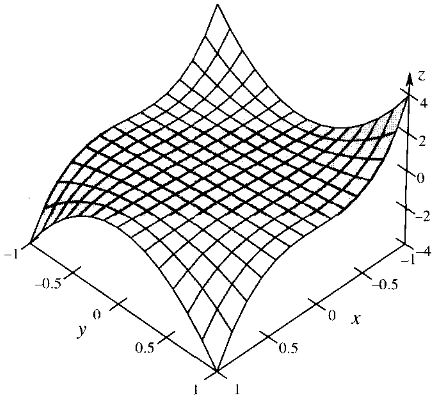
SOLUCIÓN La gráfica es un paraboloide hiperbólico (véase la sección 11.8) y ésta aparece en la figura 5. ■

Gráficas por computadora Varios paquetes de software, entre ellos *Maple* y *Mathematica*, pueden producir gráficas tridimensionales complicadas con facilidad. En las figuras de la 6 a la 9 le mostramos cuatro de tales gráficas. Con frecuencia, como en estos cuatro ejemplos, optamos por mostrar la gráfica con el eje y apuntando parcialmente hacia el observador, en vez de mantenerlo en el plano del papel. Además, con frecuencia mostramos los ejes en un marco en torno al exterior de la gráfica, en vez de su posición usual, que podría interferir con nuestra vista de la gráfica. La variable (x o y) que indica el eje, se coloca cerca del centro del eje que representa.



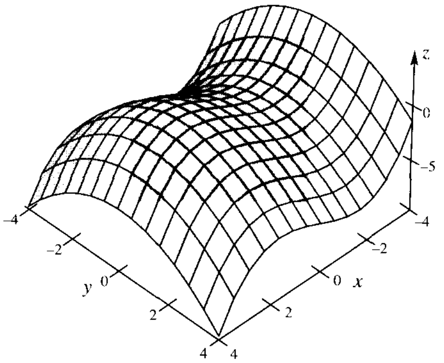
$z = y^2 - x^2$

Figura 5



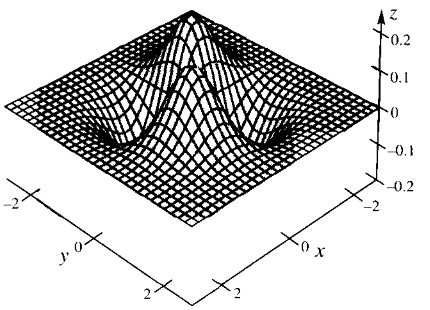
$z = -4x^3y^2$

Figura 6



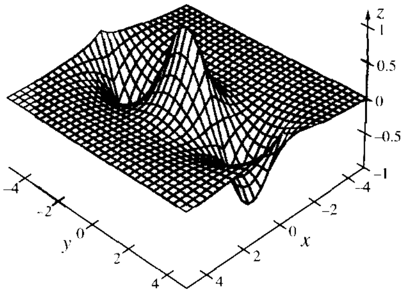
$z = x - \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{3}y^2$

Figura 7



$z = xy\ \exp(-x^2 - y^2)$

Figura 8



$z = e^{-|x|}\cos\sqrt{x^2 + y^2}$

Figura 9

Curvas de nivel Con frecuencia, bosquejar la superficie correspondiente a la gráfica de una función $z = f(x, y)$ de dos variables es una tarea difícil. Los fabricantes de mapas nos proporcionan otra forma, por lo general más sencilla, de dibujar una superficie: el mapa de contornos. Cada plano horizontal $z = c$ interseca a la superficie en una curva. La proyección de esta curva sobre el plano xy es una **curva de nivel** (figura 10) y una colección de tales curvas es una **gráfica de contorno** o **mapa de contorno**. En la figura 11 mostramos un mapa de contorno para una superficie con forma de colina.

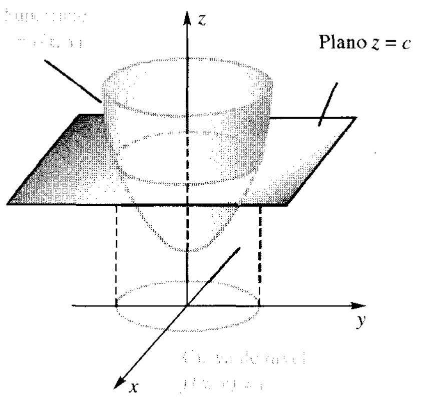


Figura 10

Con frecuencia mostraremos los contornos sobre la propia gráfica tridimensional, como en el diagrama superior de la figura 11. Al hacer esto, por lo general haremos que el eje y se aleje del observador y el eje x vaya a la derecha. Esto nos ayudará a ver la relación entre la gráfica tridimensional y la gráfica de contorno.

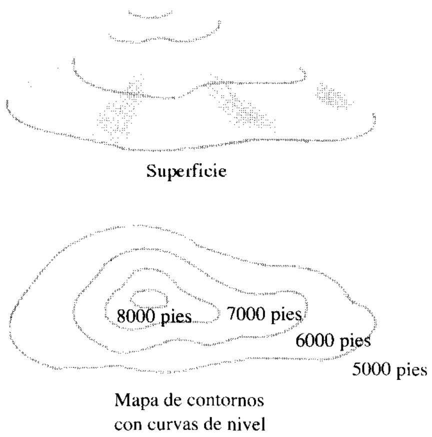


Figura 11

EJEMPLO 4 Trace los mapas de contorno para las superficies correspondientes a $z = \frac{1}{3}\sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$ y $z = y^2 - x^2$ (véanse los ejemplos 2 y 3, y las figuras 4 y 5).

SOLUCIÓN Las curvas de nivel de $z = \frac{1}{3}\sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$ correspondientes a $z = 0$, 1, 1.5, 1.75, 2 aparecen en la figura 12. Son elipses. De manera análoga, en la figura 13 mostramos las curvas de nivel de $z = y^2 - x^2$ para $z = -5, -4, -3, \ldots, 2, 3, 4$. Estas curvas son hipérbolas, a menos que $z = 0$. La curva de nivel para $z = 0$ es un par de rectas que se intersecan. ■

Mapa de contornos $z = \frac{1}{3}\sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$

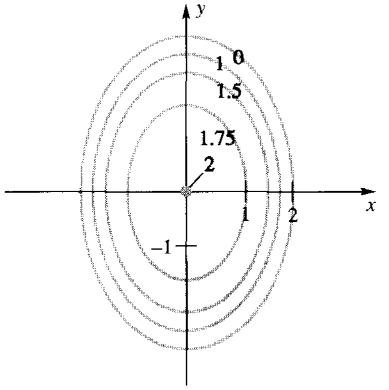


Figura 12

Mapa de contornos $z = y^2 - x^2$

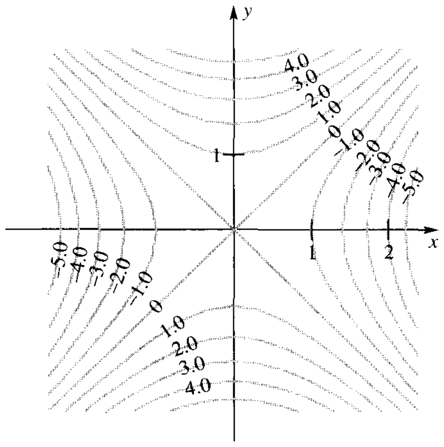


Figura 13

EJEMPLO 5 Bosqueje un mapa de contorno para $z = f(x, y) = xy$.

SOLUCIÓN Las curvas de nivel correspondientes a $z = -4, -1, 0, 1, 4$ aparecen en la figura 14. Se puede mostrar que son hipérbolas. Al comparar el mapa de contorno de la figura 14 con el de la figura 13, se sugiere que la gráfica de $z = xy$ podría ser un paraboloide hiperbólico, pero con los ejes rotados 45°. La sugerencia es correcta. ■

Mapa de contornos $z = xy$

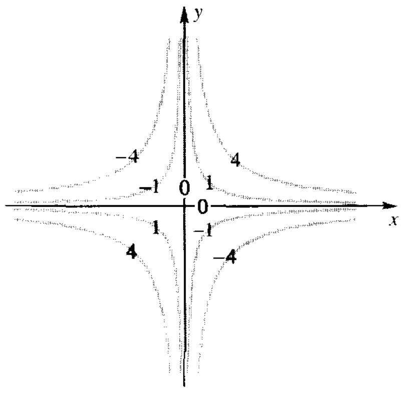


Figura 14

Gráficas por computadora y curvas de nivel En las figuras de la 15 a la 19 hemos trazado otras cinco superficies, pero ahora también mostramos las curvas de nivel correspondientes. Una tercera gráfica es una gráfica tridimensional, con las curvas de nivel en la superficie. Observe que hemos girado el plano xy de modo que el eje x apunte hacia la derecha, facilitando la relación entre la superficie y las curvas de nivel.

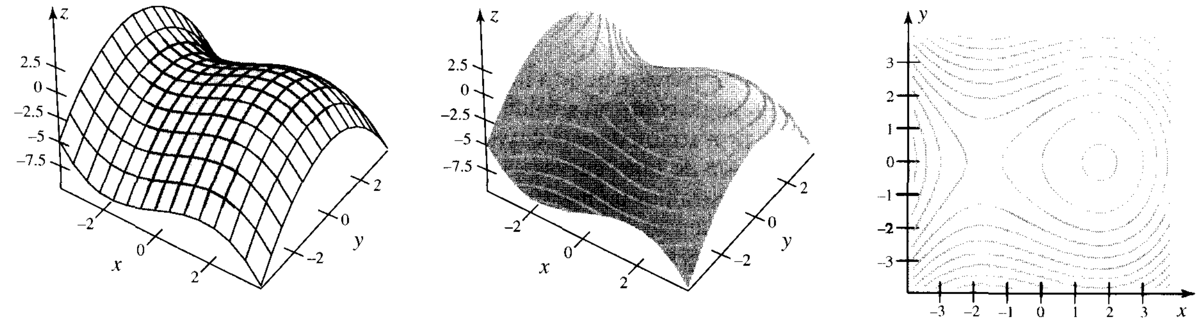
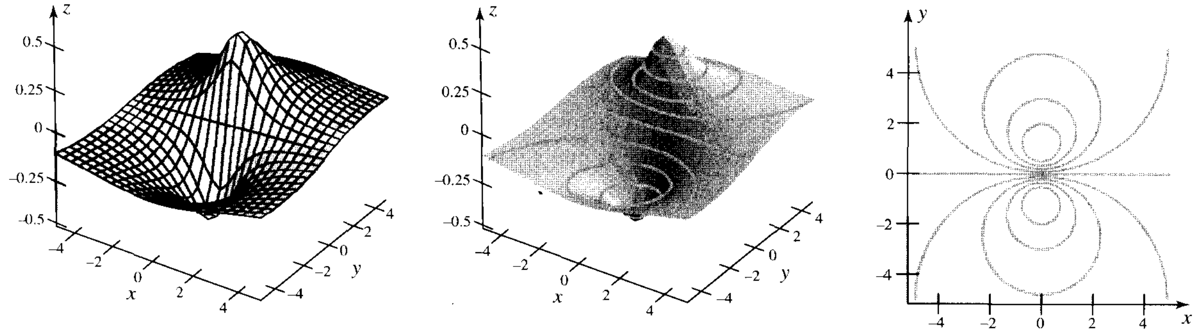


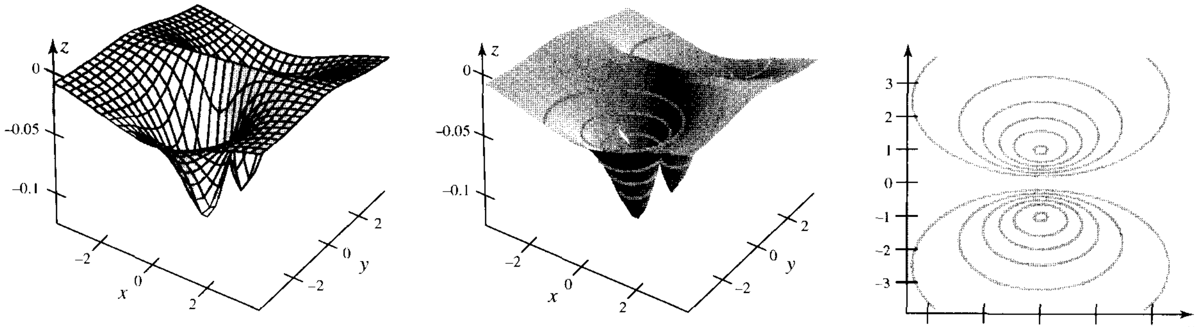
Figura 15

$$z = x - (\tfrac{1}{9})x^3 - (\tfrac{1}{2})y^2 \qquad \begin{cases} -3.8 \le x \le 3.8 \\ -3.8 \le y \le 3.8 \end{cases}$$



$$z = \frac{y}{(1 + x^2 + y^2)} \qquad \begin{cases} -5 \le x \le 5 \\ -5 \le y \le 5 \end{cases}$$

Figura 16



$$z = -1 + \cos\left(\frac{y}{1 + x^2 + y^2}\right) \qquad \begin{cases} -3.8 \le x \le 3.8 \\ -3.8 \le y \le 3.8 \end{cases}$$

Figura 17

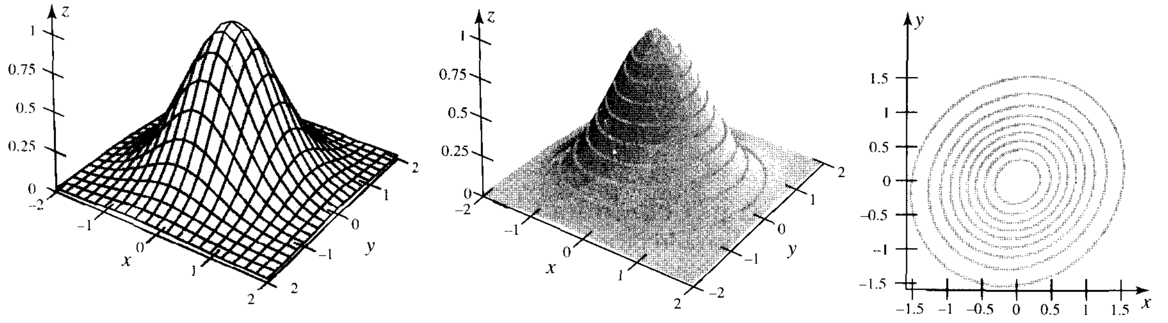
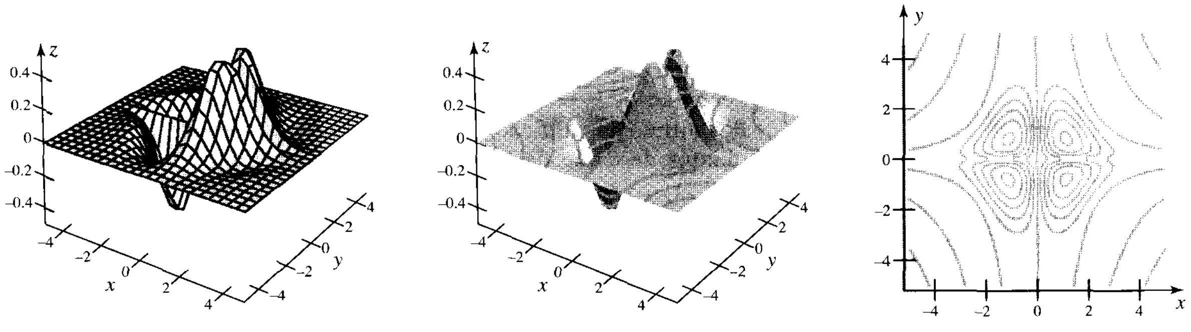


Figura 18

$$z = e^{-x^2 - y^2 + xy/4} \qquad \begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ -2 \le y \le 2 \end{cases}$$



$z = e^{-(x^2+y^2)/4}\,\mathrm{sen}(x\sqrt{|y|})$ $\quad \begin{cases} -5 \le x \le 5 \\ -5 \le y \le 5 \end{cases}$

Figura 19

Aplicaciones de las gráficas de contorno Con frecuencia, los mapas de contorno se utilizan para mostrar condiciones climáticas, o de otros tipos, en diversos puntos de un mapa. Por ejemplo, la temperatura varía de un punto a otro. Podemos pensar en $T(x, y)$ como igual a la temperatura en la posición (x, y). Las curvas de nivel para temperaturas iguales se llaman **isotermas** o **curvas isotermas**. La figura 20 muestra un mapa de isotermas para Estados Unidos.

El 9 de abril de 1917, un fuerte terremoto con epicentro cercano al río Mississipi, justo al sur de San Luis, se sintió tan al norte como Iowa y tan al sur como Mississipi. La intensidad de un terremoto se mide de I a XII, donde los números mayores corresponden a un terremoto más severo. Un terremoto de magnitud VI provocaría un daño físico a las estructuras. La figura 21 muestra un ejemplo de otro tipo de mapa de contorno. Si pensamos la intensidad I como una función de la posición (x, y), entonces podemos ilustrar la intensidad del terremoto usando un mapa cuyas curvas de nivel correspondan a intensidades iguales. Las curvas con intensidad constante se llaman **curvas isosísmicas**. La figura 21 muestra que las regiones que experimentaron una intensidad VI incluyen el área de San Luis y una franja en el sureste de Missouri. La mayor parte del este de Missouri y el suroeste de Illinois experimentaron una intensidad entre V y VI. Como Kansas City y Memphis están cerca de la misma curva isosísmica, la intensidad fue casi la misma en ambas ciudades.

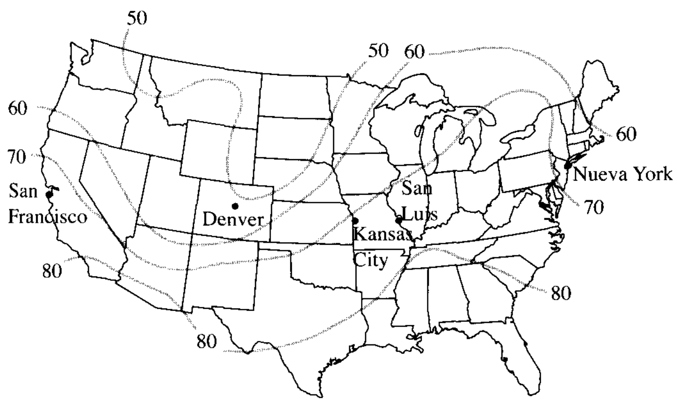

50
50 60
60
60
70
San Francisco
Denver
San Luis
Kansas City
Nueva York
70
80
80
80

Figura 20

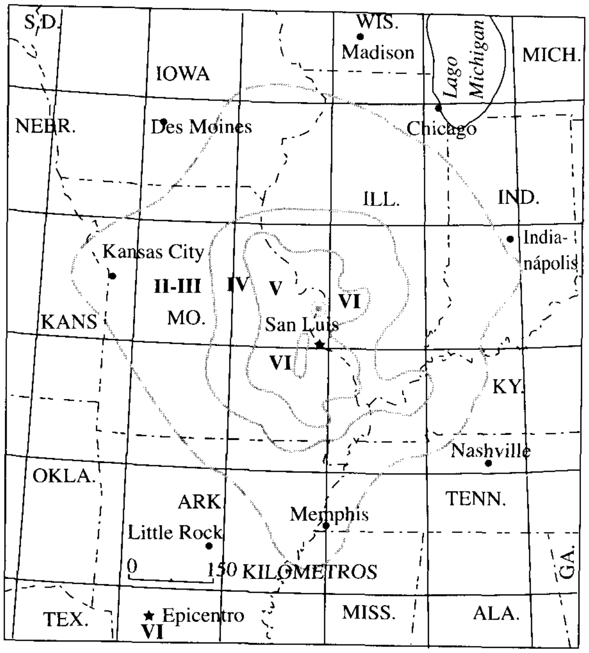

S.D.
IOWA
WIS.
Madison
Lago Michigan
MICH.
NEBR.
Des Moines
Chicago
ILL.
IND.
Kansas City
II-III
IV
V
VI
Indianápolis
KANS
MO.
San Luis
VI
KY.
OKLA.
ARK
Nashville
Memphis
TENN.
Little Rock
0 150 KILÓMETROS
TEX.
Epicentro VI
MISS.
ALA.
GA.

Figura 21

Funciones de tres o más variables Varias cantidades dependen de tres o más variables. Por ejemplo, la temperatura en un auditorio grande puede depender de la posición (x, y, z); esto conduce a la función $T(x, y, z)$. La velocidad de un fluido puede depender de la posición (x, y, z) y del tiempo t; esto conduce a la función $V(x, y, z, t)$. Por último, la calificación promedio en un examen aplicado a un grupo de 50 estudiantes depende de las 50 calificaciones $x_1, x_2, \ldots, x_{50}$; esto conduce a la función $A(x_1, x_2, \ldots x_{50})$.

Podemos visualizar las funciones de tres variables al graficar **superficies de nivel**, es decir, superficies en el espacio tridimensional que conducen a un valor constante para la función. Las funciones de cuatro o más variables son mucho más difíciles de visualizar. El dominio natural de una función de tres o más variables es el conjunto de todas las tercias ordenadas (o cuartetas, quintetas, etcétera) para las cuales la función tiene sentido y proporciona números reales.

EJEMPLO 6 Determine el dominio de cada función y describa las superficies de nivel para f.

(a) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$

(b) $g(w, x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 1}}$

SOLUCIÓN

(a) Para evitar raíces de números negativos, la tercia ordenada (x, y, z) debe satisfacer $x^2 + y^2 + z^2 - 1 \geq 0$. Así, el dominio para f consta de todos los puntos (x, y, z) que están en o fuera de la esfera unitaria. Las superficies de nivel para f son superficies en el espacio tridimensional en donde $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1} = c$. Siempre que $c \geq 0$, esta relación lleva a $x^2 + y^2 + z^2 = c + 1$, una esfera con centro en el origen. Por lo tanto, las superficies de nivel son esferas concéntricas con centro en el origen.

(b) La cuarteta ordenada (w, x, y, z) debe satisfacer $w^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 1 > 0$, pues debemos evitar raíces de números negativos y la división entre cero. ■

EJEMPLO 7 Sea $F(x, y, z) = z - x^2 - y^2$. Describa las superficies de nivel para F y trace las superficies de nivel para $-1, 0, 1$ y 2.

SOLUCIÓN La relación $F(x, y, z) = z - x^2 - y^2 = c$ lleva a $z = c + x^2 + y^2$. Éste es un paraboloide que abre hacia arriba con vértice en $(0, 0, c)$. En la figura 22 se muestran las superficies de nivel. ■

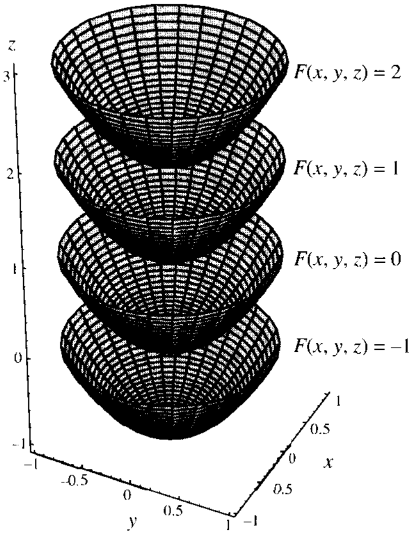


Figura 22

Revisión de conceptos

1. Una función f determinada mediante $z = f(x, y)$ es una _____.

2. La proyección de la curva $z = f(x, y) = c$ sobre el plano xy es un(a) _____, y una colección de tales curvas es un(a) _____.

3. El mapa de contorno de $z = x^2 + y^2$ consta de _____.

4. El mapa de contorno de $z = x^2$ consta de _____.

Conjunto de problemas 12.1

1. Sea $f(x, y) = x^2 y + \sqrt{y}$. Determine cada valor.

(a) $f(2, 1)$	(b) $f(3, 0)$
(c) $f(1, 4)$	(d) $f(a, a^4)$
(e) $f(1/x, x^4)$	(f) $f(2, -4)$

¿Cuál es el dominio natural de esta función?

2. Sea $f(x, y) = y/x + xy$. Determine cada valor.

(a) $f(1, 2)$	(b) $f\left(\frac{1}{4}, 4\right)$
(c) $f\left(4, \frac{1}{4}\right)$	(d) $f(a, a)$
(e) $f(1/x, x^2)$	(f) $f(0, 0)$

¿Cuál es el dominio natural de esta función?

3. Sea $g(x, y, z) = x^2 \operatorname{sen} yz$. Determine cada valor.

(a) $g(1, \pi, 2)$	(b) $g(2, 1, \pi/6)$

(c) $g(4, 2, \pi/4)$ $\boxed{\text{C}}$ (d) $g(\pi, \pi, \pi)$

4. Sea $g(x, y, z) = \sqrt{x \cos y} + z^2$. Determine cada valor.

(a) $g(4, 0, 2)$ (b) $g(-9, \pi, 3)$

(c) $g(2, \pi/3, -1)$ $\boxed{\text{C}}$ (d) $g(3, 6, 1.2)$

5. Determine $F(f(t), g(t))$, si $F(x, y) = x^2 y$ y $f(t) = t \cos t$, $g(t) = \sec^2 t$.

6. Determine $F(f(t), g(t))$, si $F(x, y) = e^x + y^2$ y $f(t) = \ln t^2$, $g(t) = e^{t/2}$.

En los problemas del 7 al 16 bosqueje la gráfica de f.

7. $f(x, y) = 6$ **8.** $f(x, y) = 6 - x$

9. $f(x, y) = 6 - x - 2y$ **10.** $f(x, y) = 6 - x^2$

11. $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

12. $f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$

13. $f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$ **14.** $f(x, y) = 2 - x - y^2$

15. $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ **16.** $f(x, y) = x^2/y, y > 0$

En los problemas del 17 al 22 bosqueje la curva de nivel z = k para el valor indicado de k.

17. $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), k = 0, 2, 4, 6, 8$

18. $z = \dfrac{x}{y}, k = -2, -1, 0, 1, 2$

19. $z = \dfrac{x^2}{y}, k = -4, -1, 0, 1, 4$

20. $z = x^2 + y, k = -4, -1, 0, 1, 4$

21. $z = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + y^2}, k = 1, 2, 4$

22. $z = y - \operatorname{sen} x, k = -2, -1, 0, 1, 2$

23. Sea $T(x, y)$ la temperatura en un punto (x, y) del plano. Trace las curvas isotermas correspondientes a $T = \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, 0$, si

$$T(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

24. Si $V(x, y)$ es el voltaje en un punto (x, y) en el plano, las curvas de nivel de V se llaman **curvas equipotenciales**. Trace las curvas equipotenciales correspondientes a $V = \frac{1}{2}, 1, 2, 4$ para

$$V(x, y) = \frac{4}{\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 3)^2}}$$

25. La figura 20 muestra isotermas para Estados Unidos.

(a) ¿Cuál de las ciudades San Francisco, Denver o Nueva York tenía aproximadamente la misma temperatura que San Luis?

(b) Si usted estuviera en Kansas City y quisiera viajar hacia un clima frío lo más rápido posible, ¿en qué dirección viajaría? ¿Qué pasaría si quisiera viajar hacia un clima más templado?

(c) Si saliera de Kansas City, ¿en qué direcciones podría partir para estar aproximadamente a la misma temperatura?

26. La figura 23 muestra un mapa de contorno para la presión barométrica en milibares. Las curvas de nivel para la presión barométrica se llaman **isobaras.**

(a) ¿Qué parte de Estados Unidos tuvo la menor presión barométrica? ¿Y la mayor?

(b) Si estuviera en San Luis, ¿en qué dirección tendría que viajar para moverse lo más rápido posible hacia una presión barométrica menor? ¿Y hacia una presión barométrica mayor?

(c) Si saliera de San Luis, ¿en qué direcciones podría partir para permanecer aproximadamente en la misma presión barométrica?

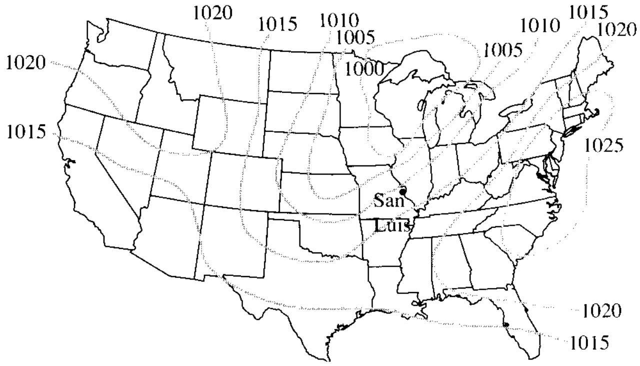


Figura 23

En los problemas del 27 al 32 describa geométricamente el dominio de cada una de las funciones indicadas de tres variables.

27. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 16}$

28. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2 - 9}$

29. $f(x, y, z) = \sqrt{144 - 16x^2 - 9y^2 - 144z^2}$

30. $f(x, y, z) = \dfrac{(144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2)^{3/2}}{xyz}$

31. $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$

32. $f(x, y, z) = z \ln(xy)$

Describa geométricamente las superficies de nivel de las funciones definidas en los problemas del 33 al 38.

33. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2; k > 0$

34. $f(x, y, z) = 100x^2 + 16y^2 + 25z^2; k > 0$

35. $f(x, y, z) = 16x^2 + 16y^2 - 9z^2$

36. $f(x, y, z) = 9x^2 - 4y^2 - z^2$

37. $f(x, y, z) = 4x^2 - 9y^2$

38. $f(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2}, k > 0$

39. Determine el dominio de cada función.

(a) $f(w, x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}}$

(b) $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \exp(-x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2)$

(c) $h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)}$

40. Bosqueje (lo mejor que pueda) la gráfica de la silla de montar $z = x(x^2 - 3y^2)$. Comience fijándose dónde $z = 0$.

41. El mapa de contorno de la figura 24 muestra las curvas de nivel para una montaña de 3000 pies de altura.

(a) ¿Qué tiene de particular el camino hasta la cima indicado por AC? ¿Qué tiene de particular BC?

(b) Haga buenas estimaciones de las longitudes totales de los caminos AC y BC.

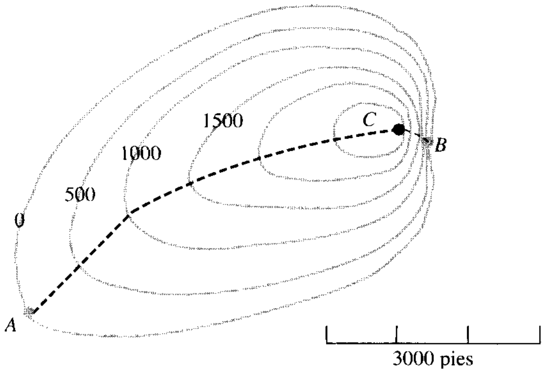


Figura 24

42. Identifique la gráfica de $f(x, y) = x^2 - x + 3y^2 + 12y - 13$, indique dónde alcanza su valor mínimo y determínelo.

CAS *Para cada una de las funciones de los problemas del 43 al 46 trace la gráfica y el mapa de contorno correspondiente.*

43. $f(x, y) = \operatorname{sen}\sqrt{2x^2 + y^2}$; $-2 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 2$

44. $f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)/(x^2 + y^2)$, $f(0, 0) = 1$; $-2 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 2$

45. $f(x, y) = (2x - y^2)\exp(-x^2 - y^2)$; $-2 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 2$

46. $f(x, y) = (\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)/(1 + x^2 + y^2)$; $-2 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 2$

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** función real de dos variables reales **2.** curva de nivel; mapa de contorno **3.** circunferencias concéntricas **4.** rectas paralelas

---

12.2
Derivadas parciales

Suponga que f es una función de dos variables x y y. Si y se mantiene constante, digamos, $y = y_0$, entonces $f(x, y_0)$ es una función de la variable simple x. Su derivada en $x = x_0$ es la **derivada parcial de f respecto a x** en (x_0, y_0) y se denota $f_x(x_0, y_0)$. Así,

$$\boxed{f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}}$$

De manera análoga, la derivada parcial de f respecto a y en (x_0, y_0) se denota $f_y(x_0, y_0)$ y está dada por

$$\boxed{f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}}$$

En vez de calcular $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$ directamente a partir de las definiciones en los recuadros, por lo general hallamos $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ usando las reglas usuales para las derivadas; luego, sustituimos $x = x_0$ y $y = y_0$. Aquí, el punto importante es que las reglas para la derivación de una función de una variable (capítulo 2) sirven para determinar las derivadas parciales, siempre que se mantenga fija una variable.

EJEMPLO 1 Determine $f_x(1, 2)$ y $f_y(1, 2)$, si $f(x, y) = x^2y + 3y^3$.

SOLUCIÓN Para calcular $f_x(x, y)$, consideramos y como constante y derivamos con respecto a x para obtener

$$f_x(x, y) = 2xy + 0$$

Así,

$$f_x(1, 2) = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$$

Análogamente, consideramos a x como constante y derivamos respecto a y para obtener

$$f_y(x, y) = x^2 + 9y^2$$

y entonces

$$f_y(1, 2) = 1^2 + 9 \cdot 2^2 = 37$$

■

Si $z = f(x, y)$, usamos las siguientes notaciones alternativas:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \qquad f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

$$f_x(x_0, y_0) = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} \qquad f_y(x_0, y_0) = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}$$

El símbolo ∂ es particular de las matemáticas y se llama el signo de derivada parcial. Los símbolos $\frac{\partial}{\partial x}$ y $\frac{\partial}{\partial y}$ representan operadores lineales, parecidos a los operadores lineales D_x, y $\frac{d}{dx}$ que encontramos en el capítulo 2.

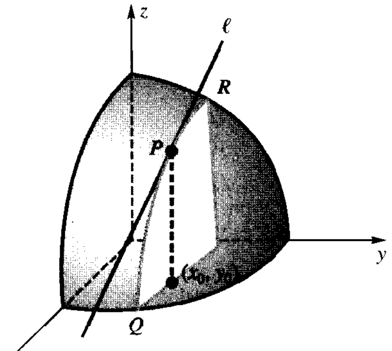
EJEMPLO 2 Si $z = x^2 \operatorname{sen}(xy^2)$, determine $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= x^2 \frac{\partial}{\partial x}[\operatorname{sen}(xy^2)] + \operatorname{sen}(xy^2)\frac{\partial}{\partial x}(x^2)\\ &= x^2 \cos(xy^2)\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \operatorname{sen}(xy^2)\cdot 2x\\ &= x^2\cos(xy^2)\cdot y^2 + 2x\operatorname{sen}(xy^2)\\ &= x^2y^2\cos(xy^2) + 2x\operatorname{sen}(xy^2)\end{aligned}$$

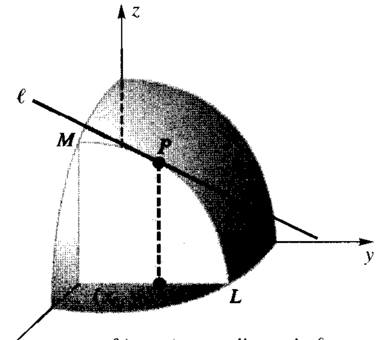
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2\cos(xy^2)\cdot 2xy = 2x^3y\cos(xy^2)$$

■



$f_x(x_0, y_0)$ = pendiente de ℓ

Figura 1



$f_y(x_0, y_0)$ = pendiente de ℓ

Figura 2

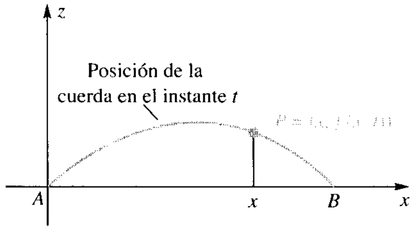


Figura 3

Interpretaciones geométrica y física

Considere la superficie cuya ecuación es $z = f(x, y)$. El plano $y = y_0$ interseca a esta superficie en la curva plana QPR (figura 1), y el valor de $f_x(x_0, y_0)$ es la pendiente de la recta tangente a esta curva en $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. De manera análoga, el plano $x = x_0$ corta a la superficie en la curva plana LPM (figura 2) y $f_y(x_0, y_0)$ es la pendiente de la recta tangente a esta curva en P.

Las derivadas parciales también se pueden interpretar como razones de cambio (instantáneas). Suponga que una cuerda de violín se fija en los puntos A y B y vibra en el plano xz. La figura 3 muestra la posición de la cuerda en un instante típico t. Si $z = f(x, t)$ denota la altura de la cuerda en el punto P con abscisa x en el instante t, entonces $\partial z/\partial x$ es la pendiente de la cuerda en P y $\partial z/\partial t$ es la razón de cambio de la altura de P respecto al tiempo y a lo largo de la recta vertical indicada. En otras palabras, $\partial z/\partial t$ es la velocidad vertical en P.

EJEMPLO 3 La superficie $z = f(x, y) = \sqrt{9 - 2x^2 - y^2}$ y el plano $y = 1$ se cortan en una curva, como en la figura 1. Determine ecuaciones paramétricas para la recta tangente en $(\sqrt{2}, 1, 2)$.

SOLUCIÓN

$$f_x(x, y) = \tfrac{1}{2}(9 - 2x^2 - y^2)^{-1/2}(-4x)$$

de modo que $f_x(\sqrt{2}, 1) = -\sqrt{2}$. Este número es la pendiente de la recta tangente a la curva en $(\sqrt{2}, 1, 2)$; es decir, $-\sqrt{2}/1$ es el cociente entre la elevación y el desplazamiento a lo largo de la recta tangente. Se sigue que esta recta tiene vector dirección $\langle 1, 0, -\sqrt{2}\rangle$ y como pasa por $(\sqrt{2}, 1, 2)$, entonces

$$x = \sqrt{2} + t, \qquad y = 1, \qquad z = 2 - \sqrt{2}t$$

son las ecuaciones paramétricas pedidas. ■

EJEMPLO 4 El volumen de cierto gas está relacionado con su temperatura T y su presión P mediante la ley de los gases $PV = 10T$, donde V se mide en pulgadas cúbicas, P en libras/pulgada cuadrada y T en grados Kelvin. Si V se mantiene constante en 50, ¿cuál es la razón de cambio de la presión con la temperatura cuando $T = 200$?

SOLUCIÓN Como $P = 10T/V$,

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{10}{V}$$

Así,

$$\left.\frac{\partial P}{\partial T}\right|_{T=200,\, V=50} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$

De tal modo, la presión aumenta a razón de $\frac{1}{5}$ libra/pulgada cuadrada por cada grado Kelvin. ■

Derivadas parciales de orden superior Como una derivada parcial de una función de x y y es, en general, otra función de estas mismas dos variables, se puede derivar parcialmente respecto a x o y, con lo que se obtienen las **segundas derivadas parciales** de f,

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} \qquad f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$$

EJEMPLO 5 Determine las cuatro derivadas parciales segundas de

$$f(x, y) = xe^y - \operatorname{sen}(x/y) + x^3y^2$$

SOLUCIÓN

$$f_x(x, y) = e^y - \frac{1}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 3x^2y^2$$

$$f_y(x, y) = xe^y + \frac{x}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 2x^3y$$

$$f_{xx}(x, y) = \frac{1}{y^2}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) + 6xy^2$$

$$f_{yy}(x, y) = xe^y + \frac{x^2}{y^4}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{2x}{y^3}\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 2x^3$$

$$f_{xy}(x, y) = e^y - \frac{x}{y^3}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 6x^2y$$

$$f_{yx}(x, y) = e^y - \frac{x}{y^3}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 6x^2y$$

■

Observe que en el ejemplo 5, $f_{xy} = f_{xy}$ es un igualdad que ocurre por lo general para las funciones de dos variables que aparecen en un primer curso. En la sección 12.3 (teorema C) daremos un criterio para que se dé esta igualdad.

Las derivadas parciales de tercer y mayor orden se definen de manera análoga y su notación es similar. Así, si f es una función de dos variables x y y, la tercera derivada parcial de f obtenida al derivar f parcialmente, primero respecto a x y luego dos veces con respecto a y, se indica como

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\,\partial x} = f_{xyy}$$

En total, hay ocho derivadas parciales de tercer orden.

Más de dos variables Sea f una función de tres variables, x, y y z. La **derivada parcial de f respecto a x** en (x, y, z) se denota como $f_x(x, y, z)$ o $\partial f(x, y, z)/\partial x$ y se define como

$$f_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

Así, $f_x(x, y, z)$ se puede obtener considerando a y y z como constantes y derivando con respecto a x.

Las derivadas parciales respecto a y y z se definen de manera análoga. Las derivadas parciales de funciones de cuatro o más variables se definen de manera similar (véase el problema 49). Las derivadas parciales como f_{xy} y f_{xyz} que implican la derivación respecto a más de una variable se llaman **derivadas parciales cruzadas.**

EJEMPLO 6 Si $f(x, y, z) = xy + 2yz + 3zx$, determine f_x, f_y, y f_z.

SOLUCIÓN Para obtener f_x, consideramos a y y z como constantes y derivamos respecto a la variable x. Así,

$$f_x(x, y, z) = y + 3z$$

Para determinar f_y, consideramos a x y z como constantes y derivamos respecto a y:

$$f_y(x, y, z) = x + 2z$$

De manera similar,

$$f_z(x, y, z) = 2y + 3x$$

■

EJEMPLO 7 Si $T(w, x, y, z) = ze^{w^2+x^2+y^2}$, determine todas las primeras derivadas parciales y $\dfrac{\partial^2 T}{\partial w\,\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial w}$, y $\dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}$.

SOLUCIÓN Las cuatro primeras parciales son

$$\frac{\partial T}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial w}\left(ze^{w^2+x^2+y^2}\right) = 2wze^{w^2+x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(ze^{w^2+x^2+y^2}\right) = 2xze^{w^2+x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(ze^{w^2+x^2+y^2}\right) = 2yze^{w^2+x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(ze^{w^2+x^2+y^2}\right) = e^{w^2+x^2+y^2}$$

Las otras derivadas parciales son

$$\frac{\partial^2 T}{\partial w\,\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial w\,\partial x}\left(ze^{w^2+x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial w}\left(2xze^{w^2+x^2+y^2}\right) = 4wxze^{w^2+x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial w} = \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial w}\left(ze^{w^2+x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2wze^{w^2+x^2+y^2}\right) = 4wxze^{w^2+x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(ze^{w^2+x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(e^{w^2+x^2+y^2}\right) = 0$$

■

Revisión de conceptos

1. $f_x(x_0, y_0)$ como un límite se define mediante ______ y se llama la ______ en (x_0, y_0).

2. Si $f(x, y) = x^3 + xy$, entonces $f_x(1, 2) =$ ______ y $f_y(1, 2) =$ ______.

3. Otra notación para $f_{xy}(x, y)$ es ______.

4. Si $f(x, y) = g(x) + h(y)$, entonces $f_{xy}(x, y) =$ ______.

Conjunto de problemas 12.2

En los problemas del 1 al 16 determine todas las primeras derivadas parciales de cada función.

1. $f(x, y) = (2x - y)^4$ **2.** $f(x, y) = (4x - y^2)^{3/2}$

3. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{xy}$ **4.** $f(x, y) = e^x \cos y$

5. $f(x, y) = e^y \operatorname{sen} x$ **6.** $f(x, y) = (3x^2 + y^2)^{-1/3}$

7. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ **8.** $f(u, v) = e^{uv}$

9. $g(x, y) = e^{-xy}$ **10.** $f(s, t) = \ln(s^2 - t^2)$

11. $f(x, y) = \tan^{-1}(4x - 7y)$

12. $F(w, z) = w \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{w}{z}\right)$

13. $f(x, y) = y \cos(x^2 + y^2)$ **14.** $f(s, t) = e^{t^2 - s^2}$

15. $F(x, y) = 2 \operatorname{sen} x \cos y$ **16.** $f(r, \theta) = 3r^3 \cos 2\theta$

En los problemas del 17 al 20 verifique que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$$

17. $f(x, y) = 2x^2y^3 - x^3y^5$ **18.** $f(x, y) = (x^3 + y^2)^5$

19. $f(x, y) = 3e^{2x} \cos y$ **20.** $f(x, y) = \tan^{-1} xy$

21. Si $F(x, y) = \dfrac{2x - y}{xy}$, determine $F_x(3, -2)$ y $F_y(3, -2)$.

22. Si $F(x, y) = \ln(x^2 + xy + y^2)$, determine $F_x(-1, 4)$ y $F_y(-1, 4)$.

23. Si $f(x, y) = \tan^{-1}(y^2/x)$, determine $f_x\left(\sqrt{5}, -2\right)$ y $f_y\left(\sqrt{5}, -2\right)$.

24. Si $f(x, y) = e^y \cosh x$, determine $f_x(-1, 1)$ y $f_y(-1, 1)$.

25. Calcule la pendiente de la tangente a la curva de intersección de la superficie $36z = 4x^2 + 9y^2$ y el plano $x = 3$ en el punto $(3, 2, 2)$.

26. Calcule la pendiente de la tangente a la curva de intersección de la superficie $3z = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$ y el plano $x = 1$ en el punto $\left(1, -2, \sqrt{11}/3\right)$.

27. Calcule la pendiente de la tangente a la curva de intersección de la superficie $2z = \sqrt{9x^2 + 9y^2 - 36}$ y el plano $y = 1$ en el punto $\left(2, 1, \frac{3}{2}\right)$.

28. Calcule la pendiente de la tangente a la curva de intersección del cilindro $4z = 5\sqrt{16 - x^2}$ y el plano $y = 3$ en el punto $\left(2, 3, 5\sqrt{3}/2\right)$.

29. El volumen V de un cilindro circular recto está dado por $V = \pi r^2 h$, donde r es el radio y h es la altura. Si h se mantiene fijo en $h = 10$ pulgadas, determine la razón de cambio de V respecto a r cuando $r = 6$ pulgadas.

30. La temperatura, en grados Celsius, en una placa metálica en el plano xy está dada por $T(x, y) = 4 + 2x^2 + y^3$. ¿Cuál es la razón de cambio de la temperatura respecto a la distancia (medida en pies) si comenzamos a movernos desde $(3, 2)$ en la dirección del eje y positivo?

31. De acuerdo con la ley del gas ideal, la presión, la temperatura y el volumen de un gas se relacionan mediante $PV = kT$, donde k es una constante. Determine la razón de cambio de la presión (libras-/pulgadas cuadradas) con respecto a la temperatura cuando la temperatura es de 300°K, si el volumen se mantiene fijo en 100 pulgadas cúbicas.

32. Muestre que, para la ley del gas del problema 31,

$$V\frac{\partial P}{\partial V} + T\frac{\partial P}{\partial T} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -1$$

Una función de dos variables que satisface la ***ecuación de Laplace,***

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

se dice que es ***armónica****. Muestre que las funciones definidas en los problemas 33 y 34 son funciones armónicas.*

33. $f(x, y) = x^3y - xy^3$

34. $f(x, y) = \ln(4x^2 + 4y^2)$

35. Si $F(x, y) = 3x^4y^5 - 2x^2y^3$, determine $\partial^3 F(x, y)/\partial y^3$.

36. Si $f(x, y) = \cos(2x^2 - y^2)$, determine $\partial^3 f(x, y)/\partial y \partial x^2$.

37. Exprese lo siguiente con la notación ∂.

(a) f_{yyy} (b) f_{xxy} (c) f_{xyyy}

38. Exprese lo siguiente con notación de subíndices.

(a) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\, \partial y}$ (b) $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2\, \partial y^2}$ (c) $\dfrac{\partial^5 f}{\partial x^3\, \partial y^2}$

39. Si $f(x, y, z) = 3x^2y - xyz + y^2z^2$, determine lo siguiente:

(a) $f_x(x, y, z)$ (b) $f_y(0, 1, 2)$ (c) $f_{xy}(x, y, z)$

40. Si $f(x, y, z) = (x^3 + y^2 + z)^4$, determine lo siguiente:

(a) $f_x(x, y, z)$ (b) $f_y(0, 1, 1)$ (c) $f_{zz}(x, y, z)$

41. Si $f(x, y, z) = e^{-xyz} - \ln(xy - z^2)$, determine $f_x(x, y, z)$.

42. Si $f(x, y, z) = (xy/z)^{1/2}$, determine $f_x(-2, -1, 8)$.

43. Una abeja volaba hacia arriba a lo largo de la curva dada como la intersección de $z = x^4 + xy^3 + 12$ con el plano $x = 1$. En el punto $(1, -2, 5)$, salió por la recta tangente. ¿En dónde tocó la abeja al plano xz? (Véase el ejemplo 3.)

44. Sea $A(x, y)$ el área de un rectángulo no degenerado de dimensiones x y y, de modo que el rectángulo esté dentro de una circunferencia de radio 10. Determine el dominio y el rango de esta función.

45. El intervalo $[0, 1]$ debe separarse en tres partes, haciendo cortes en x y y. Sea $A(x, y)$ el área de cualquier triángulo no degenerado que pueda formarse con estas tres partes. Determine el dominio y el rango de esta función.

46. La **ecuación de onda** $c^2\, \partial^2 u/\partial x^2 = \partial^2 u/\partial t^2$ y la **ecuación del calor** $c\, \partial^2 u/\partial x^2 = \partial u/\partial t$ son dos de las ecuaciones más importantes en física (c es una constante). Éstas se llaman **ecuaciones diferenciales parciales**. Demuestre lo siguiente:

(a) $u = \cos x \cos ct$ y $u = e^x \cosh ct$ satisfacen la ecuación de onda.

(b) $u = e^{-ct} \operatorname{sen} x$ y $u = t^{-1/2}e^{-x^2/(4ct)}$ satisfacen la ecuación del calor.

47. Para el mapa de contorno de $z = f(x, y)$ que aparece en la figura 4, estime cada valor.

(a) $f_y(1, 1)$
(b) $f_x(-4, 2)$
(c) $f_x(-5, -2)$
(d) $f_y(0, -2)$

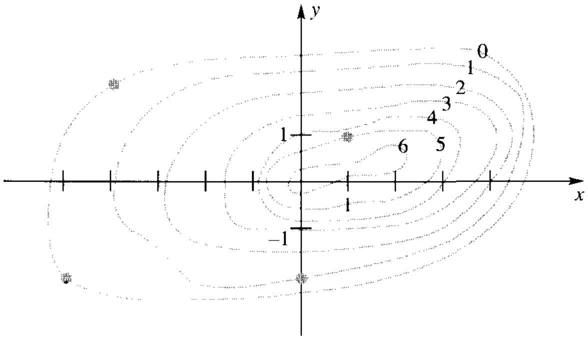


Figura 4

CAS **48.** Se puede utilizar un sistema de álgebra por computadora para calcular y graficar las derivadas parciales. Trace las gráficas de las siguientes:

(a) $\operatorname{sen}(x + y^2)$
(b) $D_x \operatorname{sen}(x + y^2)$
(c) $D_y \operatorname{sen}(x + y^2)$
(d) $D_x(D_y \operatorname{sen}(x + y^2))$

49. Proporcione definiciones en términos de límites de las siguientes derivadas parciales:

(a) $f_y(x, y, z)$
(b) $f_z(x, y, z)$
(c) $G_x(w, x, y, z)$
(d) $\dfrac{\partial}{\partial z}\lambda(x, y, z, t)$
(e) $\dfrac{\partial}{\partial b_2}S(b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n)$

50. Determine cada derivada parcial.

(a) $\dfrac{\partial}{\partial w}(\operatorname{sen} w \operatorname{sen} x \cos y \cos z)$
(b) $\dfrac{\partial}{\partial x}[x \ln(wxyz)]$
(c) $\lambda_t(x, y, z, t)$, donde $\lambda(x, y, z, t) = \dfrac{t \cos x}{1 + xyzt}$

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $\lim_{\Delta x \to 0}[f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)]/\Delta x$; derivada parcial de f con respecto a x **2.** 5; 1 **3.** $\partial^2 f/\partial y\, \partial x$ **4.** 0

12.3
Límites y continuidad

Nuestro objetivo en esta sección es dar sentido a la proposición

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

Puede parecer extraño que hayamos estudiado las derivadas parciales antes que los límites para funciones de dos o más variables. Después de todo, analizamos límites en el capítulo 1 y derivadas en el 2. Sin embargo, la derivación parcial en realidad es una idea más sencilla ya que todas las variables, excepto una, se mantienen fijas. El único concepto necesario para definir la derivada parcial es el de límite de una función de una variable, que nos regresa al capítulo 1. Por otra parte, el límite de una función de dos (o más) variables es un concepto más profundo, ya que debemos tomar en cuenta *todos* los caminos en que (x, y) se aproxima a (a, b). Esto no se puede reducir a tratar "una variable a la vez" como en la derivada parcial.

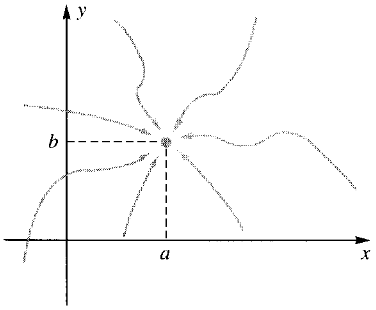


Figura 1

El límite de una función de dos variables tiene el significado intuitivo usual: los valores de $f(x, y)$ se acercan cada vez más al número L cuando (x, y) tiende a (a, b). El problema es que (x, y) puede tender a (a, b) en una infinidad de formas distintas (figura 1). Queremos una definición que dé la misma L, sin importar el camino que (x, y) siga al tender a (a, b). Por fortuna, la definición formal dada primero para funciones reales de una variable (sección 1.1) y luego para funciones vectoriales de una variable (sección 11.5) son similares a la que necesitamos aquí.

Definición Límite de una función de dos variables

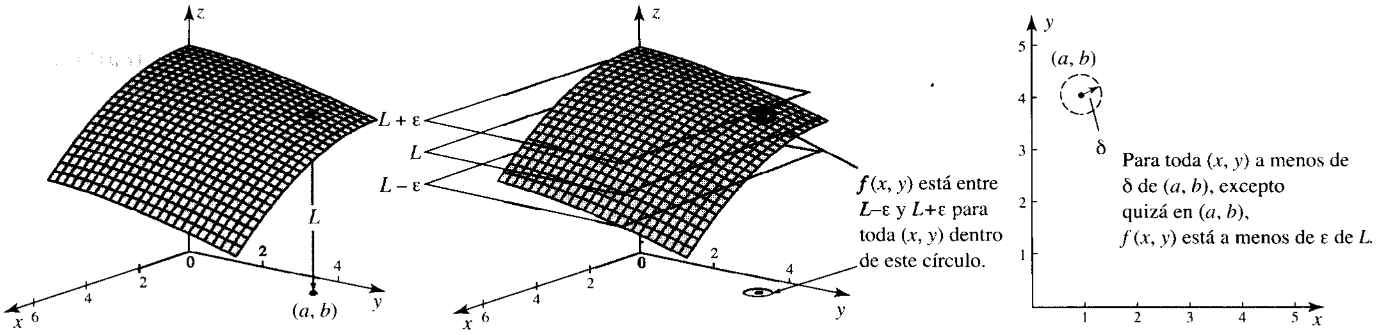
Decir que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$ significa que para cada $\varepsilon > 0$ (sin importar qué tan pequeño sea) existe un $\delta > 0$ correspondiente, de modo que $|f(x, y) - L| < \varepsilon$, siempre que $0 < \|(x, y) - (a, b)\| < \delta$.

Para interpretar $\|(x, y) - (a, b)\|$, piense en (x, y) y (a, b) como vectores. Entonces

$$\|(x, y) - (a, b)\| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

y los puntos que satisfacen $0 < \|(x, y) - (a, b)\| < \delta$ son aquellos puntos dentro de una circunferencia de radio δ, excluyendo al centro (a, b) (véase la figura 2). La esencia de la definición es ésta: podemos hacer a $f(x, y)$ tan cercana como queramos de L (en menos de ε, donde la distancia se mide mediante $|f(x, y) - L|$) siempre que tomemos a (x, y)

suficientemente cercano a (a, b) (en menos de δ, con la distancia medida mediante $\|(x, y) - (a, b)\|$). Compare esta definición con la de límite dada en el capítulo 1 y la definición de una función con valores vectoriales dada en el capítulo 11; las semejanzas son obvias.



$f(x, y)$ está entre $L-\varepsilon$ y $L+\varepsilon$ para toda (x, y) dentro de este círculo.

Para toda (x, y) a menos de δ de (a, b), excepto quizá en (a, b), $f(x, y)$ está a menos de ε de L.

Figura 2

Observe algunos aspectos de esta definición.

1. La trayectoria de acercamiento a (a, b) no es importante. Esto significa que si distintas trayectorias de acercamiento conducen a distintos valores L, entonces el límite no existe.
2. El comportamiento de $f(x, y)$ en (a, b) no es importante; la función ni siquiera tiene que estar definida en (a, b). Esto es consecuencia de la restricción $0 < \|(x, y) - (a, b)\|$.
3. La definición se expresa de modo que se extienda de manera inmediata a funciones de tres (o más) variables. Sólo reemplace (x, y) y (a, b) por (x, y, z) y (a, b, c) siempre que aparezcan.

Podríamos esperar que los límites para muchas funciones pueden obtenerse mediante sustitución. Esto fue cierto para muchas funciones (pero ciertamente no para todas) de una variable. Antes de que enunciemos un teorema que justifique la evaluación de límites mediante sustitución, damos algunas definiciones. Un **polinomio** en las variables x y y es una función de la forma

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x^i y^j$$

y una **función racional** en las variables x y y es una función de la forma

$$f(x, y) = \frac{p(x, y)}{q(x, y)}$$

en donde p y q son polinomios en x y y, y se supone que q no es idénticamente cero. El teorema siguiente es análogo al teorema 1.3B.

Teorema A

Si $f(x, y)$ es un polinomio, entonces

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

y si $f(x, y) = p(x, y)/q(x, y)$, en donde p y q son polinomios, entonces

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \frac{p(a, b)}{q(a, b)}$$

siempre que $q(a, b) \neq 0$. Además, si

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} p(x, y) = L \neq 0 \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} q(x, y) = 0$$

entonces

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{p(x, y)}{q(x, y)}$$

no existe.

EJEMPLO 1 Evalúe los límites siguientes, si es que existen:

$$\text{(a)}\quad \lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2y + 3y) \quad \text{y} \quad \text{(b)}\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2 + 1}{x^2 - y^2}$$

SOLUCIÓN

(a) La función cuyo límite buscamos es un polinomio, así que con base en el teorema A

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2y + 3y) = 1^2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 8$$

(b) La segunda función es racional, pero el límite del denominador es igual a cero, mientras que el límite del numerador es 1. Así, por el teorema A, este límite no existe. ■

EJEMPLO 2 Demuestre que la función f definida como

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

no tiene límite en el origen (figura 3).

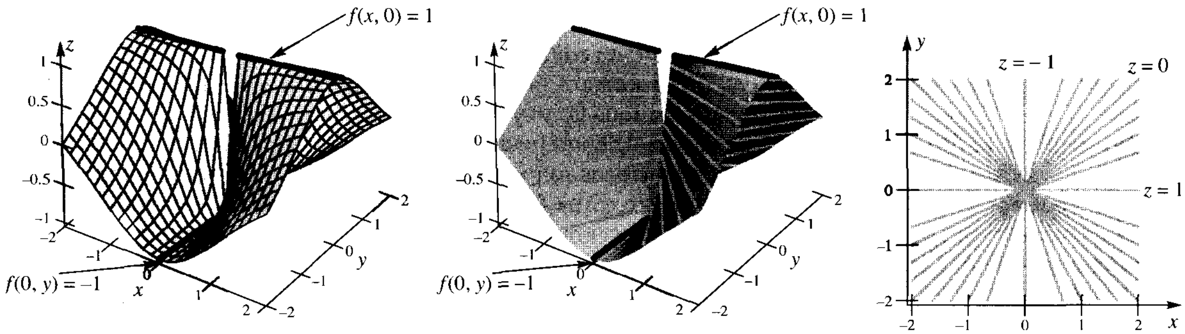


Figura 3

SOLUCIÓN La función f está definida en todas partes en el plano xy, excepto en el origen. En todos los puntos del eje x distintos del origen, el valor de f es

$$f(x, 0) = \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = 1$$

Así, el límite de $f(x, y)$ cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$ a lo largo del eje x es

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x, 0) = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = +1$$

De manera similar, el límite de $f(x, y)$ cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$ a lo largo del eje y es

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} f(0, y) = \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0 - y^2}{0 + y^2} = -1$$

Así, obtenemos distintos valores dependiendo de la forma en que $(x, y) \to (0, 0)$. De hecho, hay puntos arbitrariamente cerca de $(0, 0)$ en los que el valor de f es 1 y otros puntos igualmente cercanos en los que el valor de f es -1. Por lo tanto, el límite no puede existir en $(0, 0)$. ■

Coordenadas polares para el ejemplo 2

Podemos utilizar coordenadas polares para mostrar que el límite en el ejemplo 2 no existe.

$$\begin{aligned} &\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta}{r^2} \\ &= \lim_{r\to 0} \cos 2\theta \\ &= \cos 2\theta \end{aligned}$$

que toma todos los valores entre -1 y 1 en cada vecindad de $(0, 0)$. Concluimos que el límite no existe.

Con frecuencia es más fácil analizar límites de funciones de dos variables, especialmente límites en el origen, cambiando a coordenadas polares. El punto importante es que $(x, y) \to (0, 0)$ si y sólo si $r = \sqrt{x^2 + y^2} \to 0$. Así que, algunas veces, los límites para funciones de dos variables pueden expresarse como límites que incluyen sólo una variable, r.

EJEMPLO 3 Evalúe los siguientes límites, si es que existen:

$$\text{(a)}\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{3x^2 + 3y^2} \quad \text{y} \quad \text{(b)}\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

SOLUCIÓN

(a) Al cambiar a coordenadas polares y utilizar la regla de L'Hôpital, tenemos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{3x^2+3y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{\operatorname{sen} r^2}{3r^2} = \frac{1}{3}\lim_{r\to 0} \frac{2r\cos r^2}{2r} = \frac{1}{3}$$

(b) Otra vez, al cambiar a coordenadas polares se obtiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta\, r\sin\theta}{r^2} = \cos\theta \operatorname{sen}\theta$$

Como este límite depende de θ, trayectorias en líneas rectas llevarán a límites diferentes. Por lo tanto, este límite no existe. ■

Continuidad en un punto Para decir que $f(x, y)$ es **continua** en el punto (a, b) pediremos lo siguiente: (1) f tiene un valor en (a, b), (2) f tiene un límite en (a, b) y (3) el valor de f en (a, b) es igual al límite ahí. En resumen, pedimos que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Esencialmente, éste es el mismo requisito para la continuidad de una función de una variable. De manera intuitiva, esto significa de nuevo que f no tiene saltos, grandes fluctuaciones o un comportamiento no acotado en (a, b).

El teorema A puede utilizarse para decir que funciones polinomiales son continuas para toda (x, y) y que funciones racionales son continuas en todas partes, excepto en donde el denominador sea igual a 0. Además, sumas, diferencias, productos y cocientes de funciones continuas son continuos (siempre que en el último caso evitemos la división entre cero). Estos resultados, junto con el teorema siguiente, pueden utilizarse para establecer la continuidad de muchas funciones de dos variables.

Teorema B Composición de funciones

Si una función g de dos variables es continua en (a, b) y una función f de una variable es continua en $g(a, b)$, entonces la composición $f \circ g$, definida como $(f \circ g)(x, y) = f(g(x, y))$ es continua en (a, b).

La demostración de este teorema es similar a la demostración del teorema 1.6E.

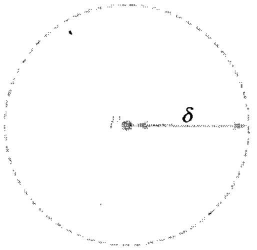
EJEMPLO 4 Describa los puntos (x, y) para los cuales las funciones siguientes son continuas.

(a) $H(x,y) = \dfrac{2x+3y}{y-4x^2}$, (b) $F(x,y) = \cos(x^3 - 4xy + y^2)$

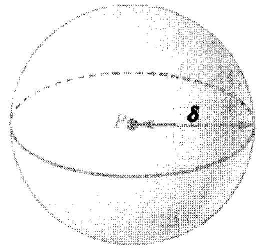
SOLUCIÓN

(a) (x, y) es una función racional, por lo que es continua en todo punto en donde el denominador sea diferente de cero. El denominador $y - 4x^2$ es igual acero a lo largo de la parábola $y = 4x^2$. Por lo tanto, (x, y) es continua para todo (x, y), excepto en los puntos en la parábola $y = 4x^2$.

(b) La función $g(x, y) = x^3 - 4xy + y^2$, como es un polinomio, es continua para todo (x, y). También, $f(t) = \cos t$ es continua para todo número real t. Con base en el teorema B, concluimos que $F(x, y)$ es continua para todo (x, y). ■



Una vecindad en el espacio bidimensional



Una vecindad en el espacio tridimensional

Figura 4

Continuidad en un conjunto Decir que $f(x, y)$ es continua en un conjunto S significa decir que $f(x, y)$ es continua en cada punto del conjunto. Esto significa eso, pero hay algunas sutilezas relacionadas con este enunciado que deben aclararse.

Primero debemos introducir cierto lenguaje relativo a los conjuntos en el plano (y en los espacios de dimensión mayor). Por una **vecindad** de radio δ de un punto P, entendemos el conjunto de todos los puntos Q que satisfacen $\|Q - P\| < \delta$. En el espacio bidimensional, una vecindad es el "interior" de una circunferencia; en el espacio tridimensional es el interior de una esfera (figura 4). Un punto P es un **punto interior** de un

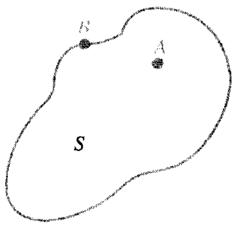


Figura 5

conjunto S si existe una vecindad de P contenida en S. El conjunto de todos los puntos interiores de S es el **interior** de S. Por otro lado, P es un **punto frontera** de S si cada vecindad de P contiene puntos que están en S y puntos que no están en S. El conjunto de todos los puntos frontera de S es la **frontera** de S. En la figura 5, A es un punto interior y B es un punto frontera de S. Un conjunto es **abierto** si todos sus puntos son puntos interiores y es **cerrado** si contiene a todos sus puntos frontera. Es posible que un conjunto no sea abierto ni cerrado. Esto, por cierto, explica el uso de "intervalos abiertos" e "intervalos cerrados" en el espacio unidimensional. Finalmente, un conjunto S es **acotado**, si existe una $R > 0$ tal que todas las parejas ordenadas en S están dentro de un círculo de radio R y con centro en el origen.

Si S es un conjunto abierto, decir que f es continua en S significa precisamente que f es continua en cada punto de S. Por otro lado, si S contiene algunos o todos sus puntos frontera, debemos tener cuidado en dar la interpretación correcta de continuidad en tales puntos (recuerde que en el espacio unidimensional tuvimos que hablar de la continuidad por la izquierda y por la derecha en los puntos extremos de un intervalo). Decir que f es continua en un punto frontera P de S significa que $f(Q)$ debe tender a $f(P)$ cuando Q tiende a P mediante puntos de S.

He aquí un ejemplo que nos ayudará a aclarar lo que hemos dicho (véase la figura 6). Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 4 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Si S es el conjunto $\{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$, *es correcto decir que* $f(x, y)$ *es continua en* S. Por otro lado, sería incorrecto decir que $f(x, y)$ es continua en todo el plano.

En la sección 12.2 dijimos que para la mayor parte de las funciones de dos variables estudiadas en un primer curso, $f_{xy} = f_{yx}$; es decir, el orden de derivación en las derivadas parciales cruzadas no es importante. Ahora que hemos definido la continuidad, podemos establecer de manera sencilla condiciones para que esto sea cierto.

La frontera de un conjunto

Si usted se encuentra en la frontera (es decir, en el borde) entre Estados Unidos y Canadá, entonces puede alcanzar ambos países, *sin importar qué tan corto sea su alcance*. Ésta es la esencia de nuestra definición de punto frontera. Cualquier vecindad (su alcance) de un punto frontera incluirá puntos en S y puntos fuera de S, sin importar qué tan pequeña sea la vecindad.

La frontera de un conjunto desempeñará un papel importante más adelante en este capítulo, cuando consideremos la optimización de funciones, y en los capítulos 13 y 14, cuando estudiemos integrales múltiples.

Teorema C Igualdad de las parciales cruzadas

Si f_{xy} y f_{yx} son continuas en un conjunto abierto S, entonces $f_{xy} = f_{yx}$ en cada punto de S.

Una demostración de este teorema aparece en libros de cálculo avanzado. En el problema 42 damos un contraejemplo para el que falla la continuidad de f_{xy}.

Nuestro análisis de la continuidad se ha referido principalmente a las funciones de dos variables. Creemos que usted puede hacer los sencillos cambios necesarios para describir la continuidad para funciones de tres o más variables.

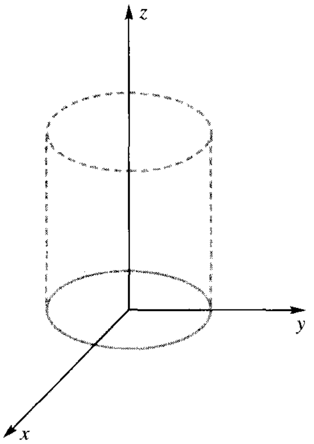


Figura 6

Revisión de conceptos

1. En un lenguaje intuitivo, decir que $\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x, y) = 3$ significa *que* $f(x, y)$ se acerca a ______ cuando _____.

2. Que $f(x, y)$ sea continua en $(1, 2)$ significa que __________.

3. El punto P es un punto interior del conjunto S si existe una vecindad de P tal que ________.

4. El conjunto S es abierto si cada punto de S es _______; S es cerrado si S contiene a todos sus _______.

Conjunto de problemas 12.3

En los problemas del 1 al 16 determine el límite indicado o diga si no existe

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} (3x^2y - xy^3)$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,1)} (xy^3 - xy + 3y^2)$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,\pi)} [x\cos^2(xy) - \operatorname{sen}(xy/3)]$

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}{y - 2x^2}$

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} \dfrac{xy - y^3}{(x + y + 1)^2}$

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy + \cos x}{xy - \cos x}$

7. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

8. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\tan(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

9. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 + y^2}{x^4 - y^4}$

10. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$

11. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

12. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{(x^2 + y^2)^2}$

13. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^{7/3}}{x^2 + y^2}$

14. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

15. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^4}$

16. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$

En los problemas del 17 al 26 describa el mayor conjunto S donde sea correcto afirmar que f es continua

17. $f(x, y) = \dfrac{x^2 + xy - 5}{x^2 + y^2 + 1}$

18. $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$

19. $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$

20. $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x + y}}$

21. $f(x, y) = \dfrac{x^2 + 3xy + y^2}{y - x^2}$

22. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{xy}, & \text{si } xy \neq 0 \\ 1, & \text{si } xy = 0 \end{cases}$

23. $f(x, y) = \sqrt{x - y + 1}$

24. $f(x, y) = (4 - x^2 - y^2)^{-1/2}$

25. $f(x, y, z) = \dfrac{1 + x^2}{x^2 + y^2 + z^2}$

26. $f(x, y, z) = \ln(4 - x^2 - y^2 - z^2)$

En los problemas 27 al 32 bosqueje el conjunto indicado. Describa la frontera del conjunto. Por último, indique si el conjunto es abierto, cerrado o ninguno de éstos.

27. $\{(x, y): 2 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 5\}$

28. $\{(x, y): x^2 + y^2 < 4\}$

29. $\{(x, y): 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$

30. $\{(x, y): 1 < x \leq 4\}$

31. $\{(x, y): x > 0, y < \operatorname{sen}(1/x)\}$

32. $\{(x, y): x = 0, y = 1/n, n \text{ un entero positivo}\}$

33. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4y^2}{x - 2y}, & \text{si } x \neq 2y \\ g(x), & \text{si } x = 2y \end{cases}$$

Si f es continua en todo el plano, encuentre una fórmula para $g(x)$.

34. Demuestre que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} [f(x, y) + g(x, y)]$$

$$= \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) + \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x, y)$$

siempre que los dos últimos límites existan.

35. Muestre que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

no existe, considerando una trayectoria al origen a lo largo del eje x y luego otra trayectoria a lo largo de la recta $y = x$.

36. Demuestre que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy + y^3}{x^2 + y^2}$$

no existe.

37. Sea $f(x, y) = x^2y/(x^4 + y^2)$.

(a) Demuestre que $f(x, y) \to 0$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de cualquier línea recta $y = mx$.

(b) Demuestre que $f(x, y) \to \frac{1}{2}$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de la parábola $y = x^2$.

(c) ¿Qué conclusión puede extraer?

38. Sea $f(x, y)$ la mínima distancia que una gota de lluvia que cae en la latitud x y la longitud y en el estado de Colorado debe recorrer para llegar a un océano. ¿En qué punto de Colorado esta función es discontinua?

39. Sea H la cubierta semiesférica $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1, 0 \leq z < 1$, la cual aparece en la figura 7 y sea $D = \{(x, y, z): 1 \leq z \leq 2\}$. Para cada una de las funciones definidas a continuación determine su conjunto de discontinuidades dentro de D.

(a) $f(x, y, z)$ es el tiempo necesario para que una partícula arrojada desde (x, y, z) llegue al nivel $z = 0$.

(b) $f(x, y, z)$ es el área del interior de H (que suponemos es opaca) que puede verse desde (x, y, z).

(c) $f(x, y, z)$ es el área de la sombra de H en el plano xy debido a una fuente luminosa puntual en (x, y, z).

(d) $f(x, y, z)$ es la distancia a lo largo de la trayectoria más corta de (x, y, z) a $(0, 0, 0)$ que no entra en H.

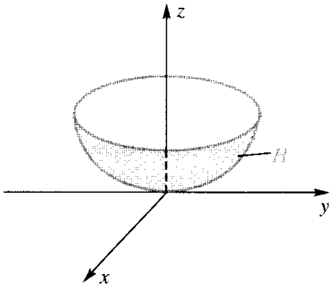


Figura 7

40. Sea f una función de n variables, continua en un conjunto abierto D y supongamos que P_0 está en D con $f(P_0) > 0$. Demuestre que existe una $\delta > 0$ tal que $f(P) > 0$ en una vecindad de P_0 con radio δ.

41. El ferrocarril francés Suponga que París está en el origen del plano xy. Las vías férreas salen de París a lo largo de todos los rayos, que son las únicas vías. Determine el conjunto de discontinuidades de las siguientes funciones.

(a) $f(x, y)$ es la distancia de (x, y) a $(1, 0)$ en el ferrocarril francés.

(b) $g(u, v, x, y)$ es la distancia de (u, v) a (x, y) en el ferrocarril francés.

42. Sea $f(x, y) = xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq 0$ y $f(0, 0) = 0$. Demuestre que $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$ realizando estos pasos:

(a) Demuestre que $f_x(0, y) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0 + h, y) - f(0, y)}{h} = -y$

(b) De manera análoga, demuestre que $f_y(x, 0) = x$ para toda x.

(c) Demuestre que $f_{yx}(0, 0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f_y(0 + h, 0) - f_y(0, 0)}{h} = 1$.

(d) De manera análoga, demuestre que $f_{xy}(0, 0) = -1$.

CAS **43.** Trace la gráfica de la función mencionada en el problema 42. ¿Puede ver por qué esta superficie se llama a veces la *silla del perro*?

CAS **44.** Trace las gráficas de cada una de las siguientes funciones en $-2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2$, y determine en cuáles puntos de este conjunto es discontinua la función.

(a) $f(x, y) = x^2/(x^2 + y^2), f(0, 0) = 0$

(b) $f(x, y) = \tan(x^2 + y^2)/(x^2 + y^2), f(0, 0) = 0$

CAS **45.** Trace la gráfica de $f(x, y) = x^2y/(x^4 + y^2)$ en una orientación que exhiba sus características inusuales (véase el problema 37).

46. Proporcione las definiciones de continuidad en un punto y continuidad en un conjunto para una función de tres variables.

47. Demuestre que la función definida como

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^3 + y^3 + z^3} \qquad \text{para } (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$$

y $f(0, 0, 0) = 0$ no es continua en $(0, 0, 0)$.

48. Demuestre que la función definida como

$$f(x, y, z) = (y + 1)\frac{x^2 - z^2}{x^2 + z^2} \qquad \text{para } (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$$

y $f(0, 0, 0) = 0$, no es continua en $(0, 0, 0)$.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** 3; (x, y) tiende a $(1, 2)$ **2.** $\lim\limits_{(x,y) \to (1,2)} f(x, y) = f(1, 2)$ **3.** está contenido en S. **4.** un punto interior de S; puntos frontera

---

12.4 Diferenciabilidad

Para una función de una sola variable, la diferenciabilidad de f en x significa la existencia de la derivada $f'(x)$. Esto, a su vez, era equivalente a que la gráfica de f tuviese una recta tangente no vertical en x.

Ahora preguntamos: ¿cuál es el concepto correcto de diferenciabilidad para una función de dos variables? Con seguridad, debe corresponder de manera natural a la existencia de un plano tangente, y es claro que esto requiere más que la simple existencia de las derivadas parciales de f, ya que ellas reflejan el comportamiento de f en sólo dos direcciones. Para enfatizar este punto, considere

$$f(x, y) = -10\sqrt{|xy|}$$

que aparece en la figura 1. Observe que $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ existen y son iguales a 0; no obstante, nadie podría afirmar que la gráfica tiene un plano tangente en el origen. La razón, por supuesto, es que la gráfica de f no queda bien aproximada por cualquier plano (en particular, por el plano xy) excepto en dos direcciones. Un plano tangente tendría que aproximar la gráfica de manera adecuada en todas las direcciones.

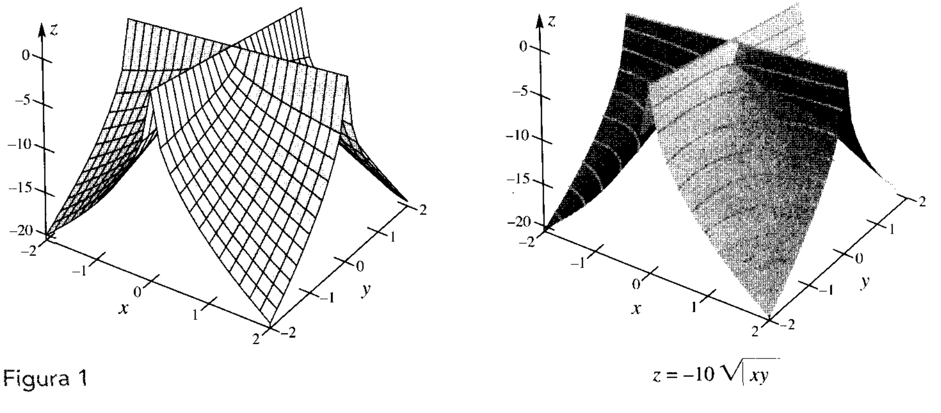


Figura 1

$z = -10\sqrt{|xy|}$

Considere una segunda pregunta. Para una función de dos variables, ¿qué desempeña el papel de la derivada? De nuevo, las derivadas parciales se quedan cortas, tan sólo sea porque son dos.

Para responder estas dos preguntas comenzamos por eliminar la distinción entre el punto (x, y) y el vector $\langle x, y\rangle$. Así, escribimos $\mathbf{p} = (x, y) = \langle x, y\rangle$ y $f(\mathbf{p}) = f(x, y)$. Recordemos que

$$(1) \qquad f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

El análogo parecería ser

$$(2) \qquad f'(\mathbf{p}_0) = \lim_{\mathbf{p}\to \mathbf{p}_0} \frac{f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{p}_0)}{\mathbf{p} - \mathbf{p}_0} = \lim_{\mathbf{h}\to \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{p}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{p}_0)}{\mathbf{h}}$$

pero, por desgracia, la división entre un vector no tiene sentido.

Pero no nos demos por vencidos tan rápido. Otra forma de ver la diferenciabilidad de una función de una sola variable es la siguiente. Si f es diferenciable en a, entonces existe una recta tangente que pasa por $(a, f(a))$ que aproxima la función para valores de x cercanos a a. En otras palabras, f es casi *lineal* cerca de a. La figura 2 ilustra esto para una función de una variable; cuando hacemos un acercamiento a la gráfica de $y = f(x)$, vemos que la recta tangente y la función se vuelven casi indistinguibles.

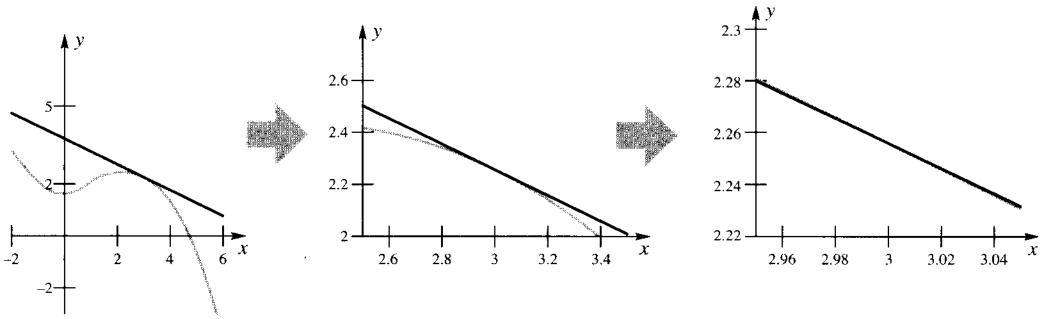


Figura 2

Para ser más precisos, decimos que una función f es **localmente lineal** en a si existe una constante m tal que

$$f(a + h) = f(a) + hm + h\varepsilon(h)$$

donde $\varepsilon(h)$ es una función que satisface $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. Al despejar $\varepsilon(h)$ se obtiene

$$\varepsilon(h) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - m$$

La función $\varepsilon(h)$ es la diferencia entre la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(a + h, f(a + h))$ y la pendiente de la recta tangente que pasa por $(a, f(a))$. Si f es localmente lineal en a, entonces

$$\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(a + h) - f(a)}{h} - m\right] = 0$$

lo cual significa que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = m$$

Concluimos que *f* debe ser diferenciable en *a* y que *m* debe ser igual a $f'(a)$.

Recíprocamente, si f es diferenciable en a, entonces $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) = m$; por consiguiente, *f* es localmente lineal. Por lo tanto, en el caso de una variable, *f* es localmente lineal en *a* si y sólo si *f* es diferenciable en *a*.

Este concepto de linealidad local se generaliza al caso en que *f* es una función de dos variables y usaremos esta característica para definir la diferenciabilidad de una función de dos variables. En primer lugar, definimos la linealidad local para una función de dos variables.

Definición Linealidad local para una función de dos variables

Decimos que *f* es **localmente lineal** en (a, b) si

$$\begin{aligned} &f(a+h_1, b+h_2) \\ &\qquad = f(a,b) + h_1 f_x(a,b) + h_2 f_y(a,b) + h_1\varepsilon_1(h_1,h_2) + h_2\varepsilon_2(h_1,h_2) \end{aligned}$$

donde $\varepsilon_1(h_1,h_2) \to 0$ cuando $(h_1,h_2) \to 0$ y $\varepsilon_2(h_1,h_2) \to 0$ cuando $(h_1,h_2) \to 0$.

Así como h era un pequeño incremento en x para el caso de una variable, podemos pensar h_1 y h_2 como pequeños incrementos en x y y, respectivamente, para el caso de dos variables.

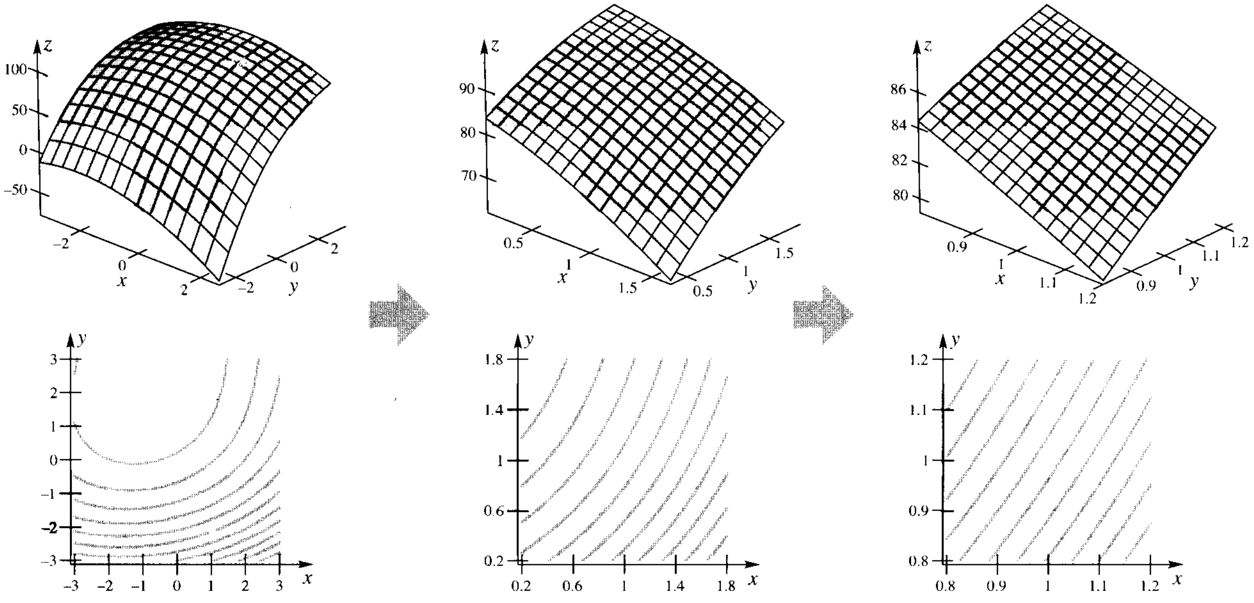


Figura 3

La figura 3 muestra lo que ocurre cuando hacemos un acercamiento sobre la gráfica de una función de dos variables. (En la figura 3 hacemos un acercamiento sobre la gráfica en el punto $(x, y) = (1, 1)$.) Si nos acercamos lo suficiente, la superficie tridimensional se parece a un plano y la gráfica de contorno parece constar de rectas paralelas. Podemos simplificar la definición anterior haciendo $\mathbf{p}_0 = (a, b)$, $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ y $\varepsilon(\mathbf{h}) = (\varepsilon_1(h_1, h_2), \varepsilon_2(h_1, h_2))$. [La función $\varepsilon(\mathbf{h})$ es una función vectorial de una variable vectorial]. Así,

$$f(\mathbf{p}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{p}_0) + (f_x(\mathbf{p}_0), f_y(\mathbf{p}_0)) \cdot \mathbf{h} + \varepsilon(\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}$$

Esta formulación se generaliza fácilmente cuando *f* es una función de tres (o más) variables. Ahora definiremos la diferenciabilidad como sinónimo de linealidad local.

Definición Diferenciabilidad para una función de dos o más variables

La función f es **diferenciable** en $\mathbf{p}$ si es localmente lineal en $\mathbf{p}$. La función f es diferenciable en un conjunto abierto R si es diferenciable en cada punto en R.

El vector $(f_x(\mathbf{p}), f_y(\mathbf{p})) = f_x(\mathbf{p})\mathbf{i} + f_y(\mathbf{p})\mathbf{j}$ se denota $\nabla f(\mathbf{p})$ y se llama **gradiente** de f. Así, f es diferenciable en $\mathbf{p}$ si y sólo si

$$f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{p}) + \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h} + \varepsilon(\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}$$

donde $\varepsilon(\mathbf{h}) \to \mathbf{0}$ cuando $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$. El operador ∇ se conoce como **operador gradiente.**

En el sentido anterior, *el gradiente se convierte en el análogo de la derivada*. Destacamos varios aspectos de nuestras definiciones.

1. La derivada $f'(x)$ es un número, mientras que el gradiente $\nabla f(\mathbf{p})$ es un vector.
2. Los productos $\nabla f(p) \cdot \mathbf{h}$ y $\varepsilon(\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}$ son productos punto.
3. Las definiciones de diferenciabilidad y gradiente se extienden con facilidad a cualquier número de dimensiones.

El siguiente teorema da una condición que garantiza la diferenciabilidad de una función en un punto.

Teorema A

Si $f(x, y)$ tiene derivadas parciales continuas $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ en un disco D, cuyo interior contiene a (a, b), entonces $f(x, y)$ *es diferenciable* en (a, b).

Notación de intervalos en la demostración

La notación de intervalos utilizada en la demostración, tal como $[a, a + h_1]$, sugiere que $h_1 > 0$. Eso no es necesariamente el caso, h_1 y h_2 pueden ser negativos. En esta demostración debemos interpretar los intervalos como los puntos entre los dos extremos (sin importar cuál es el mayor). El intervalo *incluye* los extremos en el caso de un intervalo cerrado y *excluye* los extremos en el caso de un intervalo abierto.

Demostración Sean h_1 *y* h_2 los incrementos en x y y, respectivamente, tan pequeños que $(a + h_1, b + h_2)$ está en el interior del disco D. (Estos valores h_1 y h_2 existen porque el interior del disco D es un conjunto *abierto*). La diferencia entre $f(a + h_1, b + h_2)$ y $f(a, b)$ es

$$\begin{aligned} (3)\qquad & f(a + h_1, b + h_2) - f(a, b) \\ &= [f(a + h_1, b) - f(a, b)] + [f(a + h_1, b + h_2) - f(a + h_1, b)] \end{aligned}$$

Ahora aplicamos el teorema del valor medio para derivadas (teorema 3.6A) dos veces: una a la diferencia $f(a + h_1, b) - f(a, b)$ y otra a la diferencia $f(a + h_1, b + h_2) - f(a + h_1, b)]$. En el primer caso, definimos $g_1(x) = f(x, b)$ para x en el intervalo $[a, a + h_1]$; y por el teorema del valor medio para derivadas concluimos que existe un valor c_1 en $(a, a + h_1)$ tal que

$$g_1(a + h_1) - g_1(a) = f(a + h_1, b) - f(a, b) = h_1 g_1'(c_1) = h_1 f_x(c_1, b)$$

Para el segundo caso, definimos $g_2(y) = f(a + h_1, y)$ para y en el intervalo $[b, b + h_2]$. Existe c_2 en el intervalo $(b, b + h_2)$ tal que

$$g_2(b + h_2) - g_2(b) = h_2 g_2'(c_2)$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} g_2(b + h_2) - g_2(b) &= f(a + h_1, b + h_2) - f(a + h_1, b) \\ &= h_2 g_2'(c_2) = h_2 f_y(a + h_1, c_2) \end{aligned}$$

La ecuación (3) se convierte en

$$\begin{aligned}f(a+h_1,b+h_2)-f(a,b) &= h_1f_x(c_1,b)+h_2f_y(a+h_1,c_2)\\ &= h_1\left[f_x(c_1,b)+f_x(a,b)-f_x(a,b)\right]\\ &\quad+h_2\left[f_y(a+h_1,c_2)+f_y(a,b)-f_y(a,b)\right]\\ &= h_1f_x(a,b)+h_2f_y(a,b)\\ &\quad+h_1\left[f_x(c_1,b)-f_x(a,b)\right]\\ &\quad+h_2\left[f_y(a+h_1,c_2)-f_y(a,b)\right]\end{aligned}$$

Ahora, sean $\varepsilon_1(h_1,h_2)=f_x(c_1,b)-f_x(a,b)$ y $\varepsilon_2(h_1,h_2)=f_y(a+h_1,c_2)-f_y(a,b)$. Como $c_1\in(a,a+h_l)$ y $c_2\in(b,b+h_2)$, concluimos que $c_1\to a$ y $c_2\to b$ cuando $h_1,h_2\to 0$. Así,

$$\begin{aligned}f(a+h_1,b+h_2)-f(a,b) &= h_1f_x(a,b)+h_2f_y(a,b)\\ &\quad+h_1\varepsilon_1(h_1,h_2)+h_2\varepsilon_2(h_1,h_2)\end{aligned}$$

donde $\varepsilon_1(h_1,h_2)\to 0$ y $\varepsilon_2(h_1,h_2)\to 0$ cuando $(h_1,h_2)\to(0,0)$. Por lo tanto, f es localmente lineal y ahora diferenciable en (a,b). ■

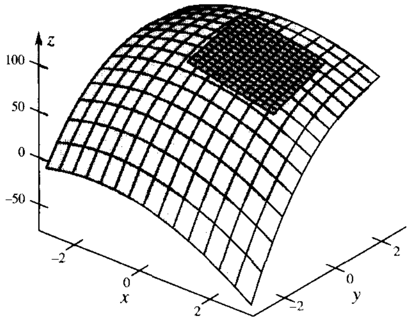


Figura 4

Si la función f es diferenciable en $\mathbf{p}_0$, entonces, cuando $\mathbf{h}$ tiene magnitud pequeña,

$$f(\mathbf{p}_0+\mathbf{h})\approx f(\mathbf{p}_0)+\nabla f(\mathbf{p}_0)\cdot\mathbf{h}$$

Si hacemos $\mathbf{p}=\mathbf{p}_0+\mathbf{h}$, vemos que la función T definida como

$$T(\mathbf{p})=f(\mathbf{p}_0)+\nabla f(\mathbf{p}_0)\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0)$$

debe ser una buena aproximación a $f(\mathbf{p})$ si $\mathbf{p}$ está cerca de $\mathbf{p}_0$. La ecuación $z=T(\mathbf{p})$ define un plano que aproxima f cerca de $\mathbf{p}_0$. Naturalmente, este plano se llama **plano tangente**. Véase la figura 4.

EJEMPLO 1 Demuestre que $f(x,y)=xe^y+x^2y$ es diferenciable en todas partes y calcule su gradiente. Luego determine la ecuación del plano tangente en $(2,0)$.

SOLUCIÓN Primero observemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^y+2xy \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=xe^y+x^2$$

Ambas funciones son continuas en todas partes y así, por el teorema A, f es diferenciable en todas partes. El gradiente es

$$\nabla f(x,y)=(e^y+2xy)\mathbf{i}+(xe^y+x^2)\mathbf{j}=\langle e^y+2xy,\,xe^y+x^2\rangle$$

Así,

$$\nabla f(2,0)=\mathbf{i}+6\mathbf{j}=\langle 1,6\rangle$$

y la ecuación del plano tangente es

$$\begin{aligned}z &= f(2,0)+\nabla f(2,0)\cdot\langle x-2,y\rangle\\ &= 2+\langle 1,6\rangle\cdot\langle x-2,y\rangle\\ &= 2+x-2+6y=x+6y\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 Para $f(x,y,z)=x\operatorname{sen} z+x^2y$, determine $\nabla f(1,2,0)$.

SOLUCIÓN Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\operatorname{sen} z+2xy,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=x^2,\qquad \frac{\partial f}{\partial z}=x\cos z$$

En $(1,2,0)$, estas parciales tienen los valores 4, 1 y 1, respectivamente. Así,

$$\nabla f(1,2,0)=4\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

■

Reglas para los gradientes En muchos aspectos, los gradientes se comportan como las derivadas. Recuerde que D, considerado como operador, es lineal. El operador ∇ también es lineal.

Teorema B **Propiedades de ∇**

El operador gradiente, ∇, satisface

1. $\nabla[f(\mathbf{p}) + g(\mathbf{p})] = \nabla f(\mathbf{p}) + \nabla g(\mathbf{p})$
2. $\nabla[\alpha f(\mathbf{p})] = \alpha \nabla f(\mathbf{p})$
3. $\nabla[f(\mathbf{p})g(\mathbf{p})] = f(\mathbf{p})\,\nabla g(\mathbf{p}) + g(\mathbf{p})\nabla f(\mathbf{p})$

Demostración Los tres resultados son consecuencia de los hechos correspondientes para las derivadas parciales. Demostraremos (3) en el caso de dos variables, eliminando el punto **p** por brevedad.

$$\begin{aligned}\nabla fg &= \frac{\partial(fg)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial(fg)}{\partial y}\mathbf{j}\\ &= \left(f\frac{\partial g}{\partial x} + g\frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(f\frac{\partial g}{\partial y} + g\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathbf{j}\\ &= f\left(\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j}\right) + g\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}\right)\\ &= f\nabla g + g\nabla f \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

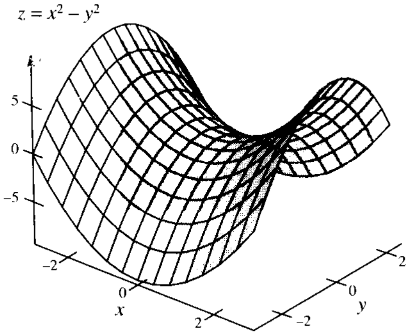


Figura 5

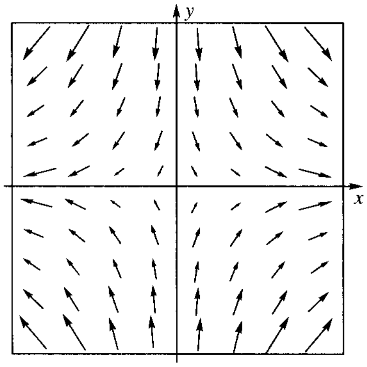


Figura 6

Continuidad y diferenciabilidad Recuerde que para funciones de una variable, la diferenciabilidad implica la continuidad, pero no al revés. Esto también es cierto ahora.

Teorema C

Si f es diferenciable en **p**, entonces f es continua en **p**.

Demostración Como f es diferenciable en **p**.

$$f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) = \nabla f(\mathbf{p})\cdot\mathbf{h} + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{h})\cdot\mathbf{h}$$

Así,

$$\begin{aligned}|f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{p})| &\le |\nabla f(\mathbf{p})\cdot\mathbf{h}| + |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{h})\cdot\mathbf{h}|\\ &= \|\nabla f(\mathbf{p})\|\|\mathbf{h}\||\cos\theta| + |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{h})\cdot\mathbf{h}|\end{aligned}$$

Los dos últimos términos tienden a 0 cuando $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$, de modo que

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{p})$$

Esta última igualdad es una manera de formular la continuidad de f en **p**. $\blacksquare$

El campo gradiente El gradiente ∇f asocia a cada punto **p** del dominio de f un vector $\nabla f(\mathbf{p})$. El conjunto de todos estos vectores es el **campo gradiente** para f. En las figuras 5 y 6 mostramos las gráficas de la superficie $z = x^2 - y^2$ y el campo gradiente correspondiente. ¿Estas figuras sugieren algo acerca de la dirección en la que apuntan los vectores gradientes? Exploraremos este tema en la siguiente sección.

Revisión de conceptos

1. El análogo de la derivada $f'(x)$ para una función de más de una variable es el(la) ________ denotado(a) por $\nabla f(\mathbf{p})$.

2. La función $f(x, y)$ es diferenciable en (a, b) si y sólo si f es ________ en (a, b).

3. Para una función f de dos variables, el gradiente es $\nabla f(\mathbf{p}) =$ _____. Así, si $f(x, y) = xy^2$, $\nabla f(x, y) =$ ______.

4. Que $f(x, y)$ sea diferenciable en (x_0, y_0) es equivalente a la existencia de un(a) __________ a la gráfica en este punto.

Conjunto de problemas 12.4

En los problemas del 1 al 10 determine el gradiente ∇f.

1. $f(x, y) = x^2y + 3xy$ **2.** $f(x, y) = x^3y - y^3$

3. $f(x, y) = xe^{xy}$ **4.** $f(x, y) = x^2y \cos y$

5. $f(x, y) = x^2y/(x + y)$ **6.** $f(x, y) = \operatorname{sen}^3(x^2y)$

7. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

8. $f(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2x$

9. $f(x, y, z) = x^2ye^{x-z}$

10. $f(x, y, z) = xz \ln(x + y + z)$

En los problemas del 11 al 14 determine el vector gradiente de la función dada en el punto indicado **p**. *Luego determine la ecuación del plano tangente en* **p** *(véase el ejemplo 1).*

11. $f(x, y) = x^2y - xy^2, \mathbf{p} = (-2, 3)$

12. $f(x, y) = x^3y + 3xy^2, \mathbf{p} = (2, -2)$

13. $f(x, y) = \cos \pi x \operatorname{sen} \pi y + \operatorname{sen} 2\pi y, \mathbf{p} = (-1, \frac{1}{2})$

14. $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y}, \mathbf{p} = (2, -1)$

En los problemas 15 y 16 determine la ecuación $w = T(x, y, z)$ *del "hiperplano" tangente en* **p**.

15. $f(x, y, z) = 3x^2 - 2y^2 + xz^2, \mathbf{p} = (1, 2, -1)$

16. $f(x, y, z) = xyz + x^2, \mathbf{p} = (2, 0, -3)$

17. Demuestre que

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$$

18. Demuestre que

$$\nabla(f^r) = rf^{r-1}\nabla f$$

19. Determine todos los puntos (x, y) en los que el plano tangente a la gráfica de $z = x^2 - 6x + 2y^2 - 10y + 2xy$ sea horizontal.

20. Determine todos los puntos (x, y) en los que el plano tangente a la gráfica de $z = x^3$ sea horizontal.

21. Determine ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la superficie $z = y^2 + x^3y$ en el punto $(2, 1, 9)$ cuya proyección sobre el plano xy es

(a) paralela al eje x; (b) paralela al eje y;

(c) paralela a la recta $x = y$.

22. Determine ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la superficie $z = x^2y^3$ en el punto $(3, 2, 72)$ cuya proyección sobre el plano xy es

(a) paralela al eje x; (b) paralela al eje y;

(c) paralela a la recta $x = -y$.

23. Consulte la figura 1. Determine la ecuación del plano tangente a $z = -10\sqrt{|xy|}$ en $(1, -1)$. *Recuerde:* $d|x|/dx = |x|/x$ para $x \neq 0$.

24. Teorema del valor medio para varias variables Si f es diferenciable en cada punto del segmento de recta de **a** a **b**, entonces en ese segmento existe un punto **c** entre **a** y **b** tal que

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

Suponiendo que este resultado es válido, demuestre que si f es diferenciable en un conjunto convexo S y si $\nabla f(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ en S, entonces f es constante en S. *Nota*: un conjunto S es convexo, si cada par de puntos en S pueden unirse mediante un segmento de recta en S.

25. Determine todos los valores de **c** que satisfacen el teorema del valor medio para varias variables (véase el problema 24) para la función $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$, donde $\mathbf{a} = \langle 0, 0 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 2, 1 \rangle$.

26. Determine todos los valores de **c** que satisfacen el teorema del valor medio para varias variables (véase el problema 24) para la función $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2}$, donde $\mathbf{a} = \langle 0, 0 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 2, 6 \rangle$.

27. Utilice el resultado del problema 24 para mostrar que si $\nabla f(\mathbf{p}) = \nabla g(\mathbf{p})$ para todo **p** en un conjunto convexo S, entonces f y g difieren por una constante en S.

28. Determine la función más general $f(\mathbf{p})$ que satisfaga $\nabla f(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$.

CAS **29.** Trace la gráfica de $f(x, y) = -|xy|$ junto con su campo gradiente.

(a) Con base en esto y en las figuras 5 y 6, haga una conjetura acerca de la dirección en que apunta un vector gradiente.

(b) ¿Es f diferenciable en el origen? Justifique su respuesta.

CAS **30.** Trace la gráfica de $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y - \operatorname{sen}(x + y)$ en $0 \leq x \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq 2\pi$. Trace además el campo gradiente para ver si su conjetura en el problema 29(a) es válida.

31. Demuestre el teorema B para

(a) el caso de tres variables, y

(b) el caso de n variables. *Sugerencia:* denote los vectores unitarios canónicos como $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \ldots \mathbf{i}_n$.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** gradiente **2.** localmente lineal **3.** $\dfrac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial y}\mathbf{j}$; $y^2\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j}$ **4.** plano tangente

---

12.5 Derivadas direccionales y gradientes

Considere de nuevo una función $f(x, y)$ de dos variables. Las derivadas parciales $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ miden la razón de cambio (y la pendiente de la recta tangente) en direcciones paralelas a los ejes x y y. Nuestro objetivo es estudiar la razón de cambio de f en una dirección arbitraria. Esto conduce al concepto de derivada direccional, que a su vez está relacionado con el gradiente.

Será conveniente usar la notación vectorial. Sea $\mathbf{p} = (x, y)$ y sean $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ los vectores unitarios en las direcciones positivas de x y y. Entonces las dos derivadas parciales en $\mathbf{p}$ se pueden escribir como sigue:

$$f_x(\mathbf{p}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{p} + h\mathbf{i}) - f(\mathbf{p})}{h}$$

$$f_y(\mathbf{p}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{p} + h\mathbf{j}) - f(\mathbf{p})}{h}$$

Para obtener el concepto que estamos buscando, lo único que debemos hacer es reemplazar $\mathbf{i}$ o $\mathbf{j}$ por un vector unitario arbitrario $\mathbf{u}$.

Definición

Para cualquier vector unitario $\mathbf{u}$, sea

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{p}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{p} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{p})}{h}$$

Este límite, si existe, se llama **derivada direccional** de f en $\mathbf{p}$ en la dirección $\mathbf{u}$.

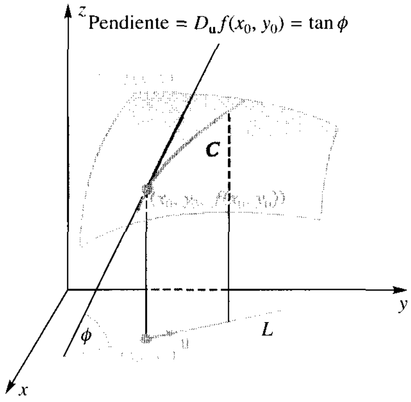

z
Pendiente = $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \tan\phi$
C
$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$
y
ϕ
L
u
x

Figura 1

Así, $D_{\mathbf{i}} f(\mathbf{p}) = f_x(\mathbf{p})$ y $D_{\mathbf{j}} f(\mathbf{p}) = f_y(\mathbf{p})$. Como $\mathbf{p} = (x, y)$, también usamos la notación $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$. La figura 1 proporciona la interpretación geométrica de $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$. El vector $\mathbf{u}$ determina una recta L en el plano xy que pasa por (x_0, y_0). El plano que pasa por L perpendicular al plano xy corta a la superficie $z = f(x, y)$ en una curva C. Su tangente en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ tiene pendiente $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$. Otra interpretación útil es que $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$ mide la razón de cambio de f respecto a la distancia en la dirección $\mathbf{u}$.

Relación con el gradiente

De la sección 12.4, recuerde que $\nabla f(\mathbf{p})$ está dado por

$$\nabla f(\mathbf{p}) = f_x(\mathbf{p})\mathbf{i} + f_y(\mathbf{p})\mathbf{j}$$

Teorema A

Sea f diferenciable en $\mathbf{p}$. Entonces f tiene una derivada direccional en $\mathbf{p}$ en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ y

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{p}) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(\mathbf{p})$$

Es decir,

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = u_1 f_x(x, y) + u_2 f_y(x, y)$$

Demostración Como f es diferenciable en $\mathbf{p}$.

$$f(\mathbf{p} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{p}) = \nabla f(\mathbf{p}) \cdot (h\mathbf{u}) + \boldsymbol{\varepsilon}(h\mathbf{u}) \cdot (h\mathbf{u})$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon}(h\mathbf{u}) \to \mathbf{0}$ cuando $h \to 0$. Así,

$$\frac{f(\mathbf{p} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{p})}{h} = \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{u} + \boldsymbol{\varepsilon}(h\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}$$

Obtenemos la conclusión calculando los límites cuando $h \to 0$. ■

EJEMPLO 1 Si $f(x, y) = 4x^2 - xy + 3y^2$, determine la derivada direccional de f en $(2, -1)$ en la dirección del vector $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.

SOLUCIÓN El vector unitario $\mathbf{u}$ en la dirección de $\mathbf{a}$ es $\left(\frac{4}{5}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{3}{5}\right)\mathbf{j}$. Además $f_x(x, y) = 8x - y$ y $f_y(x, y) = -x + 6y$; así, $f_x(2, -1) = 17$ y $f_y(2, -1) = -8$. En consecuencia, por el teorema A,

$$D_{\mathbf{u}} f(2, -1) = \left\langle \tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5} \right\rangle \cdot \left\langle 17, -8 \right\rangle = \tfrac{4}{5}(17) + \tfrac{3}{5}(-8) = \tfrac{44}{5}$$ ■

Aunque no entraremos en detalles, afirmamos que lo que hemos hecho es válido para funciones de tres o más variables, con modificaciones obvias.

EJEMPLO 2 Determine la derivada direccional de la función $f(x, y, z) = xy$ sen z en el punto $(1, 2, \pi/2)$ en la dirección del vector $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

SOLUCIÓN El vector unitario $\mathbf{u}$ en la dirección de $\mathbf{a}$ es $\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$. Además, $f_x(x, y, z) = y$ sen z, $f_y(x, y, z) = x$ sen z, y $f_z(x, y, z) = xy \cos z$, y entonces $f_x(1, 2, \pi/2) = 2$, $f_y(1, 2, \pi/2) = 1$, y $f_z(1, 2, \pi/2) = 0$. Concluimos que

$$D_{\mathbf{u}}f\left(1, 2, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3}(2) + \frac{2}{3}(1) + \frac{2}{3}(0) = \frac{4}{3}$$ ■

Razón máxima de cambio Para una función f y un punto $\mathbf{p}$, es natural preguntar en qué dirección crece la función más rápidamente, es decir, ¿en qué dirección es mayor $D_u f(\mathbf{p})$? Gracias a la fórmula geométrica para el producto punto (sección 11.3) podemos escribir

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{p}) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(\mathbf{p}) = \|\mathbf{u}\|\|\nabla f(\mathbf{p})\| \cos\theta = \|\nabla f(\mathbf{p})\| \cos\theta$$

donde θ es el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\nabla f(\mathbf{p})$. Así, $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{p})$ se maximiza cuando $\theta = 0$ y se minimiza cuando $\theta = \pi$. Resumimos a continuación.

Teorema B

Una función crece más rápidamente en $\mathbf{p}$ en la dirección del gradiente (con razón $\|\nabla f(\mathbf{p})\|$) y decrece más rápidamente en la dirección opuesta (con razón $-\|\nabla f(\mathbf{p})\|$).

EJEMPLO 3 Suponga que un escarabajo está sobre el paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ en el punto $(1, 1, 0)$, como en la figura 2. ¿En qué dirección debe moverse para la subida más pronunciada?, y ¿cuál es la pendiente al comenzar a moverse?

SOLUCIÓN Sea $f(x, y) = y^2 - x^2$. Como $f_x(x, y) = -2x$ y $f_y(x, y) = 2y$,

$$\nabla f(1, 1) = f_x(1, 1)\mathbf{i} + f_y(1, 1)\mathbf{j} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

Así, el escarabajo debe moverse desde $(1, 1, 0)$ en la dirección $-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, donde la pendiente será $\|-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. ■

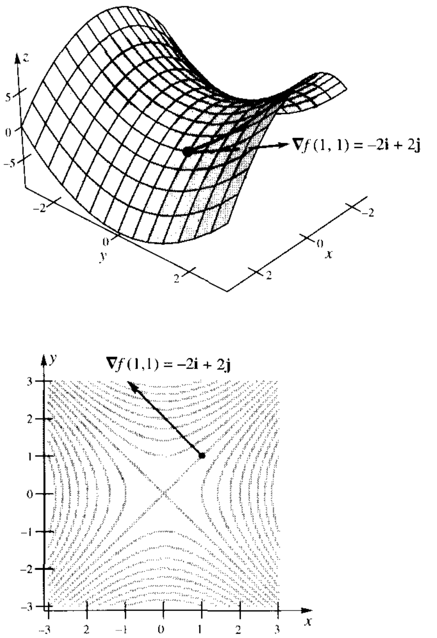


Figura 2

Curvas de nivel y gradientes Recuerde de la sección 12.1 que las *curvas de nivel* de una superficie $z = f(x, y)$ son las proyecciones sobre el plano xy de las curvas de intersección de la superficie con planos $z = k$ que son paralelos al plano xy. El valor de la función en todos los puntos de la misma curva de nivel es constante (figura 3).

Denotemos por L a la curva de nivel de $f(x, y)$ que pasa por un punto elegido de forma arbitraria $P(x_0, y_0)$ en el dominio de f, y sea $\mathbf{u}$ el vector unitario tangente a L en P. Como el valor de f es el mismo en todos los puntos de la curva de nivel L, su derivada direccional $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$, que es la razón de cambio de $f(x, y)$ en la dirección $\mathbf{u}$, es igual a cero cuando $\mathbf{u}$ es tangente a L. (Esta afirmación, que parece muy clara intuitivamente, requiere una justificación, la cual omitiremos, pues el resultado que queremos también se sigue de un argumento que daremos en la sección 12.7). Como

$$0 = D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u}$$

concluimos que ∇f y $\mathbf{u}$ son perpendiculares, resultado que merece el nivel de teorema.

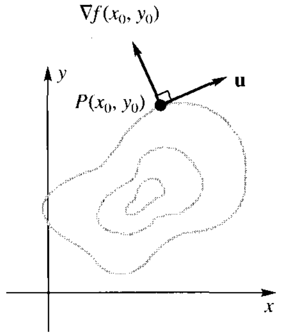


Figura 3

Teorema C

El gradiente de f en un punto P es perpendicular a la curva de nivel de f que pasa por P.

EJEMPLO 4 Para el paraboloide $z = x^2/4 + y^2$, determine la ecuación de su curva de nivel que pasa por el punto $P(2, 1)$ y bosquéjela. Determine el vector gradiente del paraboloide en P y trace el gradiente con su punto inicial en P.

SOLUCIÓN La curva de nivel del paraboloide que corresponde al plano $z = k$ tiene la ecuación $x^2/4 + y^2 = k$. Para determinar el valor de k correspondiente a la curva de nivel que pasa por P, sustituimos $(2, 1)$ en vez de (x, y) y obtenemos $k = 2$. Así, la ecuación de la curva de nivel que pasa por P es la elipse

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

A continuación, sea $f(x, y) = x^2/4 + y^2$. Como $f_x(x, y) = x/2$ y $f_y(x, y) = 2y$, el gradiente del paraboloide en $P(2, 1)$ es

$$\nabla f(2, 1) = f_x(2, 1)\mathbf{i} + f_y(2, 1)\mathbf{j} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

La curva de nivel y el gradiente en P aparecen en la figura 4. ∎

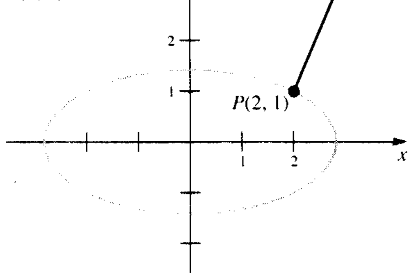


Figura 4

Para dar más ejemplos de los teoremas B y C, pedimos a nuestra computadora que trazara la superficie $z = |xy|$, junto con su mapa de contorno y campo gradiente. Los resultados aparecen en la figura 5. Observe que los vectores gradientes son perpendiculares a las curvas de nivel y que realmente apuntan en la dirección de máximo incremento de z.

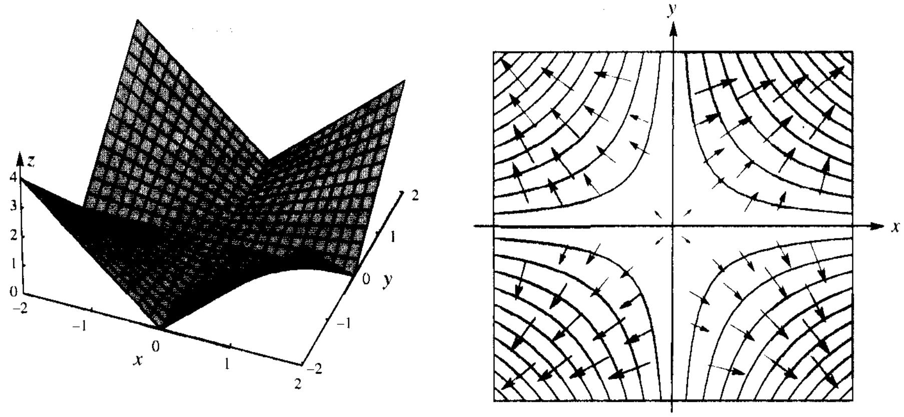
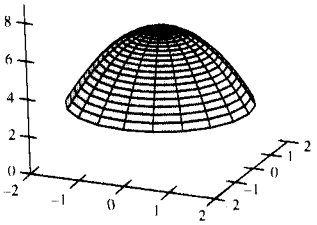
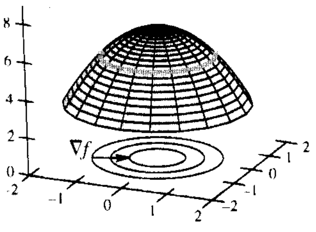
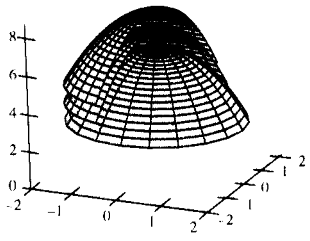
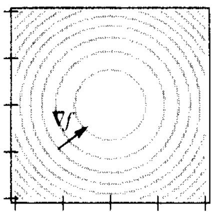
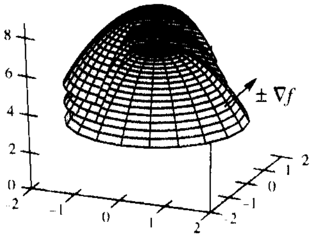


Figura 5

Dimensiones superiores El concepto de curvas de nivel para funciones de dos variables se generaliza a superficies de nivel para funciones de tres variables. Si f es una función de tres variables, la superficie $f(x, y, z) = k$, donde k es una constante, se llama **superficie de nivel** para f. En todos los puntos de una superficie de nivel el valor de la función es el mismo y el vector gradiente de $f(x, y, z)$ en el punto $P(x, y, z)$ en su dominio es normal a la superficie de nivel de f que pasa por P.

En los problemas de conducción de calor en un cuerpo homogéneo, donde $w = f(x, y, z)$ proporciona la temperatura en el punto (x, y, z), la superficie de nivel $f(x, y, z) = k$ se llama *superficie isoterma,* pues todos sus puntos tienen la misma temperatura k. En cualquier punto dado del cuerpo, el calor fluye en la dirección opuesta a la del gradiente (es decir, en la dirección de mayor *decremento* en la temperatura) y, por lo tanto, perpendicular a la superficie isoterma que pasa por el punto. Si $w = f(x, y, z)$ da el potencial electrostático (voltaje) en cualquier punto en un campo de potencial eléctrico, las superficies de nivel de esta función se llaman *superficies equipotenciales.* Todos los puntos de una superficie equipotencial tienen el mismo potencial electrostático y la dirección de flujo de la electricidad es a lo largo del negativo del gradiente, es decir, en la dirección de mayor caída de potencial.

De 2 a 3 variables

$z = f(x, y)$	$w = f(x, y, z)$
 La gráfica es una superficie.	No podemos dibujar la gráfica, ya que necesitaríamos un espacio de cuatro dimensiones.
 $f(x, y) = k$ determina una *curva de nivel* en el plano xy.	 $f(x, y, z) = k$ determina una *superficie de nivel* en el espacio xyz.
 ∇f es un vector normal a la curva de nivel.	 ∇f es un vector normal a la superficie de nivel.

EJEMPLO 5 Si la temperatura en cualquier punto de un cuerpo homogéneo está dada por $T = e^{xy} - xy^2 - x^2yz$, ¿cuál es la dirección de mayor descenso de temperatura en el punto $(1, -1, 2)$?

SOLUCIÓN El mayor descenso de temperatura en $(1, -1, 2)$ está en la dirección del negativo del gradiente en ese punto.

Como $\nabla T = (ye^{xy} - y^2 - 2xyz)\mathbf{i} + (xe^{xy} - 2xy - x^2z)\mathbf{j} + (-x^2y)\mathbf{k}$, vemos que $-\nabla T$ en $(1, -1, 2)$ es

$$(e^{-1} - 3)\mathbf{i} - e^{-1}\mathbf{j} - \mathbf{k}$$ ■

Revisión de conceptos

1. La derivada direccional de f en $\mathbf{p}$ en la dirección del vector unitario $\mathbf{u}$ se denota con $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{p})$ y se define como $\lim_{h \to 0}$ _____.

2. Si $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ es un vector unitario, entonces podemos calcular $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ a partir de la fórmula $D_{\mathbf{u}}f(x, y) =$ _____.

3. El vector gradiente ∇f siempre apunta en la dirección de _____ de f.

4. El vector gradiente de f en P siempre es perpendicular a la(el) _____ de f que pasa por P.

Conjunto de problemas 12.5

En los problemas del 1 al 8 determine la derivada direccional de f en el punto $\mathbf{p}$ *en la dirección de* $\mathbf{a}$.

1. $f(x, y) = x^2y$; $\mathbf{p} = (1, 2)$; $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

2. $f(x, y) = y^2 \ln x$; $\mathbf{p} = (1, 4)$; $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

3. $f(x, y) = 2x^2 + xy - y^2$; $\mathbf{p} = (3, -2)$; $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

4. $f(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2$; $\mathbf{p} = (-1, 2)$; $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$

5. $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$; $\mathbf{p} = (0, \pi/4)$; $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}$

6. $f(x, y) = e^{-xy}$; $\mathbf{p} = (1, -1)$; $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}$

7. $f(x, y, z) = x^3y - y^2z^2$; $\mathbf{p} = (-2, 1, 3)$; $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

8. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $\mathbf{p} = (1, -1, 2)$; $\mathbf{a} = \sqrt{2}\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$

En los problemas del 9 al 12 determine un vector unitario en la dirección en que f crece más rápidamente en $\mathbf{p}$. *¿Cuál es la razón de cambio en esta dirección?*

9. $f(x, y) = x^3 - y^5$; $\mathbf{p} = (2, -1)$

10. $f(x, y) = e^y \operatorname{sen} x$; $\mathbf{p}$ $(5\pi/6, 0)$

11. $f(x, y, z) = x^2yz$; $\mathbf{p} = (1, -1, 2)$

12. $f(x, y, z) = xe^{yz}$; $\mathbf{p} = (2, 0, -4)$

13. ¿En qué dirección $\mathbf{u}$ ocurre que $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ decrece más rápido en $\mathbf{p} = (-1, 2)$?

14. ¿En qué dirección $\mathbf{u}$ ocurre que $f(x, y) = \operatorname{sen}(3x - y)$ decrece más rápido en $\mathbf{p} = (\pi/6, \pi/4)$?

15. Bosqueje la curva de nivel de $f(x, y) = y/x^2$ que pasa por $\mathbf{p} = (1, 2)$. Calcule el vector gradiente $\nabla f(\mathbf{p})$ y trace este vector, colocando su punto inicial en $\mathbf{p}$. ¿Qué debe ocurrir con $\nabla f(\mathbf{p})$?

16. Siga las instrucciones del problema 15 para $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ y $\mathbf{p} = (2, 1)$.

17. Determine la derivada direccional de $f(x, y, z) = xy + z^2$ en $(1, 1, 1)$ en la dirección hacia $(5, -3, 3)$.

18. Determine la derivada direccional de $f(x, y) = e^{-x} \cos y$ en $(0, \pi/3)$ en la dirección hacia el origen.

19. La temperatura en (x, y, z) de una bola con centro en el origen está dada por

$$T(x, y, z) = \frac{200}{5 + x^2 + y^2 + z^2}$$

(a) Por inspección, decida dónde está más caliente la bola

(b) Determine un vector que apunte en la dirección de mayor incremento de temperatura en $(1, -1, 1)$.

(c) ¿Apunta el vector de la parte (b) hacia el origen?

20. La temperatura en (x, y, z) de una bola con centro en el origen es $T(x, y, z) = 100e^{-(x^2+y^2+z^2)}$. Observe que esta bola está más caliente en el origen. Demuestre que la dirección de mayor incremento en la temperatura es siempre un vector que apunta hacia afuera del origen.

21. Determine el gradiente de $f(x, y, z) = \operatorname{sen}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Demuestre que el gradiente siempre apunta hacia el origen o hacia fuera del origen.

22. Suponga que la temperatura T en el punto (x, y, z) depende sólo de la distancia al origen. Demuestre que la dirección de máximo incremento en T siempre apunta hacia el origen o hacia fuera del origen.

23. La elevación de una montaña sobre el nivel del mar en el punto (x, y) es $f(x, y)$. Un montañista en $\mathbf{p}$ nota que la pendiente en la dirección este es $-\frac{1}{2}$ y la pendiente en la dirección norte es $-\frac{1}{4}$. ¿En qué dirección debe moverse para el más rápido descenso?

24. Dado que $f_x(2, 4) = -3$ y $f_y(2, 4) = 8$, determine la derivada direccional de f en $(2, 4)$ en la dirección hacia $(5, 0)$.

25. La elevación de una montaña sobre el nivel del mar en (x, y) es $3000e^{-(x^2+2y^2)/100}$ metros. El eje x positivo apunta hacia el este y el eje y positivo apunta hacia el norte. Una montañista está directamente sobre $(10, 10)$. Si la montañista se mueve hacia el norte, ¿ascenderá o descenderá y con qué pendiente?

26. Si la temperatura de una placa en el punto (x, y) es $T(x, y) = 10 + x^2 - y^2$, determine la trayectoria que seguiría una partícula, la cual siempre se mueve en la dirección de mayor incremento en la temperatura, que busca calor, si parte de $(-2, 1)$. *Sugerencia:* la partícula se mueve en la dirección del gradiente

$$\nabla T = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$$

Podemos escribir la trayectoria en forma paramétrica como

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

y queremos $x(0) = -2$ y $y(0) = 1$. Moverse en la dirección requerida significa que $\mathbf{r}'(t)$ debe ser paralelo a ∇T. Esto se satisface si

$$\frac{x'(t)}{2x(t)} = -\frac{y'(t)}{2y(t)}$$

junto con las condiciones $x(0) = -2y$ y $y(0) = 1$. Ahora resuelva esta ecuación diferencial y evalúe la constante de integración arbitraria.

27. Resuelva el problema 26, suponiendo que $T(x, y) = 20 - 2x^2 - y^2$.

28. El punto $P(1, -1, -10)$ está sobre la superficie $z = -10\sqrt{|xy|}$ (véase la figura 1 de la sección 12.4). Partiendo de P, ¿en qué dirección $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ debe uno moverse en cada caso?

(a) Para subir más rápidamente.

(b) Para permanecer en el mismo nivel.

(c) Para subir con pendiente 1.

29. La temperatura T en grados Celsius en (x, y, z) está dada por $T = 10/(x^2 + y^2 + z^2)$, donde las distancias están en metros. Una abeja vuela alejándose del punto más caliente en el origen siguiendo una trayectoria t (en segundos) es $\mathbf{r} = t \cos \pi t\, \mathbf{i} + t \operatorname{sen} \pi t\, \mathbf{j} + t\mathbf{k}$. Determine la razón de cambio de T en cada caso.

(a) Respecto a la distancia recorrida en $t = 1$.

(b) Respecto al tiempo en $t = 1$. (Piense en dos formas de hacer esto).

30. Sean $\mathbf{u} = (3\mathbf{i} - 4\mathbf{j})/5$ y $\mathbf{v} = (4\mathbf{i} + 3\mathbf{j})/5$ y suponga que en algún punto P, $D_{\mathbf{u}}f = -6$ y $D_{\mathbf{v}}f = 17$.

(a) Determine ∇f en P.

(b) Note que $\|\nabla f\|^2 = (D_{\mathbf{u}}f)^2 + (D_{\mathbf{v}}f)^2$ en la parte (a). Demuestre que esta relación siempre es válida si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son perpendiculares.

31. La figura 6 muestra el mapa de contorno para una colina de 60 pies de altura, que suponemos tiene ecuación $z = f(x, y)$.

(a) Una gota de lluvia que cae en el punto A llegará al plano xy en A' siguiendo la trayectoria de descenso más pronunciado desde A. Trace esta trayectoria y utilícela para estimar A'.

(b) Haga lo mismo para el punto B.

(c) Estime f_x en C, f_y en D y $D_{\mathbf{u}}f$ en E, donde $\mathbf{u} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$.

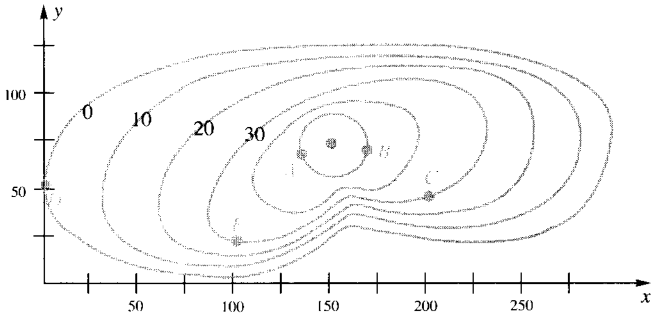


Figura 6

32. De acuerdo con el Teorema A, la diferenciabilidad de f en $\mathbf{p}$ implica la existencia de $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{p})$ en todas las direcciones. Demuestre que el recíproco es falso, considerando

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

en el origen.

CAS **33.** Trace la gráfica de

$$z = x^2 - y^2$$

en $-5 \le x \le 5, -5 \le y \le 5$; también grafique su mapa de contornos y su campo gradiente, ilustrando con ello los teoremas B y C. Luego estime las coordenadas xy del punto donde una gota de lluvia que cayó sobre el punto $(-5, -0.1)$ saldrá de la superficie.

CAS **34.** Siga las instrucciones del problema 33 para

$$z = x - x^3/9 - y^2$$

CAS **35.** Para la silla del mono

$$z = x^3 - 3xy^2$$

en $-5 \le x \le 5, -5 \le y \le 5$, estime las coordenadas xy del punto donde una gota de lluvia que cayó sobre el punto $(5, -0.2)$ saldrá de la superficie.

CAS **36.** ¿En qué punto llegará al reposo una gota de lluvia que cayó sobre el punto $(4, 1)$ sobre la superficie

$$z = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y - \operatorname{sen}(x + y)$$

$0 \le x \le 2\pi, 0 \le y \le 2\pi$?

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $[f(\mathbf{p} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{p})]/h$ **2.** $u_1 f_x(x, y) + u_2 f_y(x, y)$ **3.** máximo incremento **4.** curva de nivel

---

12.6
La regla de la cadena

Ahora, la regla de la cadena para la composición de funciones de una variable es familiar para todos nuestros lectores. Si $y = f(x(t))$, donde f y x son funciones diferenciables, entonces

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Nuestro objetivo es obtener generalizaciones para funciones de varias variables.

Primera versión Si $z = f(x, y)$, donde x y y son funciones de t, entonces tiene sentido preguntarse por dz/dt, y por lo tanto debe existir una fórmula para ella.

Teorema A Regla de la cadena

Sean $x = x(t)$ y $y = y(t)$ diferenciables en t, y sea $z = f(x, y)$ diferenciable en $(x(t), y(t))$. Entonces $z = f(x(t), y(t))$ es diferenciable en t y

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Demostración Imitamos la demostración para una variable del apéndice A.2, teorema B. Para simplificar la notación, sean $\mathbf{p} = (x, y)$, $\Delta\mathbf{p} = (\Delta x, \Delta y)$ y $\Delta z = f(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) - f(\mathbf{p})$. Entonces, como f es diferenciable

Belleza y generalidad

¿Se cumple el análogo general de la regla de la cadena para una variable (teorema A, sección 2.5)? Sí, y he aquí un enunciado particularmente elegante de él. Sean $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y $\mathbb{R}^n$ el espacio euclidiano de dimensión n, g una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$, y f una función de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$. Si g es diferenciable en t y si f es diferenciable en $g(t)$, entonces la composición $f \circ g$ es diferenciable en t y

$$(f \circ g)'(t) = \nabla f(g(t)) \cdot g'(t)$$

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(\mathbf{p}+\Delta\mathbf{p}) - f(\mathbf{p}) = \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \Delta\mathbf{p} + \varepsilon(\Delta\mathbf{p}) \cdot \Delta\mathbf{p} \\ &= f_x(\mathbf{p})\,\Delta x + f_y(\mathbf{p})\,\Delta y + \varepsilon(\Delta\mathbf{p}) \cdot \Delta\mathbf{p}\end{aligned}$$

con $\varepsilon(\Delta\mathbf{p}) \to \mathbf{0}$ cuando $\Delta\mathbf{p} \to \mathbf{0}$.

Al dividir ambos lados entre Δt, obtenemos

$$(1) \qquad \frac{\Delta z}{\Delta t} = f_x(\mathbf{p})\frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(\mathbf{p})\frac{\Delta y}{\Delta t} + \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta\mathbf{p}) \cdot \left\langle \frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t} \right\rangle$$

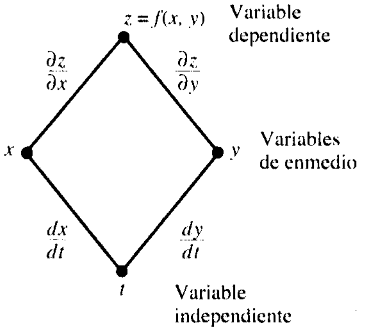
Ahora, $\left\langle \frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t} \right\rangle$ tiende a $\left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right\rangle$ cuando $\Delta t \to 0$. Además, cuando $\Delta t \to 0$, tanto Δx como Δy tienden a 0 (recuerde que $x(t)$ y $y(t)$ son continuas, por ser diferenciables). Esto implica que $\Delta\mathbf{p} \to \mathbf{0}$ y por lo tanto $\varepsilon(\Delta\mathbf{p}) \to \mathbf{0}$ cuando $\Delta t \to 0$. En consecuencia, cuando hacemos $\Delta t \to 0$ en (1), obtenemos

$$\frac{dz}{dt} = f_x(\mathbf{p})\frac{dx}{dt} + f_y(\mathbf{p})\frac{dy}{dt}$$

resultado equivalente a nuestra afirmación original. ■

La regla de la cadena:
El caso de dos variables

He aquí una forma que permite recordar la regla de la cadena



$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

EJEMPLO 1 Suponga que $z = x^3y$, donde $x = 2t$ y $y = t^2$. Determine dz/dt.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= (3x^2y)(2) + (x^3)(2t) \\ &= 6(2t)^2(t^2) + 2(2t)^3(t) \\ &= 40t^4\end{aligned}$$ ■

Pudimos haber resuelto el ejemplo 1 sin usar la regla de la cadena. Por una sustitución directa

$$z = x^3y = (2t)^3t^2 = 8t^5$$

de modo que $dz/dt = 40t^4$. Sin embargo, el método de sustitución directa no siempre está disponible o no es conveniente; observe el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 Al calentar un cilindro circular recto sólido, su radio r y altura h aumentan; por lo tanto, también lo hace el área S de su superficie. Suponga que en el instante en que $r = 10$ centímetros y $h = 100$ centímetros, r está creciendo a razón de 0.2 centímetros por hora y h aumenta a 0.5 centímetros/hora. ¿Qué tan rápido crece S en ese instante?

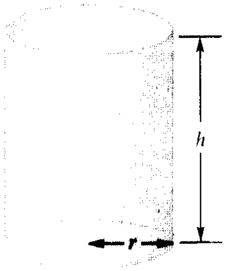


Figura 1

SOLUCIÓN La fórmula para el área total de la superficie de un cilindro (figura 1) es

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

Así,

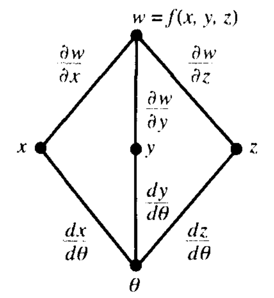
$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{\partial S}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial S}{\partial h}\frac{dh}{dt} \\ &= (2\pi h + 4\pi r)(0.2) + (2\pi r)(0.5)\end{aligned}$$

En $r = 10$ y $h = 100$,

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= (2\pi \cdot 100 + 4\pi \cdot 10)(0.2) + (2\pi \cdot 10)(0.5) \\ &= 58\,\pi \text{ centímetros cuadrados/hora}\end{aligned}$$ ■

El resultado del teorema A se extiende con facilidad a una función de tres variables, como veremos ahora.

La regla de la cadena: El caso de tres variables



$w = f(x, y, z)$
$\frac{\partial w}{\partial x}$
$\frac{\partial w}{\partial y}$
$\frac{\partial w}{\partial z}$
x
y
z
$\frac{dx}{d\theta}$
$\frac{dy}{d\theta}$
$\frac{dz}{d\theta}$
θ

$$\frac{dw}{d\theta} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{d\theta} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{d\theta} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{d\theta}$$

EJEMPLO 3 Suponga que $w = x^2y + y + xz$, donde $x = \cos\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta$ y $z = \theta^2$. Determine $dw/d\theta$ y evalúelo en $\theta = \pi/3$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\frac{dw}{d\theta} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{d\theta} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{d\theta} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{d\theta}\\ &= (2xy + z)(-\operatorname{sen}\theta) + (x^2 + 1)(\cos\theta) + (x)(2\theta)\\ &= -2\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta - \theta^2\operatorname{sen}\theta + \cos^3\theta + \cos\theta + 2\theta\cos\theta\end{aligned}$$

En $\theta = \pi/3$,

$$\begin{aligned}\frac{dw}{d\theta} &= -2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} - \frac{\pi^2}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{4} + 1\right)\frac{1}{2} + \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}\\ &= -\frac{1}{8} - \frac{\pi^2\sqrt{3}}{18} + \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

■

Segunda versión Suponga que $z = f(x, y)$, donde $x = x(s, t)$ y $y(s, t)$. Entonces tiene sentido preguntarse por $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$.

Teorema B Regla de la cadena

Suponga que $x = x(s, t)$ y $y = y(s, t)$ tienen primeras derivadas parciales en (s, t) y sea $z = f(x, y)$ diferenciable en $(x(s, t), y(s, t))$. Entonces $z = f(x(s, t), y(s, t))$ tiene primeras derivadas parciales dadas por

1. $\dfrac{\partial z}{\partial s} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s}$;
2. $\dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}$.

Demostración Si s se mantiene fijo, entonces $x(s, t)$ y $y(s, t)$ se convierte en funciones sólo de t, lo cual significa que el teorema A se puede aplicar. Al usar este teorema, reemplazando ∂ por d para indicar que s está fijo, obtenemos la fórmula en (2) para $\partial z/\partial t$. La fórmula para $\partial z/\partial s$ se obtiene de manera similar, manteniendo fijo a t. ■

EJEMPLO 4 Si $z = 3x^2 - y^2$, donde $x = 2s + 7t$ y $y = 5st$, determine $\partial z/\partial t$ y expréselo en términos de s y t.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\\ &= (6x)(7) + (-2y)(5s)\\ &= 42(2s + 7t) - 10st(5s)\\ &= 84s + 294t - 50s^2t\end{aligned}$$

Por supuesto, si sustituimos las expresiones para x y y en la fórmula para z y luego tomamos la derivada parcial con respecto a t, obtenemos la misma respuesta:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}[3(2s + 7t)^2 - (5st)^2]\\ &= \frac{\partial}{\partial t}[12s^2 + 84st + 147t^2 - 25s^2t^2]\\ &= 84s + 294t - 50s^2t\end{aligned}$$

■

He aquí el resultado correspondiente para tres variables intermedias, ilustrado mediante un ejemplo.

EJEMPLO 5 Si $w = x^2 + y^2 + z^2 + xy$, donde $x = st$, $y = s - t$ y $z = s + 2t$, determine $\partial w/\partial t$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}\\ &= (2x + y)(s) + (2y + x)(-1) + (2z)(2)\\ &= (2st + s - t)(s) + (2s - 2t + st)(-1) + (2s + 4t)2\\ &= 2s^2t + s^2 - 2st + 2s + 10t\end{aligned}$$

■

Funciones implícitas Suponga que $F(x, y) = 0$ define a y de manera implícita como una función de x, por ejemplo, $y = g(x)$, pero que la función g es difícil o imposible de determinar. No obstante, podemos determinar dy/dx. Un método para hacer esto, la derivación implícita, fue analizado en la sección 2.7. He aquí otro método.

Derivemos ambos lados de $F(x, y) = 0$ con respecto a x usando la regla de la cadena. Obtenemos

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Al despejar dy/dx se obtiene la fórmula

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}}$$

EJEMPLO 6 Determine dy/dx si $x^3 + x^2y - 10y^4 = 0$ usando

(a) la regla de la cadena y (b) la derivación implícita.

SOLUCIÓN

(a) Sea $F(x, y) = x^3 + x^2y - 10y^4$. Entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = -\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 - 40y^3}$$

(b) Derivamos ambos lados respecto a x para obtener

$$3x^2 + x^2\frac{dy}{dx} + 2xy - 40y^3\frac{dy}{dx} = 0$$

Al despejar dy/dx obtenemos el mismo resultado que con la regla de la cadena. ■

Si z es una función implícita de x y y, definida mediante la ecuación $F(x, y, z) = 0$, entonces al derivar ambos lados respecto a x, manteniendo y fijo, obtenemos

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Si despejamos $\partial z/\partial x$ y observamos que $\partial y/\partial x = 0$, obtenemos la primera de las siguientes fórmulas. Un cálculo similar, con x fijo, y derivando con respecto a y produce la segunda fórmula.

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}}$$

EJEMPLO 7 Si $F(x, y, z) = x^3e^{y+z} - y \operatorname{sen}(x - z) = 0$ define a z de manera implícita como una función de x y y, *determine* $\partial z/\partial x$.

SOLUCIÓN

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{3x^2e^{y+z} - y\cos(x - z)}{x^3e^{y+z} + y\cos(x - z)} \qquad \blacksquare$$

Revisión de conceptos

1. Si $z = f(x, y)$, donde $x = g(t)$ y $y = h(t)$, entonces la regla de la cadena dice que $dz/dt =$ _____.

2. Así, si $z = xy^2$, donde $x = \operatorname{sen} t$ y $y = \cos t$, entonces $dz/dt =$ _____.

3. Si $z = f(x, y)$, donde $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$, entonces la regla de la cadena dice que $\partial z/\partial t =$ _____.

4. Por lo tanto, si $z = xy^2$, donde $x = st$ y $y = s^2 + t^2$, entonces $\partial z/\partial t$ en $s = 1$ y $t = 1$ tiene el valor _____.

Conjunto de problemas 12.6

En los problemas del 1 al 6 determine dw/dt mediante la regla de la cadena. Exprese su respuesta final en términos de t.

1. $w = x^2y^3, x = t^3, y = t^2$

2. $w = x^2y - y^2x; x = \cos t, y = \operatorname{sen} t$

3. $w = e^x \operatorname{sen} y + e^y \operatorname{sen} x; x = 3t, y = 2t$

4. $w = \ln(x/y); x = \tan t, y = \sec^2 t$

5. $w = \operatorname{sen}(xyz^2); x = t^3, y = t^2, z = t$

6. $w = xy + yz + xz; x = t^2, y = 1 - t^2, z = 1 - t$

En los problemas del 7 al 12 determine $\partial w/\partial t$ usando la regla de la cadena. Exprese su respuesta final en términos de s y t.

7. $w = x^2y; x = st, y = s - t$

8. $w = x^2 - y \ln x; = s/t, y = s^2t$

9. $w = e^{x^2+y^2}; x = s \operatorname{sen} t, y = t \operatorname{sen} s$

10. $w = \ln(x + y) - \ln(x - y); x = te^s, y = e^{st}$

11. $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; x = \cos st, y = \operatorname{sen} st, z = s^2t$

12. $w = e^{xy+z}; x = s + t, y = s - t, z = t^2$

13. Si $z = x^2y, x = 2t + s$, y $y = 1 - st^2$, determine

$$\left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{s=1,\, t=-2}$$

14. Si $z = xy + x + y, x = r + s + t$, y $y = rst$, determine

$$\left.\frac{\partial z}{\partial s}\right|_{r=1,\, s=-1,\, t=2}$$

15. Si $w = u^2 - u \tan v, u = x$, y $v = \pi x$, determine

$$\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=1/4}$$

16. Si $w = x^2y + z^2, x = \rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi, y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$ y $z = \rho\cos\phi$, determine

$$\left.\frac{\partial w}{\partial \theta}\right|_{\rho=2,\, \theta=\pi,\, \phi=\pi/2}$$

17. La parte de un árbol que por lo general se corta para madera es el tronco, un sólido con forma aproximada de un cilindro circular recto. Si el radio del tronco de cierto árbol crece $\frac{1}{2}$ pulgada/año y la altura aumenta 8 pulgadas/año, ¿qué tan rápido aumenta el volumen cuando el radio es de 20 pulgadas y la altura es de 400 pulgadas? Exprese su respuesta en pies cuadrados/año (1 pie de tablón mide 1 pulgada por 12 pulgadas por 12 pulgadas).

18. La temperatura de una placa metálica en (x, y) es e^{-x-3y} grados. Un escarabajo camina hacia el norte a razón de $\sqrt{8}$ pies/minuto (es decir, $dx/dt = dy/dt = 2$). Desde la perspectiva del escarabajo, ¿cómo cambia la temperatura con el tiempo cuando éste cruza el origen?

19. Un niño pierde su barco de juguete a orillas de un río recto. La corriente lo arrastra a 5 pies/segundo. Un viento cruzado sopla hacia la orilla contraria, a 4 pies/segundo. Si el niño corre a lo largo de la orilla a 3 pies/segundo siguiendo su barco, ¿qué tan rápido se aleja el barco de él cuando $t = 3$ segundos?

20. Se deposita arena en una pila cónica de modo que, en cierto instante, la altura es de 100 pulgadas y crece a razón de 3 pulgadas/minuto, mientras que el radio es de 40 pulgadas y crece a 2 pulgadas/minuto. ¿Qué tan rápido aumenta el volumen en ese instante?

En los problemas del 21 al 24 use el método del ejemplo 6a para determinar dy/dx.

21. $x^3 + 2x^2y - y^3 = 0$

22. $ye^{-x} + 5x - 17 = 0$

23. $x \operatorname{sen} y + y \cos x = 0$

24. $x^2 \cos y - y^2 \operatorname{sen} x = 0$

25. Si $3x^2z + y^3 - xyz^3 = 0$, determine $\partial z/\partial x$ (ejemplo 7).

26. Si $ye^{-x} + z \operatorname{sen} x = 0$, determine $\partial x/\partial z$ (ejemplo 7).

27. Si $T = f(x, y, z, w)$ y x, y, z y w son cada una funciones de s y t, escriba una regla de la cadena para $\partial T/\partial s$.

28. Sea $z = f(x, y)$, donde $x = r\cos\theta$ y $y = r \operatorname{sen}\theta$. Muestre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

29. La ecuación de onda de la física es la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

donde c es una constante. Demuestre que si f es cualquier función dos veces diferenciable, entonces

$$y(x, t) = \tfrac{1}{2}[f(x - ct) + f(x + ct)]$$

satisface esta ecuación.

30. Demuestre que si $w = f(r - s, s - t, t - r)$, entonces

$$\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

31. Sea $F(t) = \int_{g(t)}^{h(t)} f(u)\, du$, donde f es continua y g y h son diferenciables. Demuestre que

$$F'(t) = f(h(t))h'(t) - f(g(t))g'(t)$$

y use este resultado para determinar $F'(\sqrt{2})$, donde

$$F(t) = \int_{\operatorname{sen}\sqrt{2}\,\pi t}^{t^2} \sqrt{9 + u^4}\, du$$

32. Llame a una función $f(x, y)$ *homogénea de grado* 1 si $f(tx, ty) = tf(x, y)$ para toda $t > 0$. Por ejemplo, $f(x, y) = x + ye^{y/x}$ satisface este criterio. Demuestre el **teorema de Euler** que tal función satisface

$$f(x, y) = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$$

Nota: Sea $f(x, y)$ el valor de producción de x unidades de capital y y unidades de mano de obra. Entonces f es una función homogénea (por ejemplo, al duplicar el capital y la mano de obra se duplica la producción). El teorema de Euler garantiza entonces una importante ley económica que puede establecerse como sigue: el valor de la producción $f(x, y)$ es igual al costo del capital más el costo de la mano de obra, si se pagan con sus tasas marginales respectivas $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$.

$\boxed{\text{C}}$ **33.** Saliendo del mismo punto P, el avión A vuela hacia el este, mientras que el avión B vuela en la dirección N 50° E. En cierto instante, A está a 200 millas de P, volando a 450 millas/hora, mientras que B está a 150 millas de P volando a 400 millas/hora. ¿Qué tan rápido se están separando en ese instante?

34. Recuerde la ley de gravitación de Newton, la cual afirma que la magnitud F de la fuerza de atracción entre objetos de masas M y m es $F = GMm/r^2$, donde r es la distancia entre ellos y G es una constante universal. Consideremos un objeto de masa M colocado en el origen y supongamos que un segundo objeto de masa cambiante m (digamos, por consumo de combustible) se aleja del origen de modo que su vector de posición es $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{j}$. Obtenga una fórmula para dF/dt en términos de las derivadas con respecto al tiempo de m, x, y y z.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$

2. $y^2 \cos t + 2xy(-\operatorname{sen} t) = \cos^3 t - 2\operatorname{sen}^2 t \cos t$

3. $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$ **4.** 12

12.7 Planos tangentes y aproximaciones

En la sección 12.4 presentamos el concepto de plano tangente a una superficie, pero sólo trabajamos con superficies determinadas por ecuaciones de la forma $z = f(x, y)$ (figura 1). Ahora queremos considerar el caso más general de una superficie determinada por $F(x, y, z) = k$. (Observe que $z = f(x, y)$ se puede escribir como $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$). Considere una curva sobre esta superficie que pase por el punto (x_0, y_0, z_0). Si $x = x(t)$, $y = y(t)$ y $z = z(t)$ son ecuaciones paramétricas de esta curva, entonces, para cada t,

$$F(x(t), y(t), z(t)) = k$$

Por regla de la cadena,

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}(k) = 0$$

Podemos expresar esto en términos del gradiente de F y la derivada de la expresión vectorial para la curva $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ como

$$\nabla F \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$$

Como ya hemos visto (sección 11.5), $d\mathbf{r}/dt$ es tangente a la curva. En resumen, el gradiente en (x_0, y_0, z_0) es perpendicular a la recta tangente en este punto.

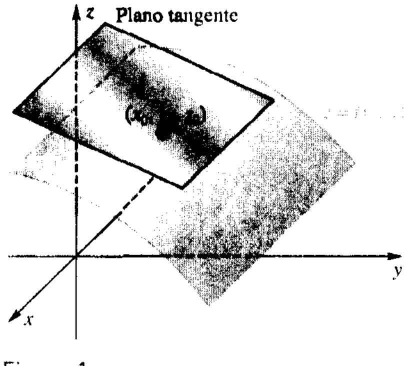


Figura 1

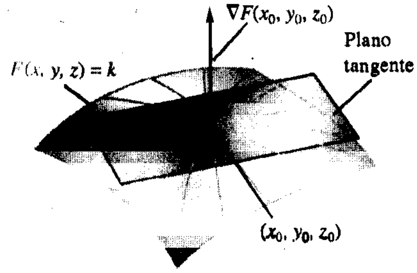


Figura 2

El argumento anterior es válido para cualquier curva que pase por (x_0, y_0, z_0) que esté sobre la superficie $F(x, y, z) = k$ (figura 2). Esto sugiere la siguiente definición general.

Definición

Supongamos que $F(x, y, z) = k$ determina una superficie y que F es *diferenciable* en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de esta superficie, con $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$. Entonces el plano que pasa por P y es perpendicular a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es el **plano tangente** a la superficie en P.

Como consecuencia de esta definición y de la sección 11.3, podemos escribir la ecuación del plano tangente.

Teorema A **Planos tangentes**

Para la superficie $F(x, y, z) = k$, la ecuación del plano tangente en (x_0, y_0, z_0) es $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0$; es decir,

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

En particular, para la superficie $z = f(x, y)$, la ecuación del plano tangente en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Demostración La primera afirmación es inmediata y la segunda es consecuencia de ésta, considerando $F(x, y, z) = f(x, y) - z$. ■

Si z es una función de x y y, digamos $z = f(x, y)$, entonces, por la segunda parte del teorema A, podemos escribir la ecuación del plano tangente como

$$z - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Si hacemos $\mathbf{p} = (x, y)$ y $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0)$, vemos que la ecuación del plano tangente es

$$\begin{aligned} z &= f(x_0, y_0) + \langle f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0) \rangle \cdot \langle x - x_0, y - y_0 \rangle \\ &= f(\mathbf{p}_0) + \nabla f(\mathbf{p}_0) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \end{aligned}$$

Así, nuestra definición de esta sección coincide con la definición de un plano tangente dada en la sección 12.4.

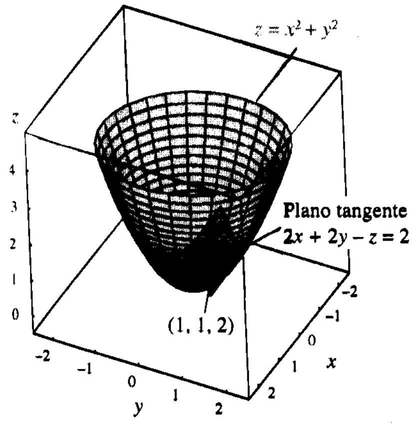


Figura 3

EJEMPLO 1 Determine la ecuación del plano tangente (figura 3) a $z = x^2 + y^2$ en el punto $(1, 1, 2)$.

SOLUCIÓN Sea $f(x, y) = x^2 + y^2$ y observe que $\nabla f(x, y) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$. Así, $\nabla f(1, 1) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y, por el teorema A, la ecuación pedida es

$$z - 2 = 2(x - 1) + 2(y - 1)$$

o

$$2x + 2y - z = 2$$ ■

EJEMPLO 2 Determine la ecuación del plano tangente y la recta normal a la superficie $x^2 + y^2 + 2z^2 = 23$ en $(1, 2, 3)$.

SOLUCIÓN Sea $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 23$ de modo que $\nabla F(x,y,z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$ y $\nabla F(1,2,3) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$. De acuerdo con el teorema A, la ecuación del plano tangente en $(1,2,3)$ es

$$2(x-1) + 4(y-2) + 12(z-3) = 0$$

De manera similar, las ecuaciones simétricas de la recta normal por $(1,2,3)$ son

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{12} \qquad \blacksquare$$

Diferenciales y aproximaciones Le sugerimos que repase la sección 2.9, donde consideramos los temas de diferenciales y aproximaciones para funciones de una variable.

Sean $z = f(x,y)$ y $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto fijo en la superficie correspondiente. Introducimos nuevos ejes de coordenadas (los ejes dx, dy y dz) paralelos a los ejes originales, con P como origen (figura 4). En el sistema original, el plano tangente en P tenía la ecuación

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

pero en el nuevo sistema toma la forma sencilla

$$dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$

Esto sugiere una definición.

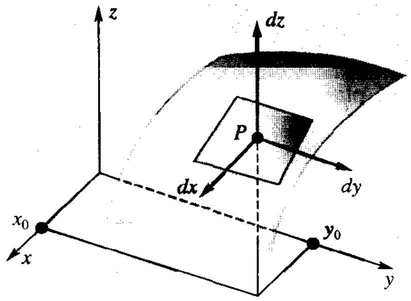

z
dz
P
dx
dy
x_0
y_0
x
y

Figura 4

Definición

Sea $z = f(x,y)$, donde f es una función diferenciable, y sean dx y dy (llamadas las diferenciales de x y y) variables. **La diferencial de la variable dependiente**, dz, también llamada la **diferencial total de f** y que se escribe $df(x,y)$, se define como

$$dz = df(x,y) = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy = \nabla f \cdot \langle dx, dy \rangle$$

La importancia de dz surge del hecho de que si $dx = \Delta x$ y $dy = \Delta y$ representan pequeños cambios en x y y, respectivamente, entonces dz será una buena aproximación de Δz, el cambio correspondiente en z. Esto se ilustra en la figura 5 y, aunque dz no parece ser una buena aproximación de Δz, usted puede ver que será cada vez mejor cuando Δx y Δy sean cada vez menores.

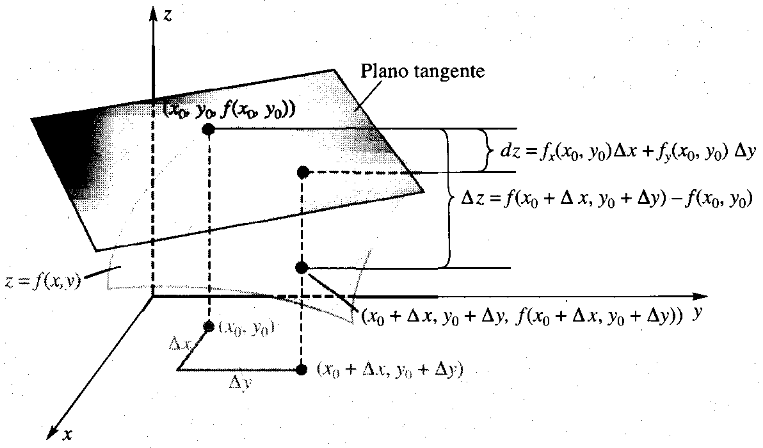

z
Plano tangente
$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$
$dz = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y$
$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$
$z = f(x,y)$
$(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y))$
y
(x_0, y_0)
Δx
Δy
$(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$
x

Figura 5

EJEMPLO 3 Sea $z = f(x,y) = 2x^3 + xy - y^3$. Calcule Δz y dz cuando (x,y) cambia de $(2,1)$ a $(2.03, 0.98)$.

SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
\Delta z &= f(2.03, 0.98) - f(2, 1) \\
&= 2(2.03)^3 + (2.03)(0.98) - (0.98)^3 - [2(2)^3 + 2(1) - 1^3] \\
&= 0.779062 \\
dz &= f_x(x, y)\ \Delta x + f_y(x, y)\ \Delta y \\
&= (6x^2 + y)\Delta x + (x - 3y^2)\Delta y
\end{aligned}
$$

En (2, 1) con $\Delta x = 0.03$ y $\Delta y = -0.02$,

$$dz = (25)(0.03) + (-1)(-0.02) = 0.77$$

■

EJEMPLO 4 La fórmula $P = k(T/V)$, donde k es una constante, da la presión P de un gas confinado de volumen V y temperatura T. Determine, de manera aproximada, el error porcentual mínimo en P introducido por un error de ±0.4% al medir la temperatura y un error de ±0.9% al medir el volumen.

SOLUCIÓN El error en P es ΔP, que aproximaremos mediante dP. Así,

$$
\begin{aligned}
|\Delta P| \approx |dP| &= \left|\frac{\partial P}{\partial T}\Delta T + \frac{\partial P}{\partial V}\Delta V\right| \\
&\leq \left|\frac{k}{V}(\pm 0.004T)\right| + \left|-\frac{kT}{V^2}(\pm 0.009V)\right| \\
&= \frac{kT}{V}(0.004 + 0.009) = 0.013\frac{kT}{V} = 0.013P
\end{aligned}
$$

El error máximo relativo, $|\Delta P|/P$, es aproximadamente 0.013, y el error porcentual máximo es aproximadamente 1.3%. ■

Polinomios de Taylor para funciones de dos o más variables Recuerde que para funciones de una variable podíamos aproximar la función $f(x)$ por medio de un polinomio de Taylor $P_n(x)$. Los polinomios de Taylor de órdenes uno y dos son

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

El primero es la recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$. Las cantidades análogas para una función $f(x, y)$ de dos variables son

$$P_1(x, y) = f(x_0, y_0) + [f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)]$$

que es, por supuesto, el plano tangente en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ y

$$
\begin{aligned}
P_2(x, y) &= f(x_0, y_0) + [f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)] \\
&\quad + \frac{1}{2}[f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2]
\end{aligned}
$$

Estos resultados se generalizan a polinomios de Taylor de orden n y a funciones de más de dos variables.

EJEMPLO 5 Determine los polinomios de Taylor de primero y segundo órdenes para la función $f(x, y) = 1 - e^{-x^2-2y^2}$ en (0, 0) y utilícelos para aproximar $f(0.05, -0.06)$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2xe^{-x^2-2y^2} \\ f_y(x, y) &= 4ye^{-x^2-2y^2} \\ f_{xx}(x, y) &= (2 - 4x^2)e^{-x^2-2y^2} \\ f_{yy}(x, y) &= (4 - 16y^2)e^{-x^2-2y^2} \\ f_{xy}(x, y) &= -8xye^{-x^2-2y^2} \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} P_1(x, y) &= f(0,0) + [f_x(0,0)(x-0) + f_y(0,0)(y-0)] \\ &= (1 - e^0) + (0x + 0y) = 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} P_2(x, y) &= f(0,0) + [f_x(0,0)(x-0) + f_y(0,0)(y-0)] \\ &\quad + \frac{1}{2}[f_{xx}(0,0)(x-0)^2 + 2f_{xy}(0,0)(x-0)(y-0) + f_{yy}(0,0)(y-0)^2] \\ &= (1 - e^0) + (0x + 0y) + \frac{1}{2}[2x^2 + 2\cdot 0xy + 4y^2] \\ &= x^2 + 2y^2 \end{aligned}$$

La aproximación de primer orden para $f(0.05, -0.06)$ es

$$f(0.05, -0.06) \approx P_1(0.05, -0.06) = 0$$

y la aproximación de segundo orden es

$$f(0.05, -0.06) \approx P_2(0.05, -0.06) = 0.05^2 + 2(-0.06)^2 = 0.00970$$

La figura 6 muestra el polinomio de segundo orden (el polinomio de primer orden sólo es $P_1(x, y) = 0$) junto con la función $f(x, y)$. El valor verdadero para $f(0.05, -0.06)$ es

$$f(0.05, -0.06) = 1 - e^{-0.05^2 - 2(0.06)^2} = 1 - e^{-0.0097} \approx 0.00965 \quad ■$$

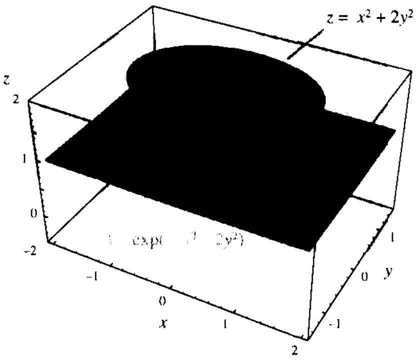


Figura 6

Revisión de conceptos

1. Suponga que $F(x, y, z) = k$ determina una superficie. La dirección del vector gradiente ∇F es _____ a la superficie.

2. Suponga que $z = x^2 + xy$ determina una superficie. Un vector en $(1, 1, 2)$ perpendicular a esta superficie es_____.

3. Suponga que $xy^2z^3 = 2$ determina una superficie. Una ecuación para el plano tangente en $(2, 1, 1)$ es _____.

4. Definimos la diferencial total de $f(x, y)$ mediante $df(x, y) =$ _____.

Conjunto de problemas 12.7

En los problemas del 1 al 8 determine la ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto indicado.

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 16; \left(2, 3, \sqrt{3}\right)$

2. $8x^2 + y^2 + 8z^2 = 16; \left(1, 2, \sqrt{2}/2\right)$

3. $x^2 - y^2 + z^2 + 1 = 0; \left(1, 3, \sqrt{7}\right)$

4. $x^2 + y^2 - z^2 = 4; (2, 1, 1)$

5. $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4}; (2, 2, 2)$

6. $z = xe^{-2y}; (1, 0, 1)$

7. $z = 2e^{3y}\cos 2x; (\pi/3, 0, -1)$

8. $z = x^{1/2} + y^{1/2}; (1, 4, 3)$

C *En los problemas del 9 al 12 use la diferencial total dz para aproximar el cambio en z cuando (x, y) se mueve de P a Q. Luego use una calculadora para determinar el cambio exacto correspondiente Δz (con la precisión de su calculadora). Véase el ejemplo 3.*

9. $z = 2x^2y^3; P(1, 1), Q(0.99, 1.02)$

10. $z = x^2 - 5xy + y; P(2, 3), Q(2.03, 2.98)$

11. $z = \ln(x^2y); P(-2, 4), Q(-1.98, 3.96)$

12. $z = \tan^{-1}xy$; $P(-2, -0.5)$, $Q(-2.03, -0.51)$

13. Determine todos los puntos sobre la superficie

$$z = x^2 - 2xy - y^2 - 8x + 4y$$

donde el plano tangente es horizontal.

14. Determine un punto sobre la superficie $z = 2x^2 + 3y^2$ donde el plano tangente sea paralelo al plano $8x - 3y - z = 0$.

15. Demuestre que las superficies $x^2 + 4y + z^2 = 0$ y $x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 7 = 0$ son tangentes entre sí en $(0, -1, 2)$; es decir, demuestre que tienen el mismo plano tangente en $(0, -1, 2)$.

16. Demuestre que las superficies $z = x^2y$ y $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}$ se cortan en $(1, 1, 1)$ y tienen planos tangentes perpendiculares ahí.

17. Determine un punto sobre la superficie $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 12$ donde el plano tangente es perpendicular a la recta con ecuaciones paramétricas $x = 1 + 2t$, $y = 3 + 8t$, $z = 2 - 6t$.

18. Demuestre que la ecuación del plano tangente al elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

en (x_0, y_0, z_0) se puede escribir en la forma

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = 1$$

19. Determine las ecuaciones paramétricas de la recta que es tangente a la curva de intersección de las superficies

$$f(x, y, z) = 9x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 41 = 0$$

y

$$g(x, y, z) = 2x^2 - y^2 + 3z^2 - 10 = 0$$

en el punto $(1, 2, 2)$. *Sugerencia:* esta recta es perpendicular a $\nabla f(1, 2, 2)$ y $\nabla g(1, 2, 2)$.

20. Determine las ecuaciones paramétricas de la recta que es tangente a la curva de intersección de las superficies $x = z^2$ y $y = z^3$ en $(1, 1, 1)$ (véase el problema 19).

21. Al determinar la gravedad específica de un objeto se ve que su peso en el aire es $A = 36$ libras, mientras que su peso en el agua es $W = 20$ libras, con un posible error de 0.02 libras en cada medición. Determine, aproximadamente, el error máximo posible al calcular su gravedad específica S, donde $S = A/(A - W)$.

22. Use diferenciales para determinar la cantidad aproximada de cobre en los cuatro lados y el fondo de un tanque de cobre rectangular que mide 6 pies de largo, 4 pies de ancho y 3 pies de profundidad en el interior, si la hoja de cobre tiene $\frac{1}{4}$ de pulgada de espesor. *Sugerencia:* haga un bosquejo.

23. El radio y la altura de un cono circular recto se miden con errores de a lo más 2% y 3%, respectivamente. Use diferenciales para estimar el error porcentual máximo en el volumen calculado (véase el ejemplo 4).

24. El periodo T de un péndulo de longitud L está dado por $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, donde g es la aceleración de la gravedad. Demuestre que $dT/T = \frac{1}{2}[dL/L - dg/g]$, y use este resultado para estimar el error porcentual máximo en T debido a un error de 0.5% al medir L y 0.3% al medir g.

25. La fórmula $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$ determina la resistencia combinada R cuando los resistores, con resistencias R_1 y R_2, se conectan en paralelo. Suponga que R_1 y R_2 midieron cerca de 25 y 100 ohms, respectivamente, con errores posibles de 0.5 ohms en cada medición. Calcule R y dé una estimación para el error máximo en este valor.

26. Una abeja sentada en el punto $(1, 2, 1)$ sobre el elipsoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 6$ (distancias en pies). En $t = 0$, comenzó a volar a lo largo de la recta normal, a una rapidez de 4 pies/segundo. ¿Cuándo y dónde tocó al plano $2x + 3y + z = 49$?

27. Demuestre que un plano tangente en cualquier punto de la superficie $xyz = k$ forma con los planos de coordenadas un tetraedro de volumen fijo y calcule ese volumen.

28. Determine y simplifique la ecuación del plano tangente en (x_0, y_0, z_0) a la superficie $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = a$. Luego demuestre que la suma de las intersecciones de este plano con el eje de coordenadas es a^2.

$\boxed{\text{C}}$ **29.** Para la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, determine la aproximación de Taylor de segundo orden con base en $(x_0, y_0) = (3, 4)$. Luego estime $f(3.1, 3.9)$ usando

(a) la aproximación de primer orden,

(b) la aproximación de segundo orden y

(c) directamente su calculadora.

$\boxed{\text{C}}$ **30.** Para la función $f(x, y) = \tan((x^2 + y^2)/64)$, determine la aproximación de Taylor de segundo orden con base en $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Después estime $f(0.2, -0.3)$ por medio de

(a) la aproximación de primer orden,

(b) la aproximación de segundo orden y

(c) su calculadora directamente.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** perpendicular **2.** $\langle 3, 1, -1\rangle$ **3.** $(x - 2) + 4(y - 1) + 6(z - 1) = 0$ **4.** $\dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$

12.8
Máximos y mínimos

Nuestro objetivo es extender los conceptos del capítulo 3 a funciones de varias variables; será de utilidad un rápido repaso de ese capítulo, en particular las secciones 3.1 y 3.3. Las definiciones ahí dadas se extienden casi sin modificaciones, pero por claridad las repetiremos. En lo sucesivo, sean $\mathbf{p} = (x, y)$ y $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0)$ un punto variable y uno fijo, respectivamente, del espacio bidimensional (también podrían ser puntos del espacio de dimensión n).

Definición

Sea f una función con dominio S y sea $\mathbf{p}_0$ un punto en S.

(i) $f(\mathbf{p}_0)$ es un **valor máximo global** de f en S si $f(\mathbf{p}_0) \geq f(\mathbf{p})$ para todo $\mathbf{p}$ en S.

(ii) $f(\mathbf{p}_0)$ es un **valor mínimo global** de f en S si $f(\mathbf{p}_0) \leq f(\mathbf{p})$ para todo $\mathbf{p}$ en S.

(iii) $f(\mathbf{p}_0)$ es **un valor extremo global** de f en S si $f(\mathbf{p}_0)$ es un valor máximo global o un valor mínimo global.

Obtenemos las definiciones para **valor máximo local** y **valor mínimo local** si en (1) y (2) pedimos que las desigualdades sólo valgan en $N \cap S$, donde N es una vecindad de $\mathbf{p}_0$. $f(\mathbf{p}_0)$ es un **valor extremo local** de f en S si $f(\mathbf{p}_0)$ es un valor máximo local o un valor mínimo local.

La figura 1 da una interpretación geométrica de los conceptos que hemos definido. Observe que un máximo (o mínimo) global es automáticamente un máximo (o mínimo) local.

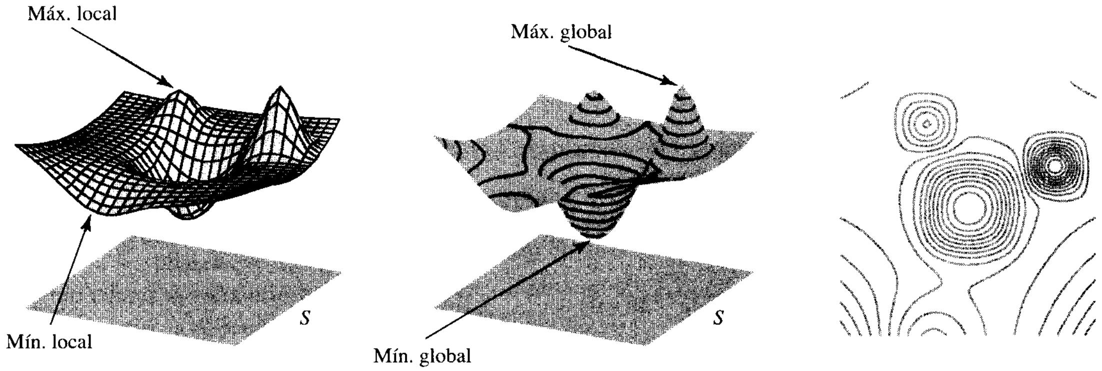


Figura 1

Nuestro primer teorema es de los grandes, difícil de demostrar, pero intuitivamente claro.

Teorema A Teorema de existencia de máximos y mínimos

Si f es continua en un conjunto cerrado y acotado S, entonces f alcanza un valor máximo (global) y un valor mínimo (global) en dicho conjunto.

La demostración se puede encontrar en la mayor parte de los libros de cálculo avanzado.

¿Dónde aparecen los valores extremos? La situación es análoga a la del caso de una variable. Los **puntos críticos** de f en S son de tres tipos.

1. **Puntos frontera.** Véase la sección 12.3.
2. **Puntos estacionarios**. Decimos que $\mathbf{p}_0$ es un punto estacionario si $\mathbf{p}_0$ es un punto interior de S donde f es diferenciable y $\nabla f(\mathbf{p}_0) = \mathbf{0}$. En tal punto, el plano tangente es horizontal.
3. **Puntos singulares**. Decimos que $\mathbf{p}_0$ es un punto singular si $\mathbf{p}_0$ es un punto interior de S donde f no es diferenciable; por ejemplo, un punto donde la gráfica de f tiene un pico.

Ahora podemos establecer otro gran teorema; en realidad, podemos demostrar éste.

Teorema B **Teorema del punto crítico**

Sea f definida en un conjunto S que contiene a $\mathbf{p}_0$. Si $f(\mathbf{p}_0)$ es un valor extremo, entonces $\mathbf{p}_0$ debe ser un punto crítico; es decir, $\mathbf{p}_0$ es

1. un punto frontera de S; o
2. un punto estacionario de f; o
3. un punto singular de f.

Demostración Suponga que $\mathbf{p}_0$ no es un punto frontera ni un punto singular (de modo que $\mathbf{p}_0$ es un punto interior donde ∇f existe). Terminaremos si podemos demostrar que $\nabla f(\mathbf{p}_0) = \mathbf{0}$. Para mayor sencillez, hagamos $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0)$; los casos de dimensiones superiores se demuestran de manera similar.

Como f tiene un valor extremo en (x_0, y_0), la función $g(x) = f(x, y_0)$ tiene un valor extremo en x_0. Además, g es diferenciable en x_0, pues f es diferenciable en (x_0, y_0) y, por lo tanto, por el teorema del punto crítico para funciones de una variable (teorema 3.1B),

$$g'(x_0) = f_x(x_0, y_0) = 0$$

De manera similar, la función $h(y) = f(x_0, y)$ tiene un valor extremo en y_0 y satisface

$$h'(y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$$

El gradiente es $\mathbf{0}$ debido a que ambas parciales son cero. ■

El teorema y su demostración son válidos sin importar que los valores extremos sean globales o locales.

EJEMPLO 1 Determine los valores máximos y mínimos locales de $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2/4$.

SOLUCIÓN La función dada es diferenciable en su dominio, el plano xy. Así, los únicos puntos críticos posibles estacionarios se obtienen al igualar a cero $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$. Pero $f_x(x, y) = 2x - 2$ y $f_y(x, y) = y/2$ se anulan sólo cuando $x = 1$ y $y = 0$. Sólo falta decidir si $(1, 0)$ proporciona un máximo, un mínimo o ninguno de ellos. Desarrollaremos pronto una sencilla herramienta para esto, pero por el momento debemos usar un poco de ingenio. Observe que $f(1, 0) = -1$ y

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 - 2x + \frac{y^2}{4} = x^2 - 2x + 1 + \frac{y^2}{4} - 1 \\ &= (x - 1)^2 + \frac{y^2}{4} - 1 \geq -1 \end{aligned}$$

Así, $f(1, 0)$ es en realidad un mínimo global de f. No hay valores máximos locales. ■

EJEMPLO 2 Determine los valores máximos y mínimos locales de $f(x, y) = -x^2/a^2 + y^2/b^2$.

SOLUCIÓN Los únicos puntos críticos se obtienen al igualar a cero $f_x(x, y) = -2x/a^2$ y $f_y(x, y) = 2y/b^2$. Esto proporciona el punto $(0, 0)$, que no da máximo ni mínimo (véase la figura 2). Se denomina **punto silla.** La función dada no tiene extremos locales. ■

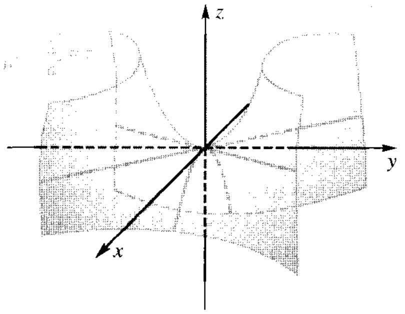


Figura 2

El ejemplo 2 ilustra el problemático hecho de que $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$ no garantiza que exista un extremo local en (x_0, y_0). Por fortuna, existe un criterio agradable para decir lo que ocurre en un punto estacionario (nuestro siguiente tema).

Condiciones suficientes para los extremos Usted debe pensar el siguiente teorema como un análogo del criterio de la segunda derivada para funciones de una variable (teorema 3.3B). Una demostración rigurosa está fuera del alcance de este libro, pero proporcionamos un bosquejo de la demostración que utiliza el polinomio de Taylor para funciones de dos variables introducidas en la sección anterior.

Teorema C **Criterio de las segundas parciales**

Suponga que $f(x, y)$ tiene segundas derivadas parciales continuas en una vecindad de (x_0, y_0) y que $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$. Sea

$$D = D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0)$$

Entonces

1. si $D > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, entonces $f(x_0, y_0)$ es un valor máximo local;
2. si $D > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, entonces $f(x_0, y_0)$ es un valor mínimo local;
3. si $D < 0$, entonces $f(x_0, y_0)$ no es un valor extremo ((x_0, y_0) es un punto silla);
4. si $D = 0$, el criterio no es concluyente.

Bosquejo de la demostración Supondremos que $f(0, 0) = 0$ y que $x_0 = y_0 = 0$. (Si no se cumplen estas condiciones, podemos trasladar la gráfica, sin alterar su forma, para hacer que se cumplan estas condiciones y luego regresar la gráfica). Para (x, y) cerca de $(0, 0)$, la función f se comporta de forma muy parecida al polinomio de Taylor de segundo orden alrededor de $(0, 0)$.

$$P_2(x, y) =$$

$$f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2}[f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2]$$

(Una demostración rigurosa tomaría en cuenta el residuo al utilizar $P_2(x, y)$ para aproximar $f(x, y)$). Con la condición de que $\nabla f(0, 0) = \langle f_x(0,0), f_y(0, 0)\rangle = \mathbf{0}$, y la condición $f(0, 0) = 0$, el polinomio de Taylor de segundo orden se reduce a

$$P_2(x, y) = \frac{1}{2}[f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2]$$

Sea $A = f_{xx}(0, 0)$, $B = f_{xy}(0, 0)$ y $C = f_{yy}(0, 0)$. Esto da

$$P_2(x, y) = \frac{1}{2}[Ax^2 + 2Bxy + Cy^2]$$

Al completar el cuadrado en x, se obtiene

$$\begin{aligned} P_2(x, y) &= \frac{A}{2}\left[x^2 + 2\frac{By}{A}x + \left(\frac{By}{A}\right)^2 + \frac{C}{A}y^2 - \left(\frac{By}{A}\right)^2\right] \\ &= \frac{A}{2}\left[\left(x + \frac{B}{A}y\right)^2 + \left(\frac{C}{A} - \frac{B^2}{A^2}\right)y^2\right] \end{aligned}$$

La expresión $\left(x + \frac{B}{A}y\right)^2$ es positiva para todo (x, y) excepto $(0, 0)$. Si $\frac{C}{A} - \frac{B^2}{A^2} > 0$, es decir, si $AC - B^2 = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - f_{xy}^2(0, 0) = D > 0$, entonces la expresión en corchetes será positiva para todo $(x, y) \neq (0, 0)$. Si, además, $A > 0$, entonces $P_2(x, y) > 0$ para $(x, y) \neq (0, 0)$, en cuyo caso $f(0, 0) = 0$ es un mínimo local. De forma análoga, si $D > 0$ y $A < 0$, entonces $P_2(x, y) < 0$ para $(x, y) \neq (0, 0)$, en cuyo caso $f(0, 0)$ es un máximo local. Cuando $D > 0$, entonces la gráfica de $P_2(x, y)$ es un paraboloide (rotado) con vértice en $(0, 0)$ que abre hacia arriba, si $A > 0$, y hacia abajo si $A < 0$.

Cuando $D < 0$, la gráfica de $P_2(x, y)$ es un paraboloide hiperbólico rotado con un punto silla en $(0, 0)$. (Véase la figura 11 de la sección 11.8).

Por último, cuando $D = 0$, entonces todos los términos en $P_2(x, y)$ son cero, y por lo tanto, $P_2(x, y) = 0$. En este caso se requerirían términos de mayor orden para determinar el comportamiento de $f(x, y)$ cerca de $(0, 0)$. Como el teorema no hace suposiciones acerca de estos términos de orden superior, no podemos extraer conclusión alguna acerca de si $f(0, 0)$ es un mínimo o máximo local. ■

EJEMPLO 3 Determine los extremos, si existen, de la función F definida como $F(x, y) = 3x^3 + y^2 - 9x + 4y$.

SOLUCIÓN Como $F_x(x, y) = 9x^2 - 9$ y $F_y(x, y) = 2y + 4$, los puntos críticos, obtenidos al resolver las ecuaciones simultáneas $F_x(x, y) = F_y(x, y) = 0$, son $(1, -2)$ y $(-1, -2)$.

Ahora, $F_{xx}(x, y) = 18x$, $F_{yy}(x, y) = 2$ y $F_{xy} = 0$. Así, en el punto crítico $(1, -2)$,

$$D = F_{xx}(1,-2) \cdot F_{yy}(1,-2) - F^2_{xy}(1,-2) = 18(2) - 0 = 36 > 0$$

Además, $F_{xx}(1, -2) = 18 > 0$ y entonces, por el teorema C(2), $F(1, -2) = -10$ es un valor mínimo local de F.

Al comprobar la función dada en el otro punto crítico, $(-1, -2)$, vemos que $F_{xx}(-1, -2) = -18$, $F_{yy}(-1, -2) = 2$ y $F_{xy}(-1, -2) = 0$, lo que hace que $D = -36 < 0$. Así, por el teorema C(3), $(-1, -2)$ es un punto silla y $F(-1, -2)$ no es un extremo. ■

EJEMPLO 4 Determine la mínima distancia entre el origen y la superficie $z^2 = x^2y + 4$.

SOLUCIÓN Sea $P(x, y, z)$ cualquier punto de la superficie. El cuadrado de la distancia entre el origen y P es $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Buscamos las coordenadas de P que hacen de d^2 (y, por lo tanto, d) mínima.

Como P está sobre la superficie, sus coordenadas satisfacen la ecuación de la superficie. Al sustituir $z^2 = x^2y + 4$ en $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$, obtenemos d^2 como una función de dos variables x y y.

$$d^2 = f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$$

Para determinar los puntos críticos, hacemos $f_x(x, y) = 0$ y $f_y(x, y) = 0$, para obtener

$$2x + 2xy = 0 \text{ y } 2y + x^2 = 0$$

Al eliminar y de estas ecuaciones, obtenemos

$$2x - x^3 = 0$$

Así, $x = 0$ o $x = \pm\sqrt{2}$. Al sustituir estos valores en la segunda de las ecuaciones, obtenemos $y = 0$ y $y = -1$. Por lo tanto, los puntos críticos son $(0, 0)$, $\left(\sqrt{2}, -1\right)$, y $\left(-\sqrt{2}, -1\right)$. (No hay puntos frontera).

Para verificar cada uno de estos puntos, necesitamos $f_{xx}(x, y) = 2 + 2y$, $f_{yy}(x, y) = 2$, $f_{xy}(x, y) = 2x$, y

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - f^2_{xy} = 4 + 4y - 4x^2$$

Como $D\left(\pm\sqrt{2}, -1\right) = -8 < 0$, ninguno de los puntos $\left(\sqrt{2}, -1\right)$ ni $\left(-\sqrt{2}, -1\right)$ proporciona un extremo. Sin embargo, $D(0, 0) = 4 > 0$ y $f_{xx}(0, 0) = 2 > 0$; por lo tanto, $(0, 0)$ proporciona la distancia mínima. Al sustituir $x = 0$ y $y = 0$ en la expresión para d^2, vemos que $d^2 = 4$.

La distancia mínima entre el origen y la superficie dada es 2. ■

Es fácil verificar los puntos frontera cuando estamos maximizando (o minimizando) una función de una variable, ya que por lo regular la frontera consiste en sólo dos puntos extremos. Para funciones de dos o más variables, es un problema más difícil.

En algunos casos, como en el ejemplo siguiente, toda la frontera se puede parametrizar y luego utilizar los métodos del capítulo 3 para determinar el máximo y el mínimo. En otros casos, tal como el ejemplo 6, partes de la frontera pueden parametrizarse y luego la función puede maximizarse o minimizarse en cada parte. En la siguiente sección veremos otro método, multiplicadores de Lagrange.

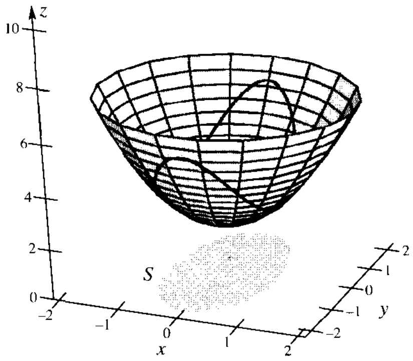


Figura 3

EJEMPLO 5 Determine los valores máximos y mínimos de $f(x, y) = 2 + x^2 + y^2$ en el conjunto cerrado y acotado $S = \left\{(x, y): x^2 + \frac{1}{4}y^2 \leq 1\right\}$.

SOLUCIÓN La figura 3 muestra la superficie $z = f(x, y)$ junto con el conjunto S, que aparece en el plano xy. Las primeras derivadas parciales son $f_x(x, y) = 2x$ y $f_y(x, y) = 2y$. Así, el único punto crítico interior posible es $(0, 0)$. Como

$$D(0, 0) = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - f_{xy}^2(0, 0) = 2 \cdot 2 - 0 = 4 > 0$$

y $f_{xx}(0, 0) = 2 > 0$, sabemos que $f(0, 0) = 2$ es un mínimo.

Entonces, el máximo global debe aparecer en la frontera de S. La figura 3 muestra también la frontera de S proyectada hacia arriba en la superficie $z = f(x, y)$; en algún punto sobre esta curva, f debe alcanzar un máximo. Podemos describir la frontera de S en forma paramétrica, como

$$x = \cos t, \qquad y = 2 \operatorname{sen} t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Entonces, el problema de optimización se reduce a optimizar la función de *una* variable

$$g(t) = f(\cos t, 2 \operatorname{sen} t), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Por la regla de la cadena (teorema 12.6A),

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= 2x(-\operatorname{sen} t) + 2y(2 \cos t) \\ &= -2 \operatorname{sen} t \cos t + 8 \operatorname{sen} t \cos t \\ &= 6 \operatorname{sen} t \cos t = 3 \operatorname{sen} 2t \end{aligned}$$

Al hacer $g'(t) = 0$ tenemos $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, y 2π. Entonces, g tiene cinco puntos críticos en $[0, 2\pi]$. Estos cinco valores t determinan los cinco puntos críticos $(1, 0)$, $(0, 2)$, $(-1, 0)$, $(0, -2)$ y $(1, 0)$ para f; el último punto es igual al primero, debido a que un ángulo de 2π proporciona el mismo punto que un ángulo de 0. Los valores correspondientes de f son

$$f(1, 0) = 3 \qquad f(0, 2) = 6$$
$$f(-1, 0) = 3 \qquad f(0, -2) = 6$$

En el punto crítico interior a S, tenemos que $f(0, 0) = 2$. Por lo tanto, concluimos que el valor mínimo de f en S es 2, y el valor máximo es 6. ■

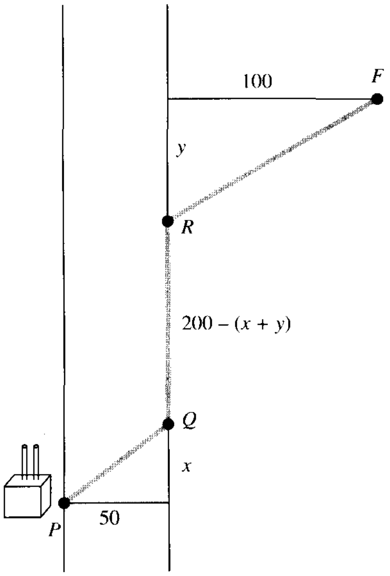


Figura 4

EJEMPLO 6 Un cable de electricidad está tendido desde una planta de energía hasta una nueva fábrica ubicada al otro lado de un río poco profundo. El río tiene un ancho de 50 pies y la fábrica está 200 pies río abajo y a 100 pies de la orilla, como se muestra en la figura 4. Tender el cable bajo el agua cuesta \$600 por pie, \$100 por pie a lo largo de la ribera y \$200 por pie tenderlo de la ribera a la fábrica. ¿Qué trayectoria debe elegirse para minimizar el costo y cuál es el costo mínimo?

SOLUCIÓN Sean P, Q, R y F los puntos que se muestran en la figura 4. Sea x la distancia del punto que se encuentra exactamente enfrente de la planta de energía a Q y sea y la distancia de R al punto en la ribera más próximo a la fábrica. Las longitudes y costos del cable se muestran en la siguiente tabla.

Tipo de cable	Longitud	Costo
Bajo el agua	$\sqrt{x^2 + 50^2}$	\$600/pie
A lo largo de la ribera	$200 - (x + y)$	\$100/pie
En tierra	$\sqrt{y^2 + 100^2}$	\$200/pie

Por lo tanto, el costo total es

$$C(x, y) = 600\sqrt{x^2 + 50^2} + 100(200 - x - y) + 200\sqrt{y^2 + 100^2}$$

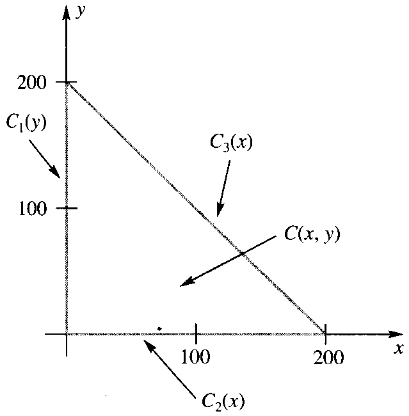


Figura 5

Los valores de (x, y) deben satisfacer $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 200$ (véase la figura 5). Al tomar las derivadas parciales e igualarlas a cero se obtiene

$$C_x(x, y) = 300(x^2 + 50^2)^{-1/2}(2x) - 100 = \frac{600x}{\sqrt{x^2 + 50^2}} - 100 = 0$$

$$C_y(x, y) = 100(y^2 + 100^2)^{-1/2}(2y) - 100 = \frac{200y}{\sqrt{y^2 + 100^2}} - 100 = 0$$

La solución a este sistema de ecuaciones es

$$x = \frac{10}{7}\sqrt{35} \approx 8.4515$$

$$y = \frac{100}{3}\sqrt{3} \approx 57.735$$

Ahora aplicamos el criterio de las segundas parciales:

$$C_{xx}(x, y) = \frac{600\sqrt{x^2 + 50^2} - 600x^2/\sqrt{x^2 + 50^2}}{x^2 + 50^2}$$

$$C_{yy}(x, y) = \frac{200\sqrt{y^2 + 100^2} - 200y^2/\sqrt{y^2 + 100^2}}{y^2 + 100^2}$$

$$C_{xy}(x, y) = 0$$

Al evaluar D en $x = \frac{10}{7}\sqrt{35}$ y $y = \frac{100}{3}\sqrt{3}$, obtiene

$$\begin{aligned} D &= C_{xx}\left(\tfrac{10}{7}\sqrt{35}, \tfrac{100}{3}\sqrt{3}\right)C_{yy}\left(\tfrac{10}{7}\sqrt{35}, \tfrac{100}{3}\sqrt{3}\right) - \left[C_{xy}\left(\tfrac{10}{7}\sqrt{35}, \tfrac{100}{3}\sqrt{3}\right)\right]^2 \\ &= \frac{35\sqrt{35}}{18}\frac{3\sqrt{3}}{4} - 0^2 \\ &= \frac{35}{24}\sqrt{105} > 0 \end{aligned}$$

Así que, $x = \frac{10}{7}\sqrt{35}$ y $y = \frac{100}{3}\sqrt{3}$ dan un mínimo local, que es

$$C\left(\tfrac{10}{7}\sqrt{35}, \tfrac{100}{3}\sqrt{3}\right) = 36{,}000\sqrt{\frac{5}{7}} + 100\left(200 - \tfrac{10}{7}\sqrt{35} - \tfrac{100}{3}\sqrt{3}\right) + \frac{40{,}000}{\sqrt{3}} \approx \$66{,}901$$

También debemos verificar la frontera. Cuando $x = 0$, la función de costo es

$$C_1(y) = C(0, y) = 30{,}000 + 100(200 - y) + 200\sqrt{y^2 + 100^2}$$

(La función $C_1(y)$ coincide con $C(x, y)$ en la frontera izquierda del dominio triangular de $C(x, y)$. De forma análoga, $C_2(x)$ y $C_3(x)$, definida enseguida, coinciden con $C(x, y)$ en las fronteras inferior y superior, respectivamente. Véase la figura 5). Al utilizar los métodos del capítulo 3 (los detalles se dejan al lector), determinamos que C_1 alcanza un mínimo de aproximadamente \$67,321 cuando $y = 100/\sqrt{3}$. En la frontera en donde $y = 0$, la función de costo es

$$C_2(x) = C(x, 0) = 20{,}000 + 600\sqrt{x^2 + 50^2} + 100(200 - x)$$

Nuevamente, al utilizar los métodos del capítulo 3, encontramos que C_2 alcanza un mínimo de aproximadamente \$69,580 cuando $x = 10\sqrt{5/7}$. Por último, debemos abordar la frontera en donde $x + y = 200$. Podemos sustituir $200 - x$ por y para obtener el costo sólo en términos de x:

$$\begin{aligned} C_3(x) &= C(x, 200 - x) \\ &= 600\sqrt{x^2 + 50^2} + 200\sqrt{(200 - x)^2 + 100^2} \end{aligned}$$

Esta función alcanza un mínimo de aproximadamente \$73,380 cuando $x \approx 15.3292$.

Por lo tanto, la trayectoria con el costo mínimo es aquella en donde $x = \frac{10}{7}\sqrt{35} \approx 8.4515$ y $y = \frac{100}{3}\sqrt{3} \approx 57.735$, que da un costo de \$66,901. ■

Revisión de conceptos

1. Si $f(x, y)$ es continua en un conjunto _____ S, entonces f alcanza un valor máximo y un valor mínimo en S.

2. Si $f(x, y)$ alcanza un valor máximo en un punto (x_0, y_0), entonces (x_0, y_0) es un punto _____ o un punto _____ o un punto _____.

3. Si (x_0, y_0) es un punto estacionario de f, entonces f es diferenciable ahí y _____.

4. En el criterio de las segundas parciales para una función f de dos variables, el número $D =$ _____ desempeña un papel crucial.

Conjunto de problemas 12.8

En los problemas del 1 al 10 determine todos los puntos críticos. Indique si cada uno de estos puntos da un máximo local o un mínimo local o si es un punto silla. Sugerencia: utilice el teorema C.

1. $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4x$

2. $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 2x + 8y - 1$

3. $f(x, y) = 2x^4 - x^2 + 3y^2$

4. $f(x, y) = xy^2 - 6x^2 - 3y^2$

5. $f(x, y) = xy$

6. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$

7. $f(x, y) = xy + \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{y}$

8. $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2-4y)}$

9. $f(x, y) = \cos x + \cos y + \cos(x + y)$; $0 < x < \pi/2, 0 < y < \pi/2$

10. $f(x, y) = x^2 + a^2 - 2ax \cos y$; $-\pi < y < \pi$

En los problemas 11 al 14 encuentre el valor máximo global y el valor mínimo global de F en S e indique dónde aparece cada uno.

11. $f(x, y) = 3x + 4y$; $S = \{(x, y): 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$

12. $f(x, y) = x^2 + y^2$; $S = \{(x, y): -1 \le x \le 3, -1 \le y \le 4\}$

13. $f(x, y) = x^2 - y^2 + 1$; $S = \{(x, y): x^2 + y^2 \le 1\}$ (véase el ejemplo 3).

14. $f(x, y) = x^2 - 6x + y^2 - 8y + 7$; $S = \{(x, y): x^2 + y^2 \le 1\}$

15. Exprese un número positivo N como una suma de tres números positivos, de modo que el producto de estos tres números sea máximo.

16. Use los métodos de esta sección para determinar la distancia más corta del origen al plano $x + 2y + 3z = 12$.

17. Determine la forma de la caja rectangular cerrada de volumen V_0 con área de la superficie mínima.

18. Determine la forma de la caja rectangular de volumen V_0 para la que la suma de las longitudes de las aristas sea mínima.

19. Un tanque metálico rectangular sin tapa debe contener 256 pies cúbicos de líquido. ¿Cuáles son las dimensiones del tanque que requieren menos material para su construcción?

20. Una caja rectangular, cuyos lados son paralelos a los ejes de coordenadas, se inscribe en el elipsoide $96x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 36$. ¿Cuál es el mayor volumen posible para tal caja?

21. Determine el vector tridimensional con longitud 9, tal que la suma de sus componentes sea un máximo.

22. Determine el punto en el plano $2x + 4y + 3z = 12$, que es más cercano al origen. ¿Cuál es la distancia mínima?

CAS **23.** Determine el punto en el paraboloide $z = x^2 + y^2$ que es más cercano a $(1, 2, 0)$. ¿Cuál es la distancia mínima?

24. Determine la mínima distancia entre el punto $(1, 2, 0)$ y el cono cuádrico $z^2 = x^2 + y^2$.

25. Se construirá un canal abierto con sección transversal en la forma de un trapecio con ángulos iguales en la base, doblando franjas iguales a ambos lados de una larga pieza de metal de 12 pulgadas de ancho. Determine los ángulos en la base y el ancho de los lados para obtener la mayor capacidad de carga.

26. Determine la mínima distancia entre las rectas con ecuaciones paramétricas $x = t - 1, y = 2t, z = t + 3$ y $x = 3s, y = s + 2, z = 2s - 1$.

27. Convénzase de que los valores máximo y mínimo de una función lineal $f(x, y) = ax + by + c$ sobre un conjunto poligonal cerrado (es decir, un polígono y su interior) siempre aparece en un vértice del polígono. Luego use este hecho para determinar lo siguiente:

(a) el valor máximo de $2x + 3y + 4$ en el polígono cerrado con vértices $(-1, 2), (0, 1), (1, 0), (-3, 0)$ y $(0, -4)$.

(b) el valor mínimo de $-3x + 2y + 1$ en el polígono cerrado con vértices $(-3, 0), (0, 5), (2, 3), (4, 0)$ y $(1, -4)$.

28. Use el resultado del problema 27 para maximizar $2x + y$ sujeto a las restricciones $4x + y \le 8, 2x + 3y \le 14, x \ge 0$ y $y \ge 0$. *Sugerencia:* comience graficando el conjunto determinado por las restricciones.

29. Determine los valores máximo y mínimo de $z = y^2 - x^2$ (figura 2) en el triángulo cerrado con vértices $(0, 0), (1, 2)$ y $(2, -2)$.

30. Mínimos cuadrados Dados n puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ en el plano xy, queremos determinar la recta $y = mx + b$, tal que la suma de los cuadrados de las distancias verticales de los puntos a la recta sea mínima; es decir, queremos minimizar

$$f(m, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - mx_i - b)^2$$

(Véase la figura 6. Además, recuerde que las x_i y las y_i están *fijas*).

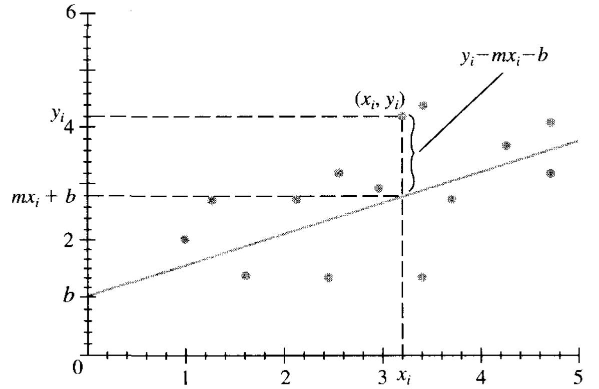


Figura 6

(a) Calcule $\partial f / \partial m$ y $\partial f / \partial b$ e iguale estos resultados a cero. Demuestre que esto conduce al sistema de ecuaciones

$$m \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$m \sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

(b) Resuelva este sistema en términos de m y b.

(c) Use el criterio de las segundas parciales (teorema C) para mostrar que f se *minimiza* para esta elección de m y b.

31. Determine la recta de mínimos cuadros (problema 30) para los datos $(3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 4)$ y $(7, 5)$.

32. Determine los valores máximos y mínimos de $z = 2x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5$ (figura 3) en el conjunto acotado por el triángulo cerrado con vértices $(0, 0), (4, 0)$ y $(0, 1)$.

33. Suponga que en el ejemplo 6 el costo fue como sigue: bajo el agua \$400/pie; a lo largo de la ribera \$200/pie y cruzando la tierra \$300/pie. ¿Cuál trayectoria debe tomarse para minimizar el costo y cuál es el costo mínimo?

34. Suponga que en el ejemplo 6 el costo fue como sigue: bajo el agua \$500/pie; a lo largo de la ribera \$200/pie y cruzando la tierra \$100/pie. ¿Cuál trayectoria debe tomarse para minimizar el costo y cuál es el costo mínimo?

35. Determine los valores máximo y mínimo de $f(x, y) = 10 + x + y$, en el disco $x^2 + y^2 \le 9$. *Sugerencia:* parametrice la frontera mediante $x = 3 \cos t, y = 3 \operatorname{sen} t, 0 \le t \le 2\pi$.

36. Determine los valores máximo y mínimo de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en la elipse y su interior dados por $x^2/a^2 + y^2/b^2 \le 1$, donde $a < b$. *Sugerencia:* parametrice la frontera mediante $x = a \cos t, y = b \operatorname{sen} t, 0 \le t \le 2\pi$.

37. Se fabricará una caja, donde el costo del material para los lados y la tapa es de \$0.25 por pie cuadrado y el costo para la parte inferior es de \$0.40 por pie cuadrado. Determine las dimensiones de una caja con volumen de 2 pies cúbicos que tenga costo mínimo.

CAS **38.** Una caja de acero sin tapa, que tendrá volumen de 60 pies cúbicos, se construirá de material que cuesta \$4 por pie cuadrado para la parte inferior y \$1 por pie cuadrado para los lados. Doblar los lados de la parte inferior cuesta \$3 por pie lineal y doblar los lados de los lados cuesta \$1 por pie lineal. Determine las dimensiones de la caja que tiene costo mínimo y determine el costo mínimo. *Sugerencia:* utilice simetría para obtener una ecuación con una incógnita y use un CAS o el método de Newton para aproximar la solución.

39. Suponga que la temperatura T en la placa circular $\{(x, y): x^2 + y^2 \le 1\}$ está dada por $T = 2x^2 + y^2 - y$. Determine los puntos más caliente y más frío en la placa.

40. Un cable de longitud k debe cortarse en (a lo más) tres pedazos para formar un círculo y dos cuadrados, cualquiera de los cuales puede ser degenerado. ¿Cómo debe hacerse esto para maximizar y minimizar el área encerrada de esta forma? *Sugerencia:* reduzca el problema de optimizar $x^2 + y^2 + z^2$ en la parte del plano $2\sqrt{\pi}x + 4y + 4z = k$ en el primer octante. Luego dé un razonamiento geométrico.

41. Determine la forma del triángulo de mayor área que puede inscribirse en un círculo de radio r. *Sugerencia:* sean α, β y γ los ángulos centrales que subtienden los tres lados del triángulo. Demuestre que el área del triángulo es $\frac{1}{2}r^2[\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen}(\alpha + \beta)]$. Maximice.

42. Sea (a, b, c) un punto fijo en el primer octante. Determine el plano que pasa por este punto y que forma en el primer octante el tetraedro de volumen mínimo; determine el volumen resultante.

CAS *A veces, la determinación de los extremos para una función de dos variables se puede controlar mejor mediante métodos del sentido común y una computadora. Como ejemplo, observe las imágenes de las superficies y los mapas de contorno correspondientes para las cinco funciones graficadas en las figuras 15-19 de la sección 12.1. Observe que estas gráficas sugieren que podemos ubicar los extremos de manera visual. Con la capacidad adicional para evaluar la función en algunos puntos, podemos aproximar de manera experimental los máximos y mínimos con buena precisión. En los problemas del 43 al 53 use su tecnología para determinar el punto donde ocurre el máximo o mínimo indicado y dé el valor de la función en ese punto. Observe que los problemas del 43 al 47 se refieren a las cinco funciones de la sección 12.1.*

43. $f(x, y) = x - x^3/9 - y^2/2$; $-3.8 \le x \le 3.8$ $-3.8\ y \le -3.8$; punto máximo local cerca de $(2, 0)$; también el máximo global. Verifique mediante el cálculo.

44. $f(x, y) = y/(1 + x^2 + y^2)$; $-5 \leq x \leq 5, -5 \leq y \leq 5$; punto máximo global y mínimo global. Verifique mediante el cálculo.

45. $f(x, y) = -1 + \cos(y/(1 + x^2 + y^2))$; $-3.8 \leq x \leq 3.8$, $-3.8 \leq y \leq 3.8$; mínimo global.

46. $f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2 + xy/4)$; $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$; máximo global y mínimo global. Verifique mediante el cálculo.

47. $f(x, y) = \exp(-(x^2 + y^2)/4)\operatorname{sen}(x\sqrt{|y|})$; $-5 \leq x \leq 5$, $-5 \leq y \leq 5$; máximo global y mínimo global.

48. $f(x, y) = -x/(x^2 + y^2)$, $f(0, 0) = 0$; $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$; máximo global y mínimo global. Tenga cuidado.

49. $f(x, y) = 8\cos(xy + 2x) + x^2y^2$; $-3 \leq x \leq 3$, $-3 \leq y \leq 3$; máximo global y mínimo global.

50. $f(x, y) = (\operatorname{sen} x)/(6 + x + |y|)$; $-3 \leq x \leq 3$, $-3 \leq y \leq 3$; máximo global y mínimo global.

51. $f(x, y) = \cos(|x| + y^2) + 10x\exp(-x^2 - y^2)$; $-2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2$; máximo global y mínimo global.

52. $f(x, y) = (x^2 - x - 5)(1 - 9y)\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$; $-6 \leq x \leq 6, -6 \leq y \leq 6$; máximo global y mínimo global.

53. $f(x, y) = 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y - \operatorname{sen}(x + y)$; $0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi$; máximo global y mínimo global.

54. Considere tres brazos de longitudes 6, 8 y 10 que emanan de N, como se muestra en la figura 7. Sean $K(\alpha, \beta)$ y $L(\alpha, \beta)$ el área y perímetro, respectivamente, del triángulo ABC determinado por estos brazos.

(a) Determine fórmulas para $K(\alpha, \beta)$ y $L(\alpha, \beta)$.

(b) Determine (α, β) en $D = \{(\alpha, \beta): 0 \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi\}$ que maximiza $K(\alpha, \beta)$.

(c) Determine (α, β) en D que maximiza $L(\alpha, \beta)$.

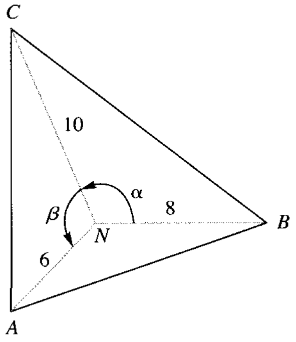


Figura 7

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** cerrado y acotado **2.** frontera; estacionario; singular **3.** $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$ **4.** $f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0)$

12.9 Método de multiplicadores de Lagrange

Comenzaremos distinguiendo entre dos tipos de problemas. Determinar el valor mínimo de $x^2 + 2y^2 + z^4 + 4$ es un problema con *extremos libres*. Determinar el mínimo de $x^2 + 2y^2 + z^4 + 4$ sujeto a la condición de que $x + 3y - z = 7$ es un problema de *extremos con restricción*. Muchos de los problemas del mundo real, en particular los de economía, son del segundo tipo. Por ejemplo, un fabricante podría tratar de maximizar las ganancias, pero es probable que esté restringido por la cantidad de materia prima disponible, la cantidad de mano de obra y así sucesivamente.

El ejemplo 4 de la sección anterior fue un problema de extremos con restricción. Se nos había pedido determinar la distancia mínima de la superficie $z^2 = x^2y + 4$ al origen. Formulamos el problema como el de minimizar $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$ sujeto a la restricción $z^2 = x^2y + 4$. Manejamos este problema sustituyendo el valor de z^2 dado por la restricción en la expresión para d^2 y luego resolvimos el problema resultante con extremos libres (es decir, sin restricciones). El ejemplo 5 de la sección anterior era también un problema de optimización con restricción. Sabíamos que el máximo debía aparecer en la frontera de la región S, de modo que pasamos al problema de maximizar $z = 2 + x^2 + y^2$ sujeto a la restricción $x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$. Este problema se resolvió determinando una parametrización para la restricción y luego maximizar una función de una variable (donde la variable es el parámetro en la restricción). Sin embargo, con frecuencia ocurre que en la ecuación de restricción no se puede despejar fácilmente una de las variables o que la restricción no se puede parametrizar en términos de una variable. Incluso, aunque se puede aplicar una de estas técnicas, otro método puede ser más sencillo: el de los **multiplicadores de Lagrange.**

Interpretación geométrica del método

Parte del problema en el ejemplo 5 de la sección anterior era el de maximizar la función objetivo $f(x, y) = 2 + x^2 + y^2$ sujeta a la restricción $g(x, y) = 0$, donde $g(x, y) = x^2 + \frac{1}{4}y^2 - 1$. La figura 1 muestra la superficie $z = f(x, y)$ junto con la restricción. En este caso, el cilindro elíptico representa la restricción. La segunda parte de la figura 1 muestra la intersección de la restricción y la superficie $z = f(x, y)$. El problema de optimización consiste en determinar en qué punto de esta curva de intersección la función alcanza un máximo o un mínimo. Tanto la segunda como la tercera parte de la figura 1 sugieren que el máximo y el mínimo ocurrirán cuando una curva de nivel de la función objetivo f sea *tangente* a la curva de restricción. Ésta es la idea fundamental detrás del método de los multiplicadores de Lagrange.

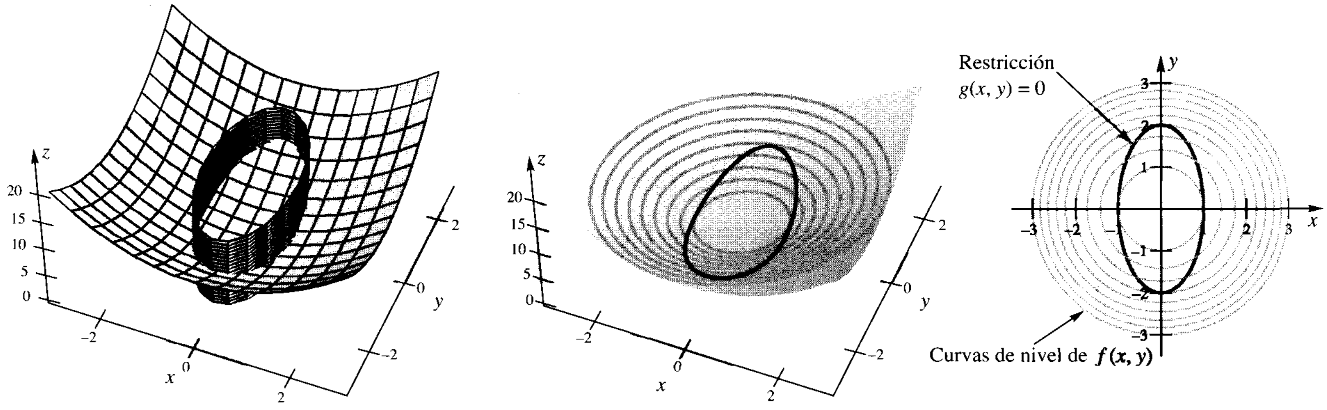


Figura 1

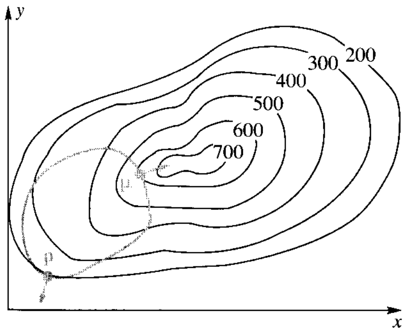


Figura 2

Ahora considere el problema general de optimizar $f(x, y)$ sujeto a la restricción $g(x, y) = 0$. Las curvas de nivel de f son las curvas $f(x, y) = k$, donde k es una constante. Éstas aparecen en la figura 2 para $k = 200, 300, \ldots, 700$. La *gráfica de la restricción* $g(x, y) = 0$ también es una curva y aparece en la figura 2. Maximizar f sujeta a la restricción $g(x, y) = 0$ significa determinar la curva de nivel con la máxima k posible que corte la curva de restricción. Es evidente, de la figura 2, que tal curva de nivel es *tangente* a la curva de restricción en un punto $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0)$ y, por lo tanto, que el valor máximo de f sujeta a la restricción $g(x, y) = 0$ es $f(x_0, y_0)$. El otro punto de tangencia, $\mathbf{p}_1 = (x_1\ y_1)$, da el valor mínimo $f(x_1, y_1)$ de f sujeta a la restricción $g(x, y) = 0$.

El método de Lagrange proporciona un procedimiento algebraico para determinar los puntos $\mathbf{p}_0$ y $\mathbf{p}_1$. Como en tales puntos la curva de nivel y la curva de restricción son tangentes (es decir, tienen una recta tangente común), las dos curvas tienen una perpendicular común. Pero en cualquier punto de una curva de nivel el vector gradiente ∇f es perpendicular a la curva de nivel (sección 12.5) y, de manera similar, ∇g es perpendicular a la curva de restricción. Así, ∇f y ∇g son paralelos en $\mathbf{p}_0$ y también en $\mathbf{p}_1$; es decir,

$$\nabla f(\mathbf{p}_0) = \lambda_0 \nabla g(\mathbf{p}_0) \quad \text{y} \quad \nabla f(\mathbf{p}_1) = \lambda_1 \nabla g(\mathbf{p}_1)$$

para ciertos números no nulos λ_0 y λ_1.

El argumento anterior es decididamente intuitivo, pero puede formalizarse completamente bajo las hipótesis adecuadas. Además, este argumento también sirve para el problema de maximizar o minimizar $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = 0$. Simplemente consideramos *superficies* de nivel en vez de curvas de nivel. De hecho, el resultado es válido para cualquier número de variables.

Todo esto sugiere la siguiente formulación del método de multiplicadores de Lagrange.

Teorema A **Método de Lagrange**

Para maximizar o minimizar $f(\mathbf{p})$ sujeta a la restricción $g(\mathbf{p}) = 0$, resuelva el sistema de ecuaciones

$$\nabla f(\mathbf{p}) = \lambda \nabla g(\mathbf{p}) \quad \text{y} \quad g(\mathbf{p}) = 0$$

para $\mathbf{p}$ y λ. Cada uno de tales puntos $\mathbf{p}$ es un punto crítico para el problema de extremos con restricción y el número λ correspondiente es un multiplicador de Lagrange.

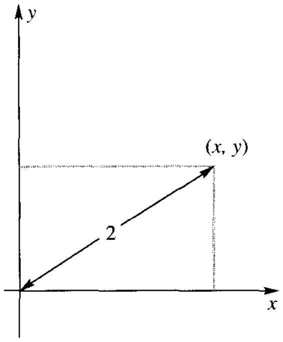


Figura 3

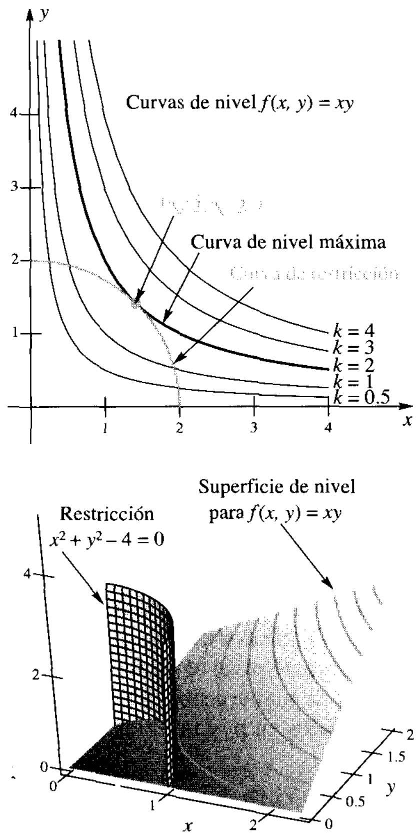


Figura 4

Aplicaciones Ilustramos el método con varios ejemplos.

EJEMPLO 1 ¿Cuál es la máxima área que puede tener un rectángulo si la longitud de su diagonal es 2?

SOLUCIÓN Coloque el rectángulo en el primer cuadrante, con dos de sus lados a lo largo de los ejes de coordenadas; luego, el vértice opuesto al origen tiene coordenadas (x, y), con x y y positivos (figura 3). La longitud de su diagonal es $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$ y su área es xy.

Así, podemos formular el problema como el de maximizar $f(x, y) = xy$ sujeta a la restricción $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$. Los gradientes correspondientes son

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$$

$$\nabla g(x, y) = g_x(x, y)\mathbf{i} + g_y(x, y)\mathbf{j} = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j}$$

Así, las ecuaciones de Lagrange se convierten en

(1) $$y = \lambda(2x)$$

(2) $$x = \lambda(2y)$$

(3) $$x^2 + y^2 = 4$$

que debemos resolver en forma simultánea. Si multiplicamos la primera ecuación por y y la segunda por x, obtenemos $y^2 = 2\lambda xy$ y $x^2 = 2\lambda xy$, de donde

(4) $$y^2 = x^2$$

De (3) y (4) vemos que $x = \sqrt{2}$ y $y = \sqrt{2}$; al sustituir estos valores en (1) obtenemos $\lambda = \frac{1}{2}$. Así, la solución a las ecuaciones de la (1) a la (3), con x y y positivos, es $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$ y $\lambda = \frac{1}{2}$.

Concluimos que el rectángulo de área máxima con diagonal 2 es el cuadrado cuyos lados miden $\sqrt{2}$. Su área es 2. La figura 4 muestra una interpretación geométrica de este problema. ■

EJEMPLO 2 Use el método de Lagrange para determinar los valores máximos y mínimos de

$$f(x, y) = y^2 - x^2$$

sobre la elipse $x^2/4 + y^2 = 1$.

SOLUCIÓN Revise la figura 2 de la sección 12.8, donde aparece una gráfica del paraboloide hiperbólico $z = f(x, y) = y^2 - x^2$. Esta figura nos permite estimar que el valor mínimo aparece en $(\pm 2, 0)$ y el valor máximo en $(0, \pm 1)$. Pero justifiquemos esta conjetura.

Podemos escribir las restricciones como $g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0$. Ahora,

$$\nabla f(x, y) = -2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j}$$

y

$$\nabla g(x, y) = 2x\,\mathbf{i} + 8y\,\mathbf{j}$$

Las ecuaciones de Lagrange son

(1) $$-2x = \lambda 2x$$

(2) $$2y = \lambda 8y$$

(3) $$x^2 + 4y^2 = 4$$

Observe, de la tercera ecuación, que x y y no se pueden anular simultáneamente. Si $x \neq 0$, la primera ecuación implica que $\lambda = -1$ y, entonces, la segunda ecuación exige que $y = 0$. De la tercera ecuación concluimos que $x = \pm 2$. Así, hemos obtenido los puntos críticos $(\pm 2, 0)$.

Exactamente el mismo argumento con $y \neq 0$ implica que $\lambda = \frac{1}{4}$ de la segunda ecuación, luego $x = 0$ de la primera, y finalmente $y = \pm 1$ de la tercera ecuación. Concluimos que $(0, \pm 1)$ también son puntos críticos.

Ahora, para $f(x, y) = y^2 - x^2$,

$$\begin{aligned} f(2,0) &= -4 \\ f(-2,0) &= -4 \\ f(0,1) &= 1 \\ f(0,-1) &= 1 \end{aligned}$$

El valor mínimo de $f(x, y)$ en la elipse dada es -4; el valor máximo es 1. ■

EJEMPLO 3 Determine el mínimo de $f(x, y, z) = 3x + 2y + z + 5$ sujeto a la restricción $g(x, y, z) = 9x^2 + 4y^2 - z = 0$.

SOLUCIÓN Los gradientes de f y g son $\nabla f(x, y, z) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\nabla g(x, y, z) = 18x\mathbf{i} + 8y\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Para determinar los puntos críticos, resolvemos las ecuaciones

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \quad \text{y} \quad g(x, y, z) = 0$$

en términos de (x, y, z, λ), donde λ es un multiplicador de Lagrange. Esto es equivalente, en nuestro problema, a resolver el siguiente sistema de cuatro ecuaciones simultáneas en las cuatro variables x, y, z y λ.

(1) $3 = 18x\lambda$

(2) $2 = 8y\lambda$

(3) $1 = -\lambda$

(4) $9x^2 + 4y^2 - z = 0$

De (3), $\lambda = -1$. Al sustituir este resultado en las ecuaciones (1) y (2), obtenemos $x = -\frac{1}{6}$ y $y = -\frac{1}{4}$. Al introducir estos valores de x y y en la ecuación (4), obtenemos $z = \frac{1}{2}$. Así, la solución del sistema anterior de cuatro ecuaciones simultaneas es $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1\right)$ y el único punto crítico es $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$. Por lo tanto, el mínimo de $f(x, y, z)$, sujeta a la restricción $g(x, y, z) = 0$, es $f\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}$. (¿Cómo sabemos que este valor es mínimo y no máximo?). ■

Dos o más restricciones Cuando se impone más de una restricción sobre las variables de una función que debe maximizarse o minimizarse, se usan más multiplicadores de Lagrange (uno por cada restricción). Por ejemplo, si buscamos los extremos de una función f de tres variables sujeta a las dos restricciones $g(x, y, z) = 0$ y $h(x, y, z) = 0$, resolvemos las ecuaciones

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z), \quad g(x, y, z) = 0, \quad h(x, y, z) = 0$$

en términos de x, y, z, λ y μ, donde λ y μ son multiplicadores de Lagrange. Esto es equivalente a hallar las soluciones del sistema de cinco ecuaciones simultáneas en las variables x, y, z, λ y μ.

(1) $f_x(x, y, z) = \lambda g_x(x, y, z) + \mu h_x(x, y, z)$

(2) $$f_y(x, y, z) = \lambda g_y(x, y, z) + \mu h_y(x, y, z)$$

(3) $$f_z(x, y, z) = \lambda g_z(x, y, z) + \mu h_z(x, y, z)$$

(4) $$g(x, y, z) = 0$$

(5) $$h(x, y, z) = 0$$

Obtenemos los puntos críticos mediante las soluciones de este sistema.

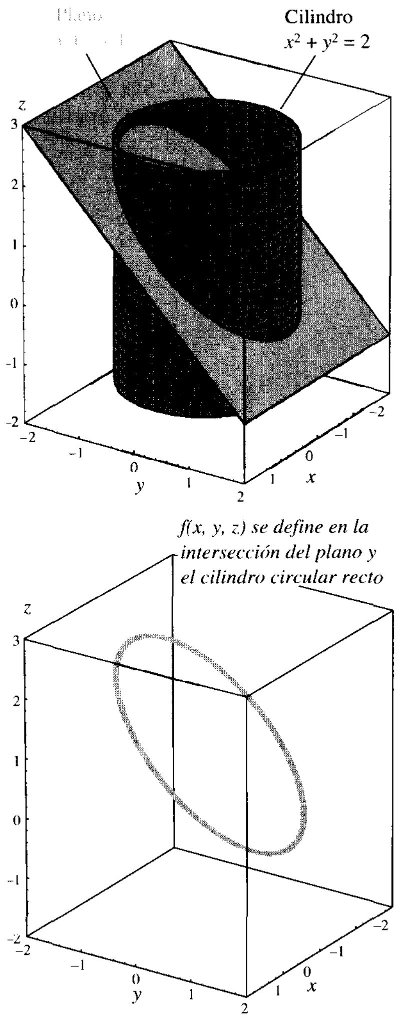


Figura 5

EJEMPLO 4 Determine los valores máximos y mínimos de $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sobre la elipse dada como la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 2$ y el plano $y + z = 1$ (véase la figura 5).

SOLUCIÓN Queremos maximizar y minimizar $f(x, y, z)$ sujeta a $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0$ y $h(x, y, z) = y + z - 1 = 0$. Las ecuaciones de Lagrange correspondientes son

(1) $$1 = 2\lambda x$$

(2) $$2 = 2\lambda y + \mu$$

(3) $$3 = \mu$$

(4) $$x^2 + y^2 - 2 = 0$$

(5) $$y + z - 1 = 0$$

De (1), $x = 1/(2\lambda)$; de (2) y (3), $y = -1/(2\lambda)$. Así, de (4), $(1/(2\lambda))^2 + (-1/(2\lambda))^2 = 2$, lo que implica que $\lambda = \pm\frac{1}{2}$. La solución $\lambda = \frac{1}{2}$ proporciona el punto crítico $(x, y, z) = (1, -1, 2)$ y $\lambda = -\frac{1}{2}$ da el punto crítico $(x, y, z) = (-1, 1, 0)$. Concluimos que $f(1, -1, 2) = 5$ es el valor máximo y $f(-1, 1, 0) = 1$ es el valor mínimo. ■

Optimización de una función en un conjunto cerrado y acotado Podemos determinar el máximo o el mínimo de una función $f(x, y)$ en un conjunto cerrado y acotado S, mediante los siguientes pasos. Primero, utilice los métodos de la sección 12.8 para determinar el máximo o el mínimo en el interior de S. Segundo, utilice los multiplicadores de Lagrange para determinar los puntos en la frontera que proporcione un máximo o un mínimo local. Por último, evalúe la función en estos puntos para determinar el máximo y el mínimo en S.

EJEMPLO 5 Determine el máximo y el mínimo para la función $f(x, y) = 4 + xy - x^2 - y^2$ en el conjunto $S = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$

SOLUCIÓN La figura 6 muestra la gráfica de $z = 4 + xy - x^2 - y^2$. El conjunto S es el círculo con centro en el origen que tiene radio 1. Así, tenemos que encontrar el máximo y el mínimo de f en la región que está en o dentro de la curva dibujada en la parte superior de la figura 6. Iniciamos por determinar todos los puntos críticos en el interior de S:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - 2x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x - 2y = 0$$

La única solución, y por tanto el único punto crítico interior, es $(0, 0)$. Ahora aplicamos el método de multiplicadores de Lagrange para determinar puntos a lo largo de la

Pensando en la simetría

La figura 6 sugiere que cuatro de los puntos a verificar serán simétricos respecto al origen. Y éste será el caso.

frontera en donde la función tenga un máximo o un mínimo. Un punto en la frontera satisfará la restricción $x^2 + y^2 - 1 = 0$, así que hacemos $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Entonces

$$\nabla f(x, y) = (y - 2x)\mathbf{i} + (x - 2y)\mathbf{j}$$

$$\nabla g(x, y) = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j}$$

Haciendo $\nabla f(x, y) = \lambda\, \nabla g(x, y)$ lleva a

$$\begin{aligned} y - 2x &= \lambda 2x \\ x - 2y &= \lambda 2y \end{aligned}$$

Al despejar λ en estas dos ecuaciones se obtiene

$$\frac{y}{2x} - 1 = \lambda = \frac{x}{2y} - 1$$

que conduce a $x = \pm\, y$. Esto, junto con la restricción $x^2 + y^2 - 1 = 0$, da $x = \pm\sqrt{2}/2$, $y = \pm\sqrt{2}/2$. Por lo tanto, debemos evaluar f en los cinco puntos $(0, 0)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$:

$$f(0, 0) = 4 \qquad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{7}{2} \qquad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{5}{2} \qquad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{7}{2}$$

El máximo que alcanza f en S es 4, y ocurre en $(x, y) = (0, 0)$. El mínimo que alcanza f en S es $\frac{5}{2}$, y esto ocurre en los dos puntos $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. ■

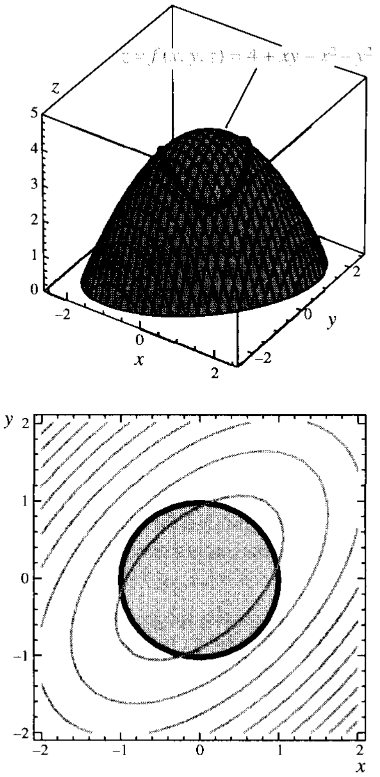


Figura 6

Revisión de conceptos

1. Maximizar $f(x, y)$ es un problema de extremos _____; maximizar $f(x, y)$ sujeta a $g(x, y) = 0$ es un problema de extremos _____.

2. El método de multiplicadores de Lagrange depende del hecho de que en un extremo los vectores ∇f y ∇g son _____.

3. Así, para usar el método de Lagrange, intentamos resolver las ecuaciones $\nabla f(x, y) = \lambda\, \nabla g(x, y)$ y _____ en forma simultánea.

4. En ocasiones, un sencillo razonamiento geométrico proporciona una solución. El valor máximo de $f(x, y) = x^4 + y^4$ en el círculo $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$ ocurre claramente en _____.

Conjunto de problemas 12.9

1. Determine el mínimo de $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeta a la restricción $g(x, y) = xy - 3 = 0$.

2. Determine el máximo de $f(x, y) = xy$ sujeta a la restricción $g(x, y) = 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$.

3. Determine el máximo *de* $f(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 1$.

4. Determine el mínimo de $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$ sujeta a la restricción $x - y - 6 = 0$.

5. Determine el mínimo de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a la restricción $x + 3y - 2z = 12$.

6. Determine el máximo de $f(x, y, z) = 4x - 2y + 3z$ sujeta a la restricción $2x^2 + y^2 - 3z = 0$.

7. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja rectangular sin tapa que tiene volumen máximo cuando el área de la superficie es 48?

8. Determine la distancia mínima entre el origen y el plano $x + 3y - 2z = 4$.

9. El material para el fondo de una caja rectangular cuesta el triple por pie cuadrado que el material para los lados y la tapa. Determine la máxima capacidad que la caja puede tener si la cantidad total de dinero disponible para el material es \$12 y el material para el fondo cuesta \$0.60 el pie cuadrado.

10. Determine la mínima distancia entre el origen y la superficie $x^2y - z^2 + 9 = 0$.

11. Determine el volumen máximo de una caja rectangular cerrada con caras paralelas a los planos de coordenadas, inscrita en el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

12. Determine el volumen máximo de la caja rectangular en el primer octante, con caras paralelas a los planos de coordenadas, un vértice en $(0, 0, 0)$ y con el vértice diagonalmente opuesto ubicado en el plano

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

En los problemas del 13 al 20 utilice el método de los multiplicadores de Lagrange para resolver estos problemas de la sección 12.8.

13. Problema 21

14. Problema 22

15. Problema 23

16. Problema 24

17. Problema 37

18. Problema 38

19. Problema 40 (sólo el mínimo)

20. Problema 42; *Sugerencia:* considere el plano $\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1.$

En los problemas del 21 al 25 determine el máximo y el mínimo de la función f en el conjunto cerrado y acotado S. Utilice los métodos de la sección 12.8 para determinar el máximo y el mínimo en el interior de S; luego utilice los multiplicadores de Lagrange para determinar el máximo y el mínimo en la frontera de S.

21. $f(x, y) = 10 + x + y; S = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$

22. $f(x, y) = x + y - xy; S = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 9\}$

23. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3x - xy;$
$S = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 9\}$

24. $f(x, y) = \dfrac{x}{1 + y^2}; S = \left\{(x, y): \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \leq 1\right\}$

25. $f(x, y) = (1 + x + y)^2; S = \left\{(x, y): \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} \leq 1\right\}$

26. Determine la forma del triángulo de mayor perímetro que se puede inscribir en un círculo de radio r. *Sugerencia:* sean α, β y γ como en la figura 7 y reduzca al problema a maximizar $P = 2r(\text{sen } \alpha/2 + \text{sen } \beta/2 + \text{sen } \gamma/2)$ sujeto a $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$.

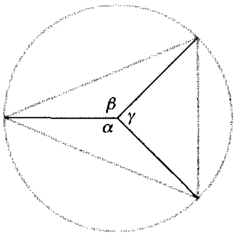


Figura 7

27. Considere el modelo de producción de Cobb–Douglas para un proceso de manufactura que depende de tres entradas, x, y y z, con costos unitarios $a, b,$ y c, respectivamente, dados por

$$P = kx^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \alpha + \beta + \gamma = 1$$

sujeto a la restricción de costos $ax + by + cz = d$. Determine x, y y z para maximizar la producción P.

28. Determine la distancia mínima del origen a la recta de intersección de los dos planos

$$x + y + z = 8 \quad \text{y} \quad 2x - y + 3z = 28$$

29. Determine el máximo y el mínimo de $f(x, y, z) = -x + 2y + 2z$ en la elipse $x^2 + y^2 = 2, y + 2z = 1$ (véase el ejemplo 4).

30. Sea $w = x_1x_2 \cdots x_n$

(a) Maximice w sujeta a $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ y todo $x_i > 0$.

(b) Use la parte (a) para deducir la **desigualdad de la media aritmética** y la **media geométrica** para números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$; es decir,

$$\sqrt[n]{a_1a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

31. Maximice $w = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$, con $a_i > 0$, sujeta a $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$.

CAS *El trazo de superficies y curvas de nivel, junto con un poco de sentido común, nos puede permitir resolver algunos problemas de extremos con restricciones. Resuelva lo siguiente, con base en las funciones de las figuras de la 6 a la 9 de la sección 12.1.*

32. Maximice $z = -4x^3y^2$ sujeta a $x^2 + y^2 = 1$.

33. Minimice $z = x - x^3/8 - y^2/3$ sujeta a $x^2/16 + y^2 = 1$.

34. Maximice $z = xy \exp(-x^2 - y^2)$ sujeta a $xy = 2$.

35. Minimice $z = \exp(-|x|) \cos \sqrt{x^2 + y^2}$ sujeta a $x^2 + y^2/9 = 1$.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** libres; con restricción **2.** parallelos **3.** $g(x, y) = 0$ **4.** $(2, 2)$

12.10 Repaso del capítulo

Examen de conceptos

Responda con cierto o falso a cada una de las siguientes afirmaciones. Prepárese para justificar su respuesta.

1. Las curvas de nivel de $z = 2x^2 + 3y^2$ son elipses.

2. Si $f_x(0, 0) = f_y(0, 0)$ entonces $f(x, y)$ es continua en el origen.

3. Si $f_x(0, 0)$ existe, entonces $g(x) = f(x, 0)$es continua en $x = 0$.

4. Si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = L$, entonces $\lim\limits_{y\to 0} f(y, y) = L$.

5. Si $f(x, y) = g(x)h(y)$, donde g y h son continuas para todo x y y, respectivamente, entonces f es continua en todo el plano xy.

6. Si $f(x, y) = g(x)h(y)$, donde g y h son, ambas, dos veces diferenciables, entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = g''(x)h(y) + g(x)h''(y)$$

7. Si $f(x, y)$ y $g(x, y)$ tienen el mismo gradiente, entonces son funciones idénticas.

8. El gradiente de f es perpendicular a la gráfica de $z = f(x, y)$.

9. Si f es diferenciable y $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$, entonces la gráfica de $z = f(x, y)$ tiene un plano tangente horizontal en (a, b).

10. Si $\nabla f(\mathbf{p}_0) = \mathbf{0}$, entonces f tiene un valor extremo en $\mathbf{p}_0$.

11. Si $T = e^y$ sen x da la temperatura en un punto (x, y) en el plano, entonces un objeto que busca el calor se moverá alejándose del origen en la dirección $\mathbf{i}$.

12. La función $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^4}$ tiene un valor mínimo global en el origen.

13. La función $f(x, y) = \sqrt[3]{x + y^4}$ no tiene un valor mínimo global ni un valor máximo global.

14. Si $f(x, y) = 4x + 4y$, entonces $|D_{\mathbf{u}} f(x, y)| \le 4$.

15. Si $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ existe, entonces $D_{-\mathbf{u}} f(x, y) = -D_{\mathbf{u}} f(x, y)$.

16. El conjunto $\{(x, y) \colon y = x, 0 \le x \le 1\}$ es un conjunto cerrado en el plano.

17. Si $f(x, y)$ es continua en un conjunto cerrado y acotado S, entonces f alcanza un valor máximo en S.

18. Si $f(x, y)$ alcanza su valor máximo en un punto interior (x_0, y_0) de S, entonces $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$.

19. La función $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy)$ no alcanza un valor máximo en el conjunto $\{(x, y) \colon x^2 + y^2 < 4\}$.

20. Si $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$ existen, entonces f es diferenciable en (x_0, y_0).

Problemas de examen muestra

1. Determine y bosqueje el dominio de cada función de dos variables dada, mostrando claramente los puntos de la frontera del dominio que pertenecen a éste.

(a) $z = \sqrt{x^2 + 4y^2 - 100}$ (b) $z = -\sqrt{2x - y - 1}$

2. Bosqueje las curvas de nivel de $f(x, y) = (x + y^2)$ para $k = 0, 1, 2, 4$.

En los problemas del 3 al 6 determine $\partial f/\partial x$, $\partial^2 f/\partial x^2$ y $\partial^2 f/\partial y \partial x$.

3. $f(x, y) = 3x^4y^2 + 7x^2y^7$ **4.** $f(x, y) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 y$

5. $f(x, y) = e^{-y} \tan x$ **6.** $f(x, y) = e^{-x} \operatorname{sen} y$

7. Si $F(x, y) = 5x^3y^6 - xy^7$, determine $\partial^3 F(x, y)/\partial x \partial y^2$.

8. Si f es la función de tres variables definida por $f(x, y, z) = xy^3 - 5x^2yz^4$, determine $f_x(2, -1, 1)$, $f_y(2, -1, 1)$ y $f_z(2, -1, 1)$.

9. Determine la pendiente de la tangente a la curva de intersección de la superficie $z = x^2 + y^2/4$ y el plano $x = 2$ en el punto $(2, 2, 5)$.

10. ¿Para cuáles puntos es continua la función $f(x, y) = xy/(x^2 - y)$?

11. ¿Existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x - y}{x + y}$? Explique.

12. En cada caso, determine el límite indicado o indique que tal límite no existe.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2 - 2y}{x^2 + 2y}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2 + 2y}{x^2 - 2y}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - 4y^4}{x^2 + 2y^2}$

13. Determine $\nabla f(1, 2, -1)$.

(a) $f(x, y, z) = x^2yz^3$ (b) $f(x, y, z) = y^2 \operatorname{sen} xz$

14. Determine la derivada direccional de $f(x, y) = \tan^{-1}(3xy)$. ¿Cuál es su valor en el punto $(4, 2)$ en la dirección $\mathbf{u} = \left(\sqrt{3}/2\right)\mathbf{i} - (1/2)\mathbf{j}$?

15. Determine la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección del plano vertical $x - \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} - 1 = 0$ y la superficie $z = x^2 + y^2$ en el punto $(1, 2, 5)$.

16. ¿En qué dirección crece $f(x, y) = 9x^4 + 4y^2$ más rápidamente en $(1, 2)$?

17. Para $f(x, y) = x^2/2 + y^2$

(a) determine la ecuación de su curva de nivel que pasa por el punto $(4, 1)$ en su dominio;

(b) determine el vector gradiente ∇f en $(4, 1)$;

(c) trace la curva de nivel y dibuje el vector gradiente con su punto inicial en $(4, 1)$.

18. Si $F(u, v) = \tan^{-1}(uv)$, $u = \sqrt{xy}$ y $v = \sqrt{x} - \sqrt{y}$, determine $\partial F/\partial x$ y $\partial F/\partial y$ en términos de u, v, x y y.

19. Si $f(u, v) = u/v$, $u = x^2 - 3y + 4z$ y $v = xyz$, determine f_x, f_y, y f_z en términos de x, y y z.

20. Si $F(x, y) = x^3 - xy^2 - y^4$, $x = 2 \cos 3t$ y $y = 3$ sen t, determine dF/dt en $t = 0$.

21. Si $F(x, y, z) = (5x^2y/z^3)$, $x = t^{3/2} + 2$, $y = \ln 4t$ y $z = e^{3t}$, determine dF/dt en términos de x, y, z y t.

22. Un triángulo tiene vértices A, B y C. La longitud del lado $c = AB$ está aumentando a razón de 3 pulgadas/segundo, el lado $b = AC$ decrece una pulgada/segundo, y el ángulo entre ellos, α, está creciendo a 0.1 radián/segundo. Si $c = 10$ pulgadas y $b = 8$ pulgadas cuando $\alpha = \pi/6$, ¿qué tan rápido está cambiando el área?

23. Determine el vector gradiente de $F(x, y, z) = 9x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 34$ en el punto $P(1, 2, -1)$. Escriba la ecuación del plano tangente a la superficie $F(x, y, z) = 0$ en el punto dado.

24. Un cilindro circular recto tiene un radio de 10 ± 0.02 pulgadas y una altura de 6 ± 0.01 pulgadas. Calcule su volumen y use diferenciales para dar una estimación del error posible.

25. Si $f(x, y, z) = xy^2/(1 + z^2)$, use diferenciales para estimar $f(1.01, 1.98, 2.03)$.

26. Determine los extremos de $f(x, y) = x^2y - 6y^2 - 3x^2$.

27. Una caja rectangular cuyos lados son paralelos a los ejes de coordenadas se inscribe en el elipsoide $36x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$. ¿Cuál es el mayor volumen posible para tal caja?

28. Use multiplicadores de Lagrange para determinar el máximo y el mínimo de $f(x, y) = xy$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 1$.

29. Use multiplicadores de Lagrange para determinar las dimensiones del cilindro circular recto con volumen máximo, si el área de su superficie es 24π.

PROBLEMAS DE REPASO E INTRODUCCIÓN

En los problemas del 1 al 6 bosqueje la gráfica de la función dada.

1. $f(x, y) = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$

2. $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$

3. $f(x, y) = x^2 + 4y^2$

4. $f(x, y) = x^2 - y^2$

5. $f(x, y) = x^2$

6. $f(x, y) = \sqrt{9 - y^2}$

En los problemas del 7 al 14 bosqueje la gráfica de la ecuación dada en coordenadas cilíndricas o esféricas.

7. $r = 2$

8. $\rho = 2$

9. $\phi = \pi/4$

10. $\theta = \pi/4$

11. $r^2 + z^2 = 9$

12. $r = \cos\theta$

13. $r = 2 \operatorname{sen}\theta$

14. $z = 9 - r^2$

Evalúe las integrales en los problemas del 15 al 26.

15. $\displaystyle\int e^{-2x}\, dx$

16. $\displaystyle\int xe^{-2x}\, dx$

17. $\displaystyle\int_{-a/2}^{a/2} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx$

18. $\displaystyle\int_0^2 (a + bx + c^2x^2)\, dx$

19. $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx$

20. $\displaystyle\int_{1/4}^{3/4} \frac{1}{1 - x^2}\, dx$

21. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1 + x^2}\, dx$

22. $\displaystyle\int_0^4 \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\, dx$

23. $\displaystyle\int_0^3 r\sqrt{4r^2 + 1}\, dr$

24. $\displaystyle\int_0^{a/2} \frac{a\, r}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, dr$

25. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta$

26. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta$

27. Sin utilizar el segundo teorema fundamental del cálculo, evalúe

$$\int_0^{2\pi} \left[\sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{a^2 - c^2}\right] d\theta$$

28. Determine el área de la parte del plano $x + y + z = 1$ que está en el primer octante.

En los problemas del 29 al 34 determine el volumen del sólido que se indica en el espacio tridimensional; utilice las propiedades básicas de geometría o los métodos del capítulo 5.

29. El sólido acotado por arriba por $z = \sqrt{9 - y^2}$, por abajo por el plano xy y lateralmente por los planos $x = 0$ y $x = 8$.

30. El sólido en el espacio tridimensional que consiste en los puntos cuyas coordenadas esféricas satisfacen $\rho \leq 7$.

31. El sólido obtenido cuando la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq \pi$, se hace girar alrededor del eje x.

32. El sólido en el espacio tridimensional que consiste en los puntos cuyas coordenadas cilíndricas satisfacen $r \leq 7$ y $0 \leq z \leq 100$.

33. El sólido en el espacio tridimensional, acotado por arriba por $z = 9 - x^2 - y^2$ y por abajo por el plano xy. *Sugerencia:* interprete éste como un sólido de revolución.

34. El sólido en el espacio tridimensional que consiste en los puntos cuyas coordenadas esféricas satisfacen $1 \leq \rho \leq 4$ y $0 \leq \phi \leq \pi/2$.

CAPÍTULO 13 Integrales múltiples

13.1 Integrales dobles sobre rectángulos

13.2 Integrales iteradas

13.3 Integrales dobles sobre regiones no rectangulares

13.4 Integrales dobles en coordenadas polares

13.5 Aplicaciones de las integrales dobles

13.6 Área de una superficie

13.7 Integrales triples en coordenadas cartesianas

13.8 Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas

13.9 Cambio de variable en integrales múltiples

13.10 Repaso del capítulo

13.1

Integrales dobles sobre rectángulos

La derivación y la integración son los procesos fundamentales del cálculo. Hemos estudiado la derivación en espacios de dos y tres dimensiones (capítulo 12); es tiempo de considerar la integración en espacios de dos y tres dimensiones. Se generalizarán la teoría y las aplicaciones de las integrales sencillas (de Riemann) a las integrales múltiples. En el capítulo 5 usamos las integrales sencillas para calcular el área de regiones planas curvas, a fin de determinar la longitud de curvas planas y el centro de masa de alambres rectos con densidad variable. En este capítulo usaremos las integrales múltiples para calcular el volumen de sólidos generales, el área de superficies generales y el centro de masa de láminas y sólidos de densidad variable.

La relación íntima entre la integración y la derivación fue formulada en los teoremas fundamentales del cálculo; éstos proporcionan las principales herramientas teóricas para evaluar integrales sencillas. Aquí reducimos la integración múltiple a una serie de integraciones sencillas donde, otra vez, el segundo teorema fundamental desempeñará un papel central. Comprobaremos las habilidades de integración que aprendió en los capítulos del 4 al 7.

La integral de Riemann para una función de una variable fue definida en la sección 4.2, una sección que vale la pena revisar. Recuerde que formamos una partición P del intervalo $[a, b]$ en subintervalos de longitud Δx_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, elegimos un punto muestra $\overline{x}_k$ del k-ésimo subintervalo, y luego escribimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\,\Delta x_k$$

Procedemos de una manera muy similar para definir la integral para una función de dos variables.

Sea R un rectángulo con lados paralelos a los ejes de coordenadas; es decir, sea

$$R = \{(x, y): a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

Formamos una partición P de R por medio de rectas paralelas a los ejes x y y, como en la figura 1. Esto divide a R en subrectángulos, digamos n, que denotamos por R_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Sean Δx_k y Δy_k las longitudes de los lados de R_k y sea $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$ su área. En R_k, elija un punto muestra $(\overline{x}_k, \overline{y}_k)$ y forme la suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k, \overline{y}_k)\,\Delta A_k$$

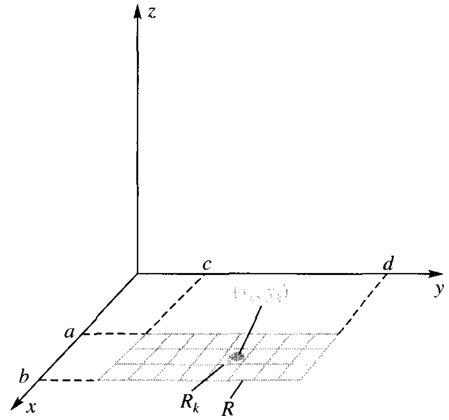


Figura 1

que corresponde (si $f(x, y) \geq 0$) a la suma de los volúmenes de n cajas (figuras 2 y 3). Al hacer la partición cada vez más fina, de modo que todos los R_k sean más pequeños, tendremos el concepto deseado.

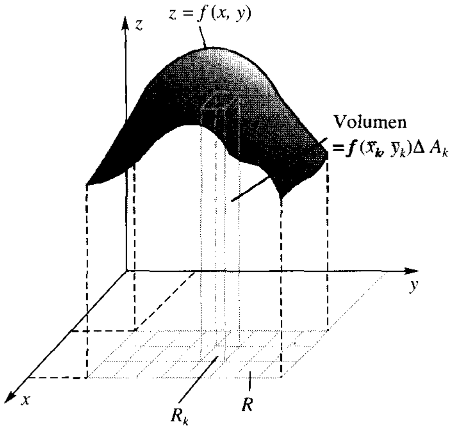


Figura 2

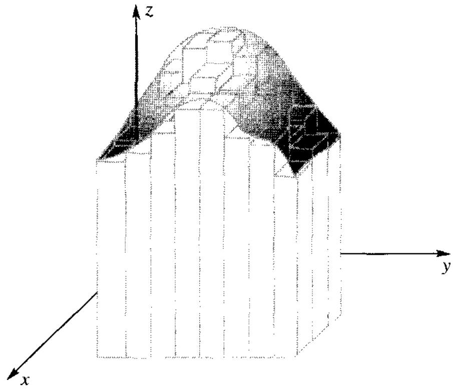


Figura 3

Estamos listos para una definición formal. Usamos la notación introducida antes, agregando que la norma de la partición P, denotada mediante $\|P\|$, es la longitud de la mayor diagonal de cualquier subrectángulo en la partición

Definición La integral doble

Sea f una función de dos variables, definida en un rectángulo cerrado R. Si

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\, \Delta A_k$$

existe, decimos que f es integrable en R. Además, $\iint_R f(x, y)\, dA$, llamada la **integral doble** de f en R, está dada entonces por

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\, \Delta A_k$$

Esta definición de la integral doble contiene el límite cuando $\|P\| \to 0$. Éste no es un límite en el sentido del capítulo 1, de modo que debemos aclarar lo que realmente significa. Decimos que $\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\, \Delta A_k = L$, si para toda $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$, tal que para cada partición P del rectángulo R mediante rectas paralelas a los ejes x y y que satisfaga $\|P\| < \delta$ y para cualquier elección de los puntos muestra $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ en el rectángulo k, tenemos $\left| \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\, \Delta A_k - L \right| < \varepsilon$.

Recuerde que si $f(x) \geq 0$, $\int_a^b f(x)\, dx$ representa el área de la región bajo la curva $y = f(x)$ entre a y b. De una manera análoga, si $f(x, y) \geq 0$, $\iint_R f(x, y)\, dA$ representa el **volumen** del sólido bajo la superficie $z = f(x, y)$ y sobre el rectángulo R (figura 4). De hecho, consideramos esta integral como la definición del volumen de tal sólido.

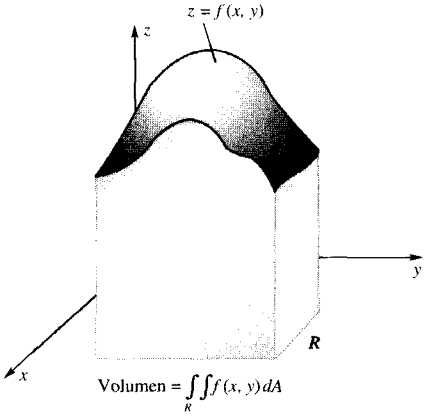


Figura 4

La cuestión de la existencia No toda función de dos variables es integrable en un rectángulo dado R. Las razones son las mismas que en el caso de una variable (sección 4.2). En particular, una función que no esté acotada en R no es integrable. Por fortuna, hay una generalización natural del teorema 4.2A, aunque su demostración está más allá del nivel de un primer curso.

Teorema A **Teorema de integrabilidad**

Si f está acotada en el rectángulo cerrado R y si es continua allí, excepto en un número finito de curvas suaves, entonces f es integrable en R. En particular, si f es continua en todo R, entonces f es integrable.

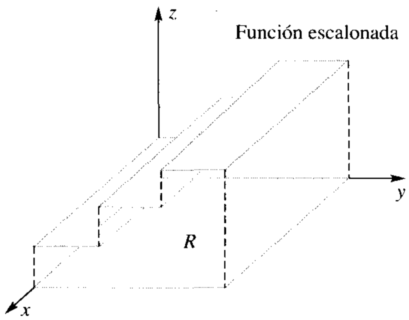


Figura 5

En consecuencia, la mayor parte de las funciones comunes (siempre que estén acotadas) son integrables en cada rectángulo. Por ejemplo,

$$f(x, y) = e^{\operatorname{sen}(xy)} - y^3 \cos(x^2 y)$$

es integrable en cada rectángulo. Por otro lado,

$$g(x, y) = \frac{x^2 y - 2x}{y - x^2}$$

dejaría de ser integrable en cualquier rectángulo que corte a la parábola $y = x^2$. La función *escalonada* de la figura 5 es integrable en R porque sus discontinuidades ocurren a lo largo de dos segmentos de recta.

Propiedades de la integral doble La integral doble hereda la mayoría de las propiedades de la integral sencilla.

1. La integral doble es lineal; es decir,

   a. $$\iint_R kf(x, y)\, dA = k \iint_R f(x, y)\, dA;$$

   b. $$\iint_R [f(x, y) + g(x, y)]\, dA = \iint_R f(x, y)\, dA + \iint_R g(x, y)\, dA.$$

2. La integral doble es aditiva en rectángulos (figura 6) que se traslapan sólo en un segmento de recta.

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_{R_1} f(x, y)\, dA + \iint_{R_2} f(x, y)\, dA$$

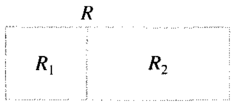


Figura 6

3. Se cumple la propiedad de comparación. Si $f(x, y) \le g(x, y)$ para todo (x, y) en R, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA \le \iint_R g(x, y)\, dA$$

Todas estas propiedades se cumplen en conjuntos más generales que los rectángulos, pero esto lo estudiaremos en la sección 13.3.

Evaluación de integrales dobles Este tema recibirá más atención en la siguiente sección, donde desarrollaremos una poderosa herramienta para evaluar integrales dobles. Sin embargo, ya podemos evaluar unas cuantas integrales y podemos aproximar otras.

Observe primero que si $f(x, y) = 1$ en R, entonces la integral doble es el área de R, y de esto se sigue que

$$\iint_R k\, dA = k \iint_R 1\, dA = kA(R)$$

EJEMPLO 1 Sea f la función escalonada de la figura 5; es decir, sea

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 1 \\ 2, & \text{si } 0 \le x \le 3, 1 < y \le 2 \\ 3, & \text{si } 0 \le x \le 3, 2 < y \le 3 \end{cases}$$

Calcule $\iint_R f(x, y)\, dA$, donde $R = \{(x, y): 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 3\}$.

SOLUCIÓN Introducimos los rectángulos R_1, R_2 y R_3 como sigue:

$$R_1 = \{(x, y): 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 1\}$$
$$R_2 = \{(x, y): 0 \le x \le 3, 1 \le y \le 2\}$$
$$R_3 = \{(x, y): 0 \le x \le 3, 2 \le y \le 3\}$$

Luego, al utilizar la propiedad aditiva de la integral doble, obtenemos

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y)\, dA &= \iint_{R_1} f(x, y)\, dA + \iint_{R_2} f(x, y)\, dA + \iint_{R_3} f(x, y)\, dA \\ &= 1A(R_1) + 2A(R_2) + 3A(R_3) \\ &= 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 18 \end{aligned}$$

En esta deducción también usamos el hecho de que el valor de f en la frontera de un rectángulo no afecta el valor de la integral. ■

El ejemplo 1 fue un éxito menor y, para ser honestos, no podemos hacer mucho sin más herramientas. No obstante, siempre podemos aproximar una integral doble calculando una suma de Riemann. En general, podemos esperar que la aproximación sea mejor si usamos una partición cada vez más fina.

EJEMPLO 2 Aproxime $\iint_R f(x, y)\, dA$, donde

$$f(x, y) = \frac{64 - 8x + y^2}{16}$$

y

$$R = \{(x, y): 0 \le x \le 4, 0 \le y \le 8\}$$

Haga esto calculando la suma de Riemann obtenida, dividiendo R en ocho cuadrados iguales y usando el centro de cada cuadrado como el punto muestra (figura 7).

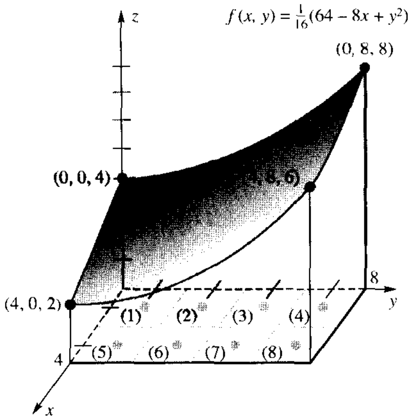


Figura 7

SOLUCIÓN Los valores de la función, en los puntos muestra requeridos, son como sigue

(1) $f(x_1, y_1) = f(1, 1) = \frac{57}{16}$; (5) $f(x_5, y_5) = f(3, 1) = \frac{41}{16}$

(2) $f(x_2, y_2) = f(1, 3) = \frac{65}{16}$; (6) $f(x_6, y_6) = f(3, 3) = \frac{49}{16}$

(3) $f(x_3, y_3) = f(1, 5) = \frac{81}{16}$; (7) $f(x_7, y_7) = f(3, 5) = \frac{65}{16}$

(4) $f(x_4, y_4) = f(1, 7) = \frac{105}{16}$; (8) $f(x_8, y_8) = f(3, 7) = \frac{89}{16}$

Por lo tanto, ya que $\Delta A_k = 4$,

$$\begin{aligned}\iint_R f(x,y)\,dA &\approx \sum_{k=1}^{8} f(\bar{x}_k,\bar{y}_k)\,\Delta A_k\\ &= 4\sum_{k=1}^{8} f(\bar{x}_k,\bar{y}_k)\\ &= \frac{4(57+65+81+105+41+49+65+89)}{16} = 138\end{aligned}$$

En la sección 13.2 aprenderemos cómo determinar el valor exacto de esta integral. Su valor es $138\frac{2}{3}$. ■

Revisión de conceptos

1. Suponga que el rectángulo R ha sido dividido en n subrectángulos de área ΔA_k con puntos muestra $(\bar{x}_k,\bar{y}_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Entonces $\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{\|P\|\to 0}$ _____.

2. Si $f(x,y) \ge 0$ en R, entonces $\iint_R f(x,y)\,dA$ puede interpretarse de forma geométrica como_____.

3. Si f es _____ en R, entonces f es integrable allí.

4. Si $f(x,y) = 6$ en el rectángulo $R = \{(x,y): 1 \le x \le 2, 0 \le y \le 2\}$, entonces $\iint_R f(x,y)\,dA$ tiene el valor _____.

Conjunto de problemas 13.1

En los problemas del 1 al 4, sea $R = \{(x,y): 1 \le x \le 4, 0 \le y \le 2\}$. *Evalúe* $\iint_R f(x,y)\,dA$, *donde f es la función dada (véase el ejemplo 1).*

1. $f(x,y) = \begin{cases} 2 & 1 \le x < 3, 0 \le y \le 2\\ 3 & 3 \le x \le 4, 0 \le y \le 2\end{cases}$

2. $f(x,y) = \begin{cases} -1 & 1 \le x \le 4, 0 \le y < 1\\ 2 & 1 \le x \le 4, 1 \le y \le 2\end{cases}$

3. $f(x,y) = \begin{cases} 2 & 1 \le x < 3, 0 \le y < 1\\ 1 & 1 \le x < 3, 1 \le y \le 2\\ 3 & 3 \le x \le 4, 0 \le y \le 2\end{cases}$

4. $f(x,y) = \begin{cases} 2 & 1 \le x \le 4, 0 \le y < 1\\ 3 & 1 \le x < 3, 1 \le y \le 2\\ 1 & 3 \le x \le 4, 1 \le y \le 2\end{cases}$

Suponga que $R = \{(x,y): 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2\}$, $R_1 = \{(x,y): 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}$ *y* $R_2 = \{(x,y): 0 \le x \le 2, 1 \le y \le 2\}$. *Además, suponga que* $\iint_R f(x,y)\,dA = 3$, $\iint_R g(x,y)\,dA = 5$ *y* $\iint_{R_1} g(x,y)\,dA = 2$.

Utilice las propiedades de las integrales para evaluar las integrales en los problemas del 5 al 8.

5. $\iint_R [3f(x,y) - g(x,y)]\,dA$

6. $\iint_R [2f(x,y) + 5g(x,y)]\,dA$

7. $\iint_{R_2} g(x,y)\,dA$

8. $\iint_{R_1} [2g(x,y) + 3]\,dA$

En los problemas del 9 al 14, $R = \{(x,y): 0 \le x \le 6, 0 \le y \le 4\}$ *y P es la partición de R en seis cuadrados iguales mediante las rectas* $x = 2$, $x = 4$ *y* $y = 2$. *Aproxime* $\iint_R f(x,y)\,dA$ *mediante el cálculo de la suma de Riemann correspondiente* $\sum_{k=1}^{6} f(\bar{x}_k,\bar{y}_k)\,\Delta A_k$, *suponiendo que* $(\bar{x}_k,\bar{y}_k)$ *son los centros de los seis cuadrados (véase el ejemplo 2).*

9. $f(x,y) = 12 - x - y$

10. $f(x,y) = 10 - y^2$

11. $f(x,y) = x^2 + 2y^2$

12. $f(x,y) = \frac{1}{6}(48 - 4x - 3y)$

C **13.** $f(x,y) = \sqrt{x+y}$

C **14.** $f(x,y) = e^{xy}$

En los problemas del 15 al 20 haga un bosquejo del sólido cuyo volumen está dado mediante las siguientes integrales dobles sobre el rectángulo $R = \{(x,y): 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 3\}$.

15. $\iint_R 3\,dA$

16. $\iint_R (x+1)\,dA$

17. $\iint_R (y+1)\,dA$

18. $\iint_R (x - y + 4)\,dA$

19. $\iint_R (x^2 + y^2)\,dA$

20. $\iint_R (25 - x^2 - y^2)\,dA$

21. Calcule $\iint_R (6 - y)\,dA$, en donde $R = \{(x,y): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$. *Sugerencia:* esta integral representa el volumen de cierto sólido. Bosqueje el sólido y calcule su volumen mediante principios elementales.

22. Calcule $\iint\limits_R (1 + x)\, dA$, en donde $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 2,$ $0 \leq y \leq 1\}$. Véase la sugerencia en el problema 21.

23. Utilice la propiedad de comparación de las integrales dobles para demostrar que si $f(x, y) \geq 0$ en R, entonces $\iint\limits_R f(x, y)\, dA \geq 0$.

24. Suponga que $m \leq f(x, y) \leq M$ en R. Demuestre que

$$mA(R) \leq \iint\limits_R f(x, y)\, dA \leq MA(R)$$

[C] **25.** Sea R el rectángulo que aparece en la figura 8. Para la partición indicada en 12 cuadrados iguales calcule las sumas de Riemann máxima y mínima para $\iint\limits_R \sqrt{x^2 + y^2}\, dA$ y obtenga con ello números c y C tales que

$$c \leq \iint\limits_R \sqrt{x^2 + y^2}\, dA \leq C$$

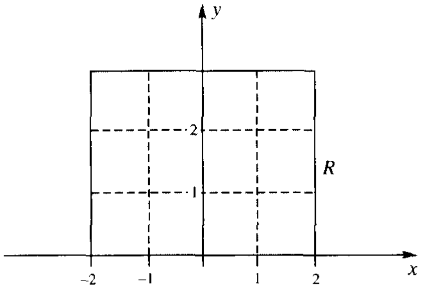


Figura 8

26. Evalúe $\iint\limits_R x \cos^2(xy)\, dA$, donde R es el rectángulo de la figura 8. *Sugerencia:* ¿tiene alguna simetría la gráfica del integrando?

27. Recuerde que $[\![x]\!]$ es la función máximo entero. Para R de la figura 8 evalúe

(a) $\iint\limits_R [\![x]\!][\![y]\!]\, dA$ (b) $\iint\limits_R ([\![x]\!] + [\![y]\!])\, dA$

28. Suponga que el rectángulo de la figura 8 representa una placa delgada (lámina) cuya densidad de masa en (x, y) es $\delta(x, y)$, digamos en gramos/centímetro cuadrado. ¿Qué representa $\iint\limits_R \delta(x, y)\, dA$?

29. Colorado es un estado rectangular (si ignoramos la curvatura de la Tierra). Sea $f(x, y)$ el número de pulgadas de agua de lluvia durante 2005 en el punto (x, y) de ese estado. ¿Qué representa $\iint\limits_{\text{Colorado}} f(x, y)\, dA$? ¿Qué representa este número dividido entre el área de Colorado?

30. Sea $f(x, y) = 1$ si x y y son números racionales y $f(x, y) = 0$ en caso contrario. Demuestre que $f(x, y)$ no es integrable en el rectángulo R de la figura 8.

31. Use las dos gráficas de la figura 9 para aproximar

$$\iint\limits_R f(x, y)\, dA; \quad R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$$

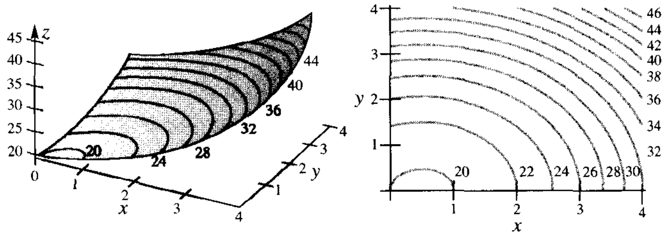


Figura 9

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\, \Delta A_k$ **2.** el volumen del sólido bajo $z = f(x, y)$ y sobre R **3.** continua **4.** 12

13.2 Integrales iteradas

Ahora enfrentaremos seriamente el problema de evaluar $\iint\limits_R f(x, y)\, dA$, donde R es el rectángulo

$$R = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

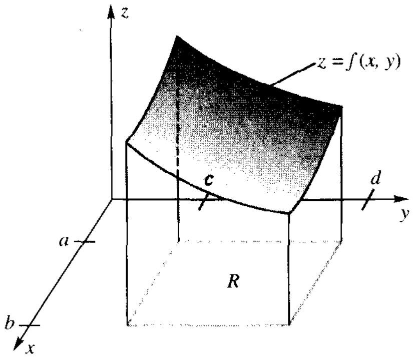


Figura 1

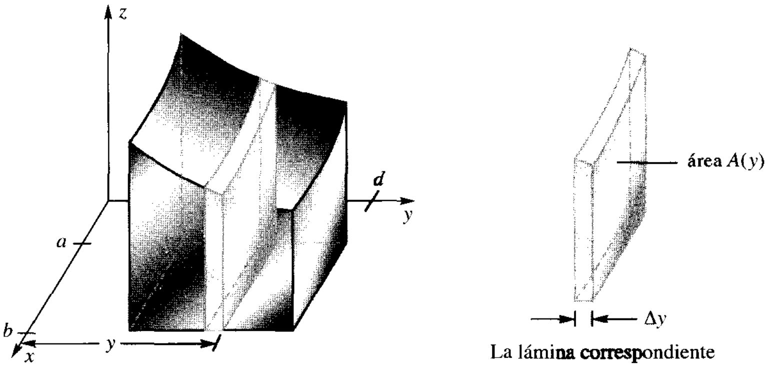
Por el momento, suponga $f(x, y) \geq 0$ en R de modo que podemos interpretar la integral doble como el volumen V del sólido bajo la superficie de la figura 1.

$$(1) \qquad V = \iint\limits_R f(x, y)\, dA$$

Hay otra forma de calcular el volumen de este sólido, que al menos intuitivamente parece igual de válida. Rebanamos el sólido en láminas delgadas mediante planos paralelos al plano xz. Una de estas láminas aparece en la figura 2a. El área de la cara de esta lámina depende de su distancia al plano xz; es decir, depende de y. Por lo tanto, denotamos esta área por $A(y)$ (véase la figura 2b).

El volumen ΔV de la lámina está dado aproximadamente por

$$\Delta V \approx A(y)\, \Delta y$$



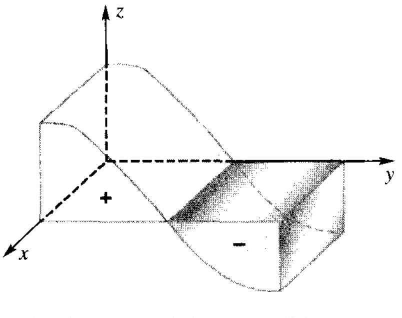
Rebanar mediante planos y = constante
(a)

La lámina correspondiente
de volumen $\approx A(y)\,\Delta y$
(b)

Figura 2

¿Qué ocurre si f es negativa?

Si $f(x, y)$ es negativa en una parte de R, entonces $\iint\limits_R f(x, y)\, dA$ proporciona el volumen con *signo* del sólido entre la superficie $z = f(x, y)$ y el rectángulo R del plano xy.



El volumen real de este sólido es

$$\iint\limits_R |f(x, y)|\, dA$$

y, recordando nuestro antiguo lema (*rebanar*, *aproximar*, *integrar*), podemos escribir

$$V = \int_c^d A(y)\, dy$$

Por otro lado, para y fijo podemos calcular $A(y)$ por medio de una integral simple; de hecho,

$$A(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

Así, tenemos un sólido cuya área de la sección transversal es $A(y)$. El problema de calcular el volumen de una región, cuyas secciones transversales son conocidas, fue considerado en la sección 5.2. Concluimos que

$$V = \int_c^d A(y)\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy \tag{2}$$

La última expresión se llama una **integral iterada.**

Al igualar las expresiones para V de (1) y (2), obtenemos el resultado que queremos,

$$\boxed{\iint\limits_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy}$$

Si hubiésemos comenzado el proceso anterior rebanando el sólido con planos paralelos al plano yz, habríamos obtenido otra integral iterada, donde las integraciones aparecen en el orden opuesto.

$$\boxed{\iint\limits_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx}$$

Debemos hacer dos comentarios. Primero, aunque hemos deducido los dos resultados de los recuadros suponiendo que f era no negativa, los resultados son válidos en general. En segundo lugar, todo el ejercicio no tendría sentido, a menos que se puedan evaluar las integrales iteradas. Por fortuna, las integrales iteradas suelen ser fáciles de evaluar, como demostramos a continuación.

Evaluación de integrales iteradas

Comenzamos con un ejemplo sencillo

EJEMPLO 1 Evalúe $\int_0^3 \left[\int_1^2 (2x + 3y)\, dx \right] dy$.

SOLUCIÓN En la integración interna, y es constante, por lo que

$$\int_1^2 (2x + 3y)\,dx = \left[x^2 + 3yx\right]_1^2 = 4 + 6y - (1 + 3y) = 3 + 3y$$

En consecuencia,

$$\int_0^3 \left[\int_1^2 (2x + 3y)\,dx\right] dy = \int_0^3 [3 + 3y]\,dy = \left[3y + \frac{3}{2}y^2\right]_0^3$$

$$= 9 + \frac{27}{2} = \frac{45}{2}$$

■

EJEMPLO 2 Evalúe $\int_1^2 \left[\int_0^3 (2x + 3y)\,dy\right] dx$.

SOLUCIÓN Observe que simplemente hemos invertido el orden de integración del ejemplo 1; esperamos tener la misma respuesta que en ese ejemplo

$$\int_0^3 (2x + 3y)\,dy = \left[2xy + \frac{3}{2}y^2\right]_0^3$$

$$= 6x + \frac{27}{2}$$

Por lo tanto,

$$\int_1^2 \left[\int_0^3 (2x + 3y)\,dy\right] dx = \int_1^2 \left[6x + \frac{27}{2}\right] dx = \left[3x^2 + \frac{27}{2}x\right]_1^2$$

$$= 12 + 27 - \left(3 + \frac{27}{2}\right) = \frac{45}{2}$$

A partir de ahora, por lo general omitiremos los corchetes en la integral iterada ■

Una nota sobre la notación

El orden de dx y dy es importante, pues especifica cuál integración debe realizarse primero. La primera integración implica al integrando, el símbolo de integral más cercano a él a la izquierda y el primer símbolo dx o dy a su derecha. A veces nos referiremos a esa integral como la *integral interior* y a su valor como la *integración interna*.

EJEMPLO 3 Evalúe $\int_0^8 \int_0^4 \frac{1}{16}[64 - 8x + y^2]\,dx\,dy$.

SOLUCIÓN Observe que esta integral iterada corresponde a la integral doble del ejemplo 2 de la sección 13.1 para la cual afirmamos la respuesta $138\frac{2}{3}$. Con frecuencia omitiremos la consideración separada de la integral interior; en lugar de eso, trabajaremos de adentro hacia fuera.

$$\int_0^8 \int_0^4 \frac{1}{16}\left[64 - 8x + y^2\right] dx\,dy = \frac{1}{16}\int_0^8 \left[64x - 4x^2 + xy^2\right]_0^4 dy$$

$$= \frac{1}{16}\int_0^8 \left[256 - 64 + 4y^2\right] dy$$

$$= \int_0^8 \left(12 + \frac{1}{4}y^2\right) dy$$

$$= \left[12y + \frac{y^3}{12}\right]_0^8$$

$$= 96 + \frac{512}{12} = 138\frac{2}{3}$$

■

Cálculo de volúmenes Ahora podemos calcular volúmenes para una amplia variedad de sólidos.

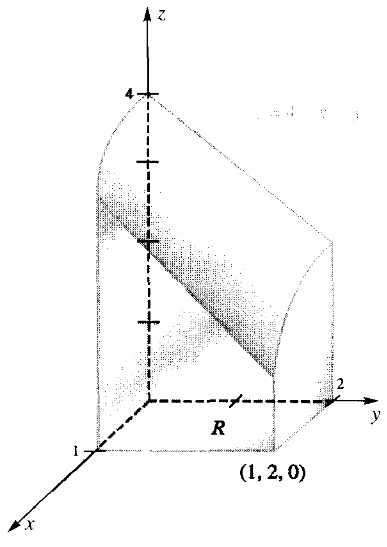


Figura 3

EJEMPLO 4 Determine el volumen V del sólido bajo la superficie $z = 4 - x^2 - y$ y sobre el rectángulo $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ (véase la figura 3).

SOLUCIÓN ≋ Estimaremos este volumen suponiendo que el sólido tiene altura constante 2.5, dando un volumen de (2.5)(2) = 5. Si el siguiente cálculo da una respuesta que no sea cercana a 5, sabremos que hemos cometido un error.

$$V = \iint_R (4 - x^2 - y)\, dA = \int_0^2 \int_0^1 (4 - x^2 - y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^2 \left[4x - \frac{x^3}{3} - yx\right]_0^1 dy = \int_0^2 \left[4 - \frac{1}{3} - y\right] dy$$

$$= \left[\frac{11}{3}y - \frac{1}{2}y^2\right]_0^2 = \frac{22}{3} - 2 = \frac{16}{3} \qquad \blacksquare$$

Revisión de conceptos

1. La expresión $\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy\right] dx$ se denomina integral ____.

2. Sea $R = \{(x, y): -1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\}$. Entonces $\iint_R f(x, y)\, dA$ puede expresarse como una integral iterada, ya sea ______ o como _______.

3. Para una función general f definida sobre R, $\iint_R f(x, y)\, dA$ puede interpretarse como el volumen ________ del sólido entre la superficie $z = f(x, y)$ y el plano xy; la parte por encima de este plano se le da un signo ______; a la parte por debajo, un signo _______.

4. Así, si una integral doble tiene un valor negativo, sabemos que más de la mitad del sólido _________.

Conjunto de problemas 13.2

En los problemas 1 al 16 evalúe cada una de las integrales iteradas.

1. $\int_0^2 \int_0^3 (9 - x)\, dy\, dx$

2. $\int_{-2}^2 \int_0^1 (9 - x^2)\, dy\, dx$

3. $\int_0^2 \int_1^3 x^2 y\, dy\, dx$

4. $\int_{-1}^4 \int_1^2 (x + y^2)\, dy\, dx$

5. $\int_1^2 \int_0^3 (xy + y^2)\, dx\, dy$

6. $\int_{-1}^1 \int_1^2 (x^2 + y^2)\, dx\, dy$

7. $\int_0^{\pi} \int_0^1 x \operatorname{sen} y\, dx\, dy$

8. $\int_0^{\ln 3} \int_0^{\ln 2} e^{x+y}\, dy\, dx$

9. $\int_0^{\pi/2} \int_0^1 x \operatorname{sen} xy\, dy\, dx$

10. $\int_0^1 \int_0^1 x e^{xy}\, dy\, dx$

11. $\int_0^3 \int_0^1 2x\sqrt{x^2 + y}\, dx\, dy$

12. $\int_0^1 \int_0^1 \frac{y}{(xy + 1)^2}\, dx\, dy$

13. $\int_0^{\ln 3} \int_0^1 xy\, e^{xy^2}\, dy\, dx$

14. $\int_0^1 \int_0^2 \frac{y}{1 + x^2}\, dy\, dx$

15. $\int_0^{\pi} \int_0^3 y \cos^2 x\, dy\, dx$

16. $\int_{-1}^1 \int_0^1 x e^{x^2}\, dx\, dy$

En los problemas 17 al 20 evalúe la integral iterada doble en R.

17. $\iint_R xy^3\, dA;\ R = \{(x, y): 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$

18. $\iint_R (x^2 + y^2)\, dA;\ R = \{(x, y): -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\}$

19. $\iint_R \operatorname{sen}(x + y)\, dA;$

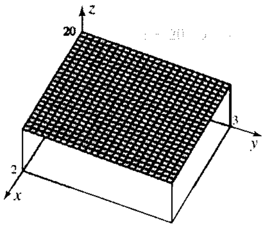
$R = \{(x, y): 0 \le x \le \pi/2, 0 \le y \le \pi/2\}$

20. $\iint_R xy\sqrt{1 + x^2}\, dA;$

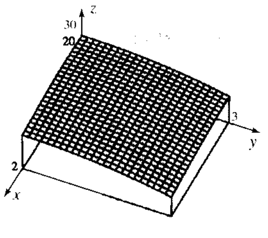
$R = \left\{(x, y): 0 \le x \le \sqrt{3}, 1 \le y \le 2\right\}$

En los problemas del 21 al 24 determine el volumen bajo la superficie en cada figura.

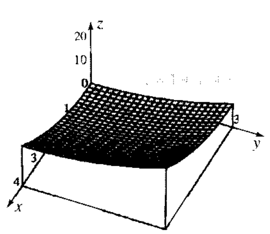
21.



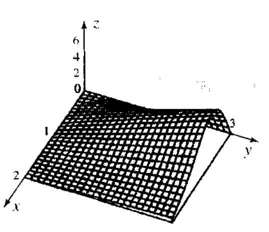
22.



23.



24.



En los problemas del 25 al 28 bosqueje el sólido cuyo volumen se indica en la integral iterada.

25. $\int_0^1 \int_0^2 \frac{x}{2}\, dx\, dy$ **26.** $\int_0^1 \int_0^1 (2 - x - y)\, dy\, dx$

27. $\int_0^2 \int_0^2 (x^2 + y^2)\, dy\, dx$ **28.** $\int_0^2 \int_0^2 (4 - y^2)\, dy\, dx$

≈ *En los problemas del 29 al 32 calcule el volumen del sólido dado. Primero bosqueje el sólido, luego calcule su volumen y después determine su valor exacto.*

29. El sólido bajo el plano $z = x + y + 1$ sobre $R = \{(x, y): 0 \le x \le 1, 1 \le y \le 3\}$

30. El sólido bajo el plano $z = 2x + 3y$ sobre $R = \{(x, y): 1 \le x \le 2, 0 \le y \le 4\}$

31. El sólido entre $z = x^2 + y^2 + 2$ y $z = 1$ y arriba de $R = \{(x, y): -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$

32. El sólido en el primer octante encerrado entre $z = 4 - x^2$ y $y = 2$.

33. Demuestre que si $f(x, y) = g(x)h(y)$ entonces

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \left[\int_a^b g(x)\, dx\right]\left[\int_c^d h(y)\, dy\right]$$

34. Utilice el problema 33 para evaluar

$$\int_0^{\sqrt{\ln 2}} \int_0^1 \frac{xye^{x^2}}{1 + y^2}\, dy\, dx$$

35. Evalúe

$$\int_0^1 \int_0^1 xye^{x^2+y^2}\, dy\, dx$$

36. Calcule el volumen del sólido encerrado entre la superficie $z = \cos x \cos y$ y el plano xy, donde $-\pi \le x \le \pi, -\pi \le y \le \pi$.

En los problemas del 37 al 39 evalúe cada integral iterada.

37. $\int_{-2}^2 \int_{-1}^1 |x^2y^3|\, dy\, dx$ **38.** $\int_{-2}^2 \int_{-1}^1 [\![x^2]\!]y^3\, dy\, dx$

39. $\int_{-2}^2 \int_{-1}^1 [\![x^2]\!]|y^3|\, dy\, dx$

40. Evalúe $\int_0^{\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{8x}{(x^2 + y^2 + 1)^2}\, dy\, dx$. *Sugerencia:* invierta el orden de integración.

41. Demuestre la desigualdad de **Cauchy-Schwarz para integrales**

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\, dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)\, dx \int_a^b g^2(x)\, dx$$

Sugerencia: considere la integral doble de

$$F(x, y) = [f(x)g(y) - f(y)g(x)]^2$$

en el rectángulo $R = \{(x, y): a \le x \le b, a \le y \le b\}$.

42. Suponga que f es creciente en $[a, b]$ y $\int_a^b f(x)\, dx > 0$. Demuestre que

$$\frac{\int_a^b xf(x)\, dx}{\int_a^b f(x)\, dx} > \frac{a + b}{2}$$

y proporcione una interpretación física de este resultado. *Sugerencia:* sea $F(x, y) = [y - x][f(y) - f(x)]$ y utilice la sugerencia del problema 41.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** iterada **2.** $\int_{-1}^{2}\left[\int_0^2 f(x, y)\, dy\right] dx$; $\int_0^2\left[\int_{-1}^2 f(x, y)\, dx\right] dy$ **3.** con signo; más; menos **4.** está debajo del plano xy.

13.3
Integrales dobles sobre regiones no rectangulares

Considere un conjunto cerrado y acotado arbitrario S en el plano. Encerramos S con un rectángulo R cuyos lados son paralelos a los ejes de coordenadas (figura 1). Suponga que $f(x, y)$ está definida en S y definimos (o redefinimos, en caso necesario) $f(x, y) = 0$ en la parte de R que está fuera de S (figura 2). Decimos que f es integrable en S si es integrable en R y escribimos

$$\iint_S f(x, y)\, dA = \iint_R f(x, y)\, dA$$

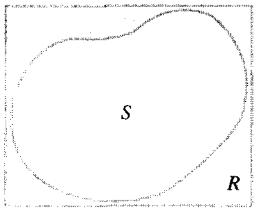


Figura 1

Afirmamos que la integral doble en conjuntos generales S es (1) lineal, (2) aditiva en conjuntos que se traslapan sólo en curvas suaves y (3) satisface la propiedad de comparación (véase la sección 13.1).

Evaluación de integrales dobles en conjuntos generales Los conjuntos con fronteras curvas pueden ser muy complicados. Para nuestros fines, bastará considerar conjuntos x-simples y y-simples (y uniones finitas de tales conjuntos). Un conjunto S es y-simple si es simple en la dirección de y, lo cual significa que una recta en esta dirección corta a S en un solo intervalo (o lo corta en un punto, o bien no lo corta). Así, un conjunto S es **y-simple** (figura 3) si existen funciones ϕ_1 y ϕ_2 en $[a, b]$ tales que

$$S = \{(x, y): \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x), a \le x \le b\}$$

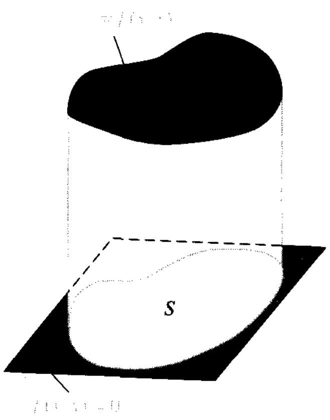


Figura 2

Un conjunto S es **x-simple** (figura 4) si existen funciones ψ_1 (ψ es la letra griega psi) y ψ_2 en $[c, d]$ tales que

$$S = \{(x, y): \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\}$$

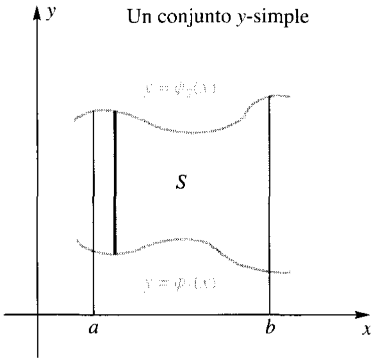

y
Un conjunto y-simple
y = φ₂(x)
S
y = φ₁(x)
a
b
x

Figura 3

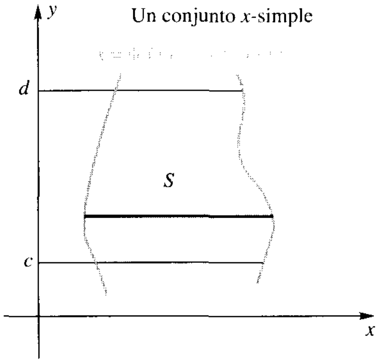

y
Un conjunto x-simple
d
S
c
x

Figura 4

La figura 5 exhibe un conjunto que no es x-simple ni y-simple.

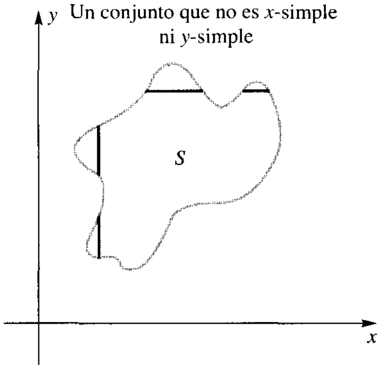

y
Un conjunto que no es x-simple ni y-simple
S
x

Figura 5

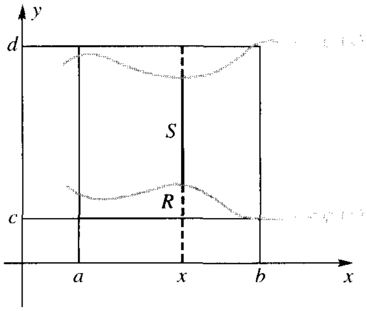


Figura 6

Ahora, suponga que queremos evaluar la integral doble de una función $f(x, y)$ sobre un conjunto y-simple S. Encerramos S en un rectángulo R (figura 6) y hacemos $f(x, y) = 0$ fuera de S. Entonces

$$\iint_S f(x, y)\, dA = \iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx$$

$$= \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx$$

En resumen

$$\boxed{\iint_S f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx}$$

En la integración interior, x se mantiene fijo; así, esta integración se realiza a lo largo de la recta vertical gruesa de la figura 6. Esta integración proporciona el área $A(x)$ de la sección transversal que aparece en la figura 7. Por último, $A(x)$ se integra de a a b.

Si el conjunto S es x-simple (figura 4), un razonamiento similar conduce a la fórmula

$$\boxed{\iint_S f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy}$$

Si el conjunto S no es x-simple ni y-simple (figura 5), por lo general se puede considerar como una unión de piezas que tienen una u otra de esas propiedades. Por ejemplo, el anillo de la figura 8 no es simple en ninguna dirección, pero es la unión de dos conjuntos y-simples S_1 y S_2. Las integrales sobre estas piezas pueden calcularse y sumarse para obtener la integral sobre S.

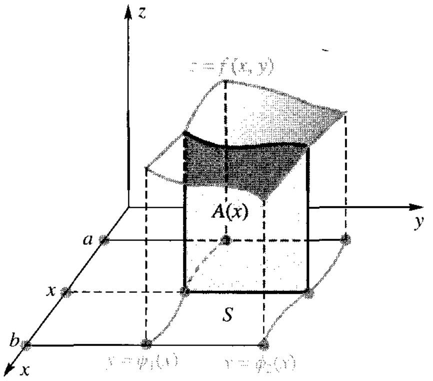


Figura 7

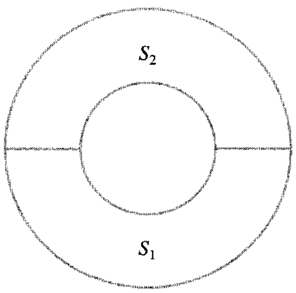


Figura 8

Algunos ejemplos Para tener una ligera visión preliminar, evaluamos dos integrales iteradas, donde los límites de la integral interior son variables.

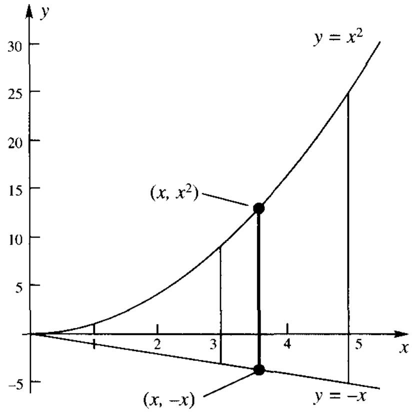


Figura 9

EJEMPLO 1 Evalúe la integral iterada

$$\int_3^5 \int_{-x}^{x^2} (4x + 10y)\, dy\, dx$$

SOLUCIÓN Primero realizamos la integración interior respecto a y pensando temporalmente en x como constante (véase la figura 9), y obtener

$$\begin{aligned}
\int_3^5 \int_{-x}^{x^2} (4x + 10y)\, dy\, dx &= \int_3^5 \left[4xy + 5y^2\right]_{-x}^{x^2} dx \\
&= \int_3^5 \left[(4x^3 + 5x^4) - (-4x^2 + 5x^2)\right] dx \\
&= \int_3^5 (5x^4 + 4x^3 - x^2)\, dx = \left[x^5 + x^4 - \frac{x^3}{3}\right]_3^5 \\
&= \frac{10,180}{3} = 3393\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

■

Observe que para integrales iteradas, la integral exterior no puede tener límites que dependan de otra variable de integración.

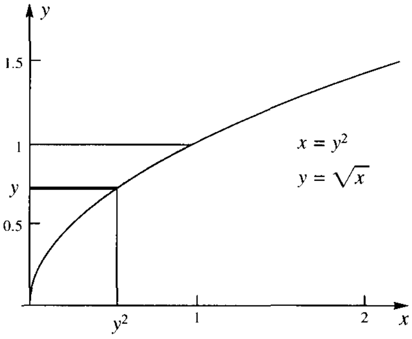


Figura 10

EJEMPLO 2 Evalúe la integral iterada

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} 2ye^x\, dx\, dy$$

SOLUCIÓN La región de integración se muestra en la figura 10.

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^{y^2} 2ye^x\,dx\,dy &= \int_0^1\left[\int_0^{y^2} 2ye^x\,dx\right]dy\\ &= \int_0^1\left[2ye^x\right]_0^{y^2} dy = \int_0^1 (2ye^{y^2} - 2ye^0)\,dy\\ &= \int_0^1 e^{y^2}(2y\,dy) - 2\int_0^1 y\,dy\\ &= \left[e^{y^2}\right]_0^1 - 2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = e - 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right) = e - 2 \qquad ■\end{aligned}$$

Ahora estudiaremos el problema de cálculo de volúmenes por medio de integrales iteradas.

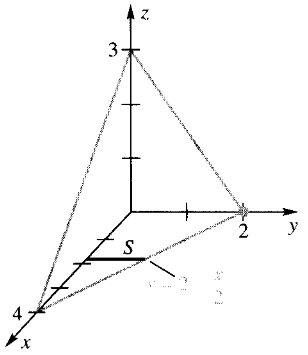


Figura 11

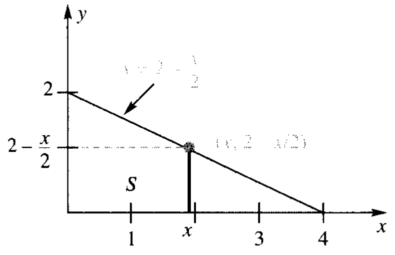


Figura 12

EJEMPLO 3 Use una integración doble para determinar el volumen del tetraedro acotado por los planos de coordenadas y el plano $3x + 6y + 4z - 12 = 0$.

SOLUCIÓN Sea S la región triangular en el plano xy que forma la base del tetraedro (figuras 11 y 12). Buscamos el volumen del sólido bajo la superficie $z = \frac{3}{4}(4 - x - 2y)$ y arriba de la región S.

El plano dado interseca al plano xy en la recta $x + 2y - 4 = 0$, un segmento de ella pertenece a la frontera de S. Como esta ecuación se puede escribir $y = 2 - x/2$ y $x = 4 - 2y$, podemos pensar en S como el conjunto y-simple

$$S = \left\{(x, y): 0 \le x \le 4, 0 \le y \le 2 - \frac{x}{2}\right\}$$

o como el conjunto x-simple

$$S = \{(x, y): 0 \le x \le 4 - 2y, 0 \le y \le 2\}$$

Consideraremos a S como un conjunto y-simple; el resultado final será el mismo de cualquier forma, como usted debe verificar.

El volumen V del sólido es

$$V = \iint_S \frac{3}{4}(4 - x - 2y)\,dA$$

Al escribir esto como una integral iterada, fijamos x e integramos a lo largo de una recta (figuras 11 y 12) de $y = 0$ a $y = 2 - x/2$ y luego integramos el resultado de $x = 0$ a $x = 4$. Así,

$$\begin{aligned}V &= \int_0^4\int_0^{2-x/2}\frac{3}{4}(4 - x - 2y)\,dy\,dx\\ &= \int_0^4\left[\frac{3}{4}\int_0^{2-x/2}(4 - x - 2y)\,dy\right]dx\\ &= \int_0^4 \frac{3}{4}\left[4y - xy - y^2\right]_0^{2-x/2} dx\\ &= \frac{3}{16}\int_0^4 (16 - 8x + x^2)\,dx\\ &= \frac{3}{16}\left[16x - 4x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 4\end{aligned}$$

Tal vez usted recuerde que el volumen de un tetraedro es un tercio del área de la base por la altura. En nuestro caso, $V = \frac{1}{3}(4)(3) = 4$. Esto confirma nuestra respuesta. ■

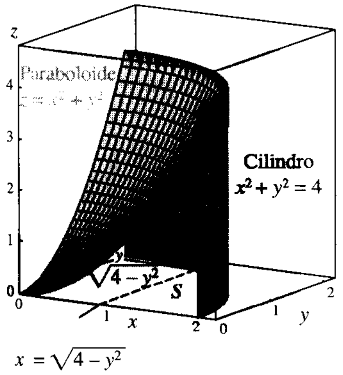


Figura 13

EJEMPLO 4 Calcule el volumen del sólido en el primer octante $\{x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$ acotado por el paraboloide circular $z = x^2 + y^2$, el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos de coordenadas (figura 13).

SOLUCIÓN La región S en el primer cuadrante del plano xy está acotada por un cuarto de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ y las rectas $x = 0$ y $y = 0$. Aunque S puede pensarse como una región y-simple o una región x-simple, consideraremos a S como la segunda y escribimos sus curvas frontera como $x = \sqrt{4 - y^2}$, $x = 0$, $x = 0$ y $y = 0$. Así,

$$S = \left\{(x, y): 0 \le x \le \sqrt{4 - y^2}, 0 \le y \le 2\right\}$$

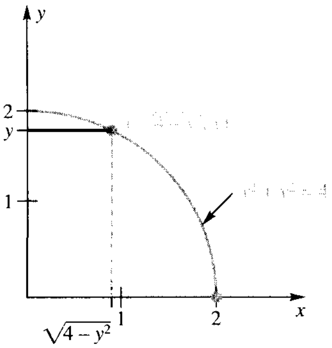


Figura 14

La figura 14 muestra la región S en el plano xy. Ahora queremos calcular

$$V = \iint_S (x^2 + y^2)\, dA$$

mediante una integral iterada. Esta vez fijamos y e integramos a lo largo de una recta (figura 14) desde $x = 0$ hasta $x = \sqrt{4 - y^2}$ y luego integramos el resultado de $y = 0$ a $y = 2$.

$$\begin{aligned} V = \iint_S (x^2 + y^2)\, dA &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2)\, dx\, dy \\ &= \int_0^2 \left[\frac{1}{3}(4 - y^2)^{3/2} + y^2\sqrt{4 - y^2}\right] dy \end{aligned}$$

Mediante la sustitución trigonométrica $y = 2$ sen θ, esta última integral se puede escribir como

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi/2} \left[\frac{8}{3}\cos^3\theta + 8\,\mathrm{sen}^2\,\theta\cos\theta\right] 2\cos\theta\, d\theta \\ &\qquad = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{16}{3}\cos^4\theta + 16\,\mathrm{sen}^2\,\theta\cos^2\theta\right] d\theta \\ &\qquad = \frac{16}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,(1 - \mathrm{sen}^2\,\theta + 3\,\mathrm{sen}^2\,\theta)\, d\theta \\ &\qquad = \frac{16}{3}\int_0^{\pi/2} (\cos^2\theta + 2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\cos^2\theta)\, d\theta \\ &\qquad = \frac{16}{3}\int_0^{\pi/2} \left(\cos^2\theta + \frac{1}{2}\mathrm{sen}^2\,2\theta\right) d\theta \\ &\qquad = \frac{16}{3}\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \frac{1 - \cos 4\theta}{4}\right) d\theta = 2\pi \end{aligned}$$

≈ ¿Es razonable esta respuesta? Observe que el volumen del cuarto de cilindro en la figura 13 es $\frac{1}{4}\pi r^2 h = \frac{1}{4}\pi(2^2)(4) = 4\pi$. La mitad de este número ciertamente es un valor razonable para el volumen requerido. ■

EJEMPLO 5 Mediante un cambio de orden de integración, evalúe

$$\int_0^4 \int_{x/2}^2 e^{y^2}\, dy\, dx$$

SOLUCIÓN La integral interior no se puede evaluar tal cual, pues e^{y^2} no tiene una antiderivada en términos de funciones elementales. Sin embargo, reconocemos que la integral iterada dada es igual a

$$\iint_S e^{y^2}\, dA$$

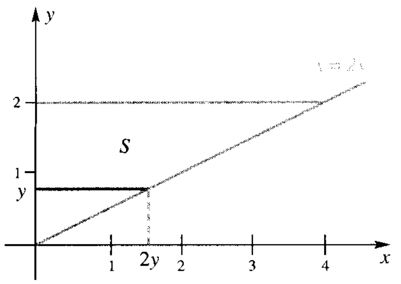


Figura 15

donde $S = \{(x, y): x/2 \le y \le 2, 0 \le x \le 4\} = \{(x, y): 0 \le x \le 2y, 0 \le y \le 2\}$ (véase la figura 15). Si escribimos esta integral doble como una integral iterada realizando primero la integración respecto a x, obtenemos

$$\int_0^2 \int_0^{2y} e^{y^2}\, dx\, dy = \int_0^2 \left[xe^{y^2}\right]_0^{2y} dy$$

$$= \int_0^2 2ye^{y^2}\, dy = \left[e^{y^2}\right]_0^2 = e^4 - 1 \qquad ■$$

Revisión de conceptos

1. Para un conjunto arbitrario S, definimos $\iint_S f(x, y)\, dA$ como $\iint_R f(x, y)\, dA$, donde R es ______ y $f(x, y) =$ ______ fuera del conjunto S.

2. Un conjunto S se denomina y-simple, si existen funciones ϕ_1 y ϕ_2 en $[a, b]$ tales que $S = \{(x, y):$ ______, $a \le x \le b\}$.

3. Si S es un conjunto y-simple, como en la pregunta 2, entonces la integral doble sobre S se puede escribir como la integral iterada $\iint_S f(x, y)\, dA =$ ______.

4. Si S es el triángulo en el primer cuadrante acotado por $x + y = 1$, entonces $\iint_S 2x\, dA$ puede escribirse como la integral iterada ______, que tiene el valor ______.

Conjunto de problemas 13.3

En los problemas del 1 al 14 evalúe las integrales iteradas.

1. $\int_0^1 \int_0^{3x} x^2\, dy\, dx$

2. $\int_1^2 \int_0^{x-1} y\, dy\, dx$

3. $\int_{-1}^3 \int_0^{3y} (x^2 + y^2)\, dx\, dy$

4. $\int_{-3}^1 \int_0^{x} (x^2 - y^3)\, dy\, dx$

5. $\int_1^3 \int_{-y}^{2y} xe^{y^3}\, dx\, dy$

6. $\int_1^5 \int_0^{x} \frac{3}{x^2 + y^2}\, dy\, dx$

7. $\int_{1/2}^1 \int_0^{2x} \cos(\pi x^2)\, dy\, dx$

8. $\int_0^{\pi/4} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}\cos\theta} r\, dr\, d\theta$

9. $\int_0^{\pi/9} \int_{\pi/4}^{3r} \sec^2\theta\, d\theta\, dr$

10. $\int_0^2 \int_{-x}^{x} e^{-x^2}\, dy\, dx$

11. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\operatorname{sen} y} e^x \cos y\, dx\, dy$

12. $\int_1^2 \int_0^{x^2} \frac{y^2}{x}\, dy\, dx$

13. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x + y)\, dy\, dx$

14. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_0^{\operatorname{sen}\theta} 6r \cos\theta\, dr\, d\theta$

En los problemas 15 al 18 evalúe la integral doble dada cambiándola por una integral iterada.

15. $\iint_S xy\, dA$; S es la región acotada por $y = x^2$ y $y = 1$.

16. $\iint_S (x + y)\, dA$; S es la región triangular con vértices $(0, 0)$, $(0, 4)$ y $(1, 4)$.

17. $\iint_S (x^2 + 2y)\, dA$; S es la región entre por $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$.

18. $\iint_S (x^2 - xy)\, dA$; S es la región entre $y = x$ y $y = 3x - x^2$.

19. $\iint_S \frac{2}{1 + x^2}\, dA$; S es la región triangular con vértices en $(0, 0)$, $(2, 2)$ y $(0, 2)$.

20. $\iint_S x\, dA$; S es la región entre $y = x$ y $y = x^3$. (Observe que S tiene dos partes).

▤ *En los problemas 21 al 32 bosqueje el sólido indicado. Luego determine el volumen mediante una integración iterada.*

21. El tetraedro acotado por los planos de coordenadas y el plano $z = 6 - 2x - 3y$.

22. El tetraedro acotado por los planos de coordenadas y el plano $3x + 4y + z - 12 = 0$

23. La cuña acotada por los planos de coordenadas y los planos $x = 5$ y $y + 2z - 4 = 0$

24. El sólido en el primer octante acotado por los planos de coordenadas y los planos $2x + y - 4 = 0$ y $8x + y - 4z = 0$

25. El sólido en el primer octante acotado por la superficie $9x^2 + 4y^2 = 36$ y el plano $9x + 4y - 6z = 0$

26. El sólido en el primer octante acotado por la superficie $z = 9 - x^2 - y^2$ y los planos de coordenadas

27. El sólido en el primer octante acotado por el cilindro $y = x^2$ y los planos $x = 0$, $z = 0$ y $y + z = 1$

28. El sólido acotado por el cilindro parabólico $x^2 = 4y$ y los planos $z = 0$ y $5y + 9z - 45 = 0$

29. El sólido en el primer octante acotado por el cilindro $z = \tan x^2$ y los planos $x = y, x = 1$ y $y = 0$

30. El sólido en el primer octante acotado por la superficie $z = e^{x-y}$, el plano $x + y = 1$ y los planos de coordenadas

31. El sólido en el primer octante acotado por la superficie $9z = 36 - 9x^2 - 4y^2$ y los planos de coordenadas

32. El sólido en el primer octante acotado por los cilindros circulares $x^2 + z^2 = 16, y^2 + z^2 = 16$, y los planos de coordenadas

En los problemas 33 al 38 escriba la integral iterada dada como una integral iterada con el orden de integración intercambiado. Sugerencia: comience por bosquejar una región S y represéntela de dos formas, como en el ejemplo 5.

33. $\int_0^1 \int_0^x f(x, y)\, dy\, dx$ **34.** $\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} f(x, y)\, dx\, dy$

35. $\int_0^1 \int_{x^2}^{x^{1/4}} f(x, y)\, dy\, dx$ **36.** $\int_{1/2}^1 \int_{x^3}^{x} f(x, y)\, dy\, dx$

37. $\int_0^1 \int_{-y}^{y} f(x, y)\, dx\, dy$ **38.** $\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} f(x, y)\, dx\, dy$

39. Evalúe $\iint_S xy^2\, dA$, donde S es la región mostrada en la figura 16.

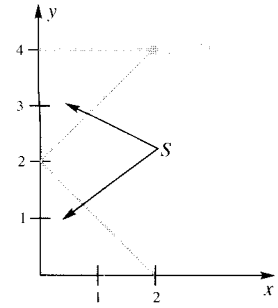


Figura 16

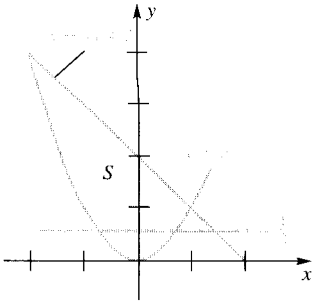


Figura 17

40. Evalúe $\iint_S xy\, dA$, donde S es la región de la figura 17.

41. Evalúe $\iint_S (x^2 + x^4 y)\, dA$, donde $S = \{(x, y): 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$. *Sugerencia:* utilice simetría para reducir el problema a la evaluación de $4\left[\iint_{S_1} x^2\, dA + \iint_{S_2} x^2\, dA\right]$, donde S_1 y S_2 son como en la figura 18.

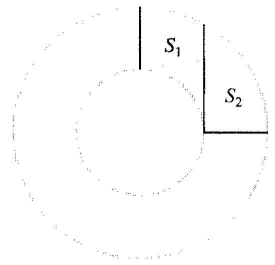


Figura 18

42. Evalúe $\iint_S \operatorname{sen}(xy^2)\, dA$, donde S es el anillo $\{(x, y): 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$. *Sugerencia:* resuelva el problema sin analizarlo, es difícil; mediante simetría es trivial.

43. Evalúe $\iint_S \operatorname{sen}(y^3)\, dA$, donde S es la región acotada por $y = \sqrt{x}$, $y = 2$ y $x = 0$. *Sugerencia:* si un orden de integración no funciona, intente con el otro.

44. Evalúe $\iint_S x^2\, dA$, donde S es la región entre la elipse $x^2 + 2y^2 = 4$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.

45. La figura 19 muestra un mapa de contornos para la profundidad de un río entre una presa y un puente. Aproxime el volumen de agua entre la presa y el puente. *Sugerencia:* rebane el río en 11 secciones de 100 pies paralelas al puente y suponga que las secciones transversales son triángulos isósceles. El río tiene aproximadamente 300 pies de ancho en la presa y 175 pies de ancho en el puente.

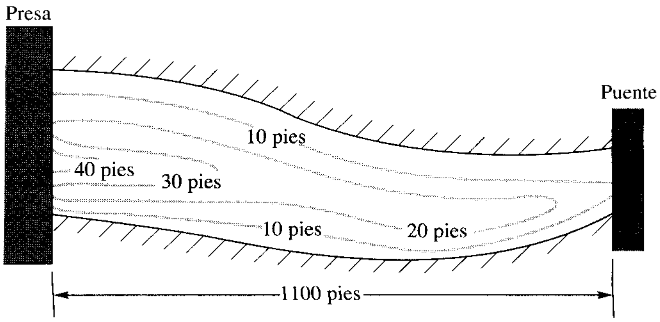


Figura 19

46. Suponga que $f(x, y)$ es una función continua definida en una región R que es cerrada y acotada. Demuestre que existe un par ordenado (a, b) en R tal que

$$\iint_R f(x, y)\, dA = f(a, b)\, A(R)$$

Este resultado se conoce como el **teorema del valor medio para integrales dobles.** *Sugerencia:* necesitará el teorema del valor intermedio (teorema 1.6F).

Respuestas a la revisión de conceptos:

1. un rectángulo que contiene a S; 0 **2.** $\phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)$

3. $\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$ **4.** $\int_0^1 \int_0^{1-x} 2x\, dy\, dx; \frac{1}{3}$

13.4
Integrales dobles en coordenadas polares

Ciertas curvas en el plano, como las circunferencias, las cardioides y las rosas, son más fáciles de describir en términos de coordenadas polares que en coordenadas cartesianas (rectangulares). Así, es de esperar que las integrales dobles sobre regiones comprendidas entre tales curvas se evalúen más fácilmente mediante coordenadas polares. En la sección 13.9 veremos cómo hacer transformaciones más generales. Por ahora, estudiamos con mayor detalle sólo una transformación particular, de coordenadas rectangulares a coordenadas polares, ya que esta técnica es útil.

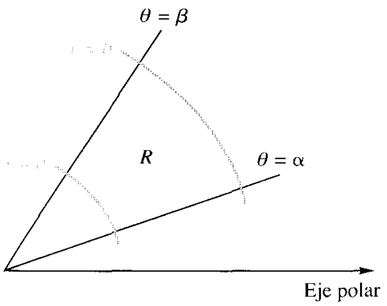


Figura 1

Sea R con la forma que aparece en la figura 1, que llamaremos un *rectángulo polar*, y que describiremos en forma analítica en un momento. Sea $z = f(x, y)$ una superficie sobre R y suponga que f es continua y no negativa. Entonces el volumen V del sólido bajo esta superficie y arriba de R (figura 2) está dado por

$$(1) \qquad V = \iint_R f(x, y)\, dA$$

En coordenadas polares, un rectángulo polar R tiene la forma

$$R = \{(r, \theta): a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

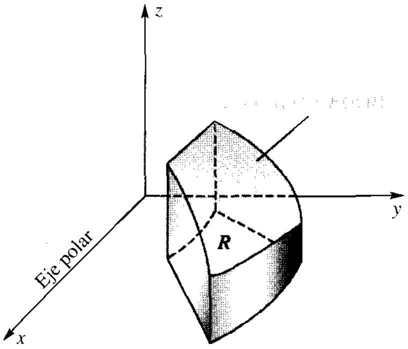


Figura 2

donde $a \geq 0$ y $\beta - \alpha \leq 2\pi$. Además, la ecuación de la superficie se puede escribir como

$$z = f(x, y) = f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) = F(r, \theta)$$

Vamos a calcular el volumen V de una nueva forma, usando coordenadas polares.

Dividimos R en rectángulos polares más pequeños $R_1, R_2, \ldots, R_n$ por medio de una cuadrícula polar y sean Δr_k y $\Delta\theta_k$ las dimensiones de una pieza representativa R_k, como se muestra en la figura 3. El área $A(R_k)$ está dada por (véase el problema 38)

$$A(R_k) = \bar{r}_k\, \Delta r_k\, \Delta\theta_k$$

donde $\bar{r}_k$ es el radio promedio de R_k. Por lo tanto,

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} F(\bar{r}_k, \bar{\theta}_k)\bar{r}_k\, \Delta r_k\, \Delta\theta_k$$

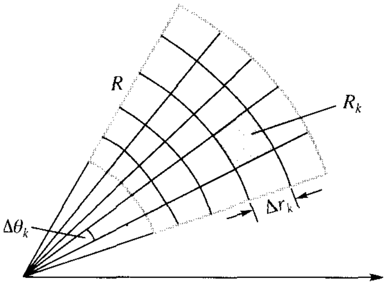


Figura 3

Al considerar el límite cuando la norma de la partición tiende a cero, obtendríamos el volumen real. Este límite es una integral doble

$$(2) \qquad V = \iint_R F(r, \theta)\, r\, dr\, d\theta = \iint_R f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)\, r\, dr\, d\theta$$

Ahora tenemos dos expresiones para V, es decir, (1) y (2). Al igualarlas se obtiene

$$\boxed{\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_R f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)\, r\, dr\, d\theta}$$

Hemos deducido el resultado del recuadro bajo la hipótesis de que f era no negativa, pero es válida para funciones muy generales; en particular, para funciones continuas de signo arbitrario.

Integrales iteradas El resultado previamente anunciado se vuelve útil al escribir la integral doble polar como una integral iterada, enunciado que ilustramos a continuación.

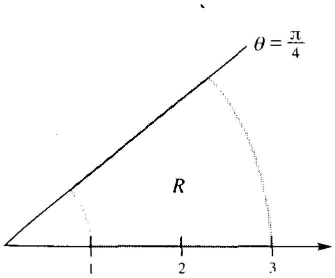


Figura 4

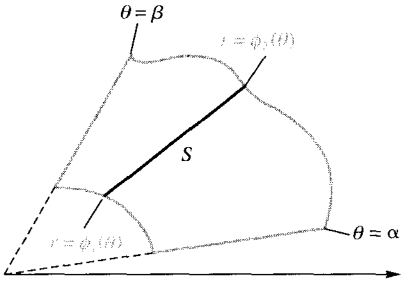
EJEMPLO 1 Determine el volumen V del sólido sobre el rectángulo polar $R = \{(r, \theta): 1 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq \pi/4\}$ (figura 4) y debajo de la superficie $z = e^{x^2+y^2}$.

SOLUCIÓN Como $x^2 + y^2 = r^2$,

$$\begin{aligned} V &= \iint_R e^{x^2+y^2}\,dA \\ &= \int_0^{\pi/4}\left[\int_1^3 e^{r^2} r\,dr\right] d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4}\left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_1^3 d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4}\frac{1}{2}(e^9 - e)\,d\theta = \frac{\pi}{8}(e^9 - e) \approx 3181 \end{aligned}$$

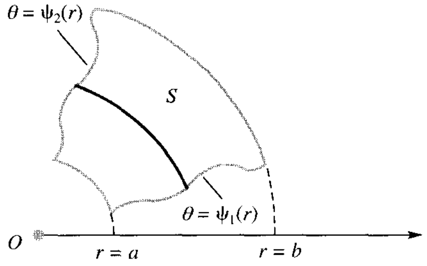
Sin la ayuda de las coordenadas polares no podríamos haber resuelto este problema. Observe que el factor adicional r era justo lo que necesitábamos para integrar e^{r^2}. ■

Regiones generales Recuerde la forma en que extendimos la integral doble sobre un rectángulo común R a la integral sobre un conjunto general S. Simplemente hemos encerrado S en un rectángulo y dimos a la función por integrar el valor cero fuera de S. Podemos hacer lo mismo para integrales polares dobles, excepto que usamos rectángulos polares en vez de rectángulos ordinarios. Omitiremos los detalles y simplemente diremos que el resultado establecido en un recuadro anterior es válido para conjuntos generales S.



Un conjunto r-simple

Figura 5



Un conjunto θ-simple

Figura 6

Los conjuntos de particular interés para la integración polar son los r-simples y los θ-simples. Decimos que un conjunto S es ***r*-simple** si tiene la forma (figura 5)

$$S = \{(r, \theta) \colon \phi_1(\theta) \le r \le \phi_2(\theta), \alpha \le \theta \le \beta\}$$

y decimos que es ***θ*-simple** si tiene la forma (figura 6)

$$S = \{(r, \theta) \colon a \le r \le b, \psi_1(r) \le \theta \le \psi_2(r)\}$$

EJEMPLO 2 Evalúe

$$\iint_S y\,dA$$

donde S es la región del primer cuadrante que está fuera de la circunferencia $r = 2$ y dentro de la cardioide $r = 2(1 + \cos\theta)$ (véase la figura 7).

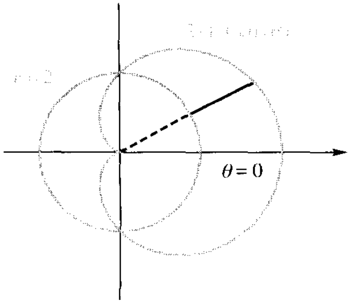


Figura 7

SOLUCIÓN Como S es un conjunto r-simple, escribimos la integral dada como una integral polar iterada, con r como la variable interior de integración. En esta integral interior, θ se mantiene fija; la integración se realiza a lo largo de la línea gruesa de la figura 7, desde $r = 2$ hasta $r = 2(1 + \cos\theta)$.

$$\iint_S y\,dA = \int_0^{\pi/2}\int_2^{2(1+\cos\theta)} (r\operatorname{sen}\theta)r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left[\frac{r^3}{3}\operatorname{sen}\theta\right]_2^{2(1+\cos\theta)} d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}\left[(1+\cos\theta)^3\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta\right] d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\left[-\frac{1}{4}(1+\cos\theta)^4 + \cos\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{8}{3}\left[-\frac{1}{4} + 0 - (-4+1)\right] = \frac{22}{3} \qquad \blacksquare$$

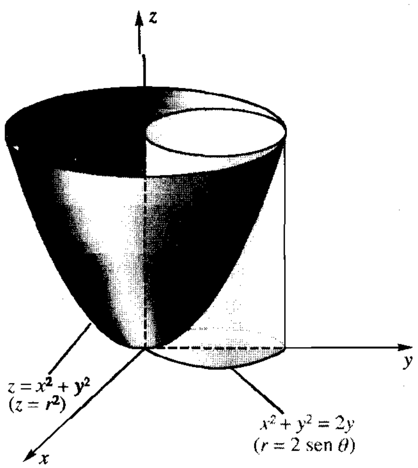

z
y
x
$z = x^2 + y^2$ $(z = r^2)$
$x^2 + y^2 = 2y$ $(r = 2\operatorname{sen}\theta)$

Figura 8

EJEMPLO 3 Calcule el volumen del sólido bajo la superficie $z = x^2 + y^2$, sobre el plano xy y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ (figura 8).

SOLUCIÓN Por simetría, podemos duplicar el volumen del primer octante. Al usar $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$, la ecuación de la superficie se convierte en $z = r^2$, y la del cilindro, $r = 2\operatorname{sen}\theta$. Sea S la región que se muestra en la figura 9. El volumen requerido V está dado por

$$V = 2\iint_S (x^2+y^2)\,dA = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\operatorname{sen}\theta} r^2 r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\operatorname{sen}\theta} d\theta = 8\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^4\theta\,d\theta$$

$$= 8\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$$

La última integral se evaluó mediante la fórmula 113 de la tabla de integrales al final del libro. ■

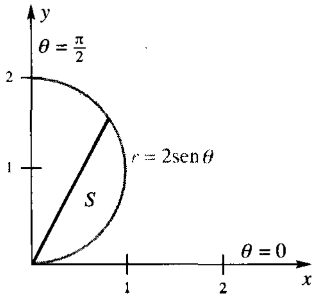


Figura 9

Sentido común

Para estimar el volumen del ejemplo 3 observe que la altura del cilindro que aparece en la figura 8 es 4 (sean $x = 0$ y $y = 2$ en $z = x^2 + y^2$). Así, el volumen deseado es poco menos que la mitad del volumen de un cilindro de radio 1 y altura 4, es decir, menor que $\left(\frac{1}{2}\right)\pi(1^2)4 = 2\pi$. La respuesta obtenida, $3\pi/2$, es razonable

Una integral de probabilidad

En el capítulo 8 analizamos la función de densidad de probabilidad normal estándar

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

En ese momento afirmamos, pero no podíamos demostrar, que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. En los dos ejemplos siguientes demostraremos este resultado.

EJEMPLO 4 Muestre que $I = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

SOLUCIÓN Vamos a resolver este problema de una manera un tanto larga, pero ciertamente ingeniosa. Primero recuerde que

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-x^2}\,dx$$

Ahora, sea V_b el volumen del sólido (figura 10) que está bajo la superficie $z = e^{-x^2-y^2}$ y sobre el cuadrado con vértices $(\pm b, \pm b)$. Entonces

$$V_b = \int_{-b}^{b}\int_{-b}^{b} e^{-x^2-y^2}\,dy\,dx = \int_{-b}^{b} e^{-x^2}\left[\int_{-b}^{b} e^{-y^2}\,dy\right]dx$$

$$= \int_{-b}^{b} e^{-x^2}\,dx\int_{-b}^{b} e^{-y^2}\,dy = \left[\int_{-b}^{b} e^{-x^2}\,dx\right]^2 = 4\left[\int_0^{b} e^{-x^2}\,dx\right]^2$$

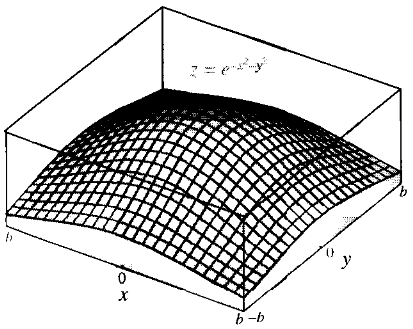


Figura 10

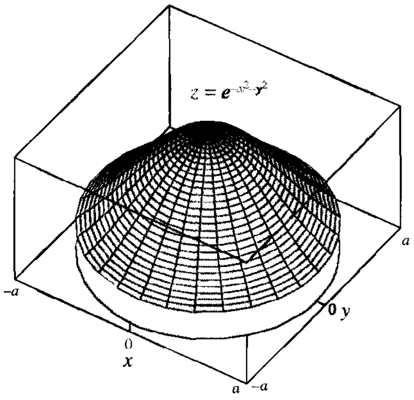


Figura 11

Esto implica que el volumen de la región bajo $z = e^{-x^2-y^2}$ sobre todo el plano xy es

$$(1) \qquad V = \lim_{b\to\infty} V_b = \lim_{b\to\infty} 4\left[\int_0^b e^{-x^2}\,dx\right]^2 = 4\left[\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right]^2 = 4I^2$$

Por otro lado, también podemos calcular V usando coordenadas polares. En este caso, V es el límite, cuando $a \to \infty$ de V_a, el volumen del sólido bajo la superficie $z = e^{-x^2-y^2} = e^{-r^2}$ sobre la región circular de radio a con centro en el origen (figura 11).

$$(2) \qquad V = \lim_{a\to\infty} V_a = \lim_{a\to\infty} \int_0^{2\pi}\int_0^a e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \lim_{a\to\infty}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^a d\theta$$

$$= \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[1 - e^{-a^2}\right]d\theta = \lim_{a\to\infty} \pi\left[1 - e^{-a^2}\right] = \pi$$

Al igualar los dos valores obtenidos para V en (1) y (2) tenemos que $4I^2 = \pi$, o bien $I = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, como se deseaba. ■

EJEMPLO 5 Muestre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx = 1$.

SOLUCIÓN Por simetría,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx = 2\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx$$

Ahora hacemos la sustitución $u = x/\sqrt{2}$, de modo que $dx = \sqrt{2}\,du$. Los límites en la integral siguen siendo lo mismo, de modo que tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx = 2\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2}\sqrt{2}\,du$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-u^2}\,du$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$$

Para obtener la última linea, usamos el resultado del ejemplo 4. ■

Revisión de conceptos

1. Un rectángulo polar R tiene la forma $R = \{(r, \theta)\text{: \_\_\_\_\_}\}$.

2. La expresión $dy\,dx$ de las integrales en las coordenadas cartesianas (rectangulares) se transforma en ________ para las integrales en coordenadas polares.

3. La integral $\displaystyle\iint_S (x^2 + y^2)\,dA$, donde S es la semicircunferencia acotada por $y = \sqrt{4 - x^2}$ y $y = 0$, se convierte en la integral iterada ________ en coordenadas polares.

4. El valor de la integral de la pregunta 3 es _____.

Conjunto de problemas 13.4

En los problemas del 1 al 6 evalúe las integrales iteradas.

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta} r^2 \operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta$

2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\operatorname{sen}\theta} r\,dr\,d\theta$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\operatorname{sen}\theta} r^2\,dr\,d\theta$

4. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{1-\cos\theta} r \operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{2} r\cos\frac{\theta}{4}\,dr\,d\theta$

6. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\theta} r\,dr\,d\theta$

En los problemas del 7 al 12 determine el área de la región S dada mediante el cálculo de $\displaystyle\iint_S r\,dr\,d\theta$. *Asegúrese primero de hacer un bosquejo de la región.*

7. S es la región dentro de la circunferencia $r = 4\cos\theta$ y fuera de la circunferencia $r = 2$.

8. S es la menor región acotada por $\theta = \pi/6$ y $r = 4\operatorname{sen}\theta$.

9. S es un pétalo de la rosa de cuatro pétalos $r = a \operatorname{sen} 2\theta$.

10. S es la región dentro de la cardioide $r = 6 - 6 \operatorname{sen} \theta$.

11. S es la región dentro del rizo mayor de la limaçon $r = 2 - 4 \operatorname{sen} \theta$.

12. S es la región fuera de la circunferencia $r = 2$ y dentro de la lemniscata $r^2 = 9 \cos 2\theta$.

En los problemas del 13 al 18 se da una integral iterada en coordenadas polares. Bosqueje la región cuya área está dada por medio de la integral iterada y calcule la integral; de este modo determine el área de la región.

13. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^2 r\,dr\,d\theta$

14. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_1^3 r\,dr\,d\theta$

15. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\theta} r\,dr\,d\theta$

16. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta} r\,dr\,d\theta$

17. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\operatorname{sen}\theta} r\,dr\,d\theta$

18. $\displaystyle\int_0^{3\pi/2}\int_0^{\theta^2} r\,dr\,d\theta$

En los problemas 19 al 26 evalúe usando coordenadas polares. Bosqueje primero la región de integración.

19. $\displaystyle\iint_S e^{x^2+y^2}\,dA$, donde S es la región acotada por $x^2 + y^2 = 4$

20. $\displaystyle\iint_S \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,dA$, donde S es el sector en el primer cuadrante de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ entre $y = 0$ y $y = x$.

21. $\displaystyle\iint_S \frac{1}{4 + x^2 + y^2}\,dA$, donde S es como en el problema 20.

22. $\displaystyle\iint_S y\,dA$, donde S es el rectángulo polar en el primer cuadrante dentro de $x^2 + y^2 = 4$ y fuera de $x^2 + y^2 = 1$.

23. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (4 - x^2 - y^2)^{-1/2}\,dy\,dx$

24. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \operatorname{sen}(x^2 + y^2)\,dx\,dy$

25. $\displaystyle\int_0^1\int_x^1 x^2\,dy\,dx$

26. $\displaystyle\int_1^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} (x^2 + y^2)^{-1/2}\,dy\,dx$

≊ **27.** Calcule el volumen del sólido en el primer octante abajo del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 9$ usando coordenadas polares.

≊ **28.** Use coordenadas polares para calcular el volumen del sólido acotado por arriba por $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 18$, abajo por $z = 0$, y lateralmente por $x^2 + y^2 = 4$.

29. Cambie a coordenadas rectangulares y luego evalúe

$$\int_{3\pi/4}^{4\pi/3}\int_0^{-5\sec\theta} r^3 \operatorname{sen}^2\theta\,dr\,d\theta$$

30. Sean $V = \displaystyle\iint_S \operatorname{sen}\sqrt{x^2 + y^2}\,dA$ y $W = \displaystyle\iint_S |\operatorname{sen}\sqrt{x^2 + y^2}|\,dA$, donde S es la región dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4\pi^2$.

(a) Sin calcular, determine el signo de V.

(b) Evalúe V.

(c) Evalúe W.

31. Los centros de dos bolas de radio a están separados a una distancia $2b$, con $b \le a$. Calcule el volumen de su intersección en términos de $d = a - b$.

32. La profundidad (en pies) del agua distribuida por un aspersor en una hora es $ke^{-r/10}$, $0 \le r \le 10$, donde r es la distancia al aspersor y k es una constante. Determine k si se distribuyen 100 pies cúbicos de agua en una hora.

33. Calcule el volumen del sólido recortado de la esfera $r^2 + z^2 \le a^2$ por el cilindro $r = a \operatorname{sen} \theta$.

34. Calcule el volumen de la cuña formada por un alto cilindro circular recto de radio a y un plano que pasa por un diámetro de su base y forma un ángulo α $(0 < \alpha < \pi/2)$ con la base (compare con el problema 37 de la sección 5.2).

35. Considere el anillo A de altura $2b$ obtenido de una esfera de radio a cuando se perfora un agujero de radio c $(c < a)$ por el centro de la esfera (figura 12). Demuestre que el volumen de A es $4\pi b^3/3$, lo que es notable por dos razones. Es independiente del radio a, y es igual al volumen de una esfera de radio b.

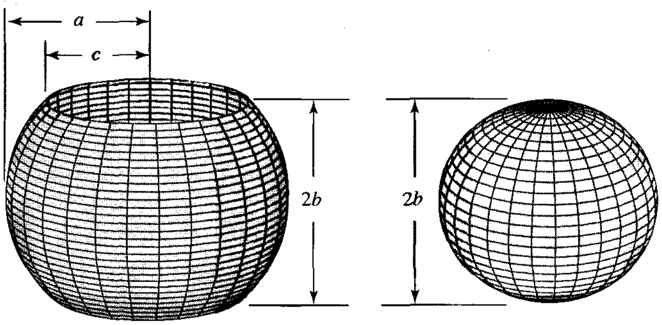


Figura 12

36. Hay una explicación sencilla para el notable resultado del problema 35. Demuestre que un plano horizontal que interseca a la región de la figura 12 y a una esfera de radio b, junto a ella, lo hará en áreas iguales. Luego aplique el principio de Cavalieri para el volumen. (Véase el problema 40 de la sección 5.2).

37. Demuestre que

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2}\,dy\,dx = \frac{\pi}{4}$$

38. Recuerde la fórmula $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ para el área de un sector circular de radio r y ángulo central θ radianes (sección 10.7). Use esto para obtener la fórmula

$$A = \frac{r_1 + r_2}{2}(r_2 - r_1)(\theta_2 - \theta_1)$$

para el área del rectángulo polar $\{(r, \theta): r_1 \le r \le r_2, \theta_1 \le \theta \le \theta_2\}$.

39. Demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,dx = 1$$

para toda μ y para toda $\sigma > 0$. *Sugerencia:* utilice el resultado del ejemplo 5.

Respuestas a la revisión de conceptos:

1. $a \le r \le b; \alpha \le \theta \le \beta$ **2.** $r\,dr\,d\theta$ **3.** $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^2 r^3\,dr\,d\theta$ **4.** 4π

13.5
Aplicaciones de las integrales dobles

La aplicación más obvia de las integrales dobles es el cálculo de volúmenes de sólidos. Hemos ilustrado ampliamente este uso de las integrales dobles, de modo que ahora veremos otras aplicaciones (masa, centro de masa, momento de inercia y radio de giro).

Considere una hoja plana, tan delgada que podamos considerarla bidimensional. En la sección 5.6 llamamos a tal hoja una lámina, pero ahí consideramos sólo láminas de densidad constante. Aquí queremos estudiar láminas de densidad variable, es decir, láminas hechas de material no homogéneo (figura 1).

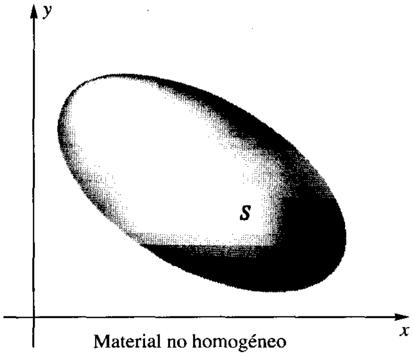


Figura 1

Suponga que la lámina cubre una región S del plano xy y denotemos la densidad (masa por unidad de área) en (x, y) mediante $\delta(x, y)$. Dividimos S en pequeños rectángulos $R_1, R_2, \ldots, R_k$ como se muestra en la figura 2. Elegimos un punto $(\overline{x}_k, \overline{y}_k)$ en R_k. Entonces, la masa de R_k es aproximadamente $\delta(\overline{x}_k, \overline{y}_k)A(R_k)$, y la masa total de la lámina es aproximadamente

$$m \approx \sum_{k=1}^{n} \delta(\overline{x}_k, \overline{y}_k)A(R_k)$$

La masa real m se obtiene considerando el límite de la expresión anterior cuando la norma de la partición tiende a cero, lo cual es, por supuesto, una doble integral.

$$\boxed{m = \iint_S \delta(x, y)\, dA}$$

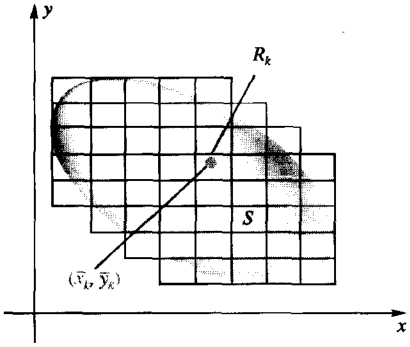


Figura 2

EJEMPLO 1 Una lámina con densidad $\delta(x, y) = xy$ está acotada por el eje x, la recta $x = 8$, y la curva $y = x^{2/3}$ (figura 3). Calcule su masa total.

SOLUCIÓN

$$m = \iint_S xy\, dA = \int_0^8 \int_0^{x^{2/3}} xy\, dy\, dx$$

$$= \int_0^8 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_0^{x^{2/3}} dx = \frac{1}{2}\int_0^8 x^{7/3}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{10}x^{10/3}\right]_0^8 = \frac{768}{5} = 153.6 \qquad \blacksquare$$

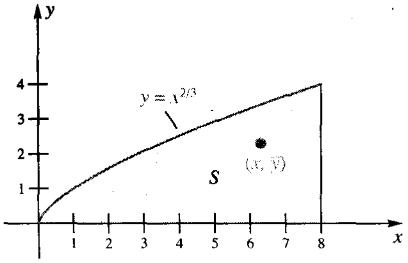


Figura 3

Centro de masa Le sugerimos que repase el concepto de centro de masa de la sección 5.6. Ahí aprendimos que si $m_1, m_2, \ldots, m_n$ es una colección de masas puntuales situadas en $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, respectivamente, entonces los momentos totales respecto del eje y y el eje x están dados por

$$M_y = \sum_{k=1}^{n} x_k m_k \qquad M_x = \sum_{k=1}^{n} y_k m_k$$

Además, las coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$ del centro de masa (punto de equilibrio o de balance) son

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} \qquad \overline{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}$$

Ahora, considere una lámina de densidad variable $\delta(x, y)$ que cubre una región S en el plano xy, como en la figura 1. Dividimos esta lámina como en la figura 2 y suponemos, como aproximación, que la masa de cada R_k está concentrada en $(\overline{x}_k, \overline{y}_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Por último, consideramos el límite cuando la norma de la partición tiende a cero. Esto conduce a las fórmulas.

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\displaystyle\iint_S x\delta(x, y)\, dA}{\displaystyle\iint_S \delta(x, y)\, dA} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\displaystyle\iint_S y\delta(x, y)\, dA}{\displaystyle\iint_S \delta(x, y)\, dA}$$

EJEMPLO 2 Determine el centro de masa de la lámina del ejemplo 1.

SOLUCIÓN En el ejemplo 1 mostramos que la masa m de esta lámina es $\frac{768}{5}$. Los momentos M_y y M_x con respecto a los ejes y y x son

$$\begin{aligned} M_y &= \iint_S x\delta(x, y)\, dA = \int_0^8 \int_0^{x^{2/3}} x^2 y\, dy\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^8 x^{10/3}\, dx = \frac{12{,}288}{13} \approx 945.23 \\ M_x &= \iint_S y\delta(x, y)\, dA = \int_0^8 \int_0^{x^{2/3}} xy^2\, dy\, dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^8 x^3\, dx = \frac{1024}{3} \approx 341.33 \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{80}{13} \approx 6.15, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{20}{9} \approx 2.22$$

≋ En la figura 3, observe que el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ está en la parte superior derecha de S; esto era de esperarse, pues una lámina con densidad $\delta(x, y) = xy$ es más pesada cuando la distancia a los ejes x y y aumenta. ■

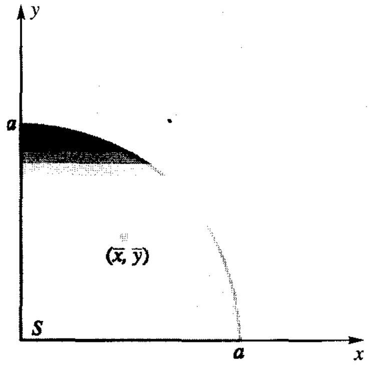


Figura 4

EJEMPLO 3 Determine el centro de masa de una lámina con la forma de un cuarto de círculo de radio a, cuya densidad es proporcional a la distancia al centro del círculo (figura 4).

SOLUCIÓN Por hipótesis, $\delta(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$, donde k es una constante. La forma de S sugiere el uso de coordenadas polares.

$$\begin{aligned} m &= \iint_S k\sqrt{x^2 + y^2}\, dA = k\int_0^{\pi/2}\int_0^a rr\, dr\, d\theta \\ &= k\int_0^{\pi/2} \frac{a^3}{3}\, d\theta = \frac{k\pi a^3}{6} \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} M_y &= \iint_S xk\sqrt{x^2 + y^2} dA = k\int_0^{\pi/2}\int_0^a (r\cos\theta)r^2\, dr\, d\theta \\ &= k\int_0^{\pi/2} \frac{a^4}{4}\cos\theta\, d\theta = \left[\frac{ka^4}{4}\operatorname{sen}\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{ka^4}{4} \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{ka^4/4}{k\pi a^3/6} = \frac{3a}{2\pi}$$

Debido a la simetría de la lámina, reconocemos que $\bar{y} = \bar{x}$, así que no necesitamos realizar más cálculos. ■

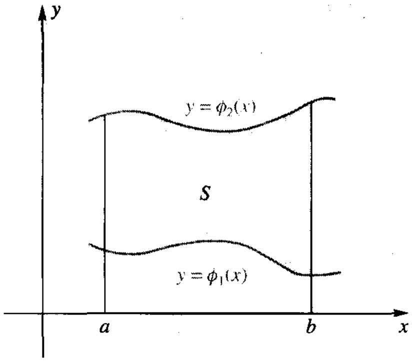


Figura 5

Un lector perceptivo podría plantearse una pregunta en este momento. ¿Qué ocurre si una lámina es homogénea?, es decir, ¿qué ocurre si $\delta(x, y) = k$, es una constante? ¿Coincidirán las fórmulas deducidas en esta sección, que usan integrales dobles, con las de la sección 5.6, que sólo usan integrales sencillas? La respuesta es afirmativa. Para dar una justificación parcial, considere el cálculo de M_y para una región S y-simple (figura 5).

$$M_y = \iint_S xk\, dA = k\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} x\, dy\, dx = k\int_a^b x[\phi_2(x) - \phi_1(x)]\, dx$$

La integral sencilla de la derecha es la que se proporciona en la sección 5.6.

Momento de inercia La física nos dice que la energía cinética, EC, de una partícula de masa m y velocidad v, que se mueve en una línea recta, es

$$EC = \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad (1)$$

Si en vez de moverse en línea recta, la partícula gira en torno de un eje con una velocidad angular de ω radianes por unidad de tiempo, entonces su velocidad lineal es $v = r\omega$, donde r es el radio de su trayectoria circular. Al sustituir esto en (1), obtenemos

$$EC = \tfrac{1}{2}(r^2m)\omega^2$$

La expresión r^2m es el momento de **inercia de la partícula** y se denota I. Así, para una partícula giratoria,

$$EC = \tfrac{1}{2}I\omega^2 \qquad (2)$$

Con base en (1) y (2) concluimos que el momento de inercia de un cuerpo en movimiento circular desempeña un papel similar a la masa de un cuerpo en movimiento lineal.

Para un sistema de n partículas en el plano con masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ y con distancias $r_1, r_2, \ldots, r_n$ respecto a la recta L, el momento de inercia del sistema en torno de L se define como

$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \cdots + m_nr_n^2 = \sum_{k=1}^{n} m_kr_k^2$$

En otras palabras, sumamos los momentos de inercia de las partículas individuales.

Ahora, considere una lámina con densidad $\delta(x, y)$ que cubre una región S del plano xy (figura 1). Si dividimos S como en la figura 2, aproximamos los momentos de inercia de cada pieza R_k, sumamos y tomamos el límite, llegamos a las siguientes fórmulas. Los **momentos de inercia** (también llamados segundos momentos) de la lámina en torno de los ejes x, y y z están dados por

$$\boxed{\begin{aligned} I_x &= \iint_S y^2\delta(x, y)\, dA \qquad I_y = \iint_S x^2\delta(x, y)\, dA \\ I_z &= \iint_S (x^2 + y^2)\, \delta(x, y)\, dA = I_x + I_y \end{aligned}}$$

EJEMPLO 4 Determine los momentos de inercia en torno de los ejes x, y y z de la lámina del ejemplo 1.

SOLUCIÓN

$$I_x = \iint_S xy^3\, dA = \int_0^8 \int_0^{x^{2/3}} xy^3\, dy\, dx = \frac{1}{4}\int_0^8 x^{11/3}\, dx = \frac{6144}{7} \approx 877.71$$

$$I_y = \iint_S x^3y\, dA = \int_0^8 \int_0^{x^{2/3}} x^3y\, dy\, dx = \frac{1}{2}\int_0^8 x^{13/3}\, dx = 6144$$

$$I_z = I_x + I_y = \frac{49{,}152}{7} \approx 7021.71$$

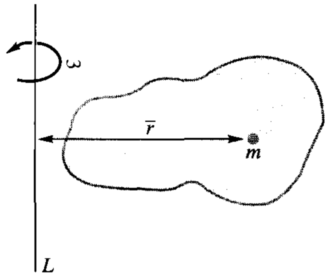


Figura 6

Considere el problema de reemplazar un sistema general de masas, con masa total m, por una única masa puntual m con el mismo momento de inercia I respecto a una recta L (figura 6). ¿A qué distancia debe estar este punto de L? La respuesta es $\bar{r}$, donde $m\bar{r}^2 = I$. El número

$$\bar{r} = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

es el **radio de giro** del sistema. Así, la energía cinética del sistema que gira en torno de L con velocidad angular ω es

$$KE = \tfrac{1}{2}m\bar{r}^2\omega^2$$

■

Revisión de conceptos

1. Si la densidad en (x, y) es x^2y^4, entonces la masa m de la lámina S está dada por $m =$ ______.

2. La coordenada y del centro de masa de la lámina de la pregunta 1 está dada por $\bar{y} =$ ______.

3. El momento de inercia respecto al eje y de la lámina S de la pregunta 1 está dado por $I_y =$ ______.

4. Si $S = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, entonces un razonamiento geométrico nos dice que si $\delta(x, y) = x^2y^4$, entonces $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son ______ que $\frac{1}{2}$.

Conjunto de problemas 13.5

En los problemas del 1 al 10 determine la masa m y el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ *de la lámina acotada por las curvas dadas y con la densidad indicada.*

1. $x = 0, x = 4, y = 0, y = 3; \delta(x, y) = y + 1$
2. $y = 0, y = \sqrt{4 - x^2}; \delta(x, y) = y$
3. $y = 0, y = \operatorname{sen} x, 0 \leq x \leq \pi; \delta(x, y) = y$
4. $y = 1/x, y = x, y = 0, x = 2; \delta(x, y) = x$
5. $y = e^{-x}, y = 0, x = 0, x = 1; \delta(x, y) = y^2$
6. $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 1; \delta(x, y) = 2 - x + y$
7. $r = 2 \operatorname{sen} \theta; \delta(r, \theta) = r$
8. $r = 1 + \cos \theta; \delta(r, \theta) = r$
9. $r = 1, r = 2, \theta = 0, \theta = \pi, (0 \leq \theta \leq \pi); \delta(r, \theta) = 1/r$
10. $r = 2 + 2 \cos \theta; \delta(r, \theta) = r$

En los problemas del 11 al 14 determine los momentos de inercia I_x, I_y *e* I_z *para la lámina acotada por las curvas dadas y con la densidad indicada* δ.

11. $y = \sqrt{x}, x = 9, y = 0; \delta(x, y) = x + y$
12. $y = x^2, y = 4; \delta(x, y) = y$
13. Cuadrado con vértices $(0, 0), (0, a), (a, a), (a, 0)$; $\delta(x, y) = x + y$
14. Triángulo con vértices $(0, 0), (0, a), (a, 0)$; $\delta(x, y) = x^2 + y^2$

En los problemas del 15 al 20 se da una integral iterada en coordenadas rectangulares o polares. La integral doble proporciona la masa de alguna lámina R. Bosqueje la lámina R y determine la densidad δ. *Luego calcule la masa y el centro de masa.*

15. $\int_0^2 \int_0^x k \, dy \, dx$
16. $\int_0^1 \int_x^1 ky \, dy \, dx$
17. $\int_{-3}^3 \int_0^{9-x^2} k(x^2 + y^2) \, dy \, dx$
18. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos x} k \, dy \, dx$
19. $\int_0^{\pi} \int_1^3 kr^2 \, dr \, d\theta$
20. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\theta} kr \, dr \, d\theta$

21. Determine el radio de giro de la lámina del problema 13 respecto al eje x.

22. Determine el radio de giro de la lámina del problema 14 respecto al eje y.

23. Determine el momento de inercia y el radio de giro de una lámina circular homogénea (δ constante) de radio a, respecto a uno de sus diámetros.

24. Demuestre que el momento de inercia de una lámina rectangular con lados de longitudes a y b en torno de un eje perpendicular que pasa por su centro de masa es

$$I = \tfrac{1}{12}(a^3b + ab^3)$$

En este caso, k es la densidad constante.

25. Determine el momento de inercia de la lámina del problema 23 en torno de una recta tangente a su frontera. *Sugerencia:* considere la circunferencia $r = 2a \operatorname{sen} \theta$; entonces la recta tangente es el eje x. La fórmula 113 al final del libro puede ayudarle con la integración.

26. Considere la lámina S de densidad k acotada por la cardioide $r = a(1 + \operatorname{sen} \theta)$, como se muestra en la figura 7. Determine su centro de masa y momento de inercia respecto al eje x. *Sugerencia:* el problema 7 de la sección 10.7 sugiere el útil hecho de que S tiene área $3\pi a^2/2$; además, la fórmula 113 al final del libro puede ser de utilidad.

27. Determine el centro de masa de la parte de la cardioide del problema 26 que está fuera de la circunferencia $r = a$.

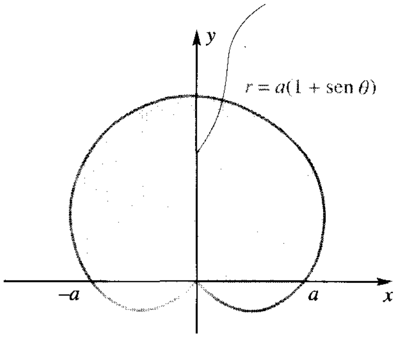


Figura 7

28. **Teorema del eje paralelo** Considere una lámina S de masa m junto con las rectas paralelas L y L' en el plano de S, de modo que la recta L pase por el centro de masa de S. Demuestre que si I e I' son los momentos de inercia de S en torno de L y L', respectivamente, entonces $I' = I + d^2m$, donde d es la distancia entre L y L'. *Sugerencia:* suponga que S está en el plano xy, L es el eje y, y que L' es la recta $x = -d$.

29. Respecto a la lámina del problema 13, para la que encontramos $I_y = 5a^5/12$, calcule

(a) m (b) $\bar{x}$ (c) I_L

donde L es una recta que pasa por $(\bar{x}, \bar{y})$ paralela al eje y (véase el problema 28).

30. Use el teorema del eje paralelo junto con el problema 23 para resolver el problema 25 de otra manera.

31. Determine I_x, I_y e I_z para la lámina de dos partes de densidad constante k que aparece en la figura 8 (véanse los problemas 23 y 28).

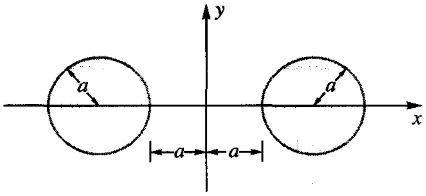


Figura 8

32. El teorema del eje paralelo también es válido para rectas que sean perpendiculares a una lámina. Use este hecho para determinar el momento de inercia de la lámina rectangular del problema 24 en torno de un eje perpendicular a la lámina y que pase por una esquina.

33. Sean S_1 y S_2 láminas que no se intersecan en el plano xy y de masas m_1 y m_2 con centros de masa $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ y $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$. Demuestre que el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ de la lámina combinada $S_1 \cup S_2$ satisface

$$\bar{x} = \bar{x}_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2} + \bar{x}_2 \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

con una fórmula similar para $\bar{y}$. Concluya que, al determinar $(\bar{x}, \bar{y})$, las dos láminas se pueden considerar como si fuesen masas puntuales en $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ y $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$.

34. Sean S_1 y S_2 láminas circulares homogéneas de radios a y ta ($t > 0$) centro en $(-a, a)$ y $(ta, 0)$, respectivamente. Use el problema 17 para determinar el centro de masa de $S_1 \cup S_2$.

35. Sea S una lámina en el plano xy con centro de masa en el origen, y sea L la recta $ax + by = 0$ que pasa por el origen. Demuestre que la distancia (con signo) d de un punto (x, y) a L es $d = (ax + by)/\sqrt{a^2 + b^2}$, y use esto para concluir que el momento de S respecto a L es 0. *Nota:* esto muestra que una lámina se equilibrará sobre cualquier recta que pasa por su centro de masa.

36. Para la lámina del ejemplo 3 determine la ecuación de la recta de equilibrio que forme un ángulo de 135° con el eje x positivo (véase el problema 35). Escriba su respuesta en la forma $Ax + By = C$.

Respuesta a la revisión de conceptos: **1.** $\iint_S x^2y^4\,dA$ **2.** $\iint_S x^2y^5\,dA/m$ **3.** $\iint_S x^4y^4\,dA$ **4.** mayor

---

13.6
Área de una superficie

Hemos visto algunos casos particulares del área de una superficie. Así, en el ejemplo 3 de la sección 11.4 encontramos el área de un paralelogramo en el espacio. También hemos visto (problemas 29 y 30 de la sección 5.4) que el área de la superficie de una esfera es $4\pi r^2$. En esta sección desarrollaremos una fórmula para el área de una superficie definida por $z = f(x, y)$ sobre una región dada.

Suponga que G es tal superficie, sobre la región cerrada y acotada S en el plano xy. Además, presuma que f tiene primeras derivadas parciales continuas f_x y f_y. Comenzamos creando una partición P de la región S con rectas paralelas a los ejes x y y (véase la figura 1). Sean R_m, $m = 1, 2,..., n$, los rectángulos resultantes que están completamente dentro de S. Para cada m, sea G_m la parte de la superficie que se proyecta sobre R_m y

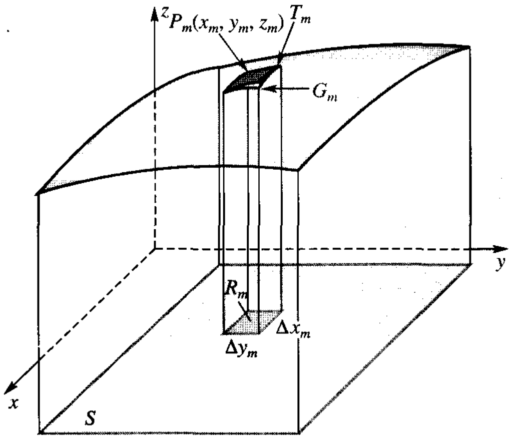


Figura 1

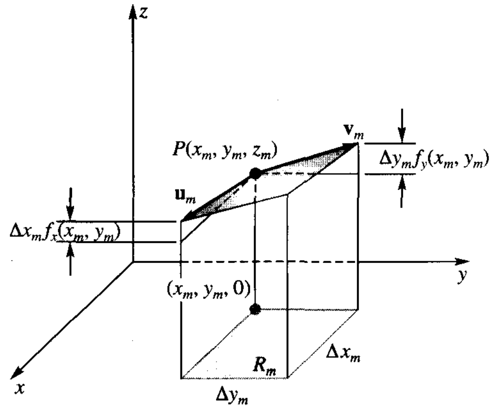


Figura 2

sea P_m el punto de G_m que se proyecta sobre la esquina de R_m con las menores coordenadas x y y. Por último, sea T_m el paralelogramo del plano tangente en P_m que se proyecta sobre R_m, como se muestra en la figura 1, y luego con más detalle en la figura 2.

Luego sumamos las áreas de estos paralelogramos T_m cuya proyección es R_m. Sean $\mathbf{u}_m$ y $\mathbf{v}_m$ los vectores que forman los lados de T_m. Entonces

$$\mathbf{u}_m = \Delta x_m \mathbf{i} + f_x(x_m, y_m)\, \Delta x_m \mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}_m = \Delta y_m \mathbf{j} + f_y(x_m, y_m)\, \Delta y_m \mathbf{k}$$

De la sección 11.4, sabemos que el área del paralelogramo T_m es $\|\mathbf{u}_m \times \mathbf{v}_m\|$, donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_m \times \mathbf{v}_m &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x_m & 0 & f_x(x_m, y_m)\, \Delta x_m \\ 0 & \Delta y_m & f_y(x_m, y_m)\, \Delta y_m \end{vmatrix} \\
&= (0 - f_x(x_m, y_m)\, \Delta x_m\, \Delta y_m)\mathbf{i} - (f_y(x_m, y_m)\, \Delta x_m\, \Delta y_m - 0)\mathbf{j} \\
&\quad + (\Delta x_m\, \Delta y_m - 0)\mathbf{k} \\
&= \Delta x_m\, \Delta y_m[-f_x(x_m, y_m)\mathbf{i} - f_y(x_m, y_m)\mathbf{j} + \mathbf{k}] \\
&= A(R_m)[-f_x(x_m, y_m)\mathbf{i} - f_y(x_m, y_m)\mathbf{j} + \mathbf{k}]
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el área T_m es

$$A(T_m) = \|\mathbf{u}_m \times \mathbf{v}_m\| = A(R_m)\sqrt{[f_x(x_m, y_m)]^2 + [f_y(x_m, y_m)]^2 + 1}$$

Luego, sumamos las áreas de estos paralelogramos tangentes T_m, $m = 1, 2, \ldots, n$ y tomamos el límite para obtener el área de la superficie de G.

$$\begin{aligned}
A(G) &= \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{m=1}^{n} A(T_m) \\
&= \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{m=1}^{n} \sqrt{[f_x(x_m, y_m)]^2 + [f_y(x_m, y_m)]^2 + 1}\, A(R_m) \\
&= \iint_S \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}\, dA
\end{aligned}$$

o, de forma más concisa,

$$\boxed{A(G) = \iint_S \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dA}$$

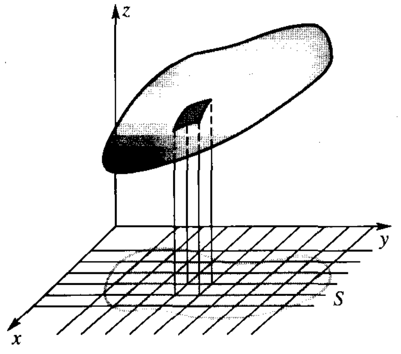


Figura 3

La figura 1 se dibujó como si la región S en el plano xy fuese un rectángulo; esto no necesariamente es el caso. La figura 3 muestra lo que sucede cuando S no es un rectángulo.

Algunos ejemplos Ilustraremos la fórmula para el área de una superficie dada en el recuadro mediante cuatro ejemplos.

EJEMPLO 1 Si S es la región rectangular en el plano xy acotada por las rectas $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ y $y = 2$, calcule el área de la parte de la superficie cilíndrica $z = \sqrt{4 - x^2}$ que se proyecta sobre S (figura 4).

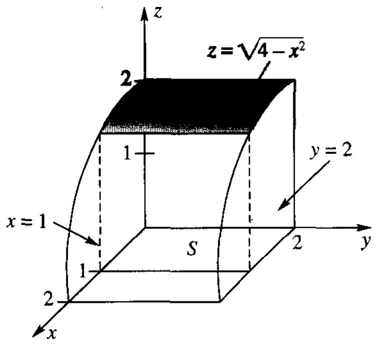


Figura 4

SOLUCIÓN Sea $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2}$. Entonces $f_x = -x/\sqrt{4 - x^2}$, $f_y = 0$, y

$$A(G) = \iint_S \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dA = \iint_S \sqrt{\frac{x^2}{4 - x^2} + 1}\, dA = \iint_S \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\, dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\, dy\, dx = 4\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx = 4\left[\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{3} \quad \blacksquare$$

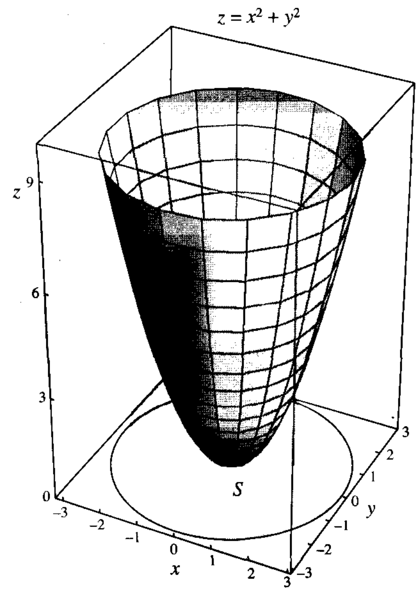


Figura 5

EJEMPLO 2 Determine el área de la superficie $z = x^2 + y^2$ debajo del plano $z = 9$.

SOLUCIÓN La parte indicada G de la superficie se proyecta sobre la región circular S dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ (figura 5). Sea $f(x, y) = x^2 + y^2$. Entonces $f_x = 2x$, $f_y = 2y$ y

$$A(G) = \iint_S \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dA$$

La forma de S sugiere el uso de coordenadas polares.

$$\begin{aligned} A(G) &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{8}\left[\frac{2}{3}(4r^2 + 1)^{3/2}\right]_0^3 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{12}(37^{3/2} - 1)\, d\theta = \frac{\pi}{6}(37^{3/2} - 1) \approx 117.32 \end{aligned}$$ ■

Un cilindro circular recto (con altura igual al diámetro) y una esfera inscrita tienen la notable propiedad de que las superficies entre dos planos paralelos (perpendiculares al eje del cilindro) tienen la misma área. Nuestro siguiente ejemplo demuestra esta propiedad para un hemisferio, mostrando que las dos superficies de la figura 6 tienen la misma área. Los pasos se extienden con facilidad para mostrar que la propiedad es válida para una esfera.

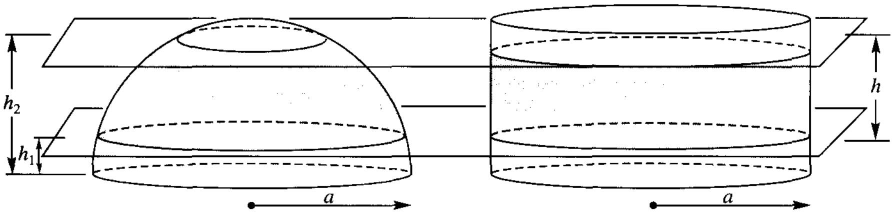


Figura 6

EJEMPLO 3 Demuestre que el área de la superficie G formada al cortar el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$ por los planos $z = h_1$ y $z = h_2$ $(0 \leq h_1 \leq h_2 \leq a)$ es

$$A(G) = 2\pi a(h_2 - h_1)$$

Demuestre que esto también es el área de la superficie del cilindro circular recto $x^2 + y^2 = a^2$ entre los planos $z = h_1$ y $z = h_2$.

SOLUCIÓN Sea $h = h_2 - h_1$. La superficie del hemisferio está definida como

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

y su proyección S en el plano xy es el anillo $b \leq x^2 + y^2 \leq c$, donde $b = \sqrt{a^2 - h_2^2}$ y $c = \sqrt{a^2 - h_1^2}$ (véase la figura 7). El área de la superficie del hemisferio entre los dos planos horizontales es

$$\begin{aligned} A(G) &= \iint_S \sqrt{\left[\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right]^2 + 1}\, dA \\ &= \iint_S \sqrt{\frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2} + 1}\, dA \\ &= \iint_S \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dA \end{aligned}$$

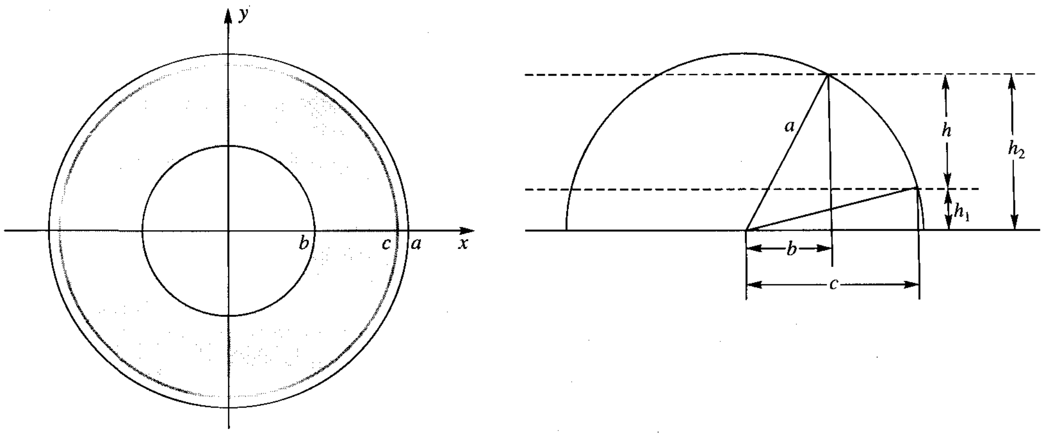


Figura 7

Esta integral se evalúa con mayor facilidad mediante el uso de coordenadas polares.

$$
\begin{aligned}
A(G) &= \int_0^{2\pi}\int_b^c \frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}\, r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} a\left[-\sqrt{a^2-c^2}+\sqrt{a^2-b^2}\right]d\theta \\
&= 2\pi a\left[\sqrt{a^2-b^2}-\sqrt{a^2-c^2}\right] = 2\pi a(h_2-h_1) = 2\pi a h
\end{aligned}
$$

Como el área de la superficie del cilindro es la circunferencia ($2\pi a$) del círculo por la altura h, el área de la superficie de la parte del cilindro entre los dos planos es $2\pi a h$, lo que por supuesto coincide con el área de la superficie del hemisferio. ■

EJEMPLO 4 Determine el área de la superficie del paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ sobre el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(0, 2)$.

SOLUCIÓN Sea $f(x, y) = x^2 - y^2$. Entonces, $f_x(x, y) = 2x$ y $f_y(x, y) = -2y$. El área está dada mediante la integral iterada

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^2\int_0^{2-x} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\,dy\,dx \\
&= \int_0^2\int_0^{2-x} \sqrt{(2x)^2 + (-2y)^2 + 1}\,dy\,dx \\
&= 2\int_0^2\left(\int_0^{2-x}\sqrt{y^2+\left(x^2+\frac{1}{4}\right)}\,dy\right)dx \qquad \text{[Utilice la fórmula 44 de la tabla de integrales)} \\
&= 2\int_0^2\left[\frac{y}{2}\sqrt{y^2+\left(x^2+\frac{1}{4}\right)} + \frac{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)}{2}\ln\left|y+\sqrt{y^2+\left(x^2+\frac{1}{4}\right)}\right|\right]_0^{2-x} dx \\
&= 2\int_0^2\left[\frac{2-x}{2}\sqrt{(2-x)^2+\left(x^2+\frac{1}{4}\right)}\right. \\
&\qquad + \frac{1}{2}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\ln\left|(2-x)+\sqrt{(2-x)^2+\left(x^2+\frac{1}{4}\right)}\right| \\
&\qquad \left. - \frac{1}{2}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\ln\left|\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right|\right]dx \\
&= 2\int_0^2\left[\frac{2-x}{2}\sqrt{2x^2-4x+\frac{17}{4}} + \frac{4x^2+1}{8}\ln\left((2-x)+\sqrt{2x^2-4x+\frac{17}{4}}\right)\right. \\
&\qquad \left. - \frac{4x^2+1}{16}\ln\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\right]dx
\end{aligned}
$$

Problemas sobre áreas de superficies

Para la mayoría de las áreas de superficies es fácil configurar la integral doble. Esto sólo es cosa de sustituir las derivadas requeridas en la fórmula. Sin embargo, con frecuencia es difícil o imposible evaluar estas integrales mediante el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, debido a la dificultad de determinar antiderivadas.

Esta última integral es demasiado complicada para evaluar mediante el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, de modo que dependemos de un método numérico. La regla de la parábola con $n = 10$ proporciona una aproximación de 4.8363 para esta última integral. (Valores grandes de n, virtualmente dan la misma aproximación). ■

En este último ejemplo, fuimos capaces de evaluar la integral interna determinando una antiderivada y aplicando el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo. Luego al final, fue necesaria una aproximación numérica para evaluar la integral. Aunque existen métodos numéricos para aproximar integrales dobles, son muy complicados de utilizar y requieren la evaluación de la función en una gran cantidad de puntos. Siempre es provechoso evaluar la integral interna, si esto es posible, a fin de dejar una integral sencilla para aproximar.

Revisión de conceptos

1. El área de un paralelogramo con lados iguales a los vectores **u** y **v** es _______.

2. Más en general, si $z = f(x, y)$ determina una superficie G que se proyecte sobre la región S del plano xy, entonces el área de G está dada por la fórmula $A(G) =$ _______.

3. Al aplicar el resultado de la pregunta 2 con $z = (a^2 - x^2 - y^2)^{1/2}$ se llega a la fórmula integral A = _______ para el área de un hemisferio de radio a. Al evaluar esta integral, obtenemos la conocida fórmula $A =$ _______.

4. Considere una esfera inscrita en una lata cilíndrica de radio a. Dos planos, ambos perpendiculares al eje del cilindro y separados una distancia h, cortan regiones en el cilindro y la esfera, con área _______.

Conjunto de problemas 13.6

En los problemas del 1 al 17 determine el área de la superficie indicada. En cada caso, haga un bosquejo.

1. La parte del plano $3x + 4y + 6z = 12$ que está arriba del rectángulo del plano xy con vértices $(0, 0), (2, 0), (2, 1)$ y $(0, 1)$

2. La parte del plano $3x - 2y + 6z = 12$ acotada por los planos $x = 0, y = 0$ y $3x + 2y = 12$

3. La parte de la superficie $z = \sqrt{4 - y^2}$ directamente arriba del cuadrado en el plano xy con vértices $(1, 0), (2, 0), (2, 1)$ y $(1, 1)$

4. La parte de la superficie $z = \sqrt{4 - y^2}$ en el primer octante que está directamente arriba de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ en el plano xy

5. La parte del cilindro $x^2 + z^2 = 9$ que está directamente sobre el rectángulo en el plano xy con vértices $(0, 0), (2, 0), (2, 3)$ y $(0, 3)$

6. La parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ recortada por el plano $z = 4$

7. La parte de la superficie cónica $x^2 + y^2 = z^2$ que está directamente sobre el triángulo en el plano xy con vértices $(0, 0), (4, 0)$ y $(0,4)$

8. La parte de la superficie $z = x^2/4 + 4$ cortada por los planos $x = 0, x = 1, y = 0$ y $y = 2$

9. La parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ dentro del cilindro circular $x^2 + y^2 = b^2$, donde $0 < b \leq a$

10. La parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ dentro del cilindro elíptico $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, donde $0 < b \leq a$

11. La parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ dentro del cilindro circular $x^2 + y^2 = ay$ ($r = a \operatorname{sen} \theta$ en coordenadas polares), $a > 0$

12. La parte del cilindro $x^2 + y^2 = ay$ dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$. *Sugerencia:* proyecte al plano yz para obtener la región de integración.

13. La parte de la silla $az = x^2 - y^2$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = a^2, a > 0$

14. La superficie del sólido dado por la intersección de los dos cilindros sólidos $x^2 + z^2 \leq a^2$ y $x^2 + y^2 \leq a^2$. *Sugerencia:* tal vez necesite la fórmula de integración $\int (1 + \operatorname{sen} \theta)^{-1}\, d\theta = -\tan[(\pi - 2\theta)/4] + C$.

15. La parte de $z = 9 - x^2 - y^2$ por arriba del plano $z = 5$.

16. La parte de $z = 9 - x^2$ por arriba del plano xy con $0 \leq x \leq 20$.

17. La parte del plano $Ax + By + Cz = D$ (donde A, B, C y D son positivas) que se encuentra en el primer octante.

18. La figura 8 muestra el edificio de ingeniería de la Universidad Edwardsville del Sur de Illinois. La escalera en espiral, visible en

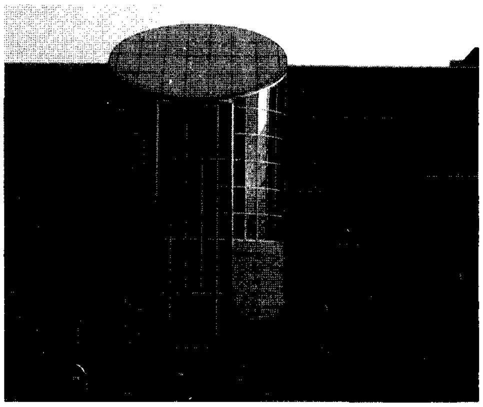


Figura 8

la parte central de la fotografía, tiene la forma de un cilindro circular recto con diámetro de 36 pies. El techo es inclinado y forma un ángulo de 45°. ¿Cuál es el área de la superficie del techo?

Los problemas del 19 al 21 están relacionados con el ejemplo 3.

19. Considere la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ entre los planos $z = h_1$ y $z = h_2$, en donde $0 \leq h_1 < h_2 \leq a$. Determine el valor de h tal que el plano $z = h$ corte a la mitad el área de la superficie.

20. Demuestre que el casquete polar (figura 9) de una esfera de radio a determinado mediante el ángulo esférico ϕ tiene área $2\pi a^2(1 - \cos\phi)$.

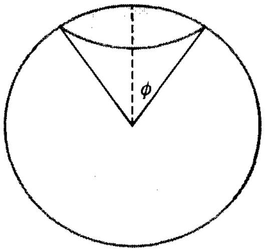


Figura 9

21. Otro problema del chivo (véase el conjunto de problemas 10.7) Cuatro chivos tienen áreas de pastado A, B, C y D, respectivamente. Los primeros tres chivos están detenidos mediante cuerdas de longitud b, el primero en un plano horizontal, el segundo en el exterior de una esfera de radio a y el tercero en el interior de una esfera de radio a. El cuarto chivo debe permanecer dentro de un anillo de radio b sobre una esfera de radio a. Determine fórmulas para A, B, C y D y ordénelas según su tamaño. Suponga que $b < a$.

22. Sea S una región plana en el espacio tridimensional, y sean S_{xy}, S_{xz} y S_{yz} sus proyecciones sobre los tres planos de coordenadas (figura 10). Demuestre que

$$[A(S)]^2 = [A(S_{xy})]^2 + [A(S_{xz})]^2 + [A(S_{yz})]^2$$

23. Suponga que la región S de la figura 10 está sobre el plano $z = f(x, y) = ax + by + c$ y que S está por arriba del plano xy. Demuestre que el volumen del cilindro sólido bajo S es $A(S_{xy})f(\bar{x}, \bar{y})$, donde $(\bar{x}, \bar{y})$ es el centroide de S_{xy}.

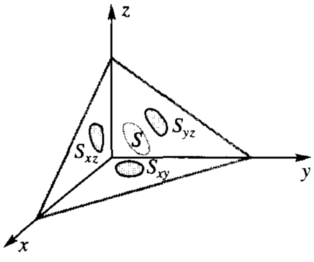


Figura 10

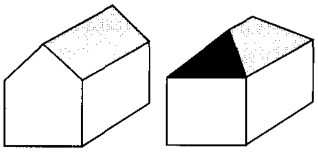


Figura 11

24. La casa de Joe tiene una base rectangular con techo de dos aguas y la casa de Alex tiene la misma base, con un techo de tipo piramidal (véase la figura 11). Las pendientes de todas las partes de ambos techos son iguales. ¿Cuál techo tiene menor área?

25. Demuestre que el área de la superficie de un plano no vertical sobre una región S en el plano xy es $A(S)\sec r$, donde r es el ángulo agudo entre un vector normal al plano y el eje z positivo.

26. Sea $\gamma = \gamma(x, y, f(x, y))$ el ángulo agudo entre el eje z y un vector normal a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(x, y, f(x, y))$ sobre la superficie. Muestre que $\gamma = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$. (Note que esto da otra fórmula para el área de una superficie: $A(G) = \iint\limits_S \sec\gamma \, dA$).

En los problemas 27 y 28 determine el área de la superficie dada. Si no puede evaluar una integral mediante el segundo teorema fundamental del cálculo, entonces use la regla de la parábola con $n = 10$.

27. El paraboloide $z = x^2 + y^2$ sobre la región

(a) en el primer cuadrante y dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$

(b) dentro del triángulo con vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 3)$

28. El paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ sobre la región

(a) en el primer cuadrante y dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$

(b) dentro del triángulo con vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 3)$

29. A continuación se dan seis superficies. Sin realizar integración, clasifique las superficies en orden del área de sus superficies, de menor a mayor. *Sugerencia:* puede haber algunos "empates".

(a) El paraboloide $z = x^2 + y^2$ sobre la región en el primer cuadrante y dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$

(b) El paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ sobre la región en el primer cuadrante y dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$

(c) El paraboloide $z = x^2 + y^2$ sobre la región dentro del rectángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$

(d) El paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ sobre la región dentro del rectángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$

(e) El paraboloide $z = x^2 + y^2$ sobre la región dentro del triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$

(f) El paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ sobre la región dentro del triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ **2.** $\iint\limits_S \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dA$ **3.** $\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \left(a/\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right) dy\, dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \left(ar/\sqrt{a^2 - r^2}\right) dr\, d\theta; 2\pi a^2$ **4.** $2\pi ah$

13.7

Integrales triples en coordenadas cartesianas

El concepto implicado en las integrales sencillas y dobles se extiende de manera natural a las integrales triples y hasta de orden n.

Considere una función f de tres variables definida en una región B con forma de caja, con caras paralelas a los planos de coordenadas. Ya no podemos graficar f (necesitaríamos cuatro dimensiones), pero podemos dibujar B (figura 1). Forme una partición P de B pasando los planos por B paralelos a los planos de coordenadas, cortando así a B en pequeñas cajas $B_1, B_2, \ldots, B_n$; la figura 1 muestra una subcaja común, B_k. En B_k elegimos un punto muestra $(\overline{x}_k, \overline{y}_k, \overline{z}_k)$ y consideramos la suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k, \overline{y}_k, \overline{z}_k)\, \Delta V_k$$

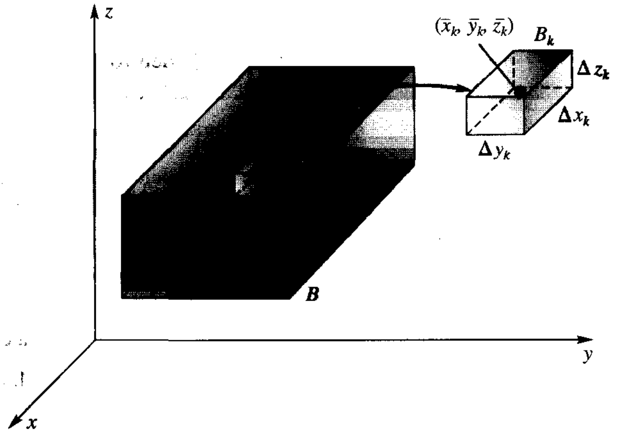


Figura 1

donde $\Delta V_k = \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$ es el volumen de B_k. Sea $\|P\|$ la norma de la partición, es decir, la longitud de la mayor diagonal de todas las subcajas. Entonces definimos la **integral triple** como

$$\boxed{\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k, \overline{y}_k, \overline{z}_k)\, \Delta V_k}$$

siempre que este límite exista.

Aquí surge la pregunta del tipo de funciones que son integrables, como lo fue en el caso de las integrales sencillas y dobles. Ciertamente es suficiente que f sea continua en B. En realidad, podemos permitir que haya algunas discontinuidades; por ejemplo, en un número finito de superficies suaves. No demostraremos esto (es una tarea muy difícil), pero afirmamos que es cierto.

Como es de esperar, la integral triple tiene las propiedades usuales: linealidad, aditividad en conjuntos que se traslapan sólo en una superficie frontera y la propiedad de comparación. Por último, *las integrales triples se pueden escribir como integrales triples iteradas*, como ahora mostraremos.

EJEMPLO 1 Evalúe $\iiint_B x^2 yz\, dV$, donde B es la caja

$$B = \{(x, y, z): 1 \le x \le 2, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 2\}$$

SOLUCIÓN

$$\iiint_B x^2 yz\, dV = \int_0^2 \int_0^1 \int_1^2 x^2 yz\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^2 \int_0^1 \left[\frac{1}{3} x^3 yz\right]_1^2 dy\, dz = \int_0^2 \int_0^1 \frac{7}{3} yz\, dy\, dz$$

$$= \frac{7}{3}\int_0^2 \left[\frac{1}{2}y^2 z\right]_0^1 dz = \frac{7}{3}\int_0^2 \frac{1}{2} z\, dz$$

$$= \frac{7}{6}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^2 = \frac{7}{3}$$

Hay seis posibles órdenes de integración. Cada uno da la respuesta $\frac{7}{3}$. ■

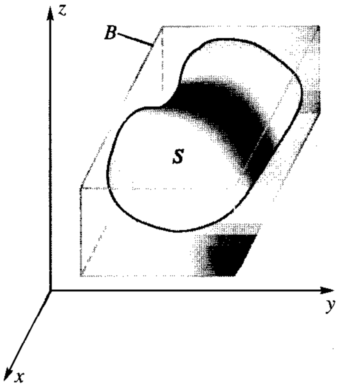


Figura 2

Regiones generales Considere un conjunto cerrado y acotado S en el espacio tridimensional y enciérrelo en una caja B, como se muestra en la figura 2. Sea $f(x, y, z)$ definida en S, y dé a f el valor cero fuera de S. Entonces definimos

$$\iiint_S f(x, y, z)\, dV = \iiint_B f(x, y, z)\, dV$$

La integral de la derecha fue definida en nuestras observaciones iniciales, pero no significa que sea fácil de evaluar. De hecho, si el conjunto S es suficientemente complicado, tal vez no podamos hacer la evaluación.

Sea S un conjunto z-simple (las rectas verticales cortan a S en un solo segmento de recta) y sea S_{xy} su proyección en el plano xy (figura 3). Entonces

$$\iiint_S f(x, y, z)\, dV = \iint_{S_{xy}} \left[\int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\right] dA$$

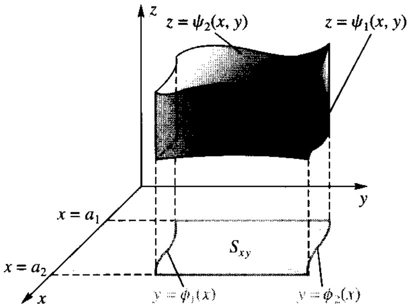


Figura 3

Si además S_{xy} es un conjunto y-simple (como se muestra en la figura 3), podemos reescribir la integral doble exterior como una integral iterada.

$$\boxed{\iiint_S f(x, y, z)\, dV = \int_{a_1}^{a_2} \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx}$$

Es posible que haya otros órdenes de integración, según la forma de S, pero en cada caso esperamos que los límites de la integral interior sean funciones de dos variables, que los de la integral intermedia sean funciones de una variable y que los de la integral exterior sean constantes.

Daremos varios ejemplos. El primero simplemente ilustra la evaluación de una integral triple iterada.

Límites de integración

Los límites de integración en la integral más interna pueden depender de las otras *dos* variables de integración. Los límites de integración de la integral intermedia pueden depender *sólo* de la variable de integración más externa. Por último, los límites de integración para la integral exterior no pueden depender de las variables de integración.

EJEMPLO 2 Evalúe la integral iterada

$$\int_{-2}^{5}\int_0^{3x}\int_y^{x+2} 4\, dz\, dy\, dx$$

SOLUCIÓN

$$\int_{-2}^{5}\int_0^{3x}\int_y^{x+2} 4\, dz\, dy\, dx = \int_{-2}^{5}\int_0^{3x}\left(\int_y^{x+2} 4\, dz\right) dy\, dx$$

$$= \int_{-2}^{5}\int_0^{3x} [4z]_y^{x+2}\, dy\, dx$$

$$= \int_{-2}^{5}\int_0^{3x} (4x - 4y + 8)\, dy\, dx$$

$$= \int_{-2}^{5} [4xy - 2y^2 + 8y]_0^{3x}\, dx$$

$$= \int_{-2}^{5} (-6x^2 + 24x)\, dx = -14$$ ■

EJEMPLO 3 Evalúe la integral triple de $f(x, y, z) = 2xyz$ sobre la región sólida S en el primer octante que está acotada por el cilindro parabólico $z = 2 - \frac{1}{2}x^2$ y los planos $z = 0, y = x$ y $y = 0$.

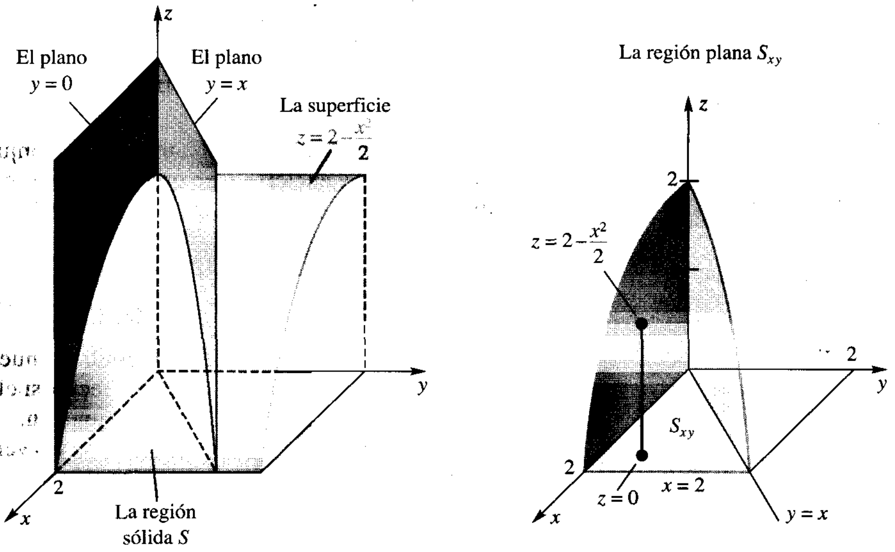

z
El plano $y = 0$
El plano $y = x$
La superficie $z = 2 - \frac{x^2}{2}$
y
2
x
La región sólida S
La región plana S_{xy}
z
2
$z = 2 - \frac{x^2}{2}$
2
y
2
S_{xy}
$z = 0$
$x = 2$
x
$y = x$

Figura 4

SOLUCIÓN La región sólida S se muestra en la figura 4. La integral triple

$$\iiint_S 2xyz\, dV$$

se puede evaluar mediante una integral iterada.

Observe primero que S es un conjunto z-simple y que su proyección S_{xy} en el plano xy es y-simple (también es x-simple). En la primera integración, x y y están fijos; integramos a lo largo de una recta vertical desde $z = 0$ a $z = 2 - x^2/2$. Entonces, el resultado se integra sobre el conjunto S_{xy}.

$$\begin{aligned}\iiint_S 2xyz\, dV &= \int_0^2 \int_0^x \int_0^{2-x^2/2} 2xyz\, dz\, dy\, dx \\ &= \int_0^2 \int_0^x [xyz^2]_0^{2-x^2/2}\, dy\, dx \\ &= \int_0^2 \int_0^x \left(4xy - 2x^3y + \frac{1}{4}x^5y\right) dy\, dx \\ &= \int_0^2 \left(2x^3 - x^5 + \frac{1}{8}x^7\right) dx = \frac{4}{3}\end{aligned}$$ ■

En el ejemplo 3 hay varios órdenes posibles de integración. Ilustraremos otra forma de resolver este problema

EJEMPLO 4 Evalúe la integral del ejemplo 3 haciendo la integración en el orden $dy\, dx\, dz$.

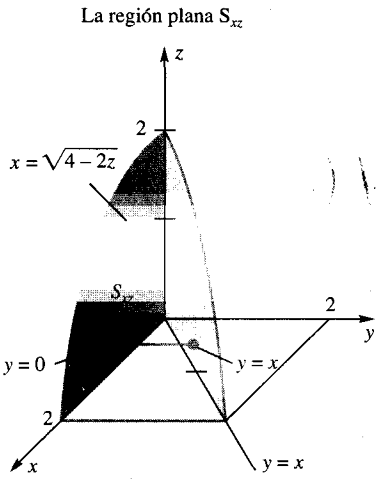

La región plana S_{xz}
z
2
$x = \sqrt{4-2z}$
S_{xz}
2
y
$y = 0$
$y = x$
2
x
$y = x$

Figura 5

SOLUCIÓN Observe que el sólido S es y-simple y que se proyecta sobre el conjunto plano S_{xz} que aparece en la figura 5. Primero integramos a lo largo de una recta horizontal de $y = 0$ a $y = x$; luego integramos el resultado sobre S_{xz}.

$$\iiint_S 2xyz\, dV = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-2z}} \int_0^x 2xyz\, dy\, dx\, dz$$

$$= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-2z}} x^3 z\, dx\, dz = \frac{1}{4}\int_0^2 \left(\sqrt{4-2z}\right)^4 z\, dz$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 (16z - 16z^2 + 4z^3)\, dz = \frac{4}{3} \qquad \blacksquare$$

Masa y centro de masa Los conceptos de masa y centro de masa se generalizan con facilidad a regiones sólidas. En este momento, el proceso que conduce a la fórmula correcta es ya conocido y se puede resumir en nuestro lema: *rebanar, aproximar, integrar*. La figura 6 muestra toda la idea. El símbolo $\delta(x, y, z)$ denota la densidad (masa por unidad de volumen) en (x, y, z).

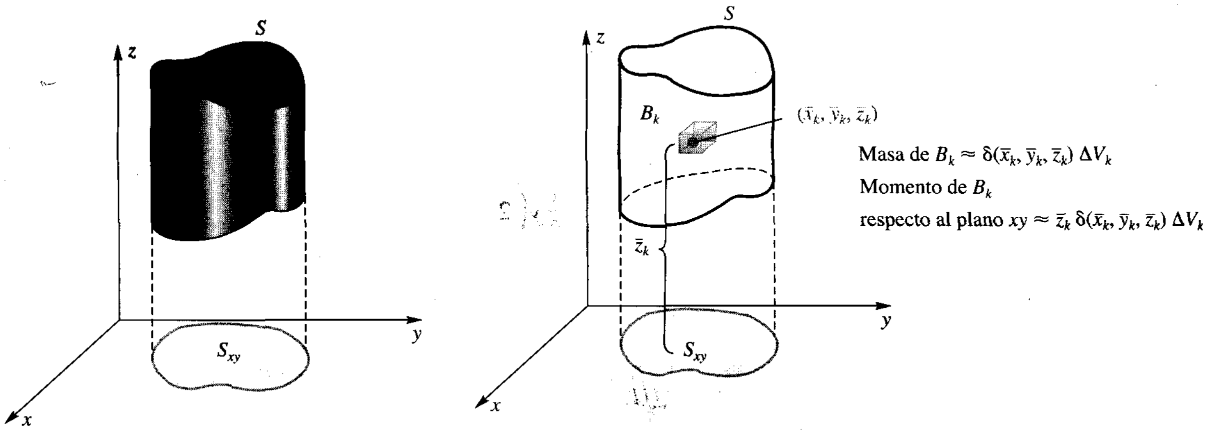

S
z
y
S_{xy}
x
S
z
B_k
$(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$
Masa de $B_k \approx \delta(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)\,\Delta V_k$
Momento de B_k
respecto al plano $xy \approx \bar{z}_k\,\delta(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)\,\Delta V_k$
$\bar{z}_k$
y
S_{xy}
x

Figura 6

Las fórmulas integrales correspondientes a la masa m del sólido S, el momento M_{xy} de S respecto al plano xy, y la coordenada z del centro de masa, $\bar{z}$, son

$$\boxed{\begin{aligned} m &= \iiint_S \delta(x, y, z)\, dV \\ M_{xy} &= \iiint_S z\delta(x, y, z)\, dV \\ \bar{z} &= \frac{M_{xy}}{m} \end{aligned}}$$

Hay fórmulas análogas para M_{yz}, M_{xz}, $\bar{x}$, y $\bar{y}$.

EJEMPLO 5 Determine la masa y el centro de masa del sólido S del ejemplo 3, suponiendo que su densidad es proporcional a la distancia desde la base en el plano xy.

SOLUCIÓN Por hipótesis, $\delta(x, y, z) = kz$, donde k es una constante. Así,

$$
\begin{aligned}
m &= \iiint_S kz\,dV = \int_0^2 \int_0^x \int_0^{2-x^2/2} kz\,dz\,dy\,dx \\
&= k\int_0^2 \int_0^x \frac{1}{2}\left(2 - \frac{x^2}{2}\right)^2 dy\,dx = k\int_0^2 \int_0^x \left(2 - x^2 + \frac{1}{8}x^4\right) dy\,dx \\
&= k\int_0^2 \left(2x - x^3 + \frac{1}{8}x^5\right) dx = k\left[x^2 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{48}\right]_0^2 = \frac{4}{3}k \\
M_{xy} &= \iiint_S kz^2\,dV = \int_0^2 \int_0^x \int_0^{2-x^2/2} kz^2\,dz\,dy\,dx \\
&= \frac{k}{3}\int_0^2 \int_0^x \left(2 - \frac{x^2}{2}\right)^3 dy\,dx \\
&= \frac{k}{3}\int_0^2 \int_0^x \left(8 - 6x^2 + \frac{3}{2}x^4 - \frac{1}{8}x^6\right) dy\,dx \\
&= \frac{k}{3}\int_0^2 \left(8x - 6x^3 + \frac{3}{2}x^5 - \frac{1}{8}x^7\right) dx \\
&= \frac{k}{3}\left[4x^2 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{4}x^6 - \frac{1}{64}x^8\right]_0^2 = \frac{4}{3}k \\
M_{xz} &= \iiint_S kyz\,dV = \int_0^2 \int_0^x \int_0^{2-x^2/2} kyz\,dz\,dy\,dx \\
&= k\int_0^2 \int_0^x \frac{1}{2}y\left(2 - \frac{x^2}{2}\right)^2 dy\,dx = k\int_0^2 \frac{1}{4}x^2\left(2 - \frac{x^2}{2}\right)^2 dx \\
&= k\int_0^2 \left(x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{16}x^6\right) dx = \frac{64}{105}k \\
M_{yz} &= \iiint_S kxz\,dV = \int_0^2 \int_0^x \int_0^{2-x^2/2} kxz\,dz\,dy\,dx = \frac{128}{105}k \\
\bar{z} &= \frac{M_{xy}}{m} = \frac{4k/3}{4k/3} = 1 \\
\bar{y} &= \frac{M_{xz}}{m} = \frac{64k/105}{4k/3} = \frac{16}{35} \\
\bar{x} &= \frac{M_{yz}}{m} = \frac{128k/105}{4k/3} = \frac{32}{35}
\end{aligned}
$$

■

Variables aleatorias múltiples En la sección 5.7 vimos cómo se pueden calcular probabilidades para variables aleatorias como áreas debajo de la función de densidad de probabilidad y cómo se pueden calcular esperanzas como momentos. Estos conceptos se generalizan con facilidad al caso de un par (o terna etcétera) de variables aleatorias. Una función $f(x, y, z)$ es una **función conjunta de densidad de probabilidad** (FDP) para las variables aleatorias (X, Y, Z), si $f(x, y, z) \geq 0$ para toda (x, y, z) en S y

$$\iiint_S f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx = 1$$

donde S es la región de todos los valores posibles para (X, Y, Z). Entonces, una probabilidad que incluya a (X, Y, Z) puede calcularse como la integral triple sobre la región apropiada. El valor esperado de alguna función $g(X, Y, Z)$ se define como

$$E(g(X, Y, Z)) = \iiint_S g(x, y, z)\,f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx$$

Con modificaciones obvias, esta discusión se aplica a parejas (o n-upla) de variables aleatorias.

EJEMPLO 6 La FDP conjunta para las variables aleatorias (X, Y, Z) es de la forma

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } 0 \le x \le 2; 0 \le y \le x; 0 \le z \le 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcule (a) $P(Y \le X/2)$, y (b) $E(Y)$.

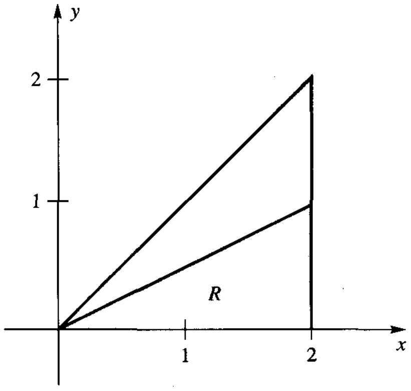


Figura 7

SOLUCIÓN

(a) Observe que $Y \le X/2$ sí y sólo si (X, Y) está en la región sombreada R de la figura 7 y $0 \le Z \le 1$. Por lo tanto,

$$P\left(Y \le \frac{X}{2}\right) = \int_0^2 \int_0^{x/2} \int_0^1 \frac{1}{2}\,dz\,dy\,dx = \int_0^2 \int_0^{x/2} \frac{1}{2}\,dy\,dx = \int_0^2 \frac{x}{4}\,dx = \left[\frac{x^2}{8}\right]_0^2 = \frac{1}{2}$$

(b) La esperanza de Y es

$$\begin{aligned} E(Y) &= \iiint_S y\,f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx = \int_0^2 \int_0^x \int_0^1 \frac{y}{2}\,dz\,dy\,dx \\ &= \int_0^2 \int_0^x \frac{y}{2}\,dy\,dx = \int_0^2 \left[\frac{y^2}{4}\right]_0^x dx \\ &= \int_0^2 \frac{x^2}{4}\,dx = \left[\frac{x^3}{12}\right]_0^2 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

■

Revisión de conceptos

1. $\iiint_S 1\,dV$ proporciona el ______ del sólido S.

2. Si la densidad en (x, y, z) es $|xyz|$, entonces la masa de S es ______.

3. $\int_0^1 \int_0^1 \int_{x^2}^{x} f(x, y, z)\,dy\,dx\,dz = \int_0^1 \int_0^1 \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$, donde $g(y) =$ ______ y $h(y) =$ ______.

4. Sea S la esfera sólida unitaria con centro en el origen. Entonces, con base en la simetría, concluimos que $\iiint_S (x + y + z)\,dV =$ ______.

Conjunto de problemas 13.7

En los problemas del 1 al 10 evalúe las integrales iteradas.

1. $\int_{-3}^{7} \int_0^{2x} \int_y^{x-1} dz\,dy\,dx$

2. $\int_0^2 \int_{-1}^{4} \int_0^{3y+x} dz\,dy\,dx$

3. $\int_1^4 \int_{z-1}^{2z} \int_0^{y+2z} dx\,dy\,dz$

4. $\int_0^5 \int_{-2}^{4} \int_1^2 6xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$

5. $\int_4^{24} \int_0^{24-x} \int_0^{24-x-y} \frac{y+z}{x}\,dz\,dy\,dx$

6. $\int_0^5 \int_0^3 \int_{z^2}^{9} xyz\,dx\,dz\,dy$

7. $\int_0^2 \int_1^z \int_0^{\sqrt{x/z}} 2xyz\,dy\,dx\,dz$

8. $\int_0^{\pi/2} \int_0^z \int_0^y \operatorname{sen}(x + y + z)\,dx\,dy\,dz$

9. $\int_{-2}^{4} \int_{x-1}^{x+1} \int_0^{\sqrt{2y/x}} 3xyz\,dz\,dy\,dx$

10. $\int_0^{\pi/2} \int_{\operatorname{sen} 2z}^{0} \int_0^{2yz} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) dx\,dy\,dz$

En los problemas del 11 al 20 bosqueje el sólido S. Luego escriba una integral iterada para

$$\iiint_S f(x, y, z)\,dV$$

11. $S = \{(x, y, z): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 3,$
$0 \le z \le \frac{1}{6}(12 - 3x - 2y)\}$

12. $S = \{(x, y, z): 0 \le x \le \sqrt{4 - y^2},$
$0 \le y \le 2, 0 \le z \le 3\}$

13. $S = \{(x, y, z): 0 \le x \le \frac{1}{2}y, 0 \le y \le 4, 0 \le z \le 2\}$

14. $S = \{(x, y, z): 0 \le x \le \sqrt{y}, 0 \le y \le 4, 0 \le z \le \frac{3}{2}x\}$

15. $S = \{(x, y, z): 0 \le x \le 3z,$
$0 \le y \le 4 - x - 2z, 0 \le z \le 2\}$

16. $S = \{(x, y, z): 0 \le x \le y^2, 0 \le y \le \sqrt{z}, 0 \le z \le 1\}$

17. S es el tetraedro con vértices $(0, 0, 0)$, $(3, 2, 0)$, $(0, 3, 0)$ y $(0, 0, 2)$.

18. S es la región del primer octante acotada por la superficie $z = 9 - x^2 - y^2$ y los planos de coordenadas.

19. S es la región del primer octante acotada por el cilindro $y^2 + z^2 = 1$ y los planos $x = 1$ y $x = 4$.

20. S es la menor región acotada por el cilindro $x^2 + y^2 - 2y = 0$ y los planos $x - y = 0$, $z = 0$ y $z = 3$.

En los problemas del 21 al 28 utilice integrales triples iteradas para determinar las cantidades que se indican.

21. El volumen del sólido en el primer octante acotado por $y = 2x^2$ y $y + 4z = 8$.

22. El volumen del sólido en el primer octante acotado por el cilindro elíptico $y^2 + 64z^2 = 4$ y el plano $y = x$.

23. El volumen del sólido acotado por los cilindros $x^2 = y$ y $z^2 = y$ y el plano $y = 1$.

24. El volumen del sólido acotado por el cilindro $y = x^2 + 2$ y los planos $y = 4$, $z = 0$ y $3y - 4z = 0$.

25. El centro de masa del tetraedro acotado por los planos $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$, si la densidad es proporcional a la suma de las coordenadas del punto.

26. El centro de masa del sólido acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ y los planos $z = 0$ y $z = 4$, si la densidad es proporcional al cuadrado de la distancia al origen.

27. El centro de masa de la parte de la esfera sólida $\{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \le a^2\}$ que está en el primer octante, suponiendo que tiene densidad constante.

28. El momento de inercia I_x, en torno del eje x, del sólido acotado por el cilindro $y^2 + z^2 = 4$ y los planos $x - y = 0$, $x = 0$ y $z = 0$, si la densidad $\delta(x, y, z) = z$. *Sugerencia*: necesitará desarrollar su propia fórmula: *rebanar, aproximar, integrar.*

En los problemas del 29 al 32 escriba la integral iterada dada como una integral iterada con el orden de integración indicado.

29. $$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{1-y^2-z^2}} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy;\ dz\, dy\, dx$$

30. $$\int_0^2 \int_0^{4-2y} \int_0^{4-2y-z} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy;\ dz\, dy\, dx$$

31. $$\int_0^2 \int_0^{9-x^2} \int_0^{2-x} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx;\ dy\, dx\, dz$$

32. $$\int_0^2 \int_0^{9-x^2} \int_0^{2-x} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx;\ dz\, dx\, dy$$

33. Considere el sólido (figura 7) en el primer octante recortado del cilindro cuadrado con lados $x = 0$, $x = 1$, $z = 0$ y $z = 1$ por el plano $2x + y + 2z = 6$. Calcule su volumen de tres maneras.

(a) De la manera difícil: mediante una integración $dz\, dy\, dx$.

(b) De una manera más fácil: mediante una integración $dy\, dx\, dz$.

(c) De la manera más fácil: mediante el problema 23 de la sección 13.6.

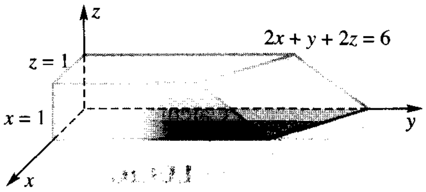


Figura 8

34. Suponiendo que la densidad del sólido de la figura 8 es una constante k, determine el momento de inercia del sólido respecto al eje y.

35. Si la temperatura en (x, y, z) es $T(x, y, z) = 30 - z$ grados, determine la temperatura promedio del sólido de la figura 8.

36. Suponiendo que la temperatura del sólido de la figura 8 es $T(x, y, z) = 30 - z$, determine todos los puntos en el sólido en donde la temperatura real es igual a la temperatura promedio.

37. Determine el centro de masa del sólido homogéneo de la figura 8.

38. Considere el sólido (figura 9) en el primer octante cortado del cilindro cuadrado, con lados $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ y $y = 1$, mediante el plano $x + y + z = 4$. Determine su volumen de tres maneras.

(a) De la manera difícil: mediante una integración $dx\, dz\, dy$

(b) De la manera fácil: mediante una integración $dz\, dy\, dx$

(c) De la manera más fácil: mediante el problema 23 de la sección 13.6.

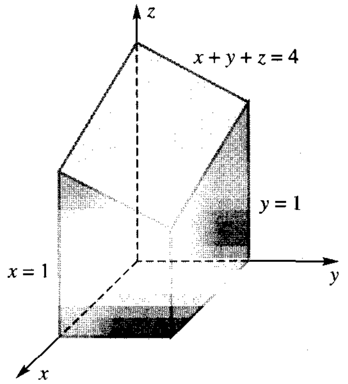


Figura 9

39. Determine el centro de masa del sólido homogéneo en la figura 9.

40. Suponga que la temperatura en el sólido de la figura 9 inicia en 40° en la parte inferior (el plano xy) y aumenta (de forma continua) 5° por cada unidad por encima del plano xy. Determine la temperatura promedio del sólido.

41. El problema de la lata de refresco Una lata de refresco llena, de altura h, está sobre el plano xy. Perfore un agujero en la base y observe $\bar{z}$ (la coordenada z del centro de masa) cuando el refresco se derrama. Comenzando en $h/2$, $\bar{z}$ baja gradualmente a un mínimo y luego sube de nuevo a $h/2$ cuando la lata está vacía. Demuestre que $\bar{z}$ es mínimo cuando coincide con la altura de la soda. (No desprecie la masa de la lata). ¿Valdría la misma conclusión para una botella de soda? *Sugerencia:* no calcule; piense geométricamente.

CAS **42.** Sea $S = \{(x, y, z): x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leq 1\}$. Evalúe $\iiint\limits_S (xy + xz + yz)\, dV$.

43. Suponga que las variables aleatorias (*X*, *Y*) tienen FDP conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} ky, & \text{si } 0 \leq x \leq 12; 0 \leq y \leq x \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine cada uno de lo siguiente:

(a) k (b) $P(Y > 4)$ (c) $E(X)$

44. Suponga que las variables aleatorias (*X*, *Y*, *Z*) tienen FDP conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} kxy, & \text{si } 0 \leq x \leq y; 0 \leq y \leq 4; 0 \leq z \leq 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine cada uno de lo siguiente:

(a) k (b) $P(X > 2)$ (c) $E(X)$

45. Suponga que las variables aleatorias (*X*, *Y*) tienen FDP conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{256}(x^2 + y^2), & \text{si } 0 \leq x \leq y; 0 \leq y \leq 4 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine cada uno de lo siguiente:

(a) $P(X > 2)$ (b) $P(X + Y \leq 4)$ (c) $E(X + Y)$

46. Suponga que las variables aleatorias (*X*, *Y*) tienen función de densidad de probabilidad conjunta $f(x, y)$. La **función marginal de densidad de probabilidad** de *X* se define como

$$f_X(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y)\, dy$$

donde $a(x)$ y $b(x)$ son los valores más pequeño y más grande posibles, respectivamente, que y puede tener para la x dada. Muestre que

(a) $P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)\, dx$

(b) $E(X) = \int_a^b x\, f_X(x)\, dx$

47. Determine la FDP marginal para la variable aleatoria *X* en el problema 43 y utilícela para calcular *E*(*X*).

48. Proporcione una definición razonable para la FDP marginal de *Y*, y utilícela para calcular la FDP marginal de *Y* en el problema 44.

Respuesta a la revisión de conceptos: **1.** volumen **2.** $\iiint\limits_S |xyz|\, dV$ **3.** y; $\sqrt{y}$ **4.** 0

13.8
Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas

Cuando una región sólida *S* en el espacio tridimensional tiene un eje de simetría, la evaluación de las integrales triples sobre *S* se facilita con frecuencia mediante las coordenadas cilíndricas. De manera análoga, si *S* es simétrica respecto a un punto, las coordenadas esféricas pueden ser de utilidad. En la sección 11.9, presentamos las coordenadas cilíndricas *y* esféricas; tal vez quiera repasar esta sección antes de continuar. Las dos son casos especiales de transformaciones de variable para integrales múltiples, el tema de la sección 13.9.

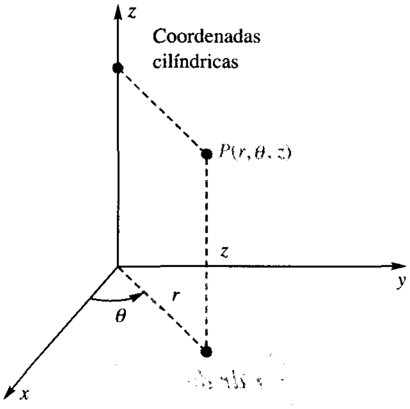


Figura 1

Coordenadas cilíndricas La figura 1 nos recuerda el significado de las coordenadas cilíndricas *y* muestra los símbolos que usaremos. Las coordenadas cilíndricas *y* cartesianas (rectangulares) están relacionadas mediante las ecuaciones

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r \operatorname{sen}\theta, \qquad x^2 + y^2 = r^2$$

Como resultado, la función $f(x, y, z)$ se transforma en

$$f(x, y, z) = f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z) = F(r, \theta, z)$$

al escribirla en coordenadas cilíndricas.

Suponga ahora que queremos evaluar $\iiint\limits_S f(x, y, z)\, dV$, donde *S* es una región *S* sólida. Divida *S* por medio de una cuadrícula cilíndrica, donde el elemento de volumen típico tiene la forma que se muestra en la figura 2. Como esta pieza (llamada *cuña cilíndrica*) tiene volumen $\Delta V_k = \bar{r}_k\, \Delta r_k\, \Delta\theta_k\, \Delta z_k$, la suma que aproxima la integral tiene la forma

$$\sum_{k=1}^{n} F(\bar{r}_k, \bar{\theta}_k, \bar{z}_k)\bar{r}_k\, \Delta z_k\, \Delta r_k\, \Delta\theta_k$$

Al considerar el límite cuando la norma de la partición tiende a cero, obtenemos una nueva integral que sugiere una fórmula importante para cambiar de las coordenadas cartesianas a las cilíndricas en una integral triple.

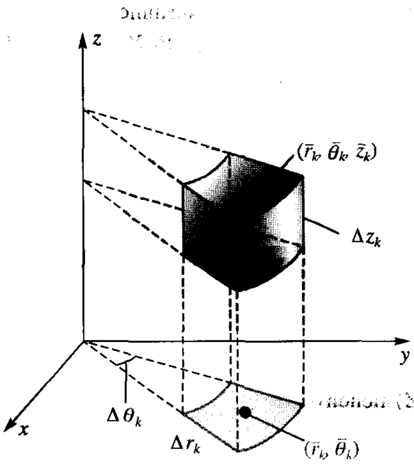

z
$(\bar{r}_k, \bar{\theta}_k, \bar{z}_k)$
Δz_k
y
x
$\Delta\theta_k$
Δr_k
$(\bar{r}_k, \bar{\theta}_k)$

Figura 2

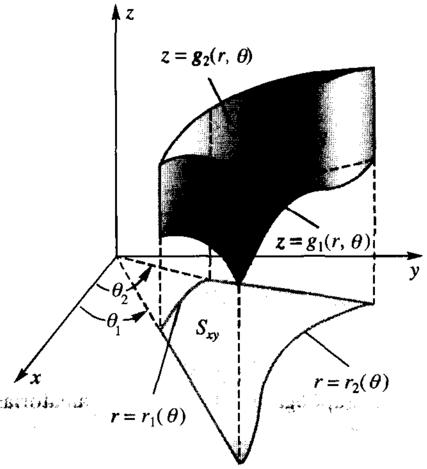


Figura 3

Coordenadas cilíndricas y coordenadas polares

La transformación de coordenadas cartesianas (en el espacio bidimensional) a coordenadas polares es

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta$$

mientras que la transformación de coordenadas cartesianas (en el espacio tridimensional) a coordenadas cilíndricas es

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta \qquad z = z$$

En otras palabras, para identificar un punto en el espacio tridimensional mediante coordenadas cilíndricas, especificamos las coordenadas polares para la pareja ordenada (x, y) y luego "le colgamos" la componente z. Como

$$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

no debe sorprendernos que

$$dx\,dy\,dz = r\,dz\,dr\,d\theta$$

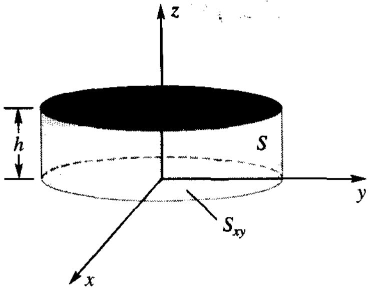


Figura 4

Sea S un sólido z-simple y suponga que su proyección S_{xy} en el plano xy es r-simple, como se muestra en la figura 3. Si f es continua en S, entonces

$$\boxed{\iiint_S f(x, y, z)\,dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}\int_{g_1(r,\theta)}^{g_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)r\,dz\,dr\,d\theta}$$

El hecho fundamental es que las coordenadas $dz\,dy\,dx$ se convierten en $r\,dz\,dr\,d\theta$ en coordenadas cilíndricas.

EJEMPLO 1 Determine la masa y el centro de masa de un cilindro sólido S, suponiendo que la densidad es proporcional a la distancia desde la base.

SOLUCIÓN Con S orientada como se muestra en la figura 4, podemos escribir la función de densidad como $\delta(x, y, z) = kz$, donde k es una constante. Entonces

$$\begin{aligned} m &= \iiint_S \delta(x, y, z)\,dV = k\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^h zr\,dz\,dr\,d\theta \\ &= k\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{1}{2}h^2 r\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}kh^2\int_0^{2\pi}\int_0^a r\,dr\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}kh^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}a^2\,d\theta = \frac{1}{2}kh^2\pi a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_S z\delta(x, y, z)\,dV = k\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^h z^2 r\,dz\,dr\,d\theta \\ &= k\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{1}{3}h^3 r\,dr\,d\theta = \frac{1}{3}kh^3\int_0^{2\pi}\int_0^a r\,dr\,d\theta \\ &= \frac{1}{3}kh^3\pi a^2 \end{aligned}$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\frac{1}{3}kh^3\pi a^2}{\frac{1}{2}kh^2\pi a^2} = \frac{2}{3}h$$

Por simetría, $\bar{x} = \bar{y} = 0$. ■

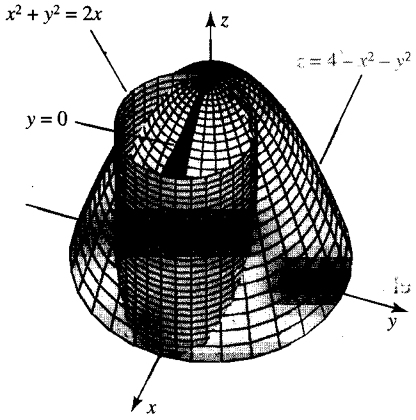

$x^2 + y^2 = 2x$
z
$z = 4 - x^2 - y^2$
$y = 0$
y
x

Figura 5

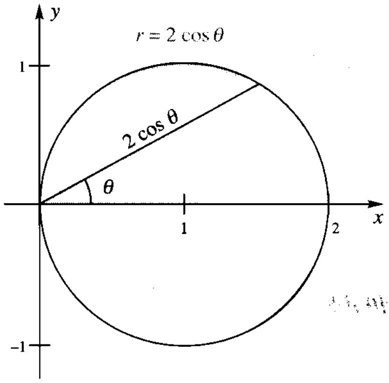

y
$r = 2\cos\theta$
1
$2\cos\theta$
θ
1
2
x
-1

Figura 6

EJEMPLO 2 Determine el volumen de la región sólida S, en el primer octante, acotada por arriba por el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ y lateralmente por el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, como se muestra en la figura 5.

SOLUCIÓN En coordenadas cilíndricas, el paraboloide es $z = 4 - r^2$ y el cilindro es $r = 2\cos\theta$. La variable z va del plano xy al paraboloide, esto es, desde 0 hasta $4 - r^2$. La figura 6 muestra la "sombra" del sólido en el plano xy; esta figura sugiere que para una θ fija, r va de 0 a 2. Por último, θ toma valores de 0 a $\pi/2$. Así que,

$$\begin{aligned} V &= \iiint_S 1\,dV = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{4-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r(4 - r^2)\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\left[2r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_0^{2\cos\theta} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} (8\cos^2\theta - 4\cos^4\theta)\,d\theta \\ &= 8\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - 4\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{4} \end{aligned}$$

Usamos la fórmula 113 de la tabla de integrales al final del libro para hacer los últimos cálculos. ■

Coordenadas esféricas

La figura 7 nos recuerda el significado de las coordenadas esféricas que presentamos en la sección 11.9. Ahí aprendimos que las ecuaciones

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi\cos\theta, \qquad y = \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \qquad z = \rho\cos\phi$$

relacionan las coordenadas esféricas y las coordenadas cartesianas. La figura 8 muestra el elemento de volumen en coordenadas esféricas (denominada *cuña esférica*). Aunque omitiremos los detalles, se puede mostrar que el volumen de la cuña esférica indicada es

$$\Delta V = \bar{\rho}^2 \operatorname{sen}\bar{\phi}\,\Delta\rho\,\Delta\theta\,\Delta\phi$$

donde $(\bar{\rho}, \bar{\theta}, \bar{\phi})$ es un punto elegido en forma adecuada en la cuña.

Dividimos un sólido S por medio de una cuadrícula esférica, formamos la suma adecuada y consideramos el límite para obtener una integral iterada en donde $dz\,dy\,dx$ se reemplaza por $\rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$.

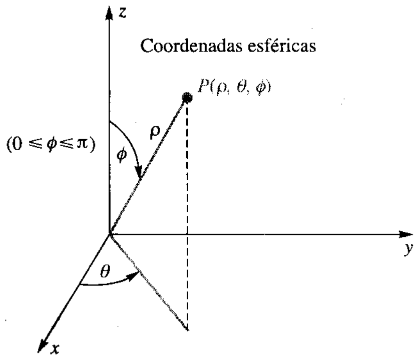

z
Coordenadas esféricas
$P(\rho, \theta, \phi)$
$(0 \le \phi \le \pi)$
ρ
ϕ
y
θ
x

Figura 7

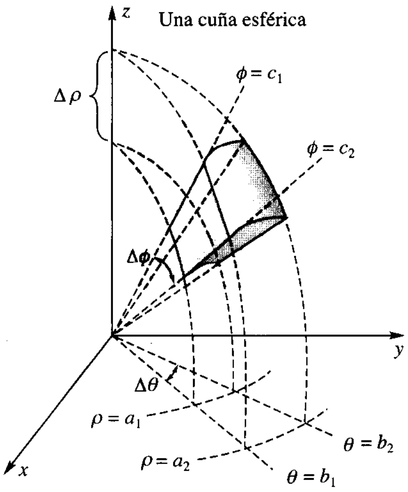

z
Una cuña esférica
$\Delta\rho$
$\phi = c_1$
$\phi = c_2$
$\Delta\phi$
y
$\Delta\theta$
$\rho = a_1$
$\rho = a_2$
$\theta = b_2$
$\theta = b_1$
x

Figura 8

$$\boxed{\iiint\limits_S f(x, y, z)\, dV = \iiint\limits_{\substack{\text{límites}\\ \text{apropiados}}} f(\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi)\rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi}$$

EJEMPLO 3 Determine la masa de una esfera sólida S, si su densidad δ es proporcional a la distancia desde el centro.

SOLUCIÓN Colocamos la esfera con centro en el origen y tomamos su radio como a. La densidad δ está dada por $\delta = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = k\rho$. Así, la masa m está dada por

$$\begin{aligned} m &= \iiint\limits_S \delta \, dV = k \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \rho\rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \\ &= k\frac{a^4}{4} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \phi \, d\theta \, d\phi = \frac{1}{2} k\pi a^4 \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \phi \, d\phi \\ &= k\pi a^4 \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 4 Determine el volumen y el centro de masa del sólido homogéneo S que está acotado por arriba por la esfera $\rho = a$ y abajo por el cono $\phi = \alpha$, donde a y α son constantes (figura 9).

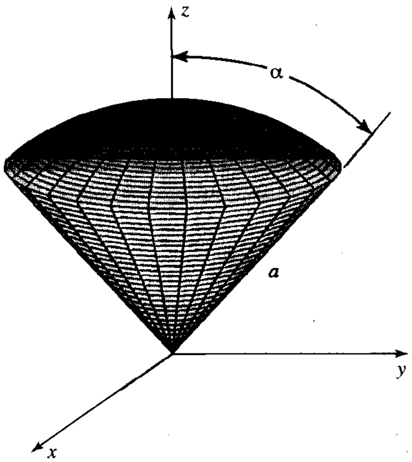


Figura 9

SOLUCIÓN El volumen V está dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\alpha} \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \\ &= \int_0^{\alpha} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a^3}{3}\right) \operatorname{sen} \phi \, d\theta \, d\phi \\ &= \frac{2\pi a^3}{3} \int_0^{\alpha} \operatorname{sen} \phi \, d\phi = \frac{2\pi a^3}{3}(1 - \cos \alpha) \end{aligned}$$

Se concluye que la masa m del sólido es

$$m = kV = \frac{2\pi a^3 k}{3}(1 - \cos \alpha)$$

donde k es la densidad constante.

Por simetría, el centro de masa está sobre el eje z; es decir, $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Para calcular $\bar{z}$, primero calculamos M_{xy}.

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint\limits_S kz \, dV = \int_0^{\alpha} \int_0^{2\pi} \int_0^{a} k(\rho \cos \phi)\rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \\ &= \int_0^{\alpha} \int_0^{2\pi} \int_0^{a} k\rho^3 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \\ &= \int_0^{\alpha} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} k a^4 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \, d\theta \, d\phi \\ &= \int_0^{\alpha} \frac{1}{2}\pi k a^4 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \, d\phi = \frac{1}{4}\pi a^4 k \operatorname{sen}^2 \alpha \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{\frac{1}{4}\pi a^4 k \operatorname{sen}^2 \alpha}{\frac{2}{3}\pi a^3 k(1 - \cos \alpha)} = \frac{3a \operatorname{sen}^2 \alpha}{8(1 - \cos \alpha)} \\ &= \frac{3}{8} a(1 + \cos \alpha) \end{aligned}$$

■

Revisión de conceptos

1. En coordenadas cilíndricas, $dz\,dy\,dx$ toma la forma ______ y en coordenadas esféricas la forma ______.

2. En coordenadas cilíndricas, $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^3 xy\,dz\,dy\,dx$ se convierte en ______.

3. Si S es la esfera unitaria con centro en el origen, entonces $\iiint_S z^2\,dV$, cuando se escribe como una integral iterada en coordenadas esféricas, se convierte en ______.

4. El valor de la integral en la pregunta 3 es ______.

Conjunto de problemas 13.8

En los problemas del 1 al 6 evalúe la integral que se da en coordenadas cilíndricas o en coordenadas esféricas, y describa la región de integración R.

1. $\int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{12} r\,dz\,dr\,d\theta$

2. $\int_0^{2\pi} \int_1^3 \int_0^{12} r\,dz\,dr\,d\theta$

3. $\int_0^{\pi/4} \int_0^3 \int_0^{9-r^2} zr\,dz\,dr\,d\theta$

4. $\int_0^{\pi} \int_0^{\operatorname{sen}\theta} \int_0^2 r\,dz\,dr\,d\theta$

5. $\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

6. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{a} \rho^2 \cos^2\phi \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

En los problemas del 7 al 14 use coordenadas cilíndricas para determinar la cantidad indicada.

7. El volumen del sólido acotado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 4$.

8. El volumen del sólido acotado por arriba por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, abajo por el plano $z = 0$ y lateralmente por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$

9. El volumen del sólido acotado por arriba por la esfera de radio 5 centrada en el origen y por abajo por el plano $z = 4$.

10. El volumen del sólido acotado por arriba por el plano $z = y + 4$, por abajo por el plano xy y lateralmente por el cilindro circular recto que tiene radio 4 y cuyo eje es el eje z.

11. El volumen del sólido acotado por arriba por la esfera $r^2 + z^2 = 5$ y abajo por el paraboloide $r^2 = 4z$

12. El volumen del sólido bajo la superficie $z = xy$, por arriba del plano xy y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$

13. El centro de masa del sólido homogéneo acotado por arriba por $z = 12 - 2x^2 - 2y^2$ y abajo por $z = x^2 + y^2$

14. El centro de masa del sólido homogéneo dentro de $x^2 + y^2 = 4$, fuera de $x^2 + y^2 = 1$, bajo $z = 12 - x^2 - y^2$ y arriba de $z = 0$

En los problemas del 15 al 22 use coordenadas esféricas para determinar la cantidad indicada.

15. La masa del sólido dentro de la esfera $\rho = b$ y fuera de la esfera $\rho = a$ $(a < b)$, si la densidad es proporcional a la distancia desde el origen

16. La masa de un sólido dentro de una esfera de radio $2a$ y fuera de un cilindro circular de radio a cuyo eje es un diámetro de la esfera, si la densidad es proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la esfera

17. El centro de masa de un hemisferio sólido de radio a, si la densidad es proporcional a la distancia del centro de la esfera

18. El centro de masa de un hemisferio sólido de radio a, si la densidad es proporcional a la distancia desde el eje de simetría

19. El momento de inercia del sólido del problema 18 respecto a su eje de simetría

20. El volumen del sólido dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, fuera del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, y por arriba del plano xy

21. El volumen de la menor cuña cortada en la esfera unitaria mediante dos planos que se cortan en un diámetro con un ángulo de 30°

22. $\int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{-\sqrt{9-x^2-z^2}}^{\sqrt{9-x^2-z^2}} (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}\,dy\,dz\,dx$

23. Determine el volumen del sólido acotado por arriba por el plano $z = y$ y abajo por el paraboloide $z = x^2 + y^2$. *Sugerencia:* en coordenadas cilíndricas, el plano tiene la ecuación $z = r \operatorname{sen}\theta$ y el paraboloide tiene ecuación $z = r^2$. Resuelva de forma simultánea para obtener la proyección en el plano xy.

24. Determine el volumen del sólido dentro de las esferas $\rho = 2\sqrt{2}\cos\phi$ y $\rho = 2$.

25. Para una esfera sólida de radio a determine cada distancia promedio.

(a) Al centro

(b) A un diámetro

(c) A un punto en su frontera (considere $\rho = 2a\cos\phi$)

26. Para cualquier sólido homogéneo S, demuestre que el valor promedio de la función lineal $f(x, y, z) = ax + by + cz + d$ en S es $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ es el centro de masa.

27. Una esfera sólida homogénea de radio a tiene centro en el origen. Para la sección S acotada por los semiplanos $\theta = -\alpha$ y $\theta = \alpha$ (como una sección de una naranja), determine cada valor.

(a) La coordenada x del centro de masa

(b) La distancia promedio al eje z

28. Todas las esferas en este problema tienen radio a, densidad constante k y masa m. Calcule, en términos de a y m, el momento de inercia de lo siguiente:

(a) Una esfera sólida en torno de su diámetro

(b) Una esfera sólida en torno de una recta tangente a su frontera (el teorema del eje paralelo también es válido para sólidos; véase el problema 28 de la sección 13.5)

(c) El sólido formado por las dos esferas de la figura 10, en torno del eje z.

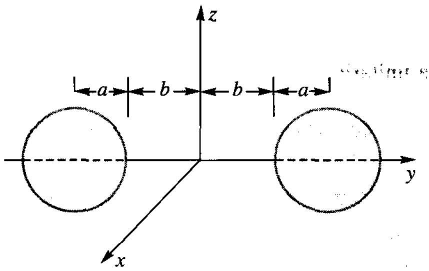


Figura 10

29. Suponga que la esfera de la izquierda en la figura 10 tiene densidad k y la esfera de la derecha tiene densidad ck. Calcule la coordenada y del centro de masa de este sólido formado por las dos esferas (convénzase de que el análogo del problema 33 de la sección 13.5 es válido).

Respuestas de la revisión de conceptos: **1.** $r\,dz\,dr\,d\theta$; $\rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$ **2.** $\int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_0^3 r^3\cos\theta\operatorname{sen}\theta\,dz\,dr\,d\theta$ **3.** $\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^4\cos^2\phi\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$ **4.** $4\pi/15$

13.9
Cambio de variable en integrales múltiples

Terminología y notación

Una función f del conjunto A al conjunto B se dice que es **uno a uno**, si elementos distintos x y y en A se asocian a elementos distintos $f(x)$ y $f(y)$ en B. La función f es **sobre** si su rango consiste en el conjunto B. Una función f que sea uno a uno y sobre se garantiza que tiene una inversa f^{-1}. $\mathbb{R}^2$ denota al conjunto de todas las parejas ordenadas de números reales.

Las fórmulas

$$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$
$$dx\,dy\,dz = r\,dz\,dr\,d\theta$$
$$dx\,dy\,dz = \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

son casos específicos de una fórmula de cambio de variable. Ilustran un resultado general que analizaremos en esta sección. Antes de presentar el resultado para integrales múltiples revisamos el concepto de cambio —o sustituciones— de variables para integrales sencillas.

Si g es una función uno a uno de una sola variable, entonces g tiene una inversa g^{-1} y con base en el capítulo 4 sabemos que

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Al intercambiar los papeles de x y u podemos escribir esto como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u))\,g'(u)\,du$$

Esta última fórmula puede verse como el resultado de hacer la sustitución $x = g(u)$. Esta función, o mapeo, se ilustra en la figura 1. En esta sección desarrollaremos una fórmula análoga para cambio de variables en integrales múltiples. Empezamos con el estudio de transformaciones de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

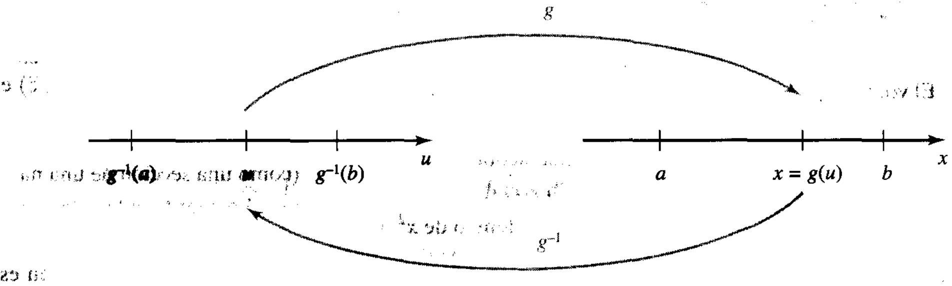


Figura 1

Transformaciones del plano *uv* al plano *xy*

Sean

$$x = x(u, v) \qquad \text{y} \qquad y = y(u, v)$$

y sea

$$G(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

La función G es una función con valores vectoriales con una entrada vectorial. Tal función se denomina **transformación** de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$. La pareja ordenada $(x, y) = G(u, v)$ se denomina **imagen** de (u, v) bajo la transformación G, y (u, v) se denomina **preimagen** de (x, y). La **imagen de un conjunto** S en el plano uv es igual al conjunto de puntos (x, y) en el plano xy que satisfacen $(x, y) = G(u, v)$, donde (u, v) está en S. La función G no puede graficarse de manera ordinaria, ya que necesitaríamos cuatro dimensiones. El lugar de eso, ilustramos la función como una transformación de puntos en el plano uv a puntos en el plano xy. La situación se ilustra en la figura 2. Esta figura muestra una malla en el plano uv con líneas paralelas a los ejes u y v, y su imagen en el plano xy. Las imágenes de rectas verticales en el plano uv se denominan **curvas-*u*** de G (rectas verticales en el plano uv son de la forma $u =$ constante). De forma análoga, las imágenes de rectas horizontales se denominan **curvas-*v*** de G.

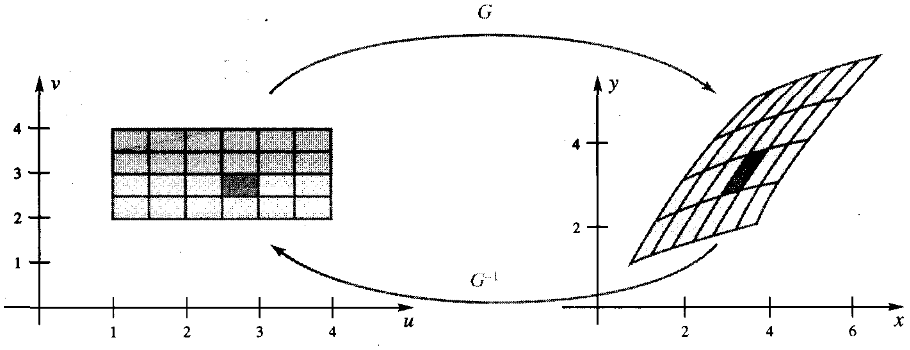


Figura 2

EJEMPLO 1 Sean

$$x = x(u, v) = u + v$$
$$y = y(u, v) = u - v$$

y $G(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$. Determine y grafique las curvas-u y las curvas-v de G para la malla $\{(u, v)\colon (u = 3, 4, 5 \text{ y } 1 \le v \le 4) \text{ o } (v = 1, 2, 3, 4 \text{ y } 3 \le u \le 5)\}$.

SOLUCIÓN Si resolvemos el sistema

$$x = u + v$$
$$y = u - v$$

para u y v, obtenemos

$$u = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$$
$$v = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y$$

Las curvas-u se determinan mediante

$$C = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, \qquad C = 3, 4, 5$$

Esto conduce a las curvas

$$y = 2C - x, \quad C = 3, 4, 5$$

Éstas son rectas paralelas, cada una con pendiente de -1. De forma análoga, las curvas v se obtienen al resolver las ecuaciones

$$C = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y, \qquad C = 1, 2, 3, 4$$

para y cuando $C = 1, 2, 3$ y 4. La solución es

$$y = -2C + x, \qquad C = 1, 2, 3, 4$$

Éstas también son rectas paralelas, cada una con pendiente $+1$. La figura 3 muestra estas curvas. La curva-u para $u = 3$ y la curva-v para $v = 2$ se muestran con guiones. ■

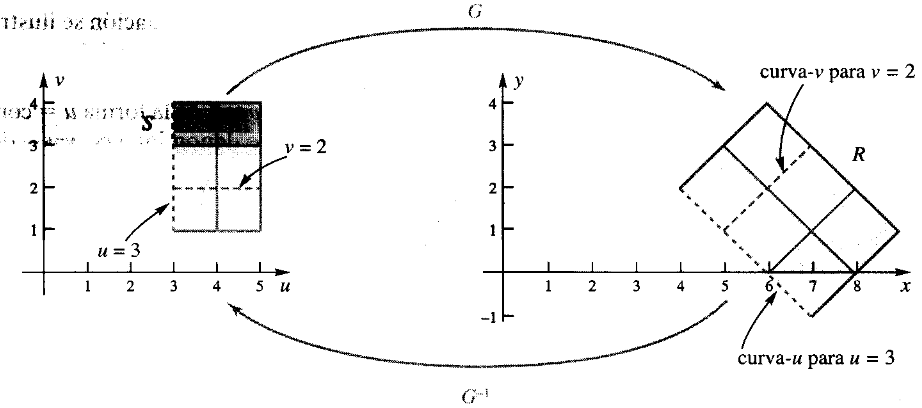


Figura 3

EJEMPLO 2 Para $u > 0$ y $v > 0$, sean

$$x = x(u, v) = u^2 - v^2$$
$$y = y(u, v) = uv$$

y

$$G(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

Determine y grafique las curvas-u y las curvas-v de G para la malla $\{(u, v)$: $(u = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ y $0 \leq v \leq 5)$ o $(v = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ y $0 \leq u \leq 5)\}$ e identifique la curva-u para $u = 4$.

SOLUCIÓN Para resolver el sistema

$$x = u^2 - v^2$$
$$y = uv$$

para u y v, despejamos v de la segunda ecuación (en términos de u), obteniendo $v = y/u$. Al sustituir este resultado en la primera ecuación se obtiene

$$x = u^2 - y^2/u^2$$

que es equivalente a

$$u^4 - xu^2 - y^2 = 0$$

Ésta es una ecuación cuadrática en u^2, así que podemos aplicar la fórmula cuadrática para obtener

$$u^2 = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4y^2}}{2}$$

(Debemos tomar el signo positivo en la fórmula cuadrática, de otra forma la expresión del lado derecho sería negativa). Así que,

$$u = \sqrt{\frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2 + 4y^2}\right)}$$

$$v = \frac{y}{u} = \frac{y}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2 + 4y^2}\right)}}$$

Estas fórmulas se aplican siempre que $(x, y) \neq (0, 0)$; dejamos como ejercicio demostrar que $(x, y) = (0, 0)$ si y sólo si $(u, v) = (0, 0)$. Las curvas-u están determinadas mediante

$$C = \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + 4y^2}}{2}}, \qquad C = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Que se simplifican como sigue:

$$2C^2 = x + \sqrt{x^2 + 4y^2}$$

$$4C^4 - 4C^2x + x^2 = x^2 + 4y^2$$

$$x = -\frac{y^2 - C^4}{C^2}$$

para $C = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Éstas son parábolas horizontales que abren hacia la izquierda. De forma análoga, las curvas-v se determinan mediante

$$C = \frac{y}{\sqrt{\left(x + \sqrt{x^2 + 4y^2}\right)/2}}$$

$$C^2\left(x + \sqrt{x^2 + 4y^2}\right) = 2y^2$$

$$x^2 + 4y^2 = \frac{4y^4}{C^4} - \frac{4xy^2}{C^2} + x^2$$

$$x = \frac{y^2 - C^4}{C^2}$$

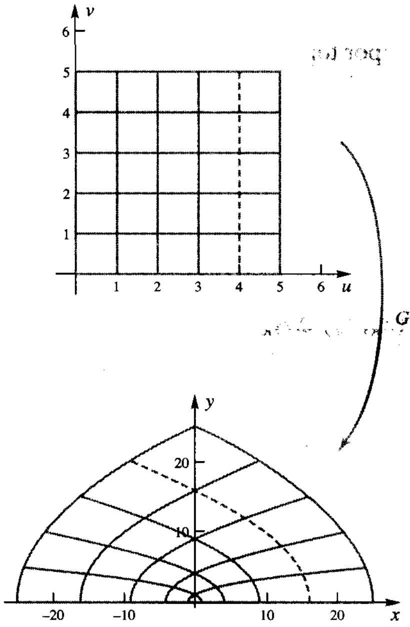


Figura 4

Son parábolas horizontales que abren hacia la derecha. Las curvas-u y las curvas-v se muestran en la figura 4.

La curva-u correspondiente a $u = 4$ $(0 \leq v \leq 5)$ es

$$x = -\frac{y^2 - 4^4}{4^2} = -\frac{1}{16}y^2 + 16, \qquad 0 \leq y \leq 20$$

Esta curva-u es la curva con línea discontinua en la figura 4. ■

La fórmula de cambio de variable para integrales dobles Cuando hacemos un cambio de variable en una integral sencilla, tal como $\int_a^b f(x)\,dx$, debemos tomar en cuenta

1. el integrando $f(x)$,
2. la diferencial dx, y
3. los límites de integración.

Para integrales dobles, tal como $\iint_R f(x, y)\,dx\,dy$, el procedimiento es similar. Debemos tener en cuenta

1. el integrando $f(x, y)$,
2. la diferencial $dx\,dy$, y
3. la región de integración.

En el siguiente teorema se proporciona el resultado principal.

Teorema A Cambio de variables para integrales dobles

Suponga que G es una transformación uno a uno de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$, que transforma la región acotada S en el plano uv en la región acotada R en el plano xy. Si G tiene la forma $G(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \iint_S f(x(u, v), y(u, v))\,|J(u, v)|\, du\, dv$$

donde $J(u, v)$, llamado **jacobiano**, es igual al determinante

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

Bosquejo de la demostración Empezamos por tomar en el plano uv una partición regular (es decir, una partición con Δu y Δv constantes) de un rectángulo que contenga a S. La imagen de esta partición será la partición de la región R en el plano xy, aunque en general las curvas-u y curvas-v no sean paralelas a los ejes x y y. (De hecho, las curvas-u y las curvas-v por lo regular no son rectas). Sean (u_i, v_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, la esquina inferior izquierda del i-ésimo rectángulo y sea (x_i, y_i) la imagen de (u_i, v_i) bajo la transformación G. Sea S_k el k-ésimo rectángulo en la partición de la región S y sea R_k su imagen en el plano xy. Véase la figura 5. Entonces, la integral doble de f sobre la región R es

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\, \Delta A_k$$

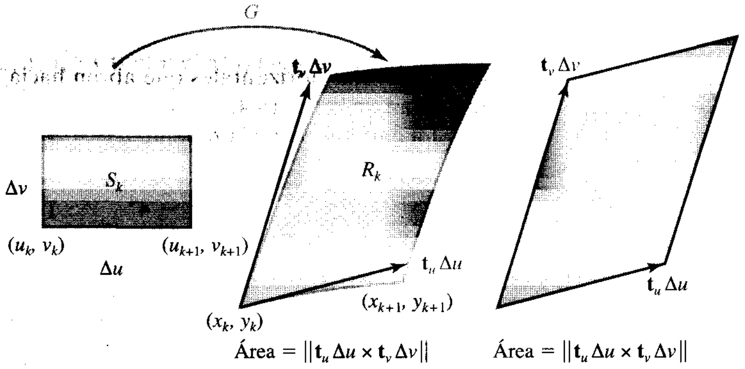


Figura 5

donde ΔA_k es el área de R_k. Aunque la región R_k no es un rectángulo, se parece a un paralelogramo, por lo que su área es aproximadamente la de un paralelogramo. En la sección 11.4 mostramos cómo obtener el área de un paralelogramo mediante el producto cruz de dos vectores que formen dos lados. Por lo tanto, debemos determinar dos vectores que sean tangentes a la curva-u y a la curva-v en (x_k, y_k). Mostraremos cómo se obtiene el vector tangente a la curva-u; la tangente a la curva-v se obtiene de forma similar. Suponga que (x_{k+1}, y_{k+1}) es la imagen de (u_{k+1}, v_{k+1}) como se muestra en la figura 5. Entonces, el vector de (x_k, y_k) a (x_{k+1}, y_{k+1}) es

$$\begin{aligned}(x_{k+1} - x_k)\,\mathbf{i} + (y_{k+1} - y_k)\,\mathbf{j} &= [x(u_{k+1}, v_k) - x(u_k, v_k)]\,\mathbf{i} \\ &\quad + [y(u_{k+1}, v_k) - y(u_k, v_k)]\,\mathbf{j} \\ &\approx \Delta u \frac{\partial x}{\partial u}(u_k, v_k)\,\mathbf{i} + \Delta u \frac{\partial y}{\partial u}(u_k, v_k)\,\mathbf{j} \\ &= \Delta u\left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_k, v_k)\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_k, v_k)\,\mathbf{j}\right)\end{aligned}$$

El vector entre paréntesis, que llamaremos $\mathbf{t}_u$ es tangente a la curva-u en (x_k, y_k). De forma análoga, el vector

$$\mathbf{t}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_k, v_k)\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_k, v_k)\,\mathbf{j}$$

es tangente a la curva-v en (x_k, y_k). Por lo tanto, el área ΔA_k de la región R_k es

$$\begin{aligned}
\Delta A_k &\approx \|\Delta u\,\mathbf{t}_u \times \Delta v\,\mathbf{t}_v\| \\
&= \left\| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta u \dfrac{\partial x}{\partial u}(u_k, v_k) & \Delta u \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_k, v_k) & 0 \\ \Delta v \dfrac{\partial x}{\partial v}(u_k, v_k) & \Delta v \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_k, v_k) & 0 \end{vmatrix} \right\| \\
&= \Delta u\,\Delta v \left\| \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}_{(u_k, v_k)} \mathbf{k} \right\| \\
&= \Delta u\,\Delta v \left| \left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \right]_{(u_k,\, v_k)} \right| \|\mathbf{k}\| \\
&= |J(u_k, v_k)|\,\Delta u\,\Delta v
\end{aligned}$$

Así, tenemos

$$\begin{aligned}
\iint_R f(x, y)\,dx\,dy &\approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k \\
&\approx \sum_{k=1}^{n} f(x(u_k, v_k), y(u_k, v_k))\,|J(u_k, v_k)|\,\Delta u\,\Delta v \\
&\approx \iint_S f(x(u, v), y(u, v))\,|J(u, v)|\,du\,dv
\end{aligned}$$

Esto completa el bosquejo de la demostración. ■

EJEMPLO 3 Evalúe $\displaystyle\iint_R \cos(x - y)\,\operatorname{sen}(x + y)\,dA$, donde R es el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(\pi, -\pi)$ y (π, π).

SOLUCIÓN Sea $u = x - y$ y $v = x + y$. Al resolver para x y y se obtiene $x = \frac{1}{2}(u + v)$ y $y = \frac{1}{2}(v - u)$. La región R puede especificarse como

$$-x \le y \le x$$

$$0 \le x \le \pi$$

Al sustituir u y v se obtiene

$$-\frac{1}{2}(u + v) \le \frac{1}{2}(v - u) \le \frac{1}{2}(u + v)$$

$$0 \le \frac{1}{2}(u + v) \le \pi$$

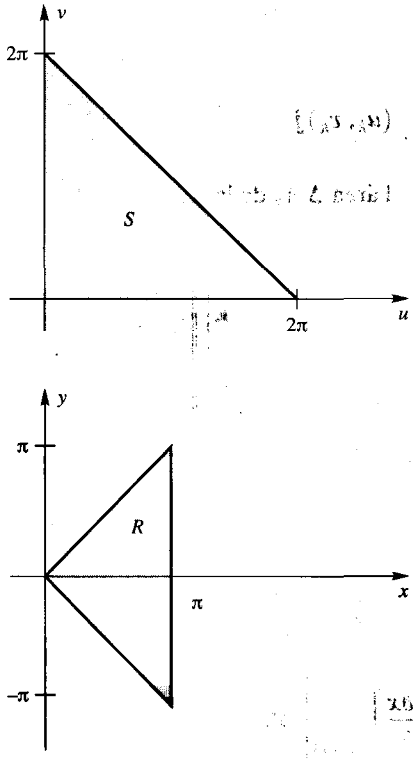


Figura 6

que se reduce a

$$u \geq 0, \quad v \geq 0$$

$$0 \leq u + v \leq 2\pi$$

Ésta es la región S en el plano uv (véase la figura 6). El jacobiano para esta transformación es

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto,

$$\iint_R \cos(x - y)\operatorname{sen}(x + y)\, dA = \iint_S \cos u \operatorname{sen} v \left|\frac{1}{2}\right| dv\, du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi - u} \cos u \operatorname{sen} v\, dv\, du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos u\,(1 - \cos(2\pi - u))\, du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos u\,(1 - \cos u)\, du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos u - \cos^2 u)\, du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\cos u - \frac{1 + \cos 2u}{2}\right) du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\cos u - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2u\right) du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen} u - \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u\right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{2}\pi \qquad \blacksquare$$

Con frecuencia, la región de integración sugiere la transformación, como lo ilustra el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4 Determine el centro de masa de la región R en el primer cuadrante acotada por

$$x^2 + y^2 = 9 \qquad y^2 - x^2 = 1$$
$$x^2 + y^2 = 16 \qquad y^2 - x^2 = 9$$

si la densidad es proporcional al cuadrado de la distancia al origen.

SOLUCIÓN La masa es $\iint_R k(x^2 + y^2)\, dx\, dy$. Aunque el integrando es simple, es una integral difícil de evaluar, debido a que los límites son complicados. Sin embargo, las sustituciones $u = x^2 + y^2$ y $v = y^2 - x^2$ transforma la región R en la región S, que, en el plano uv, es el rectángulo

$$9 \leq u \leq 16 \quad \text{y} \quad 1 \leq v \leq 9$$

(Véase la figura 7.) Al resolver para x y y en el sistema $u = x^2 + y^2$ y $v = y^2 - x^2$ se obtiene

$$x = \sqrt{\frac{u - v}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(u - v)^{1/2}$$

$$y = \sqrt{\frac{u+v}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(u+v)^{1/2}$$

Por lo tanto, el jacobiano para esta transformación es

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(u-v)^{-1/2} & -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(u-v)^{-1/2} \\ \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(u+v)^{-1/2} & \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(u+v)^{-1/2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{u^2-v^2}}$$

Entonces, la masa es

$$\begin{aligned} m &= \iint_R k(x^2+y^2)\,dx\,dy = k\iint_S u|J(u,v)|\,du\,dv \\ &= k\int_1^9\int_9^{16} \frac{u}{4\sqrt{u^2-v^2}}\,du\,dv \\ &= \frac{k}{4}\int_1^9 \Big[\sqrt{u^2-v^2}\,\Big]_{u=9}^{u=16} dv \\ &= \frac{k}{4}\int_1^9 \left(\sqrt{256-v^2}-\sqrt{81-v^2}\right) dv \\ &= \frac{k}{4}\left(\frac{45}{2}\sqrt{7} + 128 \operatorname{arcsen}\frac{9}{16} - \frac{81}{4}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{255} \right. \\ &\qquad \left. - 128 \operatorname{arcsen}\frac{1}{16} + 2\sqrt{5} + \frac{81}{2}\operatorname{arcsen}\frac{1}{9}\right) \approx 16.343k \end{aligned}$$

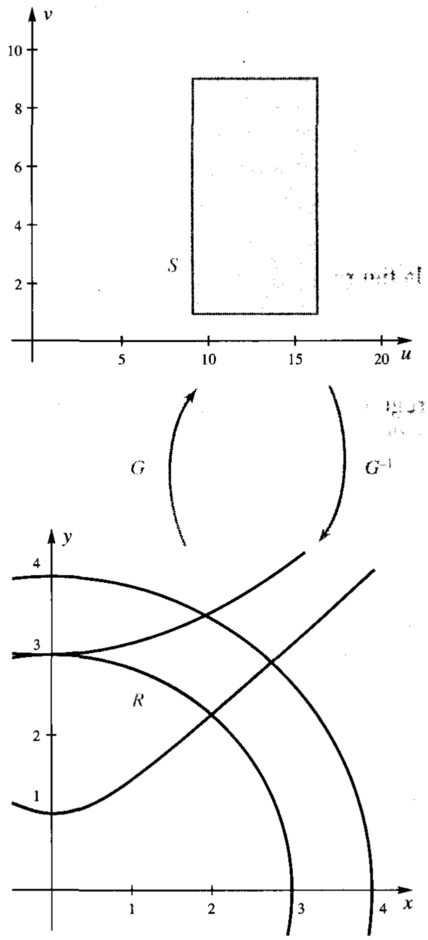


Figura 7

La integral en la antepenúltima línea podría evaluarse mediante la fórmula 54, de la tabla de integrales al final del libro, o con un CAS. Los momentos son

$$\begin{aligned} M_y &= \iint_R xk(x^2+y^2)\,dx\,dy = k\iint_S \sqrt{\frac{u-v}{2}}\,u|J(u,v)|\,du\,dv \\ &= \frac{k}{4\sqrt{2}}\int_9^{16}\int_1^9 \frac{u\sqrt{u-v}}{\sqrt{u^2-v^2}}\,dv\,du \\ &= \frac{k}{4\sqrt{2}}\int_9^{16}\int_1^9 \frac{u}{\sqrt{u+v}}\,dv\,du \\ &= \frac{k}{2\sqrt{2}}\int_9^{16}\left(u\sqrt{u+9}-u\sqrt{u+1}\right)du \\ &= \frac{k\sqrt{2}}{4}\left(500 - \frac{1564}{15}\sqrt{17} - \frac{324}{5}\sqrt{2} + \frac{100}{3}\sqrt{10}\right) \approx 29.651k \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_R yk(x^2+y^2)\,dx\,dy = k\iint_S \sqrt{\frac{u+v}{2}}\,u|J(u,v)|\,du\,dv \\ &= \frac{k}{4\sqrt{2}}\int_9^{16}\int_1^9 \frac{u\sqrt{u+v}}{\sqrt{u^2-v^2}}\,dv\,du \\ &= \frac{k}{4\sqrt{2}}\int_9^{16}\int_1^9 \frac{u}{\sqrt{u-v}}\,dv\,du \\ &= \frac{k}{2\sqrt{2}}\int_9^{16}\left(u\sqrt{u-1}-u\sqrt{u-9}\right)du \\ &= \frac{k\sqrt{2}}{4}\left(100\sqrt{15} - \frac{308}{5}\sqrt{7} - \frac{928}{15}\sqrt{2}\right) \approx 48.376k \end{aligned}$$

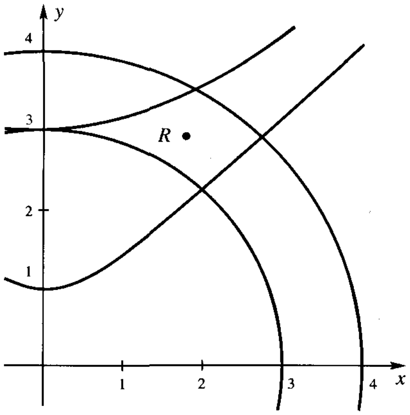


Figura 8

Las integrales en las últimas tres líneas pueden evaluarse mediante la fórmula 96, de la tabla de integrales, o mediante un CAS. Así, las coordenadas del centro de masa son

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \approx \frac{29.651k}{16.343k} \approx 1.814$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} \approx \frac{48.376k}{16.343k} \approx 2.960$$

El punto $(\bar{x}, \bar{y}) = (1.814, 2.960)$ se muestra en la figura 8. ■

La fórmula de cambio de variable para integrales triples El teorema A se generaliza a integrales triples (incluso, a dimensiones mayores). Si G es una transformación uno a uno de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$ que transforma la región acotada S en el espacio uvw en la región acotada R en el espacio xyz, y si G es de la forma $G(u, v) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$, entonces

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \times |J(u, v, w)|\, du\, dv\, dw$$

donde $J(u, v, w)$ es el determinante

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

EJEMPLO 5 Deduzca la fórmula de cambio de variable $dx\, dy\, dz = r\, dr\, d\theta\, dz$ para la transformación a coordenadas cilíndricas.

SOLUCIÓN Como el cambio de variables es $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$ y $z = z$, el jacobiano es

$$J(r, \theta, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0\begin{vmatrix} -r\operatorname{sen}\theta & 0 \\ r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} \cos\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= r\cos^2\theta + r\operatorname{sen}^2\theta = r$$

Por lo tanto,

$$dx\, dy\, dz = |J(r, \theta, z)|\, dr\, d\theta\, dz = r\, dr\, d\theta\, dz$$ ■

Dejamos como ejercicio (problema 21) deducir la relación $dx\, dy\, dz = \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$ para coordenadas esféricas.

Revisión de conceptos

1. Bajo una transformación del plano uv al plano xy, la imagen de una recta vertical se denomina un(a) ______ y la imagen de una recta horizontal se denomina un(a) ______.

2. Un cambio de variable para una integral doble debe tomar en cuenta ______, ______ y ______.

3. El determinante $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ se denomina ______.

4. La fórmula para un cambio de variable en una integral doble es $\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \iint_S f(x(u, v), y(u, v))$ ______ $du\, dv$.

Conjunto de problemas 13.9

1. Para la transformación $x = u + v, y = v - u$, haga un bosquejo de las curvas-u y las curvas-v para la malla $\{(u, v)$: $(u = 2, 3, 4, 5$ y $1 \le v \le 3)$ o $(v = 1, 2, 3$ y $2 \le u \le 5)\}$.

2. Para la transformación $x = 2u + v, y = v - u$, haga un bosquejo de las curvas-u y las curvas-v para la malla $\{(u, v)$: $(u = 2, 3, 4, 5$ y $1 \le v \le 3)$ o $(v = 1, 2, 3$ y $2 \le u \le 5)\}$.

3. Para la transformación $x = u \operatorname{sen} v, y = u \cos v$, haga un bosquejo de las curvas-u y las curvas-v para la malla $\{(u, v)$: $(u = 0, 1, 2, 3$ y $0 \le v \le \pi)$ o $(v = 0, \pi/2, \pi$ y $0 \le u \le 3)\}$.

4. Para la transformación $x = u \cos v, y = u \operatorname{sen} v$, haga un bosquejo de las curvas-u y las curvas-v para la malla $\{(u, v)$: $(u = 0, 1, 2, 3$ y $0 \le v \le 2\pi)$ o $(v = 0, \pi, 2\pi$ y $0 \le u \le 3)\}$.

5. Para la transformación $x = u/(u^2 + v^2), y = -v/(u^2 + v^2)$, haga un bosquejo de las curvas-u y las curvas-v para la malla $\{(u, v)$: $(u = 0, 1, 2, 3$ y $1 \le v \le 3)$ o $(v = 1, 2, 3$ y $0 \le u \le 3)\}$.

6. Para la transformación $x = u + u/(u^2 + v^2), y = v - v/(u^2 + v^2)$, haga un bosquejo de las curvas-u y las curvas-v para la malla $\{(u, v)$: $(u = -2, -1, 0, 1, 2$ y $1 \le v \le 3)$ o $(v = 1, 2, 3$ y $-2 \le u \le 2)\}$.

En los problemas del 7 al 10 determine la imagen del rectángulo con las esquinas dadas y calcule el jacobiano de la transformación.

7. $x = u + 2v, y = u - 2v$; $(0, 0), (2, 0), (2, 1), (0, 1)$

8. $x = 2u + 3v, y = u - v$; $(0, 0), (3, 0), (3, 1), (0, 1)$

9. $x = u^2 + v^2, y = v$; $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$

10. $x = u, y = u^2 - v^2$; $(0, 0), (3, 0), (3, 1), (0, 1)$

En los problemas del 11 al 16 determine la transformación del plano uv al plano xy y calcule el jacobiano. Suponga que $x \ge 0$ y $y \ge 0$.

11. $u = x + 2y, v = x - 2y$

12. $u = 2x - 3y, v = 3x - 2y$

13. $u = x^2 + y^2, v = x$

14. $u = x^2 - y^2, v = x + y$

15. $u = xy, v = x$

16. $u = x^2, v = xy$

En los problemas del 17 al 20 utilice una transformación para evaluar la integral doble dada en la región R, que es el triángulo con vértices (1, 0), (4, 0) y (4, 3).

17. $\displaystyle\iint_R \ln \frac{x + y}{x - y}\, dA$

18. $\displaystyle\iint_R \sqrt{\frac{x + y}{x - y}}\, dA$

19. $\displaystyle\iint_R \operatorname{sen}(\pi(2x - y)) \cos(\pi(y - 2x))\, dA$

20. $\displaystyle\iint_R (2x - y) \cos(y - 2x)\, dA$

21. Determine el jacobiano para la transformación de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas.

22. Determine el volumen del elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ haciendo el cambio de variables $x = ua, y = vb$ y $z = cw$. Además, determine el momento de inercia de este sólido alrededor del eje z, suponiendo que tiene densidad constante k.

23. Suponga que X y Y son variables aleatorias continuas con FDP conjunta $f(x, y)$ y suponga que U y V son variables aleatorias que son funciones de X y Y tales que la transformación

$$X = x(U, V) \quad \text{y} \quad Y = y(U, V)$$

es uno a uno. Demuestre que la FDP conjunta de U y V es

$$g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))|J(u, v)|$$

Sugerencia: sea R una región en el plano xy y sea S su preimagen. Demuestre que $P((X, Y) \in R) = P((U, V) \in S)$ y obtenga una integral doble para cada una de éstas.

24. Suponga que las variables aleatorias X y Y tienen FDP conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & \text{si } 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

esto es, X y Y se distribuyen uniformemente en el cuadrado $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2$. Determine

(a) la FDP conjunta de $U = X + Y$ y $V = X - Y$, y

(b) la FDP marginal de U.

25. Suponga que X y Y tienen FDP conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x-y}, & \text{si } x \ge 0, y \ge 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine

(a) la FDP conjunta de $U = X + Y$ y $V = X$

(b) la FDP marginal de U.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** curva-u; curva-v **2.** el integrando; la diferencial $dx\, dy$; la región de integración **3.** el jacobiano **4.** $|J(u, v)|$

13.10 Repaso del capítulo

Examen de conceptos

Responda con verdadero o falso a cada una de las siguientes afirmaciones. Prepárese para justificar su respuesta.

1. $\int_a^b \int_a^b f(x)f(y)\,dy\,dx = \left[\int_a^b f(x)\,dx\right]^2$

2. $\int_0^1 \int_0^x f(x, y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^y f(x, y)\,dx\,dy$

3. $\int_0^2 \int_{-1}^1 \operatorname{sen}(x^3y^3)\,dx\,dy = 0$

4. $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e^{x^2+2y^2}\,dy\,dx = 4\int_0^1 \int_0^1 e^{x^2+2y^2}\,dy\,dx$

5. $\int_1^2 \int_0^2 \operatorname{sen}^2(x/y)\,dx\,dy \le 2$

6. Si f es continua y no negativa en $f(x_0, y_0) > 0$, donde (x_0, y_0) es un punto interior de R, entonces $\iint_R f(x, y)\,dA > 0$.

7. Si $\iint_R f(x, y)\,dA \le \iint_R g(x, y)\,dA$, entonces $f(x, y) \le g(x, y)$ en R.

8. Si $f(x, y) \ge 0$ en R y $\iint_R f(x, y)\,dA = 0$, entonces $f(x, y) = 0$ para toda (x, y) en R.

9. Si $\delta(x, y) = k$ da la densidad de una lámina en (x, y), las coordenadas del centro de masa de la lámina no incluyen a k.

10. Si $\delta(x, y) = y^2/(1 + x^2)$ da la densidad de la lámina $\{(x, y): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$, sin realizar cálculos, sabemos que $\bar{x} < \frac{1}{2}$ y $\bar{y} > \frac{1}{2}$.

11. Si $S = \{(x, y, z): 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 16\}$, entonces

$$\iiint_S dV = 84\pi$$

12. Si la parte superior de un cilindro circular recto de radio 1 se recorta con un plano que forma un ángulo de 30° con la base del cilindro, el área de la parte inclinada resultante es $2\sqrt{3}\pi/3$.

13. Hay ocho posibles órdenes de integración para una integral triple iterada.

14. $\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 dr\,d\theta\,dz$ representa el volumen de un cilindro circular recto de radio 1 y altura 2.

15. Si $|f_x| \le 2$ y $|f_y| \le 2$, entonces la superficie G, determinada por $z = f(x, y), 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$, tiene área a lo más 3.

16. Para la transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas polares, el jacobiano es $J(r, \theta) = r$.

17. Para la transformación, $x = 2u$, $y = 2v$, el jacobiano es $J(u, v) = 2$.

Problemas de examen

En los problemas del 1 al 4 calcule cada integral.

1. $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} xy\,dy\,dx$

2. $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} 2xy^2\,dx\,dy$

3. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\operatorname{sen}\theta} r\cos\theta\,dr\,d\theta$

4. $\int_1^2 \int_3^x \int_0^{\sqrt{3}y} \frac{y}{y^2 + z^2}\,dz\,dy\,dx$

En los problemas del 5 al 8 reescriba la integral iterada con el orden de integración indicado. Haga primero un bosquejo.

5. $\int_0^1 \int_x^1 f(x, y)\,dy\,dx;\ dx\,dy$

6. $\int_0^1 \int_0^{\cos^{-1} y} f(x, y)\,dx\,dy;\ dy\,dx$

7. $\int_0^1 \int_0^{(1-x)/2} \int_0^{1-x-2y} f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx;\ dx\,dz\,dy$

8. $\int_0^2 \int_{x^2}^4 \int_0^{4-y} f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx;\ dx\,dy\,dz$

9. En cada caso escriba las integrales triples iteradas para el volumen de una esfera de radio a.

(a) Coordenadas cartesianas (b) Coordenadas cilíndricas
(c) Coordenadas esféricas

10. Evalúe $\iint_S (x + y)\,dA$, donde S es la región acotada por $y = \operatorname{sen} x$ y $y = 0$ entre $x = 0$ y $x = \pi$.

11. Evalúe $\iiint_S z^2\,dV$, donde S es la región acotada por $x^2 + z = 1$ y $y^2 + z = 1$ y el plano xy.

12. Evalúe $\iint_S \frac{1}{x^2 + y^2}\,dA$, donde S es la región entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 9$.

13. Determine el centro de masa de la lámina rectangular acotada por $x = 1, x = 3, y = 0$ y $y = 2$, si la densidad es $\delta(x, y) = xy^2$.

14. Determine el momento de inercia de la lámina del problema 13 con respecto al eje x.

15. Determine el área de la superficie del cilindro $z^2 + y^2 = 9$ que está en el primer octante, entre los planos $y = x$ y $y = 3x$.

16. Evalúe cambiando a coordenadas cilíndricas o esféricas.

(a) $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^2 \sqrt{x^2 + y^2}\,dz\,dy\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dz\, dy\, dx$

17. Determine la masa del sólido entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, si la densidad es proporcional a la distancia desde el origen.

18. Determine el centro de masa de la lámina homogénea acotada por la cardioide $r = 4(1 + \operatorname{sen} \theta)$.

19. Determine la masa del sólido en el primer octante, bajo el plano $x/a + y/b + z/c = 1$ (a, b, c positivos) si la densidad es $\delta(x, y, z) = kx$.

20. Calcule el volumen del sólido acotado por $z = x^2 + y^2$, $z = 0$ y $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

21. Utilice una transformación para evaluar la integral

$$\iint_R \operatorname{sen}(x - y) \cos(x + y)\, dA$$

donde R es el rectángulo con vértices $(0, 0)$, $(\pi/2, -\pi/2)$, $(\pi, 0)$, and $(\pi/2, \pi/2)$.

PROBLEMAS DE REPASO E INTRODUCCIÓN

En los problemas del 1 al 9 determine ecuaciones paramétricas para la curva dada. (Asegúrese de proporcionar el dominio para el parámetro t).

1. La circunferencia con centro en el origen y radio 3.

2. La circunferencia con centro en $(2, 1)$ con radio 1.

3. La semicircunferencia $x^2 + y^2 = 4$ con $y > 0$.

4. La semicircunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ con $y \leq 0$ que tiene una orientación en el sentido de las manecillas del reloj.

5. La parte de la recta $y = 2$ entre los puntos $(-2, 2)$ y $(3, 2)$.

6. La parte de la recta $y = 9 - x$, que está en el primer cuadrante con una orientación que descienda hacia la derecha.

7. La parte de la recta $y = 9 - x$, que está en el primer cuadrante con una orientación que ascienda hacia la izquierda.

8. La parte de la parábola $y = 9 - x^2$, por encima del eje x, con una orientación que sea de izquierda a derecha.

9. La parte de la parábola $y = 9 - x^2$, por encima del eje x, con una orientación que sea de derecha a izquierda.

10. Utilice la fórmula de longitud de arco para determinar la longitud de la curva en el problema 6.

En los problemas del 11 al 16 determine el gradiente de la función dada.

11. $f(x, y) = x \operatorname{sen} x + y \cos y$

12. $f(x, y) = xe^{-xy} + ye^{xy}$

13. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

14. $f(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$

15. $f(x, y, z) = xy + xz + yz$

16. $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

Evalúe las integrales en los problemas del 17 al 22.

17. $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 t \, dt$

18. $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen} t \cos t \, dt$

19. $\displaystyle\int_0^1 \int_1^2 xy \, dy \, dx$

20. $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_1^4 (x^2 + 2y) \, dy \, dx$

21. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_1^2 r^2 \, dr \, d\theta$

22. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_1^2 \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

23. La integral en el problema 22 representa el volumen de alguna región en el espacio tridimensional. ¿Cuál es esta región?

24. Determine el área de la superficie de la parte del paraboloide $z = 144 - x^2 - y^2$ que está por encima del plano $z = 36$.

25. Determine el vector normal unitario a la gráfica de $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ en el punto $(3, 4, 12)$.

CAPÍTULO 14 Cálculo vectorial

14.1 Campos vectoriales
14.2 Integrales de línea
14.3 Independencia de la trayectoria
14.4 Teorema de Green en el plano
14.5 Integrales de superficie
14.6 Teorema de la divergencia de Gauss
14.7 Teorema de Stokes
14.8 Repaso del capítulo

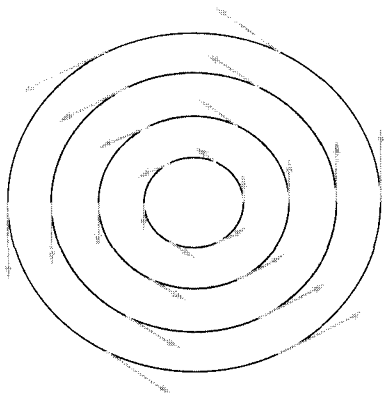


Figura 1

14.1

Campos vectoriales

El concepto de función ha desempeñado un papel central en cálculo. Este concepto y el cálculo asociado se han estado generalizando de manera constante. La mayor parte de los primeros dos tercios de este libro aborda las funciones en donde la entrada es un número real y la salida es un número real. En el capítulo 11 introdujimos funciones con valores vectoriales, es decir, funciones cuya entrada es un número real y su salida es un vector. Luego, en el capítulo 12 introdujimos funciones de diversas variables con valores reales, es decir, funciones cuya entrada es una pareja o terna (o n-upla) de números reales y cuya salida es un número real. El siguiente paso natural es estudiar funciones cuya entrada es un vector y cuya salida es un vector. Éste es el paso final en la secuencia usual del cálculo.

Entonces, considere una función **F** que asocia un vector $\mathbf{F}(\mathbf{p})$ con cada punto **p** en el espacio de dimensión n. Un ejemplo común en el espacio bidimensional es

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{F}(x, y) = -\tfrac{1}{2}y\mathbf{i} + \tfrac{1}{2}x\mathbf{j}$$

Por razones históricas, nos referimos a tal función como un **campo vectorial**, nombre que surge de una imagen visual que describimos a continuación. Imagine que a cada punto **p** de una región del espacio se le añade un vector $\mathbf{F}(\mathbf{p})$ que sale de **p**. No podemos trazar todos estos vectores, pero una muestra representativa nos dará una buena idea de un campo. La figura 1 es una de tales imágenes para el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = -\frac{1}{2}y\mathbf{i} + \frac{1}{2}x\mathbf{j}$ antes mencionado. Es el campo de velocidades de una rueda que gira a una razón constante de $\frac{1}{2}$ radián por unidad de tiempo (véase el ejemplo 2). La figura 2 podría representar el campo de velocidad para el agua que fluye en un tubo curvo.

Otros campos vectoriales que surgen naturalmente en la ciencia son los eléctricos, magnéticos, de fuerzas y gravitacionales. Sólo consideraremos el caso en que estos campos son independientes del tiempo, que llamaremos **campos vectoriales estacionarios**. En contraste con un campo vectorial, una función F que asocia un número a cada punto en el espacio es un **campo escalar**. La función que da la temperatura en cada punto sería un buen ejemplo físico de un campo escalar

EJEMPLO 1 Dibuje una muestra representativa de vectores del campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

SOLUCIÓN $\mathbf{F}(x, y)$ es un vector unitario que apunta en la misma dirección que $x\mathbf{i} + y\mathbf{i}$, es decir, alejándose del origen. Varios de estos vectores aparecen en la figura 3. ■

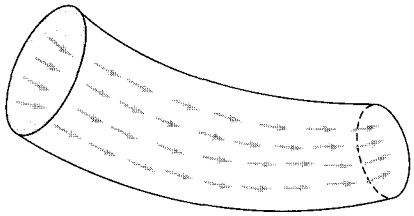


Figura 2

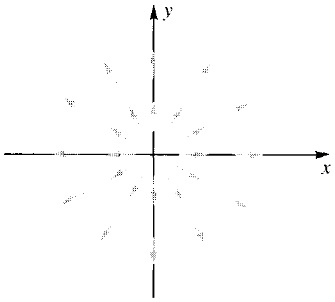


Figura 3

EJEMPLO 2 Haga un bosquejo de una muestra representativa de vectores del campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y) = -\tfrac{1}{2}y\mathbf{i} + \tfrac{1}{2}x\mathbf{j}$$

y demuestre que cada vector es tangente a un círculo con centro en el origen y tiene longitud igual a la mitad del radio de ese círculo (véase la figura 1).

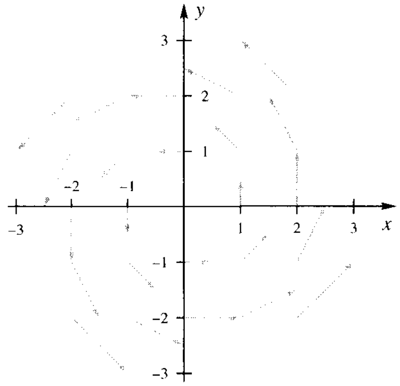


Figura 4

SOLUCIÓN La figura 4 muestra una gráfica del campo vectorial. Si $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ es el vector de posición del punto (x, y), entonces

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(x, y) = -\tfrac{1}{2}xy + \tfrac{1}{2}xy = 0$$

Así, $\mathbf{F}(x, y)$ es perpendicular a $\mathbf{r}$ y por lo tanto es tangente al círculo de radio $\|\mathbf{r}\|$. Por último,

$$\|\mathbf{F}(x, y)\| = \sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}y\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}x\right)^2} = \tfrac{1}{2}\|\mathbf{r}\| \qquad \blacksquare$$

De acuerdo con Isaac Newton, la magnitud de la fuerza de atracción entre dos objetos de masas M y m, respectivamente, está dada por GMm/d^2, donde d es la distancia entre los objetos y G es una constante universal. Ésta es la famosa ley del cuadrado inverso de la atracción gravitacional. Nos proporciona un importante ejemplo de un campo vectorial. Como los vectores representan fuerzas, llamaremos a tal campo **un campo de fuerzas.**

EJEMPLO 3 Suponga que un objeto esférico de masa M (por ejemplo, la Tierra) tiene su centro en el origen. Deduzca la fórmula para la fuerza gravitacional de la fuerza $\mathbf{F}(x, y, z)$ ejercida por esta masa sobre un objeto de masa m localizada en un punto (x, y, z) del espacio. Luego, bosqueje este campo.

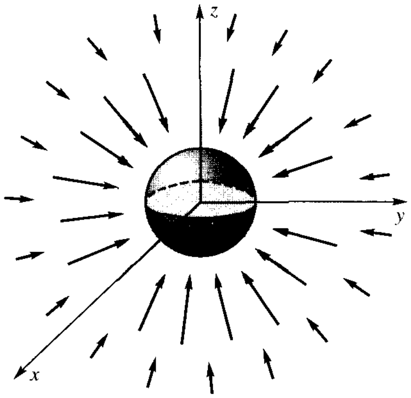


Figura 5

SOLUCIÓN Suponemos que podemos considerar al objeto de masa M como una masa puntual localizada en el origen. Sea $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Entonces la magnitud de $\mathbf{F}$ es

$$\|\mathbf{F}\| = \frac{GMm}{\|\mathbf{r}\|^2}$$

$\mathbf{F}$ está dirigido hacia el origen; es decir, $\mathbf{F}$ tiene la dirección del vector unitario $-\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$. Concluimos que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{GMm}{\|\mathbf{r}\|^2}\left(\frac{-\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}\right) = -GMm\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}$$

Este campo se bosqueja en la figura 5. $\blacksquare$

El gradiente de un campo escalar Suponga que $f(x, y, z)$ determina un campo escalar y que f es diferenciable. Entonces el gradiente de f, que se denota ∇f, es el campo vectorial dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

Conocimos los **campos gradiente** en las secciones 12.4 y 12.5. Ahí aprendimos que $\nabla f(x, y, z)$ apunta en la dirección de máximo incremento de $f(x, y, z)$. Un campo vectorial $\mathbf{F}$ que es el gradiente de un campo escalar f se llama un **campo vectorial conservativo**, y f es su **función potencial** (en la sección 14.3 aclararemos el origen de estos nombres). Tales campos y sus funciones potenciales son importantes en física. En particular, los campos que obedecen la ley del cuadrado inverso (por ejemplo, los campos eléctricos y los gravitacionales) son conservativos, como lo mostramos ahora.

EJEMPLO 4 Sea $\mathbf{F}$ la fuerza resultante de una ley del cuadrado inverso; es decir, sea

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -c\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} = -c\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

donde c es una constante (véase el ejemplo 3). Demuestre que

$$f(x, y, z) = \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = c(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

es una función potencial para $\mathbf{F}$ y que, por lo tanto, $\mathbf{F}$ es conservativo (para $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$).

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} \\ &= -\frac{c}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}) \\ &= \mathbf{F}(x, y, z) \end{aligned}$$

■

En realidad, el ejemplo 4 fue demasiado sencillo, pues dimos la función f. Un problema más difícil e importante es el siguiente: dado un campo vectorial $\mathbf{F}$, decidir si es conservativo; en tal caso, hallar su función potencial. Analizaremos este problema en la sección 14.3.

La divergencia y el rotacional de un campo vectorial

Un campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\,\mathbf{i} + N(x, y, z)\,\mathbf{j} + P(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

tiene asociados otros dos campos importantes. El primero, llamado la **divergencia** de $\mathbf{F}$, es un campo escalar; el segundo, llamado el **rotacional** de $\mathbf{F}$, es un campo vectorial.

Definición div (divergencia) y rot (rotacional)

Sea $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\boldsymbol{j} + P\mathbf{k}$ un campo vectorial para el que las primeras derivadas parciales de M, N, y P existen. Entonces

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

¿Qué significan?

Para ayudarle a visualizar la divergencia y el rotacional, le ofrecemos esta interpretación física. Si $\mathbf{F}$ denota el campo de velocidad de un fluido, entonces div $\mathbf{F}$ en un punto $\mathbf{p}$ mide la tendencia de ese fluido a alejarse de $\mathbf{p}$ (div $\mathbf{F} > 0$) y a acumularse en torno de $\mathbf{p}$ (div $\mathbf{F} < 0$). Por otro lado, rot $\mathbf{F}$ elige la dirección del eje en torno del cual gira el fluido más rápidamente, y $\|\operatorname{rot} \mathbf{F}\|$ es una medida de la rapidez de tal rotación. La dirección de rotación va de acuerdo con la regla de la mano derecha. Más adelante, desarrollaremos este análisis con mayor detalle.

En este momento, es difícil ver la importancia de estos campos; pero la veremos más adelante. Por ahora, nos interesa aprender a calcular la divergencia y el rotacional fácilmente y relacionarlos con el operador gradiente ∇. Recuerde que ∇ es el operador

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

Cuando ∇ opera sobre una función f, produce el gradiente ∇f, que también escribimos como grad f. Con un ligero (pero útil) cambio de notación, podemos escribir

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot (M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{F} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \operatorname{rot} \mathbf{F} \end{aligned}$$

Así, grad f, div $\mathbf{F}$ y rot $\mathbf{F}$ se pueden escribir en términos del operador ∇; de hecho, ésta es la forma de recordar la definición de estos campos.

EJEMPLO 5 Sea

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2yz\,\mathbf{i} + 3xyz^3\,\mathbf{j} + (x^2 - z^2)\,\mathbf{k}$$

Calcule div **F** y rot **F**.

SOLUCIÓN

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F} = 2xyz + 3xz^3 - 2z$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2yz & 3xyz^3 & x^2 - z^2 \end{vmatrix}$$

$$= -(9xyz^2)\mathbf{i} - (2x - x^2y)\mathbf{j} + (3yz^3 - x^2z)\mathbf{k}$$ ■

Revisión de conceptos

1. Una función que asocia a cada punto (x, y, z) del espacio un vector $\mathbf{F}(x, y, z)$ es un(a) _____.

2. En particular, la función que asocia a la función escalar $f(x, y, z)$ el vector $\nabla f(x, y, z)$ es un(a) _____.

3. Dos ejemplos importantes de campos vectoriales en física y que surgen como gradientes de campos escalares son _____ y _____.

4. Dado un campo vectorial $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$, introducimos el campo escalar correspondiente div **F** y un campo vectorial rot **F**. Éstos pueden definirse de manera simbólica como div **F** = _____ y rot **F** = _____.

Conjunto de problemas 14.1

En los problemas del 1 al 6 bosqueje una muestra de vectores para el campo vectorial dado **F**.

1. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ **2.** $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$

3. $\mathbf{F}(x, y) = -x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$ **4.** $\mathbf{F}(x, y) = 3x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \mathbf{k}$

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = -z\mathbf{k}$

En los problemas del 7 al 12 determine ∇f.

7. $f(x, y, z) = x^2 - 3xy + 2z$

8. $f(x, y, z) = \operatorname{sen}(xyz)$ **9.** $f(x, y, z) = \ln|xyz|$

10. $f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$

11. $f(x, y, z) = xe^y \cos z$

12. $f(x, y, z) = y^2e^{-2z}$

En los problemas del 13 al 18 determine div **F** *y rot* **F**.

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = \cos x\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} y\,\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \cos y\,\mathbf{i} + e^x \operatorname{sen} y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$

19. Sea f un campo escalar y **F** un campo vectorial. Indique cuáles de los siguientes son campos escalares, campos vectoriales o no tienen sentido.

(a) div f (b) grad f

(c) rot **F** (d) div (grad f)

(e) rot (grad f) (f) grad (div **F**)

(g) rot (rot **F**) (h) div (div **F**)

(i) grad (grad f) (j) div (rot (grad f))

(k) rot (div(grad f))

20. Suponiendo que las derivadas parciales requeridas existan y sean continuas, demuestre que

(a) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) = 0$; (b) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \mathbf{0}$;

(c) $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = (f)(\operatorname{div}\mathbf{F}) + (\operatorname{grad} f)\cdot\mathbf{F}$;

(d) $\operatorname{rot}(f\mathbf{F}) = (f)(\operatorname{rot}\mathbf{F}) + (\operatorname{grad} f)\times\mathbf{F}$.

21. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = c\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3$ un campo para la ley del cuadrado inverso (véanse los ejemplos 3 y 4). Demuestre que rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ y div $\mathbf{F} = 0$. (*Sugerencia:* use el problema 20 con $f = -c/\|\mathbf{r}\|^3$.

22. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = c\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^m$, $c \neq 0$, $m \neq 3$. En contraste con el problema 21, demuestre que div $\mathbf{F} \neq 0$, aunque rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

23. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = f(r)\mathbf{r}$, donde $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y f una función escalar diferenciable (excepto posiblemente en $r = 0$). Demuestre que rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ (excepto en $r = 0$). *Sugerencia:* demuestre primero que grad $f = f'(r)\mathbf{r}/r$ y luego aplique el problema 20d.

24. Sea $\mathbf{F}(x, y, z)$ como en el problema 23. Demuestre que si div $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ entonces $f(r) = cr^{-3}$, donde c es una constante.

25. Este problema se relaciona con la interpretación de div y rot dada en el recuadro al margen después de sus definiciones. Considere los cuatro campos de velocidad **F, G, H** y **L**, que tienen para cada z la configuración que aparece en la figura 6. Deduzca lo siguiente mediante un razonamiento geométrico..

(a) ¿La divergencia en **p** es positiva, negativa o nula?

(b) Dada una rueda con paletas y eje vertical en **p** (figura 4, sección 14.7), ¿ésta girará en el sentido de las manecillas del reloj, en sentido contrario o no gira?

(c) Ahora suponga que $\mathbf{F} = c\mathbf{j}$, $\mathbf{G} = e^{-y^2}\mathbf{j}$, $\mathbf{H} = e^{-x^2}\mathbf{j}$ y $\mathbf{L} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})/\sqrt{x^2 + y^2}$, que puede modelarse como en la figura 6. Calcule la divergencia y el rotacional para cada uno de estos campos y confirme con ello sus respuestas de las partes (a) y (b).

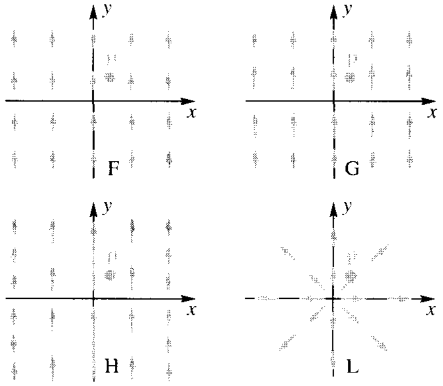


Figura 6

CAS **26.** Bosqueje el campo vectorial $\mathbf{F} = y\mathbf{i}$ para (x, y) en el rectángulo $1 \le x \le 2, 0 \le y \le 2$. Con base en la gráfica, utilice el recuadro al margen que describe la interpretación de div y rot para determinar si div es positiva, negativa o nula, en el punto $(1, 1)$ y si una rueda con paletas colocada en $(1, 1)$ giraría en el sentido de las manecillas del reloj, en sentido contrario o no giraría.

CAS **27.** Bosqueje el campo vectorial

$$\mathbf{F} = -\frac{x}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}\,\mathbf{i} - \frac{y}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}\,\mathbf{j}$$

para (x, y) en el rectángulo $-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1$. Con base en la gráfica, utilice el recuadro al margen que describe la interpretación de div y rot para determinar si div es positiva, negativa o nula en el origen, y si una rueda con paletas colocada en $(1, 1)$ giraría en el sentido de las manecillas del reloj, en sentido contrario o no giraría. (Para rot, considere a **F** como un campo vectorial en el espacio tridimensional con el componente z igual a 0).

28. Considere el campo de velocidad $\mathbf{v}(x, y, z) = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}$, $\omega > 0$ (véase el ejemplo 2 de la figura 1). Observe que $\mathbf{v}$ es perpendicular a $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ y que $\|\mathbf{v}\| = \omega\sqrt{x^2 + y^2}$. Así, $\mathbf{v}$ describe un fluido que gira (como un sólido) en torno del eje z con velocidad angular constante ω. Demuestre que div $\mathbf{v} = 0$ y rot $\mathbf{v} = 2\omega\mathbf{k}$.

29. Un objeto de masa m, que gira en una órbita circular con velocidad angular constante w, está sujeto a la fuerza centrífuga dada por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = m\omega^2\mathbf{r} = m\omega^2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

Demuestre que $f(x, y, z) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2)$ es una función potencial para **F**.

30. La función escalar div(grad f) $= \nabla\cdot\nabla f$ (que también se escribe $\nabla^2 f$) se conoce como el *Laplaciano*, y una función f que satisface $\nabla^2 f = 0$ es una función *armónica;* ambos son conceptos importantes en física. Demuestre que $\nabla^2 f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$. Después calcule $\nabla^2 f$ para cada una de las siguientes funciones y decida cuáles de ellas son armónicas.

(a) $f(x, y, z) = 2x^2 - y^2 - z^2$

(b) $f(x, y, z) = xyz$

(c) $f(x, y, z) = x^3 - 3xy^2 + 3z$

(d) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

31. Demuestre que

(a) $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{F} - \mathbf{F}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{G}$

(b) $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$

32. Por analogía con definiciones anteriores, defina lo siguiente::

(a) $\displaystyle\lim_{(x, y, z)\to(a, b, c)} \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{L}$

(b) $\mathbf{F}(x, y, z)$ es continua en (a, b, c)

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** función con valores vectoriales de tres variables reales; o un campo vectorial **2.** campo gradiente **3.** campos gravitacionales; campos eléctricos **4.** $\nabla\cdot\mathbf{F}$; $\nabla\times\mathbf{F}$

14.2
Integrales de línea

Una forma de generalizar la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ se obtiene reemplazando el conjunto $[a, b]$ sobre el cual integramos por conjuntos de dimensión dos y tres. Esto nos conduce a las integrales dobles y triples del capítulo 13. Una generalización muy distinta se obtiene reemplazando $[a, b]$ por una curva C en el plano xy. La integral resultante $\int_C f(x, y)\,ds$ se conoce como una **integral de línea**, pero sería más adecuado llamarla *integral de curva.*

Sea C una curva plana suave; es decir, sea C dada en forma paramétrica por

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad a \le t \le b$$

donde x' y y' son continuas y no se anulan simultáneamente en (a, b). Decimos que C está **orientada positivamente** si su dirección corresponde a los valores crecientes de t. Suponemos que C está orientada positivamente y que C se recorre sólo una vez cuando t varía de a a b. Así, el punto inicial de C es $A = (x(a), y(a))$ y su punto final es $B = (x(b), y(b))$. Considere la partición P del intervalo $[a, b]$ del parámetro obtenida mediante los puntos

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$$

Así ,

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{2}ka^3\pi}{2ka^2} = \frac{1}{4}\pi a$$

Por simetría, $\bar{x} = 0$, de modo que el centro de masa está en $(0, \pi a/4)$. ■

Todo lo que hemos hecho se extiende con facilidad a una curva suave C en el espacio tridimensional. En particular, si C está dada en forma paramétrica como

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t), \qquad a \le t \le b$$

entonces

$$\boxed{\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt}$$

EJEMPLO 3 Determine la masa de un alambre de densidad $\delta(x, y, z) = kz$, si tiene la forma de la hélice C con parametrización

$$x = 3\cos t, \qquad y = 3\,\mathrm{sen}\, t, \qquad z = 4t, \qquad 0 \le t \le \pi$$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} m &= \int_C kz\, ds = k\int_0^{\pi} (4t)\sqrt{9\,\mathrm{sen}^2 t + 9\cos^2 t + 16}\, dt \\ &= 20k\int_0^{\pi} t\, dt = \left[20k\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} = 10k\pi^2 \end{aligned}$$

Las unidades para m dependen de las unidades de longitud y densidad. ■

Trabajo Suponga que la fuerza que actúa en un punto (x, y, z) del espacio está dada por el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\,\mathbf{i} + N(x, y, z)\,\mathbf{j} + P(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

donde M, N y P son continuas. Queremos calcular el trabajo W realizado por $\mathbf{F}$ al mover una partícula a lo largo de una curva suave orientada C. Sea $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ el vector de posición para un punto $Q(x, y, z)$ en la curva (figura 5). Si $\mathbf{T}$ es el vector tangente unitario en Q, entonces $\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}$ es el componente tangencial de $\mathbf{F}$ en Q. El trabajo realizado por $\mathbf{F}$ al mover la partícula una distancia corta Δs desde Q, a lo largo de la curva, es aproximadamente $\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\Delta s$; en consecuencia, el trabajo realizado al mover la partícula de A a B a lo largo de C se define como $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\, ds$. El trabajo es una cantidad *escalar*, pero puede ser positivo o negativo. Es positivo cuando el componente de la fuerza a lo largo de la curva está en la dirección del movimiento del objeto; es negativo cuando dicho componente está en la dirección opuesta al movimiento del objeto. De la sección 11.7, sabemos que $\mathbf{T} = (d\mathbf{r}/dt)(dt/ds) = d\mathbf{r}/ds$, de modo que tenemos la siguiente fórmula alternativa para el trabajo.

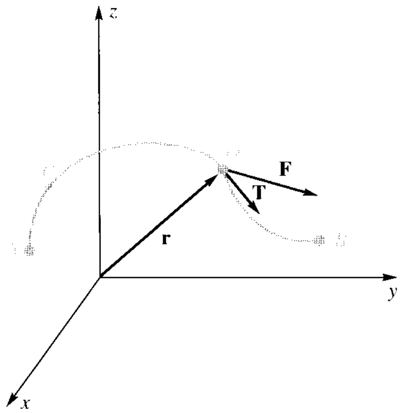


Figura 5

$$\boxed{W = \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\, ds = \int_C \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}}$$

Para interpretar la última expresión, piense que $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ representa el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ al mover una partícula a lo largo del vector tangente "infinitesimal" $d\mathbf{r}$, formulación preferida por muchos físicos y matemáticos aplicados.

Hay otra expresión para el trabajo que con frecuencia es útil en los cálculos. Si acordamos escribir $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$, entonces

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = (M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k})\cdot(dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}) = M\,dx + N\,dy + P\,dz$$

y

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C M\,dx + N\,dy + P\,dz$$

Las integrales $\int_C M\,dx$, $\int_C N\,dy$, y $\int_C P\,dz$ son un tipo particular de integral de línea. Se definieron justo como definimos $\int_C f\,ds$ al principio de esta sección, excepto que Δs_i se reemplaza por Δx_i, Δy_i y Δz_i, respectivamente. Sin embargo, debemos destacar que aunque Δs_i siempre se toma positivo, Δx_i, Δy_i, y Δz_i pueden ser negativos en una trayectoria C. El resultado de esto es que un cambio en la orientación de C cambia el signo de $\int_C M\,dx$, $\int_C N\,dy$ y $\int_C P\,dz$ mientras que el de $\int_C f\,ds$ no se altera (véase el problema 33).

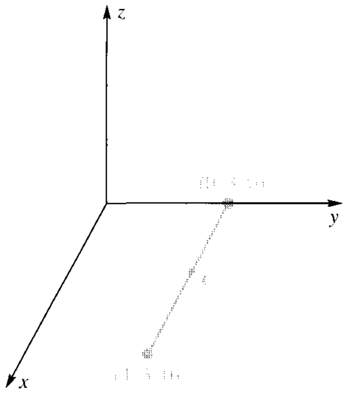


Figura 6

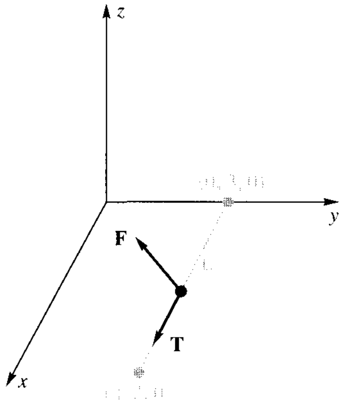


Figura 7

EJEMPLO 4 Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerzas de la ley del cuadrado inverso

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -c\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} = \frac{-c(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$$

al mover una partícula a lo largo de la línea recta C de $(0, 3, 0)$ a $(4, 3, 0)$ que aparece en la figura 6.

SOLUCIÓN A lo largo de C, $y = 3$ y $z = 0$, de modo que $dy = dz = 0$. Usamos x como parámetro para obtener

$$W = \int_C M\,dx + N\,dy + P\,dz = -c\int_C \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= -c\int_0^4 \frac{x}{(x^2 + 9)^{3/2}}\,dx = \left[\frac{c}{(x^2 + 9)^{1/2}}\right]_0^4 = -\frac{2c}{15}$$

Por supuesto, hay que asignar las unidades adecuadas, que dependen de las unidades para la longitud y la fuerza. Si $c > 0$, entonces el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F}$ es *negativo*. ¿Esto tiene sentido? En este problema, la fuerza siempre apunta hacia el origen, de modo que el componente de fuerza a lo largo de la curva esté siempre en la dirección *opuesta* a la trayectoria de movimiento de la partícula (véase la figura 7). Cuando esto ocurre, el trabajo es negativo. ■

He aquí una versión plana de este tipo de integral de línea.

EJEMPLO 5 Evalúe la integral de línea

$$\int_C (x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy$$

a lo largo de la curva C cuyas ecuaciones paramétricas son $x = t^2$, $y = t^3$, $0 \leq t \leq \frac{3}{2}$.

SOLUCIÓN Ya que $dx = 2t\,dt$ y $dy = 3t^2\,dt$,

$$\int_C (x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy = \int_0^{3/2} \left[(t^4 - t^6)2t + 2t^5(3t^2)\right] dt$$

$$= \int_0^{3/2} (2t^5 + 4t^7)\,dt = \frac{8505}{512} \approx 16.61 \quad ■$$

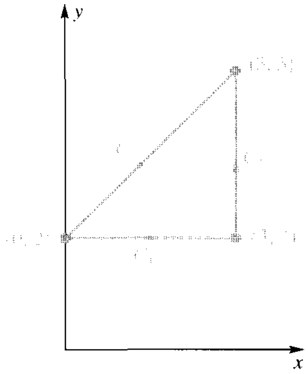


Figura 8

EJEMPLO 6 Evalúe $\int_C xy^2\,dx + xy^2\,dy$ a lo largo de la trayectoria $C = C_1 \cup C_2$ que aparece en la figura 8. Además, evalúe esta integral a lo largo de la trayectoria C_3 de $(0, 2)$ a $(3, 5)$.

SOLUCIÓN En C_1, $y = 2$, $dy = 0$, y

$$\int_{C_1} xy^2\,dx + xy^2\,dy = \int_0^3 4x\,dx = [2x^2]_0^3 = 18$$

En C_2, $x = 3$, $dx = 0$ y

$$\int_{C_2} xy^2\,dx + xy^2\,dy = \int_2^5 3y^2\,dy = [y^3]_2^5 = 117$$

Concluimos que

$$\int_C xy^2\,dx + xy^2\,dy = 18 + 117 = 135$$

En C_3, $y = x + 2$, $dy = dx$, de modo que

$$\begin{aligned}\int_{C_3} xy^2\,dx + xy^2\,dy &= 2\int_0^3 x(x+2)^2\,dx \\ &= 2\int_0^3 (x^3 + 4x^2 + 4x)\,dx \\ &= 2\left[\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + 2x^2\right]_0^3 = \frac{297}{2}\end{aligned}$$

Observe que las dos trayectorias de (0, 2) a (3, 5) dan distintos valores para la integral. ■

Revisión de conceptos

1. Una curva C dada en forma paramétrica por $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$, está orientada positivamente si su dirección positiva corresponde a ______.

2. La integral de línea $\int_C f(x, y)\,ds$, donde C es la curva orientada positivamente de la pregunta 1, se define como $\lim_{\|P\| \to 0}$ ______.

3. La integral de línea de la pregunta 2 se transforma en la integral común $\int_a^b$ ______ dt.

4. Si $\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ es el vector de posición de un punto sobre la curva C de la pregunta 1 y si $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ es un campo de fuerzas en el plano, entonces el trabajo W realizado por $\mathbf{F}$ al mover un objeto a lo largo de C está dado por $\int_C$ ______ dt.

Conjunto de problemas 14.2

En los problemas del 1 al 16 evalúe cada integral de línea.

1. $\int_C (x^3 + y)\,ds$; C es la curva $x = 3t$, $y = t^3$, $0 \le t \le 1$.

2. $\int_C xy^{2/5}\,ds$; C es la curva $x = \frac{1}{2}t$, $y = t^{5/2}$, $0 \le t \le 1$.

3. $\int_C (\operatorname{sen} x + \cos y)\,ds$; C es el segmento de recta de $(0, 0)$ a $(\pi, 2\pi)$.

4. $\int_C xe^y\,ds$; C es el segmento de recta de $(-1, 2)$ a $(1, 1)$.

5. $\int_C (2x + 9z)\,ds$; C es la curva $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \le t \le 1$.

6. $\int_C (x^2 + y^2 + z^2)\,ds$; C es la curva $x = 4\cos t$, $y = 4\operatorname{sen} t$, $z = 3t$, $0 \le t \le 2\pi$.

7. $\int_C y\,dx + x^2\,dy$; C es la curva $x = 2t$, $y = t^2 - 1$, $0 \le t \le 2$.

8. $\int_C y\,dx + x^2\,dy$; C es la curva en ángulo recto de $(0, -1)$ a $(4, -1)$ a $(4, 3)$.

9. $\int_C y^3\,dx + x^3\,dy$; C es la curva en ángulo recto de $(-4, 1)$ a $(-4, -2)$ a $(2, -2)$.

10. $\int_C y^3\,dx + x^3\,dy$; C es la curva $x = 2t, y = t^2 - 3, -2 \le t \le 1$.

11. $\int_C (x + 2y)\,dx + (x - 2y)\,dy$; C es el segmento de recta de $(1, 1)$ a $(3, -1)$.

12. $\int_C y\,dx + x\,dy$; C es la curva $y = x^2, 0 \le x \le 1$.

13. $\int_C (x + y + z)\,dx + x\,dy - yz\,dz$; C es el segmento de recta de $(1, 2, 1)$ a $(2, 1, 0)$.

14. $\int_C xz\,dx + (y + z)\,dy + x\,dz$; C es la curva $x = e^t, y = e^{-t}, z = e^{2t}, 0 \le t \le 1$.

15. $\int_C (x + y + z)\,dx + (x - 2y + 3z)\,dy + (2x + y - z)\,dz$; C es la trayectoria con segmentos de recta de $(0, 0, 0)$ a $(2, 0, 0)$ a $(2, 3, 0)$ a $(2, 3, 4)$.

16. La misma integral que en el problema 15; C es el segmento de recta de $(0, 0, 0)$ a $(2, 3, 4)$.

17. Determine la masa de un alambre con la forma de la curva $y = x^2$ entre $(-2, 4)$ y $(2, 4)$, si la densidad está dada por $\delta(x, y) = k|x|$.

18. Un alambre de densidad constante tiene la forma de la hélice $x = a \cos t, y = a \operatorname{sen} t, z = bt, 0 \le t \le 3\pi$. Determine su masa y su centro de masa.

En los problemas del 19 al 24 calcule el trabajo realizado por el campo de fuerzas **F** *al mover una partícula a lo largo de la curva C.*

19. $\mathbf{F}(x, y) = (x^3 - y^3)\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j}$; C es la curva $x = t^2, y = t^3, -1 \le t \le 0$.

20. $\mathbf{F}(x, y) = e^x\mathbf{i} - e^{-y}\mathbf{j}$; C es la curva $x = 3 \ln t, y = \ln 2t, 1 \le t \le 5$.

21. $\mathbf{F}(x, y) = (x + y)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$; C es la cuarta parte de la elipse $x = a \cos t, y = b \operatorname{sen} t, 0 \le t \le \pi>2$.

22. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x - y)\mathbf{i} + 2z\mathbf{j} + (y - z)\mathbf{k}$; C es el segmento de recta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$.

23. El mismo **F** del ejercicio anterior; C es la curva $x = \operatorname{sen}(\pi t/2)$, $y = \operatorname{sen}(\pi t/2), z = t,\ 0 \le t \le 1$.

24. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$; C es la curva $x = t, y = t^2, z = t^3$, $0 \le t \le 2$.

25. La figura 9 muestra una gráfica de un campo vectorial **F** junto con tres curvas C_1, C_2 y C_3. Determine si cada integral de línea, $\int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, $i = 1, 2, 3$, es positiva, negativa o cero, y justifique sus respuestas.

26. La figura 10 muestra una gráfica de un campo vectorial **F** junto con tres curvas C_1, C_2 y C_3. Determine si cada integral de línea, $\int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, $i = 1, 2, 3$, es positiva, negativa o cero, y justifique sus respuestas.

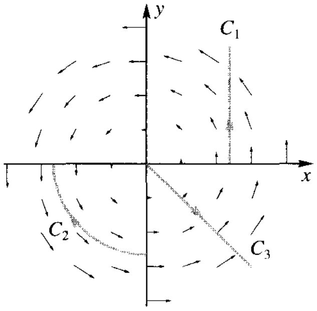


Figura 9

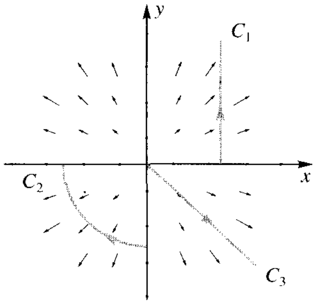


Figura 10

27. Christy planea pintar los dos lados de una cerca cuya base está en el plano xy, con la forma $x = 30 \cos^3 t, y = 30 \operatorname{sen}^3 t, 0 \le t \le \pi/2$, y cuya altura en (x, y), es $1 + \frac{1}{3}y$, todo medido en pies. Dibuje la cerca y decida cuánta pintura necesitará si un galón cubre 200 pies cuadrados.

28. Una ardilla que pesa 1.2 libras subió a un árbol cilíndrico siguiendo la trayectoria helicoidal $x = \cos t, y = \operatorname{sen} t, z = 4t, 0 \le t \le 8\pi$ (distancia medida en pies). ¿Cuánto trabajo realizó? Use una integral de línea, pero luego piense en una manera trivial de responder esta cuestión

29. Use una integral de línea para calcular el área de la parte cortada en el cilindro cuadrado vertical $|x| + |y| = a$ a mediante la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Compruebe su respuesta hallando una manera trivial de resolver este problema

30. Un alambre de densidad constante k tiene la forma $|x| + |y| = a$. Determine su momento de inercia con respecto al eje y y respecto al eje z.

31. Use una integral de línea para determinar el área de la parte de cilindro $x^2 + y^2 = ay$ dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (compare con el problema 12, sección 13.6), *Sugerencia:* use coordenadas polares, donde $ds = [r^2 + (dr/d\theta)^2]^{1/2}\,d\theta$.

32. Dos cilindros circulares de radio a se intersecan de modo que sus ejes se cortan en ángulo recto. Use una integral de línea para calcular el área de la parte de uno cortada por el otro (compare con el problema 14, sección 13.6). Véase la figura 11.

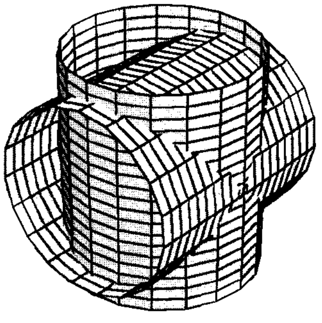


Figura 11

33. Evalúe

(a) $\int_C x^2y\,ds$ usando la parametrización $x = 3 \operatorname{sen} t, y = 3 \cos t$, $0 \le t \le \pi/2$, que invierte la orientación de C en el ejemplo 1, y

(b) $\int_{C_4} xy^2\,dx + xy^2\,dy$ mediante la parametrización $x = 3 - t, y = 5 - t, 0 \le t \le 3$, y observe que C_4 tiene la orientación opuesta a la de C_3 en el ejemplo 6.

Las parametrizaciones que invierten la orientación no cambian el signo de $\int_C f\,ds$, pero cambia el signo de los otros tipos de integrales de línea consideradas en esta sección.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** valores crecientes de t **2.** $\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i, \overline{y}_i)\,\Delta s_i$ **3.** $f(x(t), y(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$ **4.** $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}/dt$

14.3 Independencia de la trayectoria

La herramienta básica para evaluar las integrales definidas comunes es el segundo teorema fundamental del cálculo, que en símbolos dice

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

Ahora nos preguntamos: ¿existe un teorema análogo para las integrales de línea? La respuesta es afirmativa.

En lo sucesivo, interpretaremos $\mathbf{r}(t)$ como $x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{i}$, si el contexto es el espacio bidimensional y como $x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ si es el espacio tridimensional. En correspondencia, $f(\mathbf{r})$ indicará $f(x, y)$ en el primer caso y $f(x, y, z)$ en el segundo.

Teorema A **Teorema fundamental para integrales de línea**

Sea C una curva suave por partes dada en forma paramétrica como $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$, que comienza en $\mathbf{a} = \mathbf{r}(a)$ y termina en $\mathbf{b} = \mathbf{r}(b)$. Si f es continuamente diferenciable en un conjunto abierto que contiene a C, entonces

$$\int_C \nabla f(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$$

Demostración Supongamos primero que C es suave. Entonces

$$\begin{aligned}\int_C \nabla f(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b [\nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)]\,dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t))\,dt = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)) \\ &= f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})\end{aligned}$$

Observe que primero escribimos la integral de línea como una integral definida ordinaria y luego aplicamos la regla de la cadena, para finalmente usar el segundo teorema fundamental del cálculo.

Si C no es suave, sino sólo suave por partes, simplemente aplicamos el resultado anterior a cada parte. Dejaremos los detalles al lector. ■

EJEMPLO 1 Recuerde del ejemplo 4 de la sección 14.1 que

$$f(x, y, z) = f(\mathbf{r}) = \frac{c}{\|\mathbf{r}\|} = \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

es una función potencial para el campo de la ley del cuadrado inverso $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -c\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3$. Calcule $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$, donde C es cualquier curva simple suave por partes de $(0, 3, 0)$ a $(4, 3, 0)$ que no pasa por el origen.

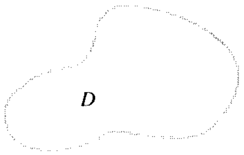
SOLUCIÓN Como $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{r})$,

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = f(4, 3, 0) - f(0, 3, 0)$$

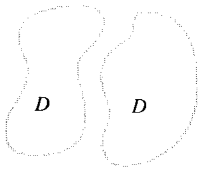
$$= \frac{c}{\sqrt{16 + 9}} - \frac{c}{\sqrt{9}} = -\frac{2c}{15}$$

■

Ahora compare el ejemplo 1 con el ejemplo 4 de la sección anterior. Ahí calculamos la misma integral, pero para una curva específica C, el segmento de recta de $(0, 3, 0)$ a $(4, 3, 0)$. De manera sorprendente, siempre obtendremos la misma respuesta, sin importar la curva que tomemos de $(0, 3, 0)$ a $(4, 3, 0)$. Decimos que la integral de línea dada es independiente de la trayectoria.



Un conjunto conexo



Un conjunto disconexo

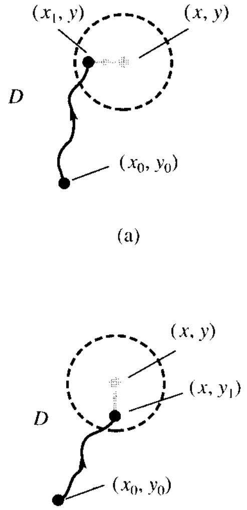
Figura 1

Criterios para la independencia de la trayectoria Decimos que un conjunto D es **conexo** si cualesquiera dos puntos en D pueden unirse mediante una curva suave por partes totalmente contenida en D (figura 1). Entonces decimos que $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ es **independiente de la trayectoria en D** si para cualesquiera dos puntos A y B en D, la integral de línea tiene el mismo valor para cualquier trayectoria C en D orientada positivamente de A a B.

Una consecuencia del teorema A es que si $\mathbf{F}$ es el gradiente de otra función f, entonces $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria. El recíproco también es cierto.

Teorema B **Teorema de la independencia de la trayectoria**

Sea $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ continua en un conjunto abierto y conexo D. Entonces la integral de línea $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria si y sólo si $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{r})$ para alguna función escalar f; es decir, si y sólo si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo en D.



(a)

(b)

Figura 2

Demostración El teorema A se encarga de la parte "si". Suponga entonces que $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D. Nuestra tarea consiste en construir una función f que satisfaga $\nabla f = \mathbf{F}$; es decir, debemos hallar una función potencial para el campo vectorial $\mathbf{F}$. Por simplicidad, nos restringiremos al caso bidimensional, donde D es un conjunto plano y $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$.

Sea (x_0, y_0) un punto fijo de D y sea (x, y) cualquier otro punto de D. Elegimos un tercer punto (x_1, y) en D y ligeramente a la izquierda de (x, y) y lo unimos con (x, y) mediante un segmento horizontal en D. Luego unimos (x_0, y_0) con (x_1, y) mediante una curva en D. (Todo esto es posible debido a que D es abierto y conexo, véase la figura 2a). Por último, sea C la trayectoria de (x_0, y_0) a (x, y) compuesta por dos partes, y definimos f como

$$f(x, y) = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y)} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{(x_1, y)}^{(x, y)} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

La independencia de la trayectoria nos garantiza que obtenemos un único valor.

La primera integral de la derecha en la ecuación anterior no depende de x; la segunda, con y fijo, se puede escribir como una integral definida ordinaria usando, por ejemplo, t como parámetro. Esto implica que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 + \frac{\partial}{\partial x}\int_{x_1}^{x} M(t, y)\, dt = M(x, y)$$

La última igualdad es consecuencia del Primer Teorema Fundamental del Cálculo (teorema 4.4A).

Un argumento similar, usando la figura 2b, muestra que $\partial f/\partial y = N(x, y)$. Concluimos que $\nabla f = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j} = \mathbf{F}$, como se deseaba. ■

Los resultados de esta sección culminan en el teorema siguiente, que saca una relación entre las ideas de un campo vectorial conservativo, independencia de trayectoria de una integral de línea y que la integral de línea sobre todas las trayectorias cerradas es cero.

Teorema C **Condiciones equivalentes para integrales de línea**

Sea $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ continua en un conjunto conexo y abierto D. Entonces las condiciones siguientes son equivalentes:

(1) $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguna función f. ($\mathbf{F}$ es conservativo sobre D).

(2) $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D.

(3) $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda trayectoria cerrada D.

Demostración El teorema B afirma que (1) y (2) son equivalentes. Entonces debemos mostrar que (2) y (3) son equivalentes. Suponga que $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ es de trayectoria independiente. Entonces debemos mostrar que $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda trayectoria cerrada en D. Sea C una trayectoria cerrada en D y sean A y B puntos distintos en C, como se muestra en la primera parte de la figura 3. Suponga que C se compone de dos curvas, C_1, que va de A a B, y C_2 que va de B a A. Sea $-C_2$ la curva C_2 con orientación opuesta, como se muestra en la segunda parte de la figura 3. Como C_1 y $-C_2$ tienen los mismos puntos inicial y final, a saber A y B, la independencia de trayectorias implica que

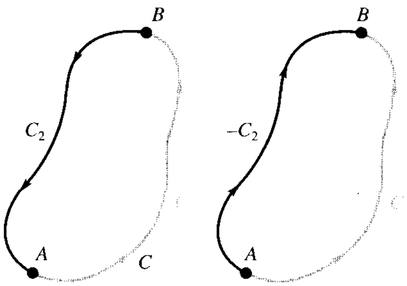


Figura 3

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}\\ &= \int_{C_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} - \int_{-C_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}\\ &= \int_{C_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0\end{aligned}$$

Esto muestra que (2) implica (3). El argumento que (3) implica (2), en esencia es el recíproco del dado anteriormente. Dejamos los detalles al lector (el problema 31). ■

La condición 3 del teorema C tiene una interesante interpretación física. El trabajo realizado por un campo de fuerzas conservativo al mover una partícula en torno de una trayectoria cerrada es cero. En particular, esto es cierto para los campos gravitacionales y los campos eléctricos, pues son conservativos.

Aunque cada una de las condiciones 2 y 3 implican que $\mathbf{F}$ es el gradiente de una función escalar f, no son particularmente útiles en esta relación. Un criterio más útil está dado en el siguiente teorema. Sin embargo, necesitamos imponer una condición adicional en D, la de ser **simplemente conexo**. En el espacio bidimensional esto significa que D no tiene "agujeros" y en el espacio tridimensional no tiene "túneles" en todo D. (Para la definición técnica, consulte cualquier libro de cálculo avanzado).

Teorema D

Sea $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$, donde M, N y P son continuas junto con sus derivadas parciales de primer orden en un conjunto abierto y conexo D, que además es simplemente conexo. Entonces $\mathbf{F}$ es conservativo ($\mathbf{F} = \nabla f$) si y sólo si rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$; es decir, si y sólo si

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \qquad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

En particular, en el caso de dos variables, donde $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ es conservativo si y sólo si

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

La parte "sólo si" es fácil de demostrar (problema 21). La parte "si" es consecuencia del Teorema de Green (teorema 14.4A) en el caso de dos variables y del Teorema de Stokes en el caso de tres variables (véase el ejemplo 4 de la sección 14.7). El problema 29 muestra la necesidad de que el conjunto sea simplemente conexo.

Recuperación de una función a partir de su gradiente Suponga que se da un campo vectorial $\mathbf{F}$ que satisface las condiciones del teorema D. Entonces sabemos que existe una función f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$. ¿Pero cómo determinamos f? Ilustraremos la respuesta primero para un campo vectorial bidimensional.

EJEMPLO 2 Determine si $\mathbf{F} = (4x^3 + 9x^2y^2)\mathbf{i} + (6x^3y + 6y^5)\mathbf{j}$ es conservativo y, en tal caso, determine la función f de la cual es el gradiente.

SOLUCIÓN $M(x, y) = 4x^3 + 9x^2y^2$ y $N(x, y) = 6x^3y + 6y^5$. En este caso bidimensional, las condiciones del teorema D se reducen a mostrar que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Ahora

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 18x^2y, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 18x^2y$$

de modo que se satisface la condición y f debe existir.

Para determinar f, primero observamos que

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$$

Así,

$$(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 9x^2y^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 6x^3y + 6y^5$$

Si integramos la ecuación de la izquierda respecto a x, obtenemos

$$(2) \qquad f(x, y) = x^4 + 3x^3y^2 + C_1(y)$$

donde la "constante" de integración C_1 puede depender de y. Pero la parcial respecto a y de la expresión en (2) debe ser igual a $6x^3y + 6y^5$; así,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6x^3y + C_1'(y) = 6x^3y + 6y^5$$

Concluimos que $C_1'(y) = 6y^5$. Otra integración da como resultado

$$C_1(y) = y^6 + C$$

donde C es una constante (independiente de x y y). Al sustituir este resultado en (1) tenemos

$$f(x, y) = x^4 + 3x^3y^2 + y^6 + C \qquad ■$$

A continuación usamos el resultado del ejemplo 2 para calcular una integral de línea.

Notación para integrales de línea que son independientes de la trayectoria

Si una integral de línea

$$\int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

es independiente de la trayectoria, entonces con frecuencia la escribiremos como

$$\int_{(a,b)}^{(c,d)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

indicando sólo el punto inicial (a, b) y el punto final (c, d) para la trayectoria C.

De forma análoga, escribiremos

$$\Big[f(x, y)\Big]_{(a,b)}^{(c,d)}$$

para

$$f(c, d) - f(a, b)$$

EJEMPLO 3 Sea $\mathbf{F(r)} = \mathbf{F}(x, y) = (4x^3 + 9x^2y^2)\mathbf{i} + (6x^3y + 6y^5)\mathbf{j}$. Calcule $\int_C \mathbf{F(r)} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (4x^3 + 9x^2y^2)\,dx + (6x^3y + 6y^5)\,dy$, donde C es cualquier trayectoria de (0, 0) a (1, 2).

SOLUCIÓN El ejemplo 1 muestra que $\mathbf{F} = \nabla f$, donde

$$f(x, y) = x^4 + 3x^3y^2 + y^6 + C$$

y así la integral de línea dada es independiente de la trayectoria. De hecho, por el teorema A

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F(r)} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{(0,0)}^{(1,2)} (4x^3 + 9x^2y^2)\,dx + (6x^3y + 6y^5)\,dy \\ &= \Big[x^4 + 3x^3y^2 + y^6 + C\Big]_{(0,0)}^{(1,2)} = 1 + 12 + 64 = 77 \qquad ■\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Demuestre que $\mathbf{F} = (e^x \cos y + yz)\mathbf{i} + (xz - e^x \operatorname{sen} y)\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$ es conservativo, y determine f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

SOLUCIÓN

$$M = e^x \cos y + yz, \qquad N = xz - e^x \operatorname{sen} y, \qquad P = xy$$

y entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y + z = \frac{\partial N}{\partial x}, \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = y = \frac{\partial P}{\partial x}, \qquad \frac{\partial N}{\partial z} = x = \frac{\partial P}{\partial y}$$

que son las condiciones del teorema D. Ahora,

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= e^x \cos y + yz \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= xz - e^x \operatorname{sen} y \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= xy\end{aligned}$$

Cuando obtenemos las antiderivadas, la primera de éstas respecto a x, obtenemos

$$\text{(4)} \qquad f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + C_1(y, z)$$

Ahora derivamos (4) con respecto a y e igualamos el resultado con la segunda expresión en (3).

$$-e^x \operatorname{sen} y + xz + \frac{\partial C_1}{\partial y} = xz - e^x \operatorname{sen} y$$

o

$$\frac{\partial C_1(y, z)}{\partial y} = 0$$

Al obtener la antiderivada de la última, respecto a y, tenemos

$$C_1(y, z) = C_2(z)$$

que a su vez sustituimos en (4).

$$(5) \qquad f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + C_2(z)$$

Al derivar (5) respecto a z e igualar el resultado con la tercera expresión en (3), obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy + C_2'(z) = xy$$

o $C_2'(z) = 0$ y $C_2(z) = C$. Concluimos que

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + C$$

■

Conservación de la energía Daremos una aplicación a la física y al mismo tiempo damos una razón para el nombre campo de fuerzas *conservativo.* Estableceremos la Ley de Conservación de la Energía, la cual establece que la suma de la energía cinética y la energía potencial de un objeto debidas a una fuerza conservativa es constante.

Suponga que un objeto de masa m se mueve a lo largo de una curva suave C dada por

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \qquad a \le t \le b$$

bajo la influencia de una fuerza conservativa $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{r})$. La física nos enseña tres hechos acerca del objeto en el instante t.

1. $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = m\mathbf{a}(t) = m\mathbf{r}''(t)$ (Segunda Ley de Newton).
2. $\text{EC} = \frac{1}{2}m\|\mathbf{r}'(t)\|^2$ (EC = energía cinética).
3. $\text{EP} = -f(\mathbf{r})$ (EP = energía potencial).

Así,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\text{EC} + \text{EP}) &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\|\mathbf{r}'(t)\|^2 - f(\mathbf{r})\right] \\
&= \frac{m}{2}\frac{d}{dt}[\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}'(t)] - \left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right] \\
&= m\mathbf{r}''(t)\cdot\mathbf{r}'(t) - \nabla f(\mathbf{r})\cdot\mathbf{r}'(t) \\
&= [m\mathbf{r}''(t) - \nabla f(\mathbf{r})]\cdot\mathbf{r}'(t) \\
&= [\mathbf{F}(\mathbf{r}) - \mathbf{F}(\mathbf{r})]\cdot\mathbf{r}'(t) = 0
\end{aligned}$$

Concluimos que EC + EP es constante.

Revisión de conceptos

1. Sea C dada por $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$ y sea $\mathbf{a} = \mathbf{r}(a)$ y $\mathbf{b} = \mathbf{r}(b)$. Entonces, por el teorema fundamental para integrales de línea, $\int_C \nabla f(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} =$ _____.

2. $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria si y sólo si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial _____ es decir, si y sólo si $\mathbf{F}(\mathbf{r}) =$ _____ para alguna función escalar f.

3. Si rot $\mathbf{F} =$ _____ en un conjunto abierto, conexo y simplemente conexo D, entonces $\mathbf{F} = \nabla f$ para cierta función f definida en D. Recíprocamente, rot $(\nabla f) =$ _____.

4. Sea $\mathbf{F} = f(x)\mathbf{i} + g(y)\mathbf{j}$ un campo vectorial bidimensional. Si $\partial f/\partial y = \partial g/\partial x$, concluimos que _____.

Conjunto de problemas 14.3

En los problemas del 1 al 12 determine si el campo dado **F** *es conservativo. En tal caso, halle f tal que* $\mathbf{F} = \nabla f$; en caso contrario, indique que **F** *no es conservativo. Véanse los ejemplos 2 y 4.*

1. $\mathbf{F}(x, y) = (10x - 7y)\mathbf{i} - (7x - 2y)\mathbf{j}$

2. $\mathbf{F}(x, y) = (12x^2 + 3y^2 + 5y)\mathbf{i} + (6xy - 3y^2 + 5x)\mathbf{j}$

3. $\mathbf{F}(x, y) = (45x^4y^2 - 6y^6 + 3)\mathbf{i} + (18x^5y - 12xy^5 + 7)\mathbf{j}$

4. $\mathbf{F}(x, y) = (35x^4 - 3x^2y^4 + y^9)\mathbf{i} - (4x^3y^3 - 9xy^8)\mathbf{j}$

5. $\mathbf{F}(x, y) = \left(\dfrac{6x^2}{5y^2}\right)\mathbf{i} - \left(\dfrac{4x^3}{5y^3}\right)\mathbf{j}$

6. $\mathbf{F}(x, y) = 4y^2\cos(xy^2)\mathbf{i} + 8x\cos(xy^2)\mathbf{j}$

7. $\mathbf{F}(x, y) = (2e^y - ye^x)\mathbf{i} + (2xe^y - e^x)\mathbf{j}$

8. $\mathbf{F}(x, y) = -e^{-x}\ln y\,\mathbf{i} + e^{-x}y^{-1}\mathbf{j}$

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x^2\mathbf{i} + 6y^2\mathbf{j} + 9z^2\mathbf{k}$

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy + z^2)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + (2xz + \pi\cos\pi z)\mathbf{k}$

11. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{-2x}{x^2 + z^2}\,\mathbf{i} + \dfrac{-2z}{x^2 + z^2}\,\mathbf{k}$

12. $\mathbf{F}(x, y, z) = (1 + 2yz^2)\mathbf{j} + (1 + 2y^2z)\mathbf{k}$

En los problemas del 13 al 20 demuestre que la integral de línea dada es independiente de la trayectoria (use el teorema C) y luego evalúe la integral (ya sea usando una trayectoria conveniente o, si lo prefiere, hallando una función potencial f y aplicando el teorema A).

13. $\displaystyle\int_{(-1,2)}^{(3,1)} (y^2 + 2xy)\,dx + (x^2 + 2xy)\,dy$

14. $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,\pi/2)} e^x \operatorname{sen} y\,dx + e^x\cos y\,dy$

15. $\displaystyle\int_{(2,1)}^{(6,3)} \frac{x^3}{(x^4 + y^4)^2}\,dx + \frac{y^3}{(x^4 + y^4)^2}\,dy$

16. $\displaystyle\int_{(-1,1)}^{(4,2)} \left(y - \frac{1}{x^2}\right)dx + \left(x - \frac{1}{y^2}\right)dy$

17. $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (6xy^3 + 2z^2)\,dx + 9x^2y^2\,dy + (4xz + 1)\,dz$

Sugerencia: intente con la trayectoria que consta de segmentos de recta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 0, 0)$ a $(1, 1, 0)$ a $(1, 1, 1)$.

18. $\displaystyle\int_{(0,1,0)}^{(1,1,1)} (yz + 1)\,dx + (xz + 1)\,dy + (xy + 1)\,dz$

19. $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(-1,0,\pi)} (y + z)\,dx + (x + z)\,dy + (x + y)\,dz$

20. $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(\pi,\pi,0)} (\cos x + 2yz)\,dx + (\operatorname{sen} y + 2xz)\,dy + (z + 2xy)\,dz$

21. Suponga que $\nabla f(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$, donde M, N y P tienen derivadas parciales de primer orden continuas en un conjunto abierto D. Demuestre que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \qquad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

en D. *Sugerencia:* use el teorema 12.3C con f.

22. Para cada (x, y, z), sea $\mathbf{F}(x, y, z)$ un vector que apunta hacia el origen, con magnitud inversamente proporcional a la distancia al origen; es decir, sea

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-k(x\mathbf{i} + y\mathbf{i} + z\mathbf{k})}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Muestre que **F** es conservativo, hallando una función potencial para **F**. *Sugerencia:* si esto le parece difícil, véase el problema 24.

23. Siga las indicaciones del problema 22 para $\mathbf{F}(x, y, z)$ dirigido alejándose del origen, con magnitud proporcional a la distancia al origen.

24. Generalice los problemas 22 y 23 mostrando que si

$$\mathbf{F}(x, y, z) = [g(x^2 + y^2 + z^2)](x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

donde g es una función continua de una variable, entonces **F** es conservativo. *Sugerencia:* demuestre que $\mathbf{F} = \nabla f$, donde $f(x, y, z) = \frac{1}{2}h(x^2 + y^2 + z^2)$ y $h(u) = \int g(u)\,du$.

25. Suponga que un objeto de masa m se mueve a lo largo de una curva suave C descrita por

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \qquad a \le t \le b$$

sujeto solamente a la fuerza continua **F**. Demuestre que el trabajo realizado es igual al cambio en la energía cinética del objeto; es decir, demuestre que

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \frac{m}{2}[\|\mathbf{r}'(b)\|^2 - \|\mathbf{r}'(a)\|^2]$$

Sugerencia: $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = m\mathbf{r}''(t)$.

26. Matt movió un objeto pesado sobre el suelo, de A a B. El objeto estaba en reposo al principio y al final. ¿Implica el problema 25 que Matt no realizó trabajo? Explique.

27. Por lo general, consideramos que la fuerza gravitacional de la Tierra sobre un objeto de masa m está dada por $\mathbf{F} = -gm\mathbf{k}$, pero, por supuesto, esto sólo es válido en regiones cercanas a la superficie de la Tierra. Determine la función potencial f para **F** y utilícela para mostrar que el trabajo realizado por **F** al mover un objeto de (x_1, y_1, z_1) a un punto cercano (x_2, y_2, z_2) es $mg(z_1 - z_2)$.

☐C **28.** La distancia de la Tierra (masa m) al Sol (masa M) varía desde un máximo (afelio) de 152.1 millones de kilómetros hasta un mínimo (perihelio) de 147.1 millones de kilómetros. Suponga que es válida la Ley del Cuadrado Inverso de Newton, $\mathbf{F} = -GMm\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3$, con $G = 6.67 \times 10^{-11}$ newton-metro^2/kilogramo^2, $M = 1.99 \times 10^{30}$ kilogramos y $m = 5.97 \times 10^{24}$ kilogramos. ¿Cuánto trabajo realiza **F** para mover la Tierra en cada caso?

(a) Del afelio al perihelio

(b) En toda una órbita

29. Este problema muestra la necesidad de que el conjunto sea simplemente conexo en la parte "si" del teorema C. Sea $\mathbf{F} = (y\mathbf{i} - x\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$ en el conjunto $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \neq 0\}$. Demuestre lo siguiente:

(a) La condición $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ se cumple en D.

(b) **F** no es conservativo en D.

Sugerencia: para establecer la parte (b), demuestre que $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -2\pi$ donde C es la circunferencia con ecuaciones paramétricas $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$.

30. Sea $f(x, y) = \tan^{-1}(y/x)$. Demuestre que $\nabla f = (y\mathbf{i} - x\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$, que es la función vectorial del problema 29. ¿Por qué la sugerencia de dicho problema no viola el teorema A?

31. Demuestre que en el teorema C, la condición (3) implica la condición (2).

Respuestas a la revisión de conceptos: 1. $f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$ **2.** gradiente o conservativo; $\nabla f(\mathbf{r})$ **3. 0; 0** **4. F** es conservativo

14.4 Teorema de Green en el plano

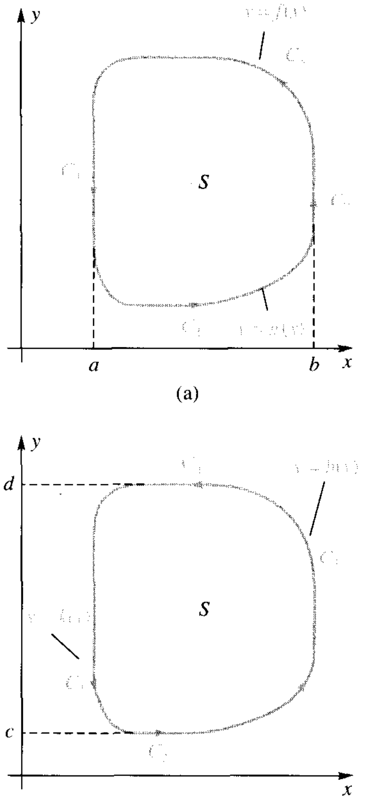
Comenzaremos con otro vistazo al Segundo Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

Éste dice que la integral de una función sobre un conjunto $S = [a, b]$ es igual a una función relacionada con la anterior (la antiderivada) evaluada de cierta manera en la frontera de S, que en este caso consta solamente de los dos puntos a y b. En el resto del capítulo daremos tres generalizaciones de este resultado: los teoremas de Green, Gauss y Stokes. Éstas son generalizaciones del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, en el sentido que alguna integral (doble o triple, o integral de superficie, definida en la sección siguiente) se expresa como alguna cantidad evaluada en la frontera de la región de integración. Estos teoremas tienen aplicaciones en física —particularmente en el estudio del calor—, la electricidad, el magnetismo y el flujo de fluidos. El primero de estos teoremas se debe a George Green (1793–1841), físico matemático autodidacto inglés.

Supongamos que C es una curva simple cerrada (sección 10.4) que forma la frontera de una región S en el plano xy. Consideremos a C orientada de modo que al recorrerla en su dirección positiva, S siempre queda a la izquierda (la orientación en sentido contrario al de las manecillas del reloj). La integral de línea correspondiente de $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ en torno de C se denota

$$\oint_C M\,dx + N\,dy$$



(a)

(b)

Figura 1

Teorema A **Teorema de Green**

Sea C una curva simple cerrada, suave por partes, que forma la frontera de una región S en el plano xy. Si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son continuas y tienen derivadas parciales continuas en S y en su frontera C, entonces

$$\iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \oint_C M\,dx + N\,dy$$

Demostración Demostraremos el teorema para el caso en que S es un conjunto x-simple y y-simple y luego analizaremos su extensión al caso general.

Como S es y-simple, tiene la forma de la figura 1; es decir,

$$S = \{(x, y) : g(x) \le y \le f(x), a \le x \le b\}$$

Su frontera C consta de cuatro arcos C_1, C_2, C_3 y C_4 (aunque C_2 o C_4 podrían ser degenerados) y

$$\oint_C M\,dx = \int_{C_1} M\,dx + \int_{C_2} M\,dx + \int_{C_3} M\,dx + \int_{C_4} M\,dx$$

Las integrales sobre C_2 y C_4 se anulan, pues en estas curvas x es constante, de modo que $dx = 0$. Así,

$$\begin{aligned}\oint_C M\,dx &= \int_a^b M(x, g(x))\,dx + \int_b^a M(x, f(x))\,dx \\ &= -\int_a^b [M(x, f(x)) - M(x, g(x))]\,dx \\ &= -\int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} \frac{\partial M(x, y)}{\partial y}\,dy\,dx \\ &= -\iint_S \frac{\partial M}{\partial y}\,dA\end{aligned}$$

Un resultado prometido

Suponga que $\partial N/\partial x = \partial M/\partial y$. Entonces el teorema de Green nos dice que

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = 0$$

A su vez, esto implica que el campo $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ es conservativo. Esto es parte de lo que afirmamos en el teorema 14.3D para el caso de dos variables.

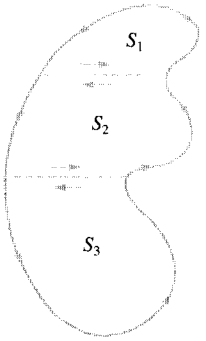


Figura 2

De manera análoga, considerando a S como un conjunto x-simple, obtenemos

$$\oint_C N\,dy = \iint_S \frac{\partial N}{\partial x}\,dA$$

aunque las curvas C_1, C_2, C_3 o C_4 deben redefinirse como en la figura 1b. Concluimos que el teorema de Green es válido en un conjunto que sea x-simple y y-simple.

El resultado se extiende con facilidad a una región S que se descompone en una unión de regiones $S_1, S_2, \ldots, S_k$, que sean x-simple y y-simple (figura 2). Simplemente aplicamos el teorema en la forma que hemos demostrado a cada uno de estos conjuntos y luego sumamos los resultados. Observe que las contribuciones de las integrales de línea se cancelan en las fronteras compartidas por las regiones adyacentes, pues estas fronteras se recorren dos veces, pero en direcciones opuestas. ■

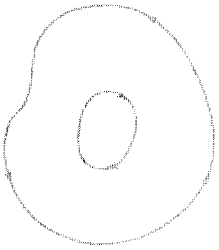


Figura 3

El teorema de Green incluso es válido en una región S con uno o más agujeros (figura 3), siempre que cada parte de su frontera quede orientada de modo que S esté siempre a la izquierda al recorrer la curva en su dirección positiva. Simplemente la descomponemos en regiones comunes, como se muestra en la figura 4.

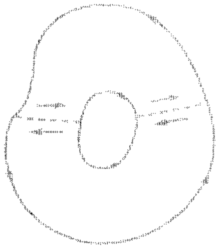


Figura 4

Ejemplos y aplicaciones A veces, el teorema de Green proporciona la forma más sencilla de evaluar una integral de línea.

EJEMPLO 1 Sea C la frontera del triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 2)$ y $(0, 2)$ (figura 5). Calcule

$$\oint_C 4x^2y\,dx + 2y\,dy$$

(a) por el método directo y (b) por el teorema de Green.

SOLUCIÓN

(a) En C_1, $y = 2x$ y $dy = 2\,dx$, de modo que

$$\int_{C_1} 4x^2y\,dx + 2y\,dy = \int_0^1 8x^3\,dx + 8x\,dx = [2x^4 + 4x^2]_0^1 = 6$$

Además,

$$\int_{C_2} 4x^2y\,dx + 2y\,dy = \int_1^0 8x^2\,dx = \left[\frac{8x^3}{3}\right]_1^0 = -\frac{8}{3}$$

$$\int_{C_3} 4x^2y\,dx + 2y\,dy = \int_2^0 2y\,dy = [y^2]_2^0 = -4$$

Así,

$$\oint_C 4x^2y\,dx + 2y\,dy = 6 - \frac{8}{3} - 4 = -\frac{2}{3}$$

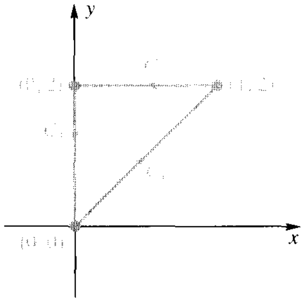


Figura 5

(b) Por el teorema de Green,

$$\begin{aligned}\oint_C 4x^2y\,dx + 2y\,dy &= \int_0^1 \int_{2x}^2 (0 - 4x^2)\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 [-4x^2y]_{2x}^2\,dx = \int_0^1 (-8x^2 + 8x^3)\,dx \\ &= \left[\frac{-8x^3}{3} + 2x^4\right]_0^1 = -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 Demuestre que si una región S en el plano tiene frontera C, donde C es una curva simple cerrada suave por partes, entonces el área de S está dada por

$$A(S) = \frac{1}{2}\oint_C (-y\,dx + x\,dy)$$

SOLUCIÓN Sean $M(x, y) = -y/2$ y $N(x, y) = x/2$, aplicamos el teorema de Green.

$$\oint_C \left(-\frac{y}{2}\,dx + \frac{x}{2}\,dy\right) = \iint_S \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) dA = A(S)$$ ■

EJEMPLO 3 Use el resultado del ejemplo 2 para determinar el área encerrada por la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

SOLUCIÓN La elipse dada tiene las ecuaciones paramétricas

$$x = a\cos t, \qquad y = b\,\mathrm{sen}\,t, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Así,

$$\begin{aligned} A(S) &= \frac{1}{2}\oint_C (-y\,dx + x\,dy) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (-(b\,\mathrm{sen}\,t)(-a\,\mathrm{sen}\,t\,dt) + (a\cos t)(b\cos t\,dt)) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} dt = \pi ab \end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 4 Use el teorema de Green para evaluar la integral de línea

$$\oint_C (x^3 + 2y)\,dx + (4x - 3y^2)\,dy$$

donde C es la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

SOLUCIÓN Sean $M(x, y) = x^3 + 2y$ y $N(x, y) = 4x - 3y^2$ de modo que $\partial M/\partial y = 2$ y $\partial N/\partial x = 4$. Por el teorema de Green y el ejemplo 3,

$$\oint_C (x^3 + 2y)\,dx + (4x - 3y^2)\,dy = \iint_S (4 - 2)\,dA = 2A(S) = 2\pi ab$$ ■

Formas vectoriales del teorema de Green Nuestro siguiente objetivo es restablecer el teorema de Green para el plano en su forma vectorial y de dos maneras distintas. Estas formas serán las que generalicemos después como dos importantes teoremas en el espacio tridimensional.

Supongamos que C es una curva simple cerrada suave en el plano xy, con una orientación en sentido contrario al de las manecillas del reloj, por medio de su parametrización por longitud de arco $x = x(s)$ y $y = y(s)$. Entonces

$$\mathbf{T} = \frac{dx}{ds}\,\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\,\mathbf{j}$$

es un vector tangente unitario y

$$\mathbf{n} = \frac{dy}{ds}\,\mathbf{i} - \frac{dx}{ds}\,\mathbf{j}$$

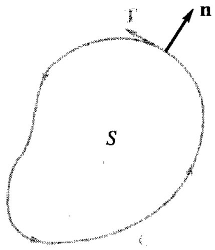


Figura 6

es un vector normal unitario que apunta hacia fuera de la región S acotada por C (figura 6). (Observe que $\mathbf{T}\cdot\mathbf{n} = 0$). Si $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ es un campo vectorial, entonces

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \oint_C (M\mathbf{i} + N\mathbf{j})\cdot\left(\frac{dy}{ds}\mathbf{i} - \frac{dx}{ds}\mathbf{j}\right) ds = \oint_C (-N\,dx + M\,dy)$$
$$= \iint_S \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dA$$

La última igualdad es consecuencia del teorema de Green. Por otro lado,

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$$

Concluimos que

$$\boxed{\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iint_S \operatorname{div}\mathbf{F}\,dA = \iint_S \nabla\cdot\mathbf{F}\,dA}$$

resultado que a veces se conoce como el teorema de la divergencia de Gauss en el plano.

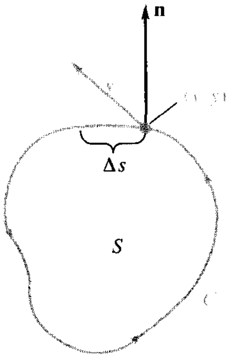


Figura 7

Daremos una interpretación física a esta última fórmula y con ello entenderemos el origen del término *divergencia.* Imagine una capa uniforme de un fluido de densidad constante que se mueve a través del plano xy, con una capa tan delgada que podamos considerarla bidimensional. Queremos calcular la razón con la que el fluido contenido en una región S cruza la curva frontera C (figura 7).

Sea $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{v}(x, y)$ el vector velocidad del fluido en (x, y) y sea Ds la longitud de un pequeño segmento de la curva, con punto inicial (x, y). La cantidad de fluido que cruza este segmento por unidad de tiempo es aproximadamente el área del paralelogramo de la figura 7, es decir, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\Delta s$. La cantidad (neta) de fluido que sale de S por unidad de tiempo, llamado el **flujo** del campo vectorial $\mathbf{F}$ a través de la curva C en la dirección hacia fuera entonces es

$$\boxed{\text{flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } C = \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds}$$

Ahora consideremos un punto fijo (x_0, y_0) en S y un pequeño círculo C_r de radio r con centro en él. En S_r, la región circular con frontera C_r, div $\mathbf{F}$ será aproximadamente igual a su valor div $\mathbf{F}(x_0, y_0)$ en el centro (estamos suponiendo que div $\mathbf{F}$ es continua); entonces, por el teorema de Green,

$$\text{flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } C_r = \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iint_{S_r} \operatorname{div}\mathbf{F}\,dA \approx \operatorname{div}\mathbf{F}(x_0, y_0)(\pi r^2)$$

Concluimos que div $\mathbf{F}(x_0, y_0)$ mide la razón con la que el fluido "diverge hacia fuera" de (x_0, y_0). Si div $\mathbf{F}(x_0, y_0) > 0$, existe una *fuente* de fluido en (x_0, y_0); si div $\mathbf{F}(x_0, y_0) < 0$, existe un *sumidero* para el fluido en (x_0, y_0). Si el flujo a través de la frontera de una región es igual a cero, entonces las fuentes y los sumideros en la región deben equilibrarse entre sí. Por otro lado, si no hay fuentes ni sumideros en la región S, entonces div $\mathbf{F} = 0$ y, por el teorema de Green, existe un flujo neto nulo a través de la frontera de S.

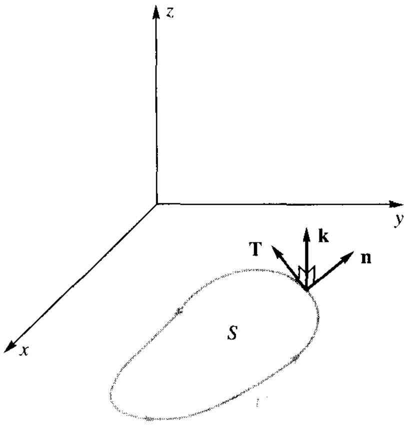


Figura 8

Existe otra forma vectorial para el teorema de Green. Tracemos de nuevo la figura 6, pero ahora como un subconjunto del espacio tridimensional (figura 8). Si $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, entonces el teorema de Green dice que

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

Por otro lado,

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

de modo que

$$(\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

Entonces, el teorema de Green toma la forma

$$\boxed{\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dA}$$

que a veces se llama teorema de Stokes en el plano.

Si aplicamos este resultado a un pequeño círculo C_r con centro en (x_0, y_0), obtenemos

$$\oint_{C_r} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds \approx (\operatorname{rot} \mathbf{F}(x_0, y_0)) \cdot \mathbf{k}(\pi r^2)$$

Esto dice que el flujo en la dirección de la tangente a C_r (la *circulación* de **F** en torno de C_r) se mide mediante el rotacional de **F**. En otras palabras, rot **F** mide la tendencia del fluido a girar en torno de (x_0, y_0). Si rot $\mathbf{F} = 0$ en una región S, el flujo de fluido correspondiente se dice que es *irrotacional.*

EJEMPLO 5 El campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = -\frac{1}{2}y\mathbf{i} + \frac{1}{2}x\mathbf{j} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ es el campo de velocidad de una rotación estacionaria (en sentido contrario a las manecillas del reloj) de una rueda en torno del eje z (véase el ejemplo 2 de la sección 14.1). Calcule $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$ y $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$ para cualquier curva cerrada C en el plano xy.

SOLUCIÓN Si S es la región encerrada por C,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_S \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA = \iint_S \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dA = 0$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dA = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

$$= \iint_S \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) dA = A(S)$$

■

Revisión de conceptos

1. Sea C una curva simple cerrada que acota una región S en el plano xy. Entonces, por el teorema de Green, $\oint_C M\, dx + N\, dy = \iint_S$ ______ dA.

2. Así, si C es la frontera del cuadrado $S = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}, 0 \leq y \leq 1\}$, $\oint_C y\, dx - x\, dy = \iint_S$ _____ $dA =$ _____.

3. La div $\mathbf{F}(x, y)$ mide la razón con la que un fluido homogéneo con campo de velocidad **F** diverge desde (x, y). Si div $\mathbf{F}(x, y) > 0$, existe un(a) ______ de fluido en (x, y); si div $\mathbf{F}(x, y) < 0$, existe un(a) ______ de fluido en (x, y).

4. Por otro lado, rot $\mathbf{F}(x, y)$ mide la tendencia del fluido a ________ en torno de (x, y). Si rot $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{0}$ en una región, el flujo es ________.

Conjunto de problemas 14.4

En los problemas del 1 al 6 use el teorema de Green para evaluar la integral de línea dada. Comience dibujando la región S.

1. $\oint_C 2xy\,dx + y^2\,dy$, donde C es la curva cerrada formada por $y = x/2$ y $y = \sqrt{x}$ entre $(0, 0)$ y $(4, 2)$

2. $\oint_C \sqrt{y}\,dx + \sqrt{x}\,dy$, donde C es la curva cerrada formada por $y = 0, x = 2$, y $y = x^2/2$

3. $\oint_C (2x + y^2)\,dx + (x^2 + 2y)\,dy$, donde C es la curva cerrada formada por $y = 0, x = 2$ y $y = x^3/4$

4. $\oint_C xy\,dx + (x + y)\,dy$, donde C es el triángulo con vértices $(0, 0), (2, 0)$ y $(0, 1)$

5. $\oint_C (x^2 + 4xy)\,dx + (2x^2 + 3y)\,dy$, donde C es la elipse $9x^2 + 16y^2 = 144$

6. $\oint_C (e^{3x} + 2y)\,dx + (x^2 + \text{sen } y)\,dy$, donde C es el rectángulo con vértices $(2, 1), (6, 1), (6, 4)$ y $(2, 4)$.

En los problemas 7 y 8 use el resultado del ejemplo 2 para calcular el área de la región indicada S. Haga un bosquejo.

7. S está acotada por las curvas $y = 4x$ y $y = 2x^2$.

8. S está acotada por las curvas $y = \frac{1}{2}x^3$ y $y = x^2$.

En los problemas del 9 al 12 use las formas vectoriales del teorema de Green para calcular (a) $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds$ *y (b)* $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$.

9. $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$; C es la frontera del cuadrado unitario con vértices $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$ y $(0, 1)$.

10. $\mathbf{F} = ay\mathbf{i} + bx\mathbf{j}$; C como en el problema 9.

11. $\mathbf{F} = y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j}$; C es el círculo unitario.

12. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$; C es el círculo unitario.

13. Suponga que las integrales $\oint \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$ a lo largo de las circunferencias $x^2 + y^2 = 36$ y $x^2 + y^2 = 1$ son recorridos en sentido contrario al de las manecillas del reloj de 30 y -20, respectivamente. Calcule $\iint_S (\text{rot } \mathbf{F})\cdot\mathbf{k}\,dA$, donde S es la región entre las circunferencias.

14. Si $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j}$, calcule el flujo de $\mathbf{F}$ a través de la frontera C del cuadrado unitario con vértices $(0, 0), (0, 1), (1, 1)$ y $(0, 1)$; es decir, calcule $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds$.

15. Determine el trabajo realizado por $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} - 2xy\,\mathbf{j}$ al mover un cuerpo en sentido contrario al de las manecillas del reloj en torno de la curva C del problema 14.

16. Si $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j}$, calcule la circulación de $\mathbf{F}$ en torno de C del problema 14; es decir, calcule $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$.

17. Demuestre que el trabajo realizado por una fuerza constante al mover un cuerpo en torno de una curva simple cerrada es 0.

18. Use el teorema de Green para demostrar el caso plano del teorema 14.3D; es decir, demuestre que $\partial N/\partial x = \partial M/\partial y$ implica que $\oint_C M\,dx + N\,dy = 0$, lo cual implica que $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ es conservativo.

19. Sea

$$\mathbf{F} = \frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} - \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$$

(a) Demuestre que $\partial N/\partial x = \partial M/\partial y$.

(b) Demuestre, usando la parametrización $x = \cos t$, $y = \text{sen } t$, que $\oint_C M\,dx + N\,dy = -2\pi$, donde C es el círculo unitario.

(c) ¿Por qué esto no contradice el teorema de Green?

20. Sea $\mathbf{F}$ como en el problema 19. Calcule $\oint_C M\,dx + N\,dy$, donde

(a) C es la elipse $x^2/9 + y^2/4 = 1$

(b) C es el cuadrado con vértices $(1, -1), (1, 1), (-1, 1)$ y $(-1, -1)$

(c) C es el triángulo con vértices $(1, 0), (2, 0)$ y $(1, 1)$.

21. Sea C una curva simple cerrada suave por partes, que es la frontera de una región S en el plano xy. Modifique el argumento del ejemplo 2 para demostrar que

$$A(S) = \oint_C (-y)\,dx = \oint_C x\,dy$$

22. Sean S y C como en el problema 21. Demuestre que los momentos M_x y M_y en torno a los ejes x y y están dados por

$$M_x = -\frac{1}{2}\oint_C y^2\,dx, \qquad M_y = \frac{1}{2}\oint_C x^2\,dy$$

23. Calcule el área de la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. *Sugerencia:* parametrice mediante $x = a\cos^3 t, y = a\,\text{sen}^3\,t, 0 \le t \le 2\pi$.

24. Calcule el trabajo realizado por $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} - 3x\mathbf{j}$ al mover un objeto en torno de la astroide del problema 23.

25. Sea $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^2 = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$.

(a) Demuestre que $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = 2\pi$, donde C es la circunferencia de radio a con centro en el origen y $\mathbf{n} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})/\sqrt{x^2 + y^2}$ es el vector normal unitario exterior a C.

(b) Demuestre que div $\mathbf{F} = 0$.

(c) Explique por qué los resultados de las partes (a) y (b) no contradicen la forma vectorial del teorema de Green.

(d) Demuestre que si C es una curva simple cerrada suave, entonces $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds$ es igual a 2π o 0, según si el origen está dentro o fuera de C.

26. Área de un polígono Sean $V_0(x_0, y_0), V_1(x_1, y_1), \ldots, V_n(x_n, y_n)$ los vértices de un polígono simple P, etiquetado en sentido contrario al de las manecillas del reloj y con $V_0 = V_n$. Demuestre lo siguiente:

(a) $\int_C x\,dy = \frac{1}{2}(x_1 + x_0)(y_1 + y_0)$, donde C es la arista V_0V_1

(b) Área $(P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i + x_{i-1}}{2}(y_i - y_{i-1})$

(c) El área de un polígono con vértices que tienen coordenadas enteras es siempre un múltiplo de $\frac{1}{2}$

(d) La fórmula de la parte (b) da la respuesta correcta para el polígono con vértices $(2, 0)$, $(2, -2)$, $(6, -2)$, $(6, 0)$, $(10, 4)$ y $(-2, 4)$.

CAS *En cada uno de los siguientes problemas trace la gráfica de* $f(x, y)$ *y el campo gradiente correspondiente* $\mathbf{F} = \nabla f$ *en* $S = \{(x, y): -3 \le x \le 3, -3 \le y \le 3\}$. *Observe que, en cada caso,* rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ *(teorema 14.3D), y entonces no hay tendencia a la rotación en ningún punto.*

27. Sea $f(x, y) = x^2 + y^2$.

(a) Examine visualmente el campo **F** y convénzase de que div $\mathbf{F} > 0$ en S. Luego, calcule div **F**.

(b) Calcule el flujo de **F** a través de la frontera de S.

28. Sea $f(x, y) = \ln(\cos(x/3)) - \ln(\cos(y/3))$.

(a) Trate de ver si div **F** es positiva o negativa en algunos puntos y luego calcule div **F** para ver si está en lo correcto.

(b) Calcule el flujo de **F** a través de la frontera de S.

29. Sea $f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$.

(a) Examine visualmente el campo **F** para ver dónde div **F** es positiva y dónde es negativa. Luego calcule div **F** para ver si está en lo correcto.

(b) Calcule el flujo de **F** a través de la frontera de S; luego calcule el flujo a través de la frontera de $T = \{(x, y): 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 3\}$.

30. Sea $f(x, y) = \exp(-(x^2 + y^2)/4)$. Trate de ver dónde div **F** es positiva y dónde es negativa. Luego, determine esto en forma analítica.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$ **2.** $-2; -2$ **3.** fuente; sumidero **4.** girar; irrotacional

---

14.5
Integrales de superficie

Una integral de línea generaliza la integral definida común; de manera análoga, una integral de superficie generaliza una integral doble.

Sea G la superficie dada por la gráfica de $z = f(x, y)$, donde (x, y) varía sobre un rectángulo R en el plano xy. Sea P una partición de R en n subrectángulos R_i; esto produce una partición correspondiente de la superficie G en n partes G_i (figura 1). Elegimos un punto muestra $(\overline{x}_i, \overline{y}_i)$ en R_i y sea $(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i) = (\overline{x}_i, \overline{y}_i, f(\overline{x}_i, \overline{y}_i))$ el punto correspondiente en G_i. Entonces definimos la **integral de superficie** de g sobre G mediante

$$\iint_G g(x, y, z)\, dS = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i)\, \Delta S_i$$

donde DS_i es el área de G_i. Por último, extendemos la definición al caso en que R sea un conjunto general, cerrado y acotado en el plano xy de la manera usual (dando a g el valor 0 fuera de R).

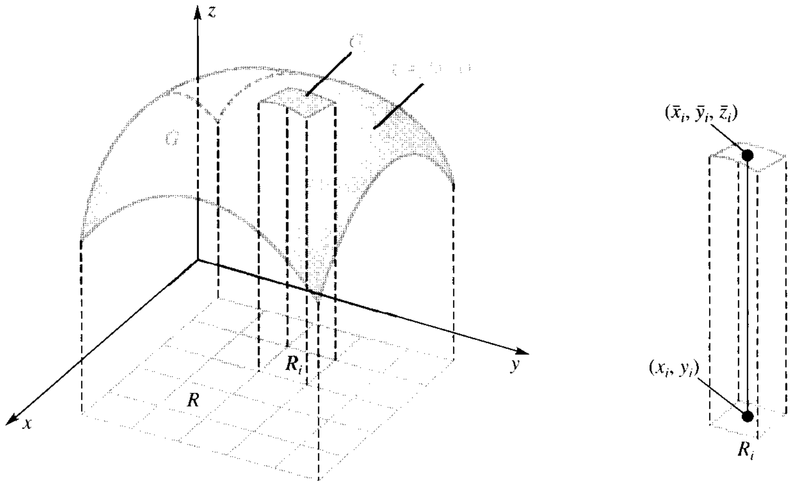


Figura 1

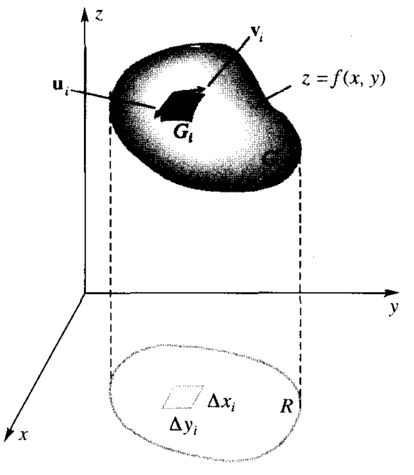


Figura 2

Evaluación de integrales de superficie Una definición no es suficiente; necesitamos una manera práctica de evaluar una integral de superficie. El desarrollo de la sección 13.6 sugiere el resultado correcto. Ahí mostramos que bajo las hipótesis adecuadas, el área de una parte pequeña G_i (figura 2) de la superficie es aproximadamente $\|\mathbf{u}_i \times \mathbf{v}_i|$, donde $\mathbf{u}_i$ y $\mathbf{v}_i$ son lados de un paralelogramo que es tangente a la superficie. Así,

$$A(G_i) \approx \|\mathbf{u}_i \times \mathbf{v}_j\| \approx \sqrt{(f_x(x_i, y_i))^2 + (f_y(x_i, y_i))^2 + 1}\,\Delta y_i\,\Delta x_i$$

Esto conduce al siguiente teorema.

Teorema A

Sea G una superficie dada por $z = f(x, y)$, donde (x, y) está en R. Si f tiene derivadas parciales de primer orden continuas y $g(x, y, z) = g(x, y, f(x, y))$ es continua en R, entonces

$$\iint_G g(x, y, z)\,dS = \iint_R g(x, y, f(x, y))\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\,dy\,dx$$

Observe que cuando $g(x, y, z) = 1$, el teorema A da la fórmula para el área de una superficie dada en la sección 13.6.

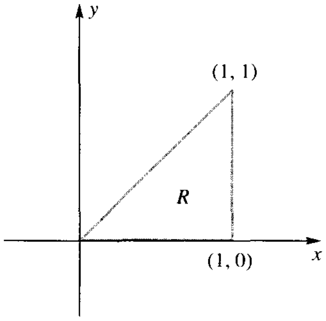


Figura 3

EJEMPLO 1 Evalúe $\iint_G (xy + z)\,dS$, donde G es la parte del plano $2x - y + z = 3$ por arriba del triángulo R de la figura 3.

SOLUCIÓN En este caso, $z = 3 + y - 2x = f(x, y)$, $f_x = -2$, $f_y = 1$, y $g(x, y, z) = xy + 3 + y - 2x$. Así,

$$\iint_G (xy + z)\,dS = \int_0^1 \int_0^x (xy + 3 + y - 2x)\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 1}\,dy\,dx$$

$$= \sqrt{6}\int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} + 3y + \frac{y^2}{2} - 2xy\right]_0^x dx$$

$$= \sqrt{6}\int_0^1 \left[\frac{x^3}{2} + 3x - \frac{3x^2}{2}\right] dx = \frac{9\sqrt{6}}{8}$$ ■

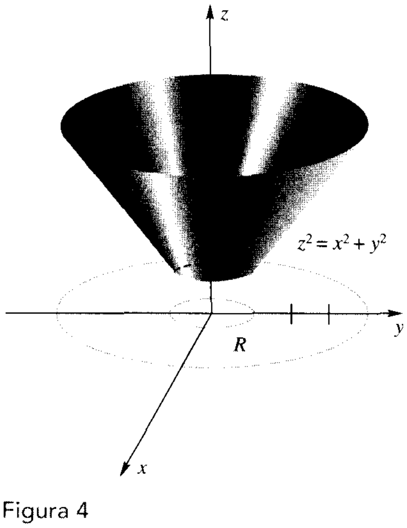


Figura 4

EJEMPLO 2 Evalúe $\iint_G xyz\,dS$, donde G es la parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$ entre los planos $z = 1$ y $z = 4$ (figura 4).

SOLUCIÓN Podemos escribir

$$z = (x^2 + y^2)^{1/2} = f(x, y)$$

de donde

$$f_x^2 + f_y^2 + 1 = \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1 = 2$$

Así,

$$\iint_G xyz\,dS = \iint_R xy\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{2}\,dy\,dx$$

Después de un cambio a coordenadas polares, esto se convierte en

$$\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^4 (r\cos\theta)(r\operatorname{sen}\theta)r^2\,dr\,d\theta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left[\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{r^5}{5}\right]_1^4 d\theta$$

$$= \frac{1023\sqrt{2}}{5}\left[\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 0 \qquad ■$$

EJEMPLO 3 La parte de la superficie esférica G con ecuación

$$z = f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

donde x y y satisfacen $x^2 + y^2 \leq 4$ tiene una cubierta metálica delgada cuya densidad en (x, y, z) es $\delta(x, y, z) = z$. Determine la masa de esta cubierta.

SOLUCIÓN Sea R la proyección de G en el plano xy; es decir, sea $R = \{(x, y): 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Entonces

$$m = \iint_G \delta(x, y, z)\,dS = \iint_R z\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\,dA$$

$$= \iint_R z\sqrt{\frac{x^2}{9 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{9 - x^2 - y^2} + 1}\,dA$$

$$= \iint_R z\frac{3}{z}\,dA = 3(\pi 2^2) = 12\pi \qquad ■$$

Sea G la superficie dada por una ecuación de la forma $y = h(x, z)$ y sea R su proyección en el plano xz. Entonces, la fórmula adecuada para la integral de superficie es

$$\iint_G g(x, y, z)\,dS = \iint_R g(x, h(x, z), z)\sqrt{h_x^2 + h_z^2 + 1}\,dx\,dz$$

Hay una fórmula correspondiente cuando la superficie G está dada por $x = k(y, z)$.

EJEMPLO 4 Evalúe $\iint_G (x^2 + z^2)\,dS$, donde G es la parte del paraboloide $y = 1 - x^2 - z^2$ que se proyecta sobre $R = \{(x, z): x^2 + z^2 \leq 1\}$.

SOLUCIÓN

$$\iint_G (x^2 + z^2)\,dS = \iint_R (x^2 + z^2)\sqrt{4x^2 + 4z^2 + 1}\,dA$$

Si usamos coordenadas polares, esto se convierte en

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\sqrt{4r^2 + 1}\,r\,dr\,d\theta$$

En la integral interior, sea $u = \sqrt{4r^2 + 1}$, de modo que $u^2 = 4r^2 + 1$ y $u\,du = 4r\,dr$. Obtenemos

$$\frac{1}{16}\int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{5}} (u^2 - 1)u^2\,du\,d\theta = \frac{\left(25\sqrt{5} + 1\right)\pi}{60} \approx 2.979 \qquad ■$$

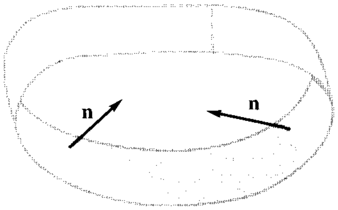


Figura 5

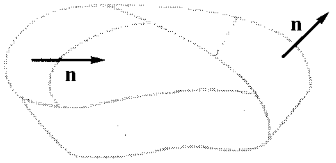


Figura 6

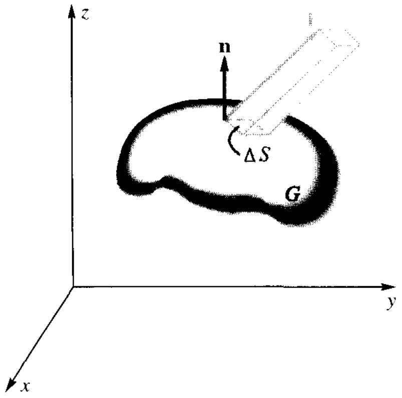


Figura 7

Flujo de un campo vectorial a través de una superficie Para nuestra próxima discusión y para posteriores aplicaciones, necesitamos limitar aún más los tipos de superficies por considerar. La mayor parte de las superficies que surgen en la práctica tiene dos lados. Sin embargo, es sorprendentemente fácil construir una superficie con sólo un lado. Tome una banda de papel (figura 5), córtela por la línea punteada, dé medio giro a uno de los extremos y péguela de nuevo (figura 6). Usted obtendrá una superficie con un lado, llamada banda de Möbius.

A partir de este momento, sólo consideraremos superficies con dos lados, de modo que tenga sentido hablar de un fluido que mana a través de la superficie de un lado al otro, como si la superficie fuese una pantalla. Además, suponemos que la superficie es *suave*, lo cual significa que tiene un vector normal unitario **n** que varía en forma continua. Sea G tal superficie suave, con dos lados, y suponga que se le sumerge en un fluido con un campo de velocidad continuo $\mathbf{F}(x, y, z)$. Si ΔS es el área de una pequeña parte de G, entonces **F** casi es constante ahí y el volumen ΔV de fluido que cruza este pedazo en la dirección del vector normal unitario **n** (figura 7) es

$$\Delta V \approx \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\Delta S$$

Concluimos que

$$\boxed{\text{flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } G = \iint_G \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS}$$

EJEMPLO 5 Calcule el flujo hacia arriba de $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ a través de la parte de la superficie esférica G determinada por

$$z = f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \qquad 0 \le x^2 + y^2 \le 4$$

SOLUCIÓN Observe que el campo **F** es una corriente giratoria que fluye en la dirección del eje z positivo.

La ecuación de la superficie se puede escribir como

$$H(x, y, z) = z - \sqrt{9 - x^2 - y^2} = z - f(x, y) = 0$$

y así

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla H}{\|\nabla H\|} = \frac{-f_x\mathbf{i} - f_y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} = \frac{(x/z)\mathbf{i} + (y/z)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{(x/z)^2 + (y/z)^2 + 1}}$$

es un vector unitario normal a la superficie. El vector $-\mathbf{n}$ también es normal a la superficie; pero, como queremos obtener el vector unitario normal que apunta hacia arriba, **n** es la elección correcta. Un cálculo directo, usando el hecho de que $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, produce

$$\mathbf{n} = \frac{(x/z)\mathbf{i} + (y/z)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{3/z} = \frac{x}{3}\mathbf{i} + \frac{y}{3}\mathbf{j} + \frac{z}{3}\mathbf{k}$$

(Un argumento geométrico sencillo dará también este resultado; el vector normal debe apuntar directamente hacia fuera del origen).

El flujo de **F** a través de G está dado por

$$\begin{aligned}
\text{flujo} &= \iint_G \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS \\
&= \iint_G (-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + 9\,\mathbf{k})\cdot\left(\frac{x}{3}\mathbf{i} + \frac{y}{3}\mathbf{j} + \frac{z}{3}\mathbf{k}\right) dS \\
&= \iint_G 3z\,dS
\end{aligned}$$

Por último, escribimos esta integral de superficie como una integral doble, usando el hecho de que R es una circunferencia de radio 2 y que $\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} = 3/\sqrt{9 - x^2 - y^2} = 3/z$.

$$\text{flujo} = \iint_G 3z\, dS = \iint_R 3z \frac{3}{z}\, dA = 9(\pi \cdot 2^2) = 36\pi$$

El flujo total a través de G en una unidad de tiempo es 36π unidades cúbicas. ▪

Después de observar la cancelación ocurrida en el ejemplo 5, un lector observador sospechará que un teorema anda cerca.

Teorema B

Sea G una superficie suave, con dos lados, dada por $z = f(x, y)$, donde (x, y) está en R, y sea $\mathbf{n}$ el vector normal unitario hacia arriba en G. Si f tiene primeras derivadas parciales continuas y $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es un campo vectorial continuo, entonces el flujo de $\mathbf{F}$ a través de G está dado por

$$\text{flujo de } \mathbf{F} = \iint_G \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_R [-Mf_x - Nf_y + P]\, dx\, dy$$

Demostración Si escribimos $H(x, y, z) = z - f(x, y)$, entonces

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla H}{\|\nabla H\|} = \frac{-f_x\mathbf{i} - f_y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}$$

El teorema A implica que

$$\iint_G \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_R (M\,\mathbf{i} + N\,\mathbf{j} + P\,\mathbf{k}) \cdot \frac{-f_x\mathbf{i} - f_y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dx\, dy$$

$$= \iint_R (-Mf_x - Nf_y + P)\, dx\, dy \qquad \blacksquare$$

Tal vez quiera resolver de nuevo el ejemplo 5 usando el teorema B. Le daremos un ejemplo distinto.

EJEMPLO 6 Evalúe el flujo para el campo vectorial $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ a través de la parte G del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ que está arriba del plano xy, considerando a $\mathbf{n}$ el vector normal hacia arriba.

SOLUCIÓN

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2, \qquad f_x = -2x, \qquad f_y = -2y$$

$$\begin{aligned} -Mf_x - Nf_y + P &= 2x^2 + 2y^2 + z \\ &= 2x^2 + 2y^2 + 1 - x^2 - y^2 = 1 + x^2 + y^2 \end{aligned}$$

$$\iint_G \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_R (1 + x^2 + y^2)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + r^2) r\, dr\, d\theta = \frac{3}{2}\pi$$ ▪

Superficies parametrizadas Hemos visto que las curvas en el espacio pueden expresarse como $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, en donde $a \le t \le b$. ¿Qué sucede si $\mathbf{r}$ es una función de dos parámetros, digamos u y v? No debe ser demasiado sorprendente que una relación como

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in R$$

describa una superficie. Para cada (u, v) en el conjunto R, obtenemos un vector $\mathbf{r}$ en el espacio tridimensional. El conjunto de puntos que está en los extremos de los vectores $\mathbf{r}(u, v)$ (saliendo desde el origen) se denomina **superficie parametrizada.**

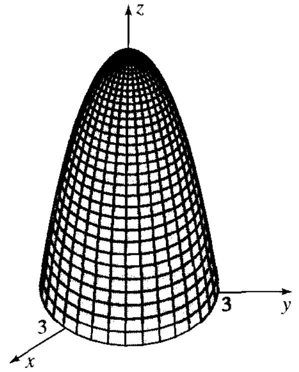


Figura 8

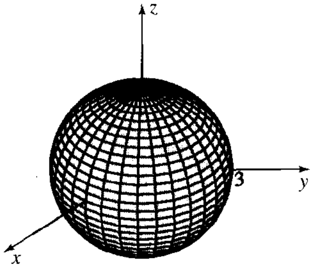


Figura 9

EJEMPLO 7 Describa y bosqueje las superficies definidas de forma paramétrica mediante

(a) $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (9 - u^2 - v^2)\mathbf{k}, u^2 + v^2 \leq 9$

(b) $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\, \mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\, \mathbf{j} + (9 - u^2)\mathbf{k}, 0 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 2\pi$

(c) $\mathbf{r}(u, v) = 3 \cos u \operatorname{sen} v\, \mathbf{i} + 3 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\, \mathbf{j} + 3 \cos v\, \mathbf{k}, 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \pi$

SOLUCIÓN

(a) Para esta $\mathbf{r}$, vemos que las componentes x y y son simplemente u y v, y que z es $9 - u^2 - v^2$. Ésta es la gráfica de la función $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ sobre el disco $x^2 + y^2 \leq 9$. La gráfica, un paraboloide con vértice en $(0, 0, 9)$ que abre hacia abajo se muestra en la figura 8.

(b) Las componentes x y y se ven como las fórmulas para coordenadas polares, salvo que u y v se sustituyen por r y θ, respectivamente. Como $z = 9 - u^2 = 9 - x^2 - y^2$, esta superficie es la misma que la de la parte (a).

(c) Reconocemos las componentes de $\mathbf{r}(u, v)$ como las coordenadas esféricas de los puntos en la esfera de radio 3, con centro en el origen. Como u varía de 0 a 2π, y v varía de 0 a π, obtenemos la esfera completa que se muestra en la figura 9. ■

Hay muchas situaciones en donde debemos describir una superficie conocida como una superficie parametrizada. Con frecuencia hay más de una forma de hacer esto, como lo sugiere el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 8 Encuentre ecuaciones paramétricas para las superficies (a) el cilindro circular recto de radio 2 con eje a lo largo del eje y para $-4, \leq y \leq 4$, y (b) el hemisferio de radio 2 con centro en el origen que se encuentra por arriba del plano xy.

SOLUCIÓN

(a) Si consideramos coordenadas polares en el plano xz, tenemos $x = 2 \cos v$ y $z = 2 \operatorname{sen} v$. El otro parámetro, u, es la distancia al plano yz. Por lo tanto, la ecuación paramétrica es $\mathbf{r}(u, v) = 2 \cos v\, \mathbf{i} + u\, \mathbf{j} + 2 \operatorname{sen} v\, \mathbf{k}$ y el dominio para (u, v) es $-4 \leq u \leq 4, 0 \leq v \leq 2\pi$.

(b) Para un hemisferio podemos utilizar coordenadas cilíndricas $x = u \cos v$ y $y = u \operatorname{sen} v$, en cuyo caso el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \leq 0$, se transforma en $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} = \sqrt{4 - u^2}$. Así, la ecuación paramétrica es $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\, \mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\, \mathbf{j} + \sqrt{4 - u^2}\, \mathbf{k}$ con dominio $0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 2\pi$. De forma alterna, podríamos pensar en términos de coordenadas esféricas y dejar que el ángulo medido a partir de la parte positiva del eje z (por lo regular llamado ϕ) varíe de 0 a $\pi/2$ (en lugar de 0 a π, como sería para obtener la esfera completa). Entonces, la ecuación paramétrica sería $\mathbf{r}(u, v) = 2 \cos u \operatorname{sen} v\, \mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\, \mathbf{j} + 2 \cos v\, \mathbf{k}, 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \pi/2$. ■

Área de la superficie para una superficie parametrizada La figura 10 muestra la transformación del rectángulo R en la superficie G. (En general, el dominio no necesita ser un rectángulo, pero para simplificar la deducción, suponemos que es un rectángulo). Si dividimos el rectángulo R, vemos que R_i, el i-ésimo rectángulo, se transforma en una sección curva G_i, y que los lados del rectángulo en la partición de R se transforman en una parte curva de la superficie. Sin embargo, si Δu_i y Δv_i son pequeños, la sección se parecerá mucho a un paralelogramo que tiene como lados a los vectores $\Delta u_i \mathbf{r}_u(u_i, v_i)$ y $\Delta v_i \mathbf{r}_v(u_i, v_i)$, donde (u_i, v_i) es la esquina inferior izquierda del rectángulo i y $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$ denotan las derivadas parciales $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ y $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$, respectivamente.

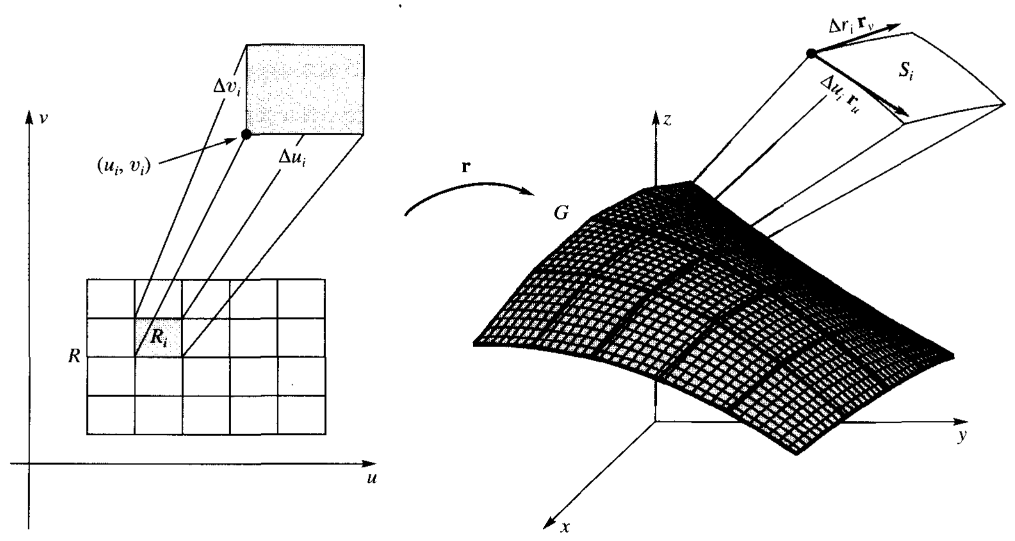


Figura 10

El área de la superficie del pedazo G_i es aproximadamente

$$\Delta S_i \approx \|(\Delta u_i \mathbf{r}_u(u_i, v_i)) \times (\Delta v_i \mathbf{r}_v(u_i, v_i))\| = \|\mathbf{r}_u(u_i, v_i) \times \mathbf{r}_v(u_i, v_i)\|\, \Delta u_i\, \Delta v_i$$

Por lo tanto, el área de la superficie de la superficie parametrizada es

$$SA = \iint_R \|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\|\, dA$$

La diferencial del área de la superficie es

$$dS = \|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\|\, dA$$

Entonces, una integral de superficie para una superficie parametrizada es

$$\iint_G f(x, y, z)\, dS = \iint_R f(\mathbf{r}(u, v))\|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\|\, dA$$

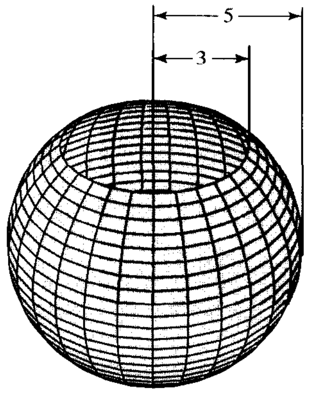


Figura 11

EJEMPLO 9 Un cascarón esférico delgado de radio 5 con centro en el origen tiene un agujero de radio 3 en la parte superior (figura 11). Determine el área de la superficie, la masa y el centro de masa de este cascarón, suponiendo que la densidad es proporcional al cuadrado de la distancia al eje z.

SOLUCIÓN Podemos parametrizar la superficie como

$$\mathbf{r}(u, v) = 5 \cos u \operatorname{sen} v\, \mathbf{i} + 5 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\, \mathbf{j} + 5 \cos v\, \mathbf{k}$$

para $0 \le u \le 2\pi$, $\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5} \le v \le \pi$. Las derivadas necesarias son

$$\mathbf{r}_u(u, v) = -5 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\, \mathbf{i} + 5 \cos u \operatorname{sen} v\, \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_v(u, v) = 5 \cos u \cos v\, \mathbf{i} + 5 \operatorname{sen} u \cos v\, \mathbf{j} - 5 \operatorname{sen} v\, \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -5 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v & 5 \cos u \operatorname{sen} v & 0 \\ 5 \cos u \cos v & 5 \operatorname{sen} u \cos v & -5 \operatorname{sen} v \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= -25\cos u \operatorname{sen}^2 v\,\mathbf{i} - 25\operatorname{sen} u \operatorname{sen}^2 v\,\mathbf{j} \\ &\quad -25\operatorname{sen} v\cos v(\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u)\,\mathbf{k} \\ &= -25\cos u \operatorname{sen}^2 v\,\mathbf{i} - 25\operatorname{sen} u\operatorname{sen}^2 v\,\mathbf{j} - 25\operatorname{sen} v\cos v\,\mathbf{k} \end{aligned}$$

La magnitud de este producto cruz es (véase el problema 27)

$$\|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\| = 25\,|\operatorname{sen} v|$$

El área de la superficie es

$$\begin{aligned} SA &= \iint_R \|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\|\, dA = \iint_R 25\,|\operatorname{sen} v|\, dv\, du \\ &= 25\int_0^{2\pi}\int_{\operatorname{sen}^{-1}(3/5)}^{\pi} \operatorname{sen} v\, dv\, du \\ &= 25\int_0^{2\pi} [-\cos v]_{\operatorname{sen}^{-1}(3/5)}^{\pi}\, du \\ &= 25(2\pi)\frac{9}{5} = 90\pi \approx 282.74 \end{aligned}$$

La masa es igual al valor de la integral de superficie

$$\begin{aligned} m &= \iint_G \delta(x, y, z)\, dS = \iint_G k(x^2 + y^2)\, dS \\ &= \iint_R (25k\operatorname{sen}^2 v)\|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\|\, dA \\ &= 25^2 k\int_0^{2\pi}\int_{\operatorname{sen}^{-1}(3/5)}^{\pi} \operatorname{sen}^2 v\,|\operatorname{sen} v|\, dv\, du \\ &= 625k\int_0^{2\pi}\int_{\operatorname{sen}^{-1}(3/5)}^{\pi} \operatorname{sen}^3 v\, dv\, du \\ &= 625k\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}\operatorname{sen}^2 v\cos v - \frac{2}{3}\cos v\right]_{\operatorname{sen}^{-1}(3/5)}^{\pi} du \\ &= 625k\int_0^{2\pi}\frac{162}{125}\, du \\ &= 1620\pi k \approx 5089.4k \end{aligned}$$

Por simetría $\bar{x} = \bar{y} = 0$. El momento respecto al plano xy es

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iint_G z\delta(x, y, z)\, dS \\ &= \iint_R (5\cos v)(25k\operatorname{sen}^2 v)\|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\|\, dA \\ &= 5\cdot 25^2 k\int_0^{2\pi}\int_{\operatorname{sen}^{-1}(3/5)}^{\pi} \cos v\operatorname{sen}^3 v\, dv\, du \\ &= 3125k\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 v\right]_{\operatorname{sen}^{-1}(3/5)}^{\pi} du \\ &= 3125k\int_0^{2\pi}\left[-\frac{81}{2500}\right] du \\ &= -\frac{81\cdot 3125k}{2500}2\pi = -\frac{405}{2}k\pi \end{aligned}$$

La componente z del centro de masa es

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{-\frac{405}{2}k\pi}{1620\pi k} = -\frac{1}{8}$$

Así, el centro de masa es $\left(0, 0, -\frac{1}{8}\right)$. Esperaríamos que la componente z del centro de masa sea negativa, ya que parte del material se quitó de la parte superior de la esfera, pero no de la parte inferior. ■

Revisión de conceptos

1. Una ____ generaliza la integral doble común, de manera similar a la forma en que una integral de línea generaliza la integral definida.

2. Si G es una superficie, $\iint_G g(x, y, z)\, dS = \lim\limits_{\|P\| \to 0}$ ____.

3. Sea G una superficie dada por $z = f(x, y)$, donde (x, y) está en R. Entonces $\iint_G g(x, y, z)\, dS = \iint_R g(x, y, f(x, y))$ ____ $dy\, dx$.

4. Considere el cono con eje a lo largo del eje z, con vértice en el origen y que forma un ángulo de 30° con el eje z. Si G es la parte de este cono por arriba del conjunto $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \le 9\}$, entonces $\iint_G dS = \iint_R$ ____ $dy\, dx =$ ____.

Conjunto de problemas 14.5

En los problemas del 1 al 8 evalúe $\iint_G g(x, y, z)\, dS$.

1. $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$; G: $z = x + y + 1$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$

2. $g(x, y, z) = x$; G: $x + y + 2z = 4$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$

3. $g(x, y, z) = x + y$; G: $z = \sqrt{4 - x^2}$, $0 \le x \le \sqrt{3}$, $0 \le y \le 1$

4. $g(x, y, z) = 2y^2 + z$; G: $z = x^2 - y^2$, $0 \le x^2 + y^2 \le 1$

5. $g(x, y, z) = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$; G es la parte de $z = x^2 + y^2$ por debajo de $y = z$.

6. $g(x, y, z) = y$; G: $z = 4 - y^2$, $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 2$

7. $g(x, y, z) = x + y$; G es la superficie del cubo $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$.

8. $g(x, y, z) = z$; G es el tetraedro acotado por los planos de coordenadas y el plano $4x + 8y + 2z = 16$.

En los problemas del 9 al 12 use el teorema B para calcular el flujo de $\mathbf{F}$ *a través de* G.

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$; G es la parte del plano $z = 8x - 4y - 5$ por arriba del triángulo con vértices $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(1, 0, 0)$.

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = (9 - x^2)\mathbf{j}$; G es la parte del plano $2x + 3y + 6z = 6$ en el primer octante.

11. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; G es la superficie determinada por $z = \sqrt{1 - y^2}$, $0 \le x \le 5$.

12. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; G es la parte del cono $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

13. Calcule la masa del triángulo con vértices $(a, 0, 0)$, $(0, a, 0)$ y $(0, 0, a)$ si su densidad δ satisface $\delta(x, y, z) = kx^2$.

14. Calcule la masa de la superficie $z = 1 / (x^2 + y^2)/2$ sobre $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, si $\delta(x, y, z) = kxy$.

15. Determine el centro de masa del triángulo homogéneo con vértices $(a, 0, 0)$, $(0, a, 0)$ y $(0, 0, a)$.

16. Determine el centro de masa del triángulo homogéneo con vértices $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ y $(0, 0, c)$, donde a, b y c son positivos.

En los problemas del 17 al 20 trace las superficies paramétricas en el dominio que se indica.

17. $\mathbf{r}(u, v) = u\,\mathbf{i} + 3v\,\mathbf{j} + (4 - u^2 - v^2)\mathbf{k}$; $0 \le u \le 2$, $0 \le v \le 1$

18. $\mathbf{r}(u, v) = 2u\,\mathbf{i} + 3v\,\mathbf{j} + (u^2 + v^2)\mathbf{k}$; $-1 \le u \le 1$, $-2 \le v \le 2$

19. $\mathbf{r}(u, v) = 2\cos v\,\mathbf{i} + 3\,\mathrm{sen}\, v\,\mathbf{j} + u\mathbf{k}$; $-6 \le u \le 6$, $0 \le v \le 2\pi$

20. $\mathbf{r}(u, v) = u\,\mathbf{i} + 3\,\mathrm{sen}\, v\,\mathbf{j} + 5\cos v\,\mathbf{k}$; $-6 \le u \le 6$, $0 \le v \le 2\pi$

CAS *En los problemas del 21 al 24 utilice un CAS para trazar la superficie paramétrica en el dominio que se indica y calcule el área de la superficie de la superficie resultante.*

21. $\mathbf{r}(u, v) = u\,\mathrm{sen}\, v\,\mathbf{i} + u\cos v\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}$; $-6 \le u \le 6$, $0 \le v \le \pi$

22. $\mathbf{r}(u, v) = \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\, \mathbf{i} + \cos u \operatorname{sen} v\, \mathbf{j} + \operatorname{sen} v\, \mathbf{k}$; $0 \le u \le 2\pi, 0 \le v \le 2\pi$

23. $\mathbf{r}(u, v) = u^2 \cos v\, \mathbf{i} + u^2 \operatorname{sen} v\, \mathbf{j} + 5u\, \mathbf{k}; 0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le 2\pi$

24. $\mathbf{r}(u, v) = \cos u \cos v\, \mathbf{i} + \cos u \operatorname{sen} v\, \mathbf{j} + \cos u\, \mathbf{k}$; $0 \le u \le \pi/2, 0 \le v \le 2\pi$

25. Determine la masa de la superficie del problema 23 si la densidad es proporcional a la distancia al plano xy.

26. Determine la masa de la superficie del problema 24 si la densidad es proporcional a (a) la distancia al eje z y (b) la distancia al plano xy.

27. Demuestre que la magnitud del producto cruz $\|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\|$ en el ejemplo 9 es igual a $25\, |\operatorname{sen} v|$.

28. Con respecto al ejemplo 3. La superficie hemisférica $z = f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ tiene una cubierta delgada de metal con densidad $\delta(x, y, z) = z$. Calcule la masa de esta cubierta. Observe que el teorema A no se aplica de manera directa, ya que f_x y f_y están indefinidas en la frontera $x^2 + y^2 = 9$ de R. Por lo tanto, proceda haciendo R_ε la región $0 \le x^2 + y^2 \le (3 - \varepsilon)^2$, realice los cálculos y luego haga $\varepsilon \to 0$. Descubra que consigue la misma respuesta que obtendría si ignora esta sutileza.

29. Sea G la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Calcule cada una de las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\iint_G z\, dS$

(b) $\displaystyle\iint_G \frac{x + y^3 + \operatorname{sen} z}{1 + z^4}\, dS$

(c) $\displaystyle\iint_G (x^2 + y^2 + z^2)\, dS$

(d) $\displaystyle\iint_G x^2\, dS$

(e) $\displaystyle\iint_G (x^2 + y^2)\, dS$

Sugerencia: use las propiedades de simetría para hacer de éste un problema trivial.

30. La esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ tiene densidad de área constante k. Determine cada momento de inercia.

(a) En torno de un diámetro.

(b) Respecto a una recta tangente (suponga cierto el teorema del eje paralelo del problema 28 de la sección 13.5).

31. Determine la fuerza total contra la superficie de un tanque lleno de cierto líquido con densidad de peso k para cada forma de tanque.

(a) Esfera de radio a

(b) Hemisferio de radio a con base plana

(c) Cilindro vertical de radio a y altura h

Sugerencia: la fuerza contra un pequeño pedazo de área ΔG es aproximadamente $kd\, \Delta G$, donde d es la profundidad del agua en el pedazo.

32. Determine el centro de masa de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ entre los planos $z = h_1$ y $z = h_2$, donde $0 \le h_1 \le h_2 . \le a$. Haga esto mediante los métodos de esta sección y luego compare con el problema 19 de la sección 13.6.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** integral de superficie **2.** $\sum_{i=1}^{n} g(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i)\, \Delta S_i$ **3.** $\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$ **4.** 2; 18π

14.6
Teorema de divergencia de Gauss

Los teoremas de Green, Gauss y Stokes relacionan una integral sobre un conjunto S con otra integral sobre la frontera de S. Para enfatizar la similitud de estos teoremas, introducimos la notación ∂S para representar la frontera de S. Así, una forma del teorema de Green (sección 14.4) se puede escribir como

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_S \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA$$

Dice que el flujo de $\mathbf{F}$ a través de la frontera ∂S de una región plana cerrada y acotada S, es igual a la integral doble de div $\mathbf{F}$ sobre esa región. El teorema de Gauss (también llamado *teorema de la divergencia*) aumenta una dimensión a este resultado.

Teorema de Gauss Sea S un sólido cerrado y acotado en el espacio tridimensional, completamente encerrado por una superficie suave por partes ∂S (figura 1).

Teorema A **Teorema de Gauss**

Sea $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ un campo vectorial tal que M, N y P tienen primeras derivadas parciales continuas en un sólido S con frontera ∂S. Si $\mathbf{n}$ denota el vector normal unitario exterior a ∂S, entonces

$$\iint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_S \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV$$

En otras palabras, el flujo de $\mathbf{F}$ a través de la frontera de una región cerrada en el espacio tridimensional es la integral triple de su divergencia sobre esa región..

La frontera de un conjunto

De la sección 12.3 recuerde que un punto P es un punto fronterizo de un conjunto S, si toda vecindad de P contiene puntos que están en S y puntos que no están en S. La frontera de un conjunto es el conjunto de todos sus puntos fronterizos.

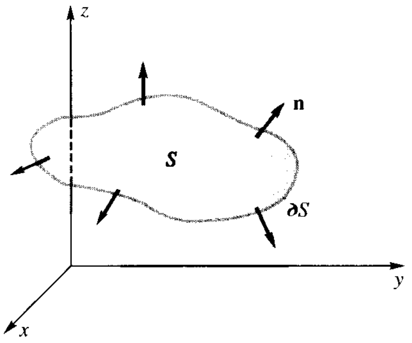


Figura 1

Es útil para algunas aplicaciones y para la demostración establecer la conclusión del teorema de Gauss en su forma cartesiana (no vectorial). Podemos escribir

$$\mathbf{n} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}$$

donde α, β y γ son los ángulos directores para **n.** Así,

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = M\cos\alpha + N\cos\beta + P\cos\gamma$$

y así, la fórmula de Gauss se convierte en

$$\boxed{\iint_{\partial S}(M\cos\alpha + N\cos\beta + P\cos\gamma)\,dS = \iiint_S\left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\right)dV}$$

Demostración del teorema de Gauss Primero consideremos el caso en que la región es x-simple, y-simple y z-simple. Basta que demostremos que

$$\iint_{\partial S} M\cos\alpha\,dS = \iiint_S \frac{\partial M}{\partial x}\,dV$$

$$\iint_{\partial S} N\cos\beta\,dS = \iiint_S \frac{\partial N}{\partial y}\,dV$$

$$\iint_{\partial S} P\cos\gamma\,dS = \iiint_S \frac{\partial P}{\partial z}\,dV$$

Como estas demostraciones son similares, sólo nos ocuparemos de la tercera.

Como S es z-simple, puede describirse mediante las desigualdades $f_1(x, y) \le z \le f_2(x, y)$. Como en la figura 2, ∂S consta de tres partes: S_1, correspondiente a $z = f_1(x, y)$; S_2 correspondiente a $z = f_2(x, y)$; y la superficie lateral S_3, que puede ser vacía. En S_3, $\cos\gamma = \cos 90° = 0$, de modo que podemos ignorar su contribución. Además, por el problema 26 de la sección 13.6 y el teorema 14.5A,

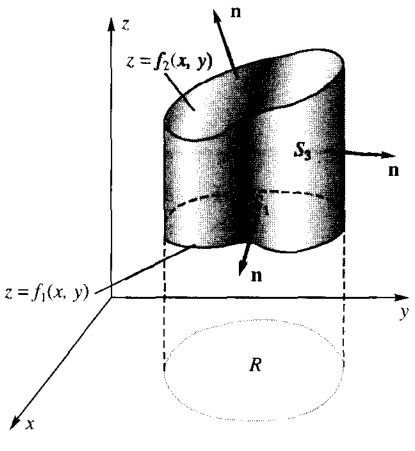


Figura 2

$$\iint_{S_2} P\cos\gamma\,dS = \iint_R P(x, y, f_2(x, y))\,dx\,dy$$

El resultado al que hemos hecho referencia supone que el vector normal **n** apunta hacia arriba. Por lo tanto, al aplicarlo a S_1 donde **n** es una normal inferior (figura 2), debemos cambiar el signo.

$$\iint_{S_1} P\cos\gamma\,dS = -\iint_R P(x, y, f_1(x, y))\,dx\,dy$$

Esto implica que

$$\begin{aligned}\iint_{\partial S} P\cos\gamma\,dS &= \iint_R \left[P(x, y, f_2(x, y)) - P(x, y, f_1(x, y))\right]dx\,dy\\ &= \iint_R\left[\int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\right]dx\,dy\\ &= \iiint_S \frac{\partial P}{\partial z}\,dV\end{aligned}$$

El resultado que hemos demostrado se extiende fácilmente a regiones dadas como uniones finitas del tipo considerado. Omitiremos los detalles. ■

EJEMPLO 1 Verifique el teorema de Gauss para $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $S = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \le a^2\}$ calculando de manera independiente (a) $\iint_{\partial S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS$ y (b) $\iiint_S \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV$.

SOLUCIÓN

(a) En ∂S, $\mathbf{n} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})/a$, de modo que $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = (x^2 + y^2 + z^2)/a = a$. Así,

$$\iint_{\partial S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = a \iint_{\partial S} dS = a(4\pi a^2) = 4\pi a^3$$

(b) Como $\operatorname{div} \mathbf{F} = 3$,

$$\iiint_S \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = 3 \iiint_S dV = 3\,\frac{4\pi a^3}{3} = 4\pi a^3 \qquad ■$$

EJEMPLO 2 Calcule el flujo del campo vectorial $\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} + 2xz\mathbf{j} + yz^3\mathbf{k}$ a través de la superficie del sólido rectangular S determinado por (figura 3)

$$0 \le x \le 1, \qquad 0 \le y \le 2, \qquad 0 \le z \le 3$$

(a) mediante un método directo y (b) mediante el teorema de Gauss.

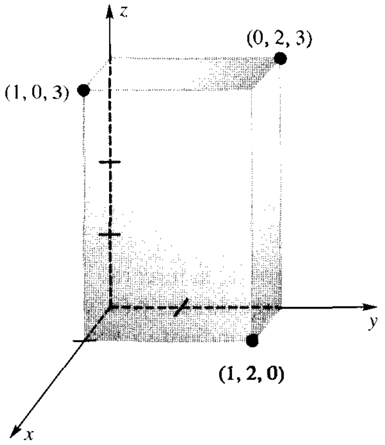


Figura 3

SOLUCIÓN

(a) Para calcular $\iint_{\partial S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS$ en forma directa, calculamos esta integral sobre las seis caras y sumamos los resultados. En la cara $x = 1$, $\mathbf{n} = \mathbf{i}$, y $\mathbf{F}.\mathbf{n} = x^2y = 1^2y = y$, de modo que $\iint_{x=1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = \int_0^3 \int_0^2 y\, dy\, dz = 6$. Con cálculos similares podemos completar la siguiente tabla:

Cara	$\mathbf{n}$	$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$	$\iint_{\text{cara}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS$
$x = 1$	$\mathbf{i}$	y	6
$x = 0$	$-\mathbf{i}$	0	0
$y = 2$	$\mathbf{j}$	$2xz$	9/2
$y = 0$	$-\mathbf{j}$	$-2xz$	−9/2
$z = 3$	$\mathbf{k}$	$27y$	54
$z = 0$	$-\mathbf{k}$	0	0

Así,

$$\iint_{\partial S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = 6 + 0 + \frac{9}{2} - \frac{9}{2} + 54 + 0 = 60$$

(b) Por el teorema de Gauss,

$$\iint_{\partial S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = \iiint_S (2xy + 0 + 3yz^2)\, dV$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 (2xy + 3yz^2)\, dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^2 (6xy + 27y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 (12x + 54)\, dx = [6x^2 + 54x]_0^1 = 60 \qquad ■$$

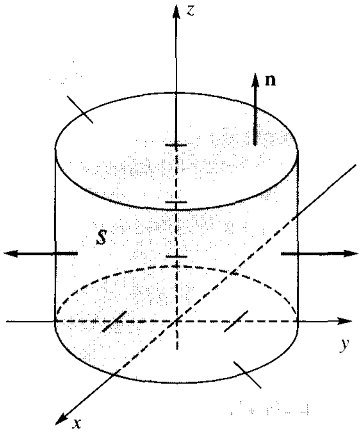


Figura 4

EJEMPLO 3 Sea S el cilindro sólido acotado por $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ y $z = 3$, y sea **n** el vector normal unitario exterior a la frontera ∂S (figura 4). Si $\mathbf{F} = (x^3 + \tan yz)\mathbf{i} + (y^3 - e^{xz})\mathbf{j} - (3z + x^3)\mathbf{k}$, determine el flujo de **F** a través de ∂S.

SOLUCIÓN Imagine la dificultad al intentar evaluar $\iint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ en forma directa.

Sin embargo,

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 3x^2 + 3y^2 + 3 = 3(x^2 + y^2 + 1)$$

y así, por el teorema de Gauss y un cambio a coordenadas cilíndricas,

$$\begin{aligned}\iint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS &= 3\iiint_S (x^2 + y^2 + 1)\, dV \\ &= 3\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{3} (r^2 + 1) r\, dz\, dr\, d\theta \\ &= 9\int_0^{2\pi}\int_0^{2} (r^3 + r)\, dr\, d\theta \\ &= 9\int_0^{2\pi} 6\, d\theta = 108\pi\end{aligned}$$

■

Extensiones y aplicaciones Hasta ahora hemos supuesto de manera implícita que el sólido S no tiene agujeros en su interior y que su frontera ∂S consta de una superficie conexa. De hecho, el teorema de Gauss es válido para un sólido con agujeros, como un pedazo de queso suizo, siempre que **n** apunte hacia fuera del interior del sólido. Por ejemplo, sea S la capa sólida entre dos esferas concéntricas con centro en el origen. El teorema de Gauss se puede aplicar, siempre que reconozcamos que ahora S consta de dos superficies (una superficie exterior, donde **n** apunta hacia fuera del origen y una superficie interior, donde **n** apunta hacia el origen).

EJEMPLO 4 Sea S el sólido determinado por

$$1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4$$

y sea $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + (2y + z)\mathbf{j} + (z + x^2)\mathbf{k}$. Evalúe

$$\iint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\iint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS &= \iiint_S \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV \\ &= \iiint_S (1 + 2 + 1)\, dV \\ &= 4\left[\frac{4}{3}\pi(2^3) - \frac{4}{3}\pi(1^3)\right] = \frac{112\pi}{3}\end{aligned}$$

■

Recuerde de la sección 14.1 que el campo gravitacional **F** debido a una masa puntual M en el origen tiene la forma

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -cM\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}$$

donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y c es una constante.

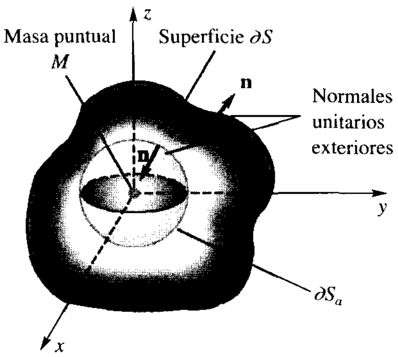


Figura 5

EJEMPLO 5 Sea S una región sólida que contiene una masa puntual M con el origen en su interior y con el campo correspondiente $\mathbf{F} = -cM\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3$. Demuestre que el flujo de $\mathbf{F}$ a través de ∂S es $-4\pi cM$, independientemente de la forma de S.

SOLUCIÓN Como $\mathbf{F}$ es discontinuo en el origen, el teorema de Gauss no se aplica directamente. Sin embargo, imaginemos que hemos quitado a S una pequeña esfera sólida S_a con centro en el origen y radio a, quedando un sólido W con frontera exterior ∂S y frontera interior ∂S_a (figura 5). Al aplicar el teorema de Gauss a W, obtenemos

$$\iint_{\partial S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS + \iint_{\partial S_a} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_{\partial W} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_{W} \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$$

Pero div $\mathbf{F} = 0$, lo que es fácil de comprobar (problema 21 de la sección 14.1), y entonces

$$\iint_{\partial S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = -\iint_{\partial S_a} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

En la superficie ∂S_a, $\mathbf{n} = -\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$ y $\|\mathbf{r}\| = a$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} -\iint_{\partial S_a} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS &= -\iint_{\partial S_a}\left(-cM\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}\right)\cdot\left(-\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}\right)dS \\ &= -cM\iint_{\partial S_a}\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}}{a^4}\,dS \\ &= -cM\iint_{\partial S_a}\frac{1}{a^2}\,dS \\ &= \frac{-cM}{a^2}(4\pi a^2) = -4\pi cM \end{aligned}$$ ■

Podemos extender el resultado del ejemplo 5 al caso en que un sólido S contiene k masas puntuales $M_1, M_2, \ldots, M_k$ en su interior. El resultado, que se conoce como *ley de Gauss*, proporciona el flujo de $\mathbf{F}$ a través de ∂S como

$$\iint_{\partial S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = -4\pi c(M_1 + M_2 + \cdots + M_k)$$

Por último, la ley de Gauss se puede extender a un cuerpo B con una masa de tamaño M distribuida continuamente en partes pequeñas y aproximar estas partes por masas puntuales. El resultado para cualquier región S que contenga a B es

$$\iint_{\partial S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = -4\pi cM$$

Revisión de conceptos

1. Los teoremas de Green, Gauss y Stokes relacionan una integral sobre S con otra integral sobre la _____ de S, que se denota _____.

2. En particular, el teorema de Gauss dice que $\iiint_S \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \iint_{\partial S}$ _____ dS.

3. Otra forma de establecer el teorema de Gauss es decir que el flujo de $\mathbf{F}$ a través de la frontera de S es igual a $\iiint_S$ _____ dV.

4. Una consecuencia del teorema de Gauss es que la(el) _____ del campo gravitacional debido a una masa M a través de la frontera de cualquier sólido S que contenga a M es $-4\pi cM$; es decir, es independiente de _____ de S.

Conjunto de problemas 14.6

En los problemas del 1 al 14 use el teorema de la divergencia de Gauss para calcular $\iint_{\partial S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS$.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$; S es el hemisferio $0 \le z \le \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

2. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 3z\,\mathbf{k}$; S es el cubo $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$.

3. $\mathbf{F}(x, y, z) = \cos z^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \cos x^2\,\mathbf{k}$; S es el cubo $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$, $-1 \le z \le 1$.

4. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$; S es el hemisferio $0 \le z \le \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2yz\,\mathbf{i} + xy^2z\,\mathbf{j} + xyz^2\mathbf{k}$; S es la caja $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c$.

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$; S es la esfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \le 9$.

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S es el sólido parabólico $0 \le z \le 4 - x^2 - y^2$.

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + \cos yz)\mathbf{i} + (y - e^z)\mathbf{j} + (z^2 + x^2)\mathbf{k}$; S es el sólido acotado por $x^2 + y^2 = 4$, $x + z = 2$, $z = 0$.

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + z^2)\mathbf{i} + (y - z^2)\mathbf{j} + x\mathbf{k}$; S es el sólido $0 \le y^2 + z^2 \le 1$, $0 \le x \le 2$.

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S es el sólido encerrado por $x + y + z = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

11. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$; S es la capa esférica sólida $9 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 25$.

12. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$. S es la capa cilíndrica sólida $1 \le x^2 + y^2 \le 4$, $0 \le z \le 2$.

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$; S es la región cilíndrica $x^2 + z^2 \le 1$, $0 \le y \le 10$. *Sugerencia:* haga la transformación $x = r\cos\theta$, $z = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $y = y$ (de forma análoga a coordenadas cilíndricas) y utilice los métodos de la sección 13.9 para obtener el jacobiano.

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 + y)\mathbf{i} + (y^3 + z)\mathbf{j} + (x + z^3)\mathbf{k}$; S es la región $x^2 + z^2 \le y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$, $y \ge 0$. *Sugerencia:* haga una transformación similar a la de coordenadas esféricas y utilice los métodos de la sección 13.9 para obtener el jacobiano.

15. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, y sea S un sólido al que puede aplicarse el teorema de la divergencia de Gauss. Demuestre que el volumen de S está dado por

$$V(S) = \frac{1}{3}\iint_{\partial S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS$$

16. Use el resultado del problema 15 para verificar la fórmula para el volumen de un cilindro circular recto de altura h y radio a.

17. Considere el plano $ax + by + cz = d$, donde a, b, c y d son positivos. Use el problema 15 para demostrar que el volumen del tetraedro cortado en el primer octante por este plano es $dD/\left(3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\right)$, donde D es el área de la parte del plano en el primer octante.

18. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial constante. Demuestre que

$$\iint_{\partial S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = 0$$

para cualquier sólido "bueno" S. ¿Qué queremos decir con "bueno"?

19. Calcule $\iint_{\partial S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS$ para los siguientes. Visto de una manera adecuada, todos son bastante fáciles e incluso algunos son triviales.

(a) $\mathbf{F} = (2x + yz)\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S es la esfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

(b) $\mathbf{F} = (x^2 + y^2 + z^2)^{5/3}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$; S como en la parte (a).

(c) $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S es la esfera sólida $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

(d) $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i}$; S es el cubo $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$.

(e) $\mathbf{F} = (x + z)\mathbf{i} + (y + x)\mathbf{j} + (z + y)\mathbf{k}$; S es el tetraedro formado en el primer octante por el plano $3x + 4y + 2z = 12$.

(f) $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$; S es como en la parte (a).

(g) $\mathbf{F} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})\ln(x^2 + y^2)$; S es el cilindro sólido $x^2 + y^2 \le 4$, $0 \le z \le 2$.

20. Calcule $\iint_{\partial S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS$. En cada caso, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

(a) $\mathbf{F} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3$, S es la esfera sólida $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

(b) $\mathbf{F} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3$, S es la esfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$.

(c) $\mathbf{F} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^2$; S es como en la parte (b).

(d) $\mathbf{F} = f(\|\mathbf{r}\|)\mathbf{r}$, f es cualquier función escalar; S es como en el inciso (b).

(e) $\mathbf{F} = \|\mathbf{r}\|^n\mathbf{r}$, $n \ge 0$; S es la esfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \le az$ ($\rho \le a\cos\phi$ en coordenadas esféricas).

21. Hemos definido el laplaciano de un campo escalar como

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Demuestre que si $D_{\mathbf{n}}f$ es la derivada direccional en la dirección del vector normal unitario $\mathbf{n}$, entonces

$$\iint_{\partial S} D_{\mathbf{n}} f\, dS = \iiint_S \nabla^2 f\, dV$$

22. Suponga que $\nabla^2 f$ es idénticamente cero en una región S. Demuestre que

$$\iint_{\partial S} f D_{\mathbf{n}} f\, dS = \iiint_S \|\nabla f\|^2\, dV$$

23. Establezca la primera identidad de Green:

$$\iint_{\partial S} f D_{\mathbf{n}} g\, dS = \iiint_S (f\,\nabla^2 g + \nabla f\cdot\nabla g)\, dV$$

aplicando el teorema de la divergencia de Gauss a $\mathbf{F} = f\,\nabla g$.

24. Establezca la segunda identidad de Green:

$$\iint_{\partial S} (f D_{\mathbf{n}} g - g D_{\mathbf{n}} f)\, dS = \iiint_S (f\,\nabla^2 g - g\,\nabla^2 f)\, dV$$

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** frontera; ∂S **2.** $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$ **3.** div $\mathbf{F}$ **4.** flujo; la forma

14.7
Teorema de Stokes

En la sección 14.4 mostramos que la conclusión del teorema de Green se podría escribir como

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_{S} (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dA$$

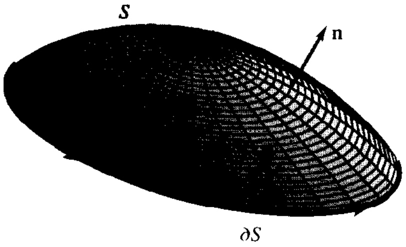


Figura 1

Como lo establecimos, éste era un teorema para un conjunto plano S acotado por una curva simple cerrada ∂S. Vamos a generalizar este resultado al caso en que S es una superficie curva en el espacio tridimensional. Esta forma del teorema se debe al científico irlandés George Gabriel Stokes (1819-1903).

Necesitaremos ciertas restricciones sobre la superficie S. En primer lugar, supondremos que S tiene dos lados, con un vector normal **n** unitario que varía continuamente (así, al tener un lado, la banda de Möbius de la sección 14.5 queda eliminada de nuestro análisis). En segundo lugar, pediremos que la frontera ∂S sea una curva simple cerrada suave por partes, orientada de manera consistente con **n**. Esto significa que, si usted se para cerca de la orilla de la superficie con su cabeza en la dirección **n** y sus ojos miran en la dirección de la curva, la superficie está a su izquierda (figura 1).

Teorema A **Teorema de Stokes**

Sean $S, \partial S$ y **n** como se acaban de definir y suponga que $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es un campo vectorial, donde M, N y P tienen primeras derivadas parciales continuas en S y en su frontera ∂S. Si **T** denota el vector unitario tangente a ∂S, entonces

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_{S} (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Ejemplos y aplicaciones

La demostración del teorema de Stokes es más adecuada para un curso de cálculo avanzado. Sin embargo, al menos podemos comprobar el teorema en un ejemplo.

EJEMPLO 1 Verifique el teorema de Stokes para $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ si S es el paraboloide $z = x^2 + y^2$ con la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$ como su frontera (figura 2).

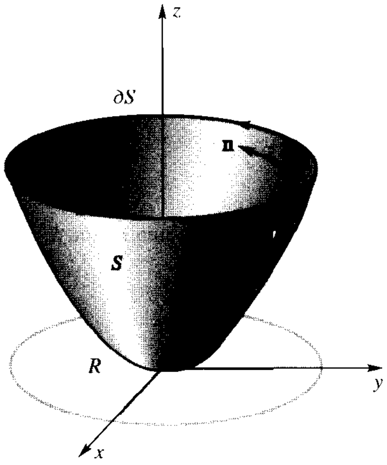


Figura 2

SOLUCIÓN Podemos describir ∂S mediante las ecuaciones paramétricas

$$x = \cos t, \qquad y = \operatorname{sen} t, \qquad z = 1$$

Entonces $dz = 0$ y (véase la sección 14.2)

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \oint_{\partial S} y\, dx - x\, dy = \int_0^{2\pi} [\operatorname{sen} t(-\operatorname{sen} t)\, dt - \cos t \cos t\, dt]$$

$$= -\int_0^{2\pi} [\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t]\, dt = -2\pi$$

Por otro lado, para calcular $\iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$ obtenemos primero

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & yz \end{vmatrix} = z\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$$

Entonces, por el teorema 14.5B,

$$\begin{aligned}\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS &= \iint_R [-z(2x) - 0(2y) - 2]\, dx\, dy \\ &= -2\iint_R [xz + 1]\, dx\, dy \\ &= -2\iint_R [x(x^2 + y^2) + 1]\, dx\, dy \\ &= -2\int_0^{2\pi}\int_0^1 [r^3 \cos\theta + 1] r\, dr\, d\theta \\ &= -2\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{5}\cos\theta + \frac{1}{2}\right] d\theta = -2\pi\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 Sea S la parte de la superficie esférica $x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 10$ por debajo del plano $z = 1$, y sea $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$. Use el teorema de Stokes para calcular

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

donde **n** es el vector normal unitario hacia arriba.

SOLUCIÓN Observe que el campo **F** es el mismo del ejemplo 1 y que S tiene como curva frontera a la misma circunferencia. Concluimos que

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = -2\pi$$

De hecho, concluimos que el flujo de rot **F** es -2π para todas las superficies S que tienen a la circunferencia ∂S de la figura 2 como su frontera orientada. ■

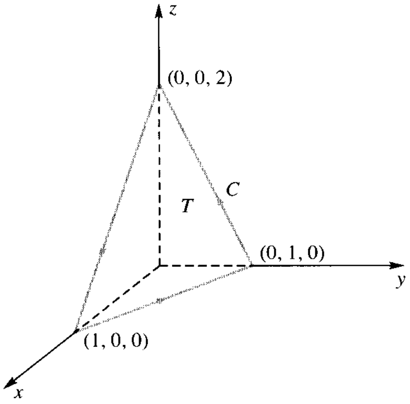


Figura 3

EJEMPLO 3 Use el teorema de Stokes para evaluar $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$, donde $\mathbf{F} = 2z\mathbf{i} + (8x - 3y)\mathbf{j} + (3x + y)\mathbf{k}$ y C es la curva triangular de la figura 3.

SOLUCIÓN Podemos considerar que S es cualquier superficie con C como su frontera orientada, pero podemos aprovechar y elegir la más sencilla de tales superficies, el triángulo plano T. Para determinar **n** en este caso, observamos que los vectores

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= (0 - 1)\mathbf{i} + (0 - 0)\mathbf{j} + (2 - 0)\mathbf{k} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{k} \\ \mathbf{B} &= (0 - 1)\mathbf{i} + (1 - 0)\mathbf{j} + (0 - 0)\mathbf{k} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}\end{aligned}$$

están en esta superficie y por lo tanto

$$\mathbf{N} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

es perpendicular a ella. Por lo tanto, el vector normal unitario hacia arriba **n** es

$$\mathbf{n} = \frac{2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$$

Además,

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2z & 8x - 3y & 3x + y \end{vmatrix} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$

y $\text{rot}\,\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{8}{3}$. Concluimos que

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_T (\text{rot}\,\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \frac{8}{3}(\text{área de } T) = \frac{8}{3}\left(\frac{3}{2}\right) = 4 \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 4 Sean **F** el campo vectorial y D la región que satisfacen las hipótesis del teorema 14.3D. Demuestre que si rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ en D, entonces **F** es conservativo ahí.

SOLUCIÓN El análisis de la sección 14.3 nos permite concluir que basta mostrar que $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para cualquier trayectoria simple cerrada C en D. Sea S una superficie que tiene a C como su frontera y que está orientada de manera consistente con C (podemos usar el hecho de que D es simplemente conexo para garantizar la existencia de tal superficie). Entonces, por el teorema de Stokes,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_S (\text{rot}\,\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = 0 \qquad \blacksquare$$

Interpretación física del rotacional

En la sección 14.4 ofrecimos una interpretación del rotacional. Ahora podemos ampliar ese análisis. Sea C una circunferencia de radio a con centro en el punto P. Entonces

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

se llama la *circulación* de **F** en torno de C y mide la tendencia de un fluido con campo de velocidad **F** a circular en torno de C. Ahora, si **F** es continuo y C es muy pequeño, el teorema de Stokes implica

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_S (\text{rot}\,\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS \approx [\text{rot}\,\mathbf{F}(P)] \cdot \mathbf{n}\,(\pi a^2)$$

La expresión de la derecha tendrá magnitud máxima si **n** tiene la misma dirección que rot **F***(P)*.

Suponga que una pequeña rueda con paletas se coloca en el fluido con centro en P y eje con dirección **n** (figura 4). Esta rueda girará más rápidamente si **n** tiene la dirección de rot **F**. La dirección del giro será determinada por la regla de la mano derecha.

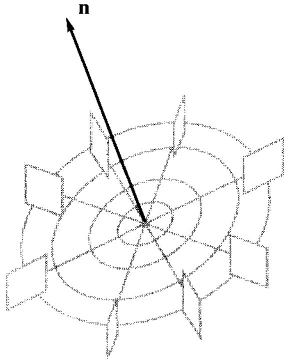


Figura 4

Revisión de conceptos

1. El teorema de Stokes en el espacio tridimensional dice que bajo hipótesis adecuadas $\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, dS = \iint_S$ _____ dS. En este caso, S es una superficie y ∂S es su frontera.

2. Una de estas hipótesis es que S tenga dos lados. Un ejemplo importante de una superficie con un lado es la(el) _____ que se obtiene al cortar una banda cilíndrica común, dándole medio giro y pegándola de nuevo.

3. El teorema de Stokes implica que para todas las superficies con dos lados y la misma frontera ∂S obtenemos el mismo valor para _____.

4. Una rueda con paletas con centro en P e inmersa en un fluido con campo de velocidad **F** girará más rápidamente en torno de P si **n** tiene la dirección de _____.

Conjunto de problemas 14.7

En los problemas del 1 al 6 use el teorema de Stokes para calcular

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS$$

1. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S es el hemisferio $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y $\mathbf{n}$ es el vector normal superior.

2. $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$; S es la superficie triangular con vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$ y $(0, 2, 1)$ y $\mathbf{n}$ es el vector normal superior.

3. $\mathbf{F} = (y + z)\mathbf{i} + (x^2 + z^2)\mathbf{j} + y\mathbf{k}$; S es la mitad del cilindro $z = \sqrt{1 - x^2}$ entre $y = 0$ y $y = 1$, y $\mathbf{n}$ es el vector normal superior.

4. $\mathbf{F} = xz^2\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + \cos xz \, \mathbf{k}$; S es la parte del elipsoide $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$ por debajo del plano xy y $\mathbf{n}$ es el vector normal inferior.

5. $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + 3xz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ por debajo del plano $z = 2$ y $\mathbf{n}$ es el vector normal hacia afuera.

6. $\mathbf{F} = (z - y)\mathbf{i} + (z + x)\mathbf{j} - (x + y)\mathbf{k}$; S es la parte del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ por arriba del plano xy y $\mathbf{n}$ es el vector normal hacia arriba.

En los problemas del 7 al 12 use el teorema de Stokes para calcular $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$.

7. $\mathbf{F} = 2z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}$; C es la elipse dada como la intersección del plano $z = x$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, orientado en el sentido de las manecillas del reloj visto desde arriba.

8. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$; C es la curva triangular con vértices $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$ y $(0, 2, 2)$ orientada en sentido contrario al de las manecillas del reloj vista desde arriba.

9. $\mathbf{F} = (y - x)\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$; C es la frontera del plano $x + 2y + z = 2$ en el primer octante, orientada en el sentido de las manecillas del reloj vista desde arriba.

10. $\mathbf{F} = y(x^2 + y^2)\mathbf{i} - x(x^2 + y^2)\mathbf{j}$; C es la trayectoria rectangular de $(0, 0, 0)$ a $(1, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$ a $(0, 1, 1)$ a $(0, 0, 0)$.

11. $\mathbf{F} = (z - y)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x\mathbf{k}$; C es la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = x$ con la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, orientada en sentido contrario al de las manecillas del reloj vista desde arriba.

12. $\mathbf{F} = (y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$; C es la elipse dada como la intersección del plano $x + z = 1$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, orientada en el sentido de las manecillas del reloj vista desde arriba.

13. Suponga que la superficie S está determinada por la fórmula $z = g(x, y)$. Demuestre que la integral de superficie en el teorema de Stokes se puede escribir como una integral doble de la siguiente manera:

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_{S_{xy}} (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot (-g_x\mathbf{i} - g_y\mathbf{j} + \mathbf{k}) \, dA$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector hacia arriba normal a S y S_{xy} es la proyección de S en el plano xy.

14. Sean $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$ y ∂S la frontera de la superficie $z = xy$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj vista desde arriba. Use el teorema de Stokes y el problema 13 para evaluar $\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$.

15. Sean $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ y ∂S la frontera de la superficie $z = xy^2$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj vista desde arriba. Evalúe $\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$.

16. Sean $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ y ∂S la frontera de la superficie $z = x^2y^2$, $x^2 + y^2 \le a^2$, orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj vista desde arriba. Evalúe $\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$.

17. Sean $\mathbf{F} = 2z\mathbf{i} + 2y\mathbf{k}$ y ∂S la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = ay$ con el hemisferio $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $a > 0$. Suponga que las distancias están dadas en metros y la fuerza en newtons, y calcule el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}$ al mover un objeto en torno de ∂S en sentido contrario a las manecillas del reloj visto desde arriba.

18. Una fuerza central es aquella de la forma $\mathbf{F} = f(\|\mathbf{r}\|)\mathbf{r}$, donde f tiene una derivada continua (excepto posiblemente en $\|\mathbf{r}\| = 0$). Demuestre que el trabajo realizado por tal fuerza al mover un objeto en torno de una trayectoria cerrada que no pasa por el origen es igual a cero.

19. Sea S una esfera sólida (o cualquier sólido encerrado por una superficie ∂S "buena"). Demuestre que

$$\iint_{\partial S} (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$$

(a) Usando el teorema de Stokes.

(b) Usando el teorema de Gauss. *Sugerencia:* Demuestre que $\text{div}(\text{rot } \mathbf{F}) = 0$.

20. Demuestre que

$$\oint_{\partial S} (f \, \nabla g) \cdot \mathbf{T} \, ds = \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ **2.** banda de Möbius. **3.** $\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS$ **4.** $\text{rot } \mathbf{F}$

14.8 Repaso del capítulo

Examen de conceptos

Responda con verdadero o falso a cada una de las siguientes afirmaciones. Prepárese para justificar su respuesta.

1. Los campos de la ley del cuadrado inverso son conservativos.

2. La divergencia de un campo vectorial es otro campo vectorial.

3. Un físico podría estar interesado en rot(grad f) y grad(rot $\mathbf{F}$).

4. Si f tiene segundas derivadas parciales continuas, entonces rot(grad f) $= \mathbf{0}$.

5. El trabajo realizado por un campo de fuerzas conservativo al mover un objeto en torno de una trayectoria cerrada es cero.

6. Si $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda trayectoria cerrada en un conjunto abierto y conexo D, entonces existe una función f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$ en D.

7. El campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x + 2y)\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$ es conservativo.

8. El teorema de Green es válido para una región S con un agujero, siempre que toda la frontera de S esté orientada en forma correcta.

9. La integral doble es un caso particular de una integral de superficie.

10. Una superficie siempre tiene dos lados.

11. Si no hay fuentes ni sumideros en una región, entonces el flujo neto a través de la frontera de la región es cero.

12. Si S es una esfera con vector normal hacia fuera $\mathbf{n}$ y $\mathbf{F}$ es un campo vectorial constante, entonces

$$\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = 0$$

Problemas de examen

1. Bosqueje una muestra de vectores del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$.

2. Determine div $\mathbf{F}$, rot $\mathbf{F}$, grad(div $\mathbf{F}$) y div(rot $\mathbf{F}$) si $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xyz\mathbf{i} - 3y^2\mathbf{j} + 2y^2z\mathbf{k}$.

3. En el problema 20, sección 14.1, mostramos que

$$\text{rot}(f\mathbf{F}) = f(\text{rot}\,\mathbf{F}) + \nabla f \times \mathbf{F}$$

y en el problema 21, sección 14.3, vimos que

$$\text{rot}(\nabla f) = \mathbf{0}$$

Use estos hechos para demostrar que

$$\text{rot}(f\,\nabla f) = \mathbf{0}$$

4. Determine una función f que satisface

(a) $\nabla f = (2xy + y)\mathbf{i} + (x^2 + x + \cos y)\mathbf{j}$;

(b) $\nabla f = (yz - e^{-x})\mathbf{i} + (xz + e^y)\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$.

5. Evalúe:

(a) $\int_C (1 - y^2)\, ds$; C es el cuarto de circunferencia de $(0, -1)$ a $(1, 0)$, con centro en el origen.

(b) $\int_C xy\, dx + z \cos x\, dy + z\, dz$; C es la curva $x = t$, $y = \cos t$, $z = \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

6. Demuestre que $\int_C y^2\, dx + 2xy\, dy$ es independiente de la trayectoria, y use esto para calcular la integral en cualquier trayectoria de $(0, 0)$ a $(1, 2)$.

7. Calcule el trabajo realizado por $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$ al mover un objeto de $(1, 1)$ a $(3, 4)$ (véase el problema 6).

8. Evalúe (véase el problema 4b)

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,4)} (yz - e^{-x})\, dx + (xy + e^y)\, dy + xy\, dz$$

9. Evalúe $\oint_C xy\, dx + (x^2 + y^2)\, dy$ si

(a) C es la trayectoria cuadrada de $(0, 0)$ a $(1, 0)$ a $(1, 1)$ a $(0, 1)$ a $(0, 0)$;

(b) C es la trayectoria triangular de $(0, 0)$ a $(2, 0)$ a $(2, 1)$ a $(0, 0)$;

(c) C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ recorrida en el sentido de las manecillas del reloj.

10. Calcule el flujo de $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ a través de la curva cuadrada C con vértices $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ y $(1, -1)$; es decir, calcule $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$.

11. Calcule el flujo de $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ a través de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

12. Evalúe $\iint_G xyz\, dS$, donde G es la parte del plano $z = x + y$ sobre la región triangular con vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$ y $(0, 2, 0)$.

13. Evalúe $\iint_G (\text{rot}\,\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$, donde

$$\mathbf{F} = x^3y\,\mathbf{i} + e^y\mathbf{j} + z\tan\left(\frac{xyz}{4}\right)\mathbf{k}$$

y G es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ sobre el plano $z = 1$ y $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario hacia arriba.

14. Evalúe $\iint_G \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$, donde

$$\mathbf{F} = \operatorname{sen} x\,\mathbf{i} + (1 - \cos x)y\,\mathbf{j} + 4z\,\mathbf{k}$$

y G es la superficie cerrada acotada por $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, y $z = 0$ con vector normal unitario exterior $\mathbf{n}$.

15. Sea C la circunferencia dada como la intersección del plano $ax + by + z = 0$ ($a \geq 0$, $b \geq 0$) y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Para $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}$, evalúe

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

Sugerencia: Use el teorema de Stokes.

Apéndice

A.1 Inducción matemática
A.2 Demostración de varios teoremas
Teorema A
Teorema principal de límites
Teorema B
Regla de la cadena
Teorema C
Regla de la potencia
Teorema D
Límites de vectores

A.1
Inducción matemática

Con frecuencia, en matemáticas nos enfrentamos a la tarea de querer establecer si una cierta proposición P_n es verdadera para cada entero $n \geq 1$ (o tal vez para cada entero $n \geq N$). He aquí tres ejemplos:

1. P_n: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. Q_n: $2^n > n + 20$
3. R_n: $n^2 - n + 41$ es primo

La proposición P_n es verdadera para cada entero positivo y Q_n es verdadera para cada entero mayor o igual a 5 (como mostraremos en breve). La tercera proposición, R_n, es interesante. Observe que para $n = 1, 2, 3,\ldots$, los valores de $n^2 - n + 41$ son 41, 43, 47, 53, 61, . . . , (números primos hasta este momento). De hecho, obtendremos un número primo para cada n hasta 40; pero en $n = 41$, la fórmula proporciona el número compuesto $1681 = (41)(41)$. Mostrar la verdad de una proposición para 40 (o 40 millones) casos individuales puede hacer una proposición plausible, pero ciertamente esto no demuestra que sea verdadera para toda n. El salto entre cualquier número finito de casos y *todos* los casos es infinitamente grande.

¿Qué hay que hacer? ¿Hay un procedimiento para establecer que una proposición P_n es verdadera para *toda* n? Una respuesta afirmativa la da el **principio de inducción matemática.**

Principio de inducción matemática

Sea $\{P_n\}$ una serie de proposiciones (enunciados) que satisfacen estas dos condiciones:

(i) P_N es verdadera (por lo general, N será 1).
(ii) Que P_i sea verdadera implica que $P_{i+1}, i \geq N$.

Entonces, P_n es verdadera para todo entero $n \geq N$.

No demostraremos este principio; con frecuencia se le considera como un axioma y esperamos que sea evidente. Después de todo, si la primera ficha de dominó cae y cada ficha golpea a la siguiente, entonces toda la serie de fichas caerá. Nuestro esfuerzo irá dedicado a ilustrar la forma de usar la inducción matemática.

EJEMPLO 1 Demuestre que

$$P_n: \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

es verdadera para cada $n \geq 1$.

SOLUCIÓN Observamos primero que

$$P_1: \quad 1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$$

es un enunciado verdadero.

En segundo lugar, demostraremos la implicación (ii). Comenzamos escribiendo los enunciados P_i y P_{i+1}.

$$P_i: \quad 1^2 + 2^2 + \cdots + i^2 = \frac{i(i+1)(2i+1)}{6}$$

$$P_{i+1}: \quad 1^2 + 2^2 + \cdots + i^2 + (i+1)^2 = \frac{(i+1)(i+2)(2i+3)}{6}$$

Debemos demostrar que P_i implica P_{i+1}, de modo que suponemos que P_i es verdadera. Entonces el lado izquierdo de P_{i+1} se puede escribir como sigue (*indica donde usamos P_i):

$$\begin{aligned}[1^2 + 2^2 + \cdots + i^2] + (i+1)^2 &\overset{*}{=} \frac{i(i+1)(2i+1)}{6} + (i+1)^2 \\ &= (i+1)\frac{2i^2 + i + 6i + 6}{6} \\ &= \frac{(i+1)(i+2)(2i+3)}{6}\end{aligned}$$

Esta cadena de igualdades conduce al enunciado P_{i+1}. Así, la verdad de P_i realmente implica la verdad de P_{i+1}. Por el principio de inducción matemática, P_n es verdadera para cada entero positivo n. ■

EJEMPLO 2 Demuestre que P_n: $2^n > n + 20$ es verdadera para cada entero $n \geq 5$.

SOLUCIÓN Primero observemos que la proposición P_5: $2^5 > 5 + 20$ es verdadera. En segundo lugar, supongamos que P_i: $2^i > i + 20$ es verdadera y tratemos de deducir a partir de esto que P_{i+1}: $2^{i+1} > i + 1 + 20$ es verdadera. Pero

$$2^{i+1} = 2 \cdot 2^i \overset{*}{>} 2(i+20) = 2i + 40 > i + 21$$

Leída de izquierda a derecha, ésta es la proposición P_{i+1}. Concluimos que P_n es verdadera para $n \geq 5$. ■

EJEMPLO 3 Demuestre que

$$P_n\text{:}\quad x - y \text{ es un factor de } x^n - y^n$$

es verdadera para cada entero $n \geq 1$.

SOLUCIÓN En forma trivial, $x - y$ es un factor de $x - y$, de modo que P_1 es verdadera. Suponga que $x - y$ es un factor de $x^i - y^i$; es decir,

$$x^i - y^i = Q(x, y)(x - y)$$

para algún polinomio $Q(x, y)$. Entonces

$$\begin{aligned}x^{i+1} - y^{i+1} &= x^{i+1} - x^i y + x^i y - y^{i+1} \\ &= x^i(x - y) + y(x^i - y^i) \\ &\overset{*}{=} x^i(x - y) + y\,Q(x, y)(x - y) \\ &= [x^i + yQ(x, y)](x - y)\end{aligned}$$

Así, la verdad de P_i realmente implica la verdad de P_{i+1}. Por el principio de inducción matemática, concluimos que P_n es verdadera para toda $n \geq 1$. ■

Conjunto de problemas A.1

En los problemas del 1 al 8 use el principio de inducción matemática para demostrar que la proposición dada es verdadera para cada entero $n \geq 1$.

1. $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

2. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

3. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

4. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n - 1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

5. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

6. $1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \dfrac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}$

7. $n^3 - n$ es divisible entre 6.

8. $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ es divisible entre 9.

En los problemas del 9 al 12 determine el primer entero N para el que sea verdadera la proposición para cada $n \geq N$, y luego demuestre la proposición para cada $n \geq N$.

9. $3n + 25 < 3^n$

10. $n - 100 > \log_{10} n$

11. $n^2 \leq 2^n$

12. $|\text{sen } nx| \leq n|\text{sen } x|$ para toda x

En los problemas del 13 al 20 indique la conclusión sobre P_n que puede extraerse con la información dada.

13. P_5 es verdadera y P_i verdadera implica que P_{i+2} es verdadera.

14. P_1 y P_2 son verdaderas y P_i verdadera implica que P_{i+2} es verdadera.

15. P_{30} es verdadera y P_i verdadera implica que P_{i+1} es verdadera.

16. P_{30} es verdadera y P_i verdadera implica que P_{i+1} y P_{i-1} son verdaderas.

17. P_1 es verdadera y P_i verdadera implica que P_{4i} y P_{i-1} son verdaderas.

18. P_1 es verdadera y P_{2i} verdadera implica que P_{2i+1} es verdadera.

19. P_1 y P_2 son verdaderas y P_i y P_{i+1} verdaderas implican que P_{i+2} es verdadera.

20. P_1 es verdadera y P_j verdadera para $j \leq i$ implica que P_{i+1} es verdadera.

En los problemas del 21 al 27 decida para cuáles n es verdadera la proposición dada y luego use inducción matemática (tal vez en alguna de las formas alternativas que haya descubierto en los problemas del 13 al 20) para demostrar lo siguiente.

21. $x + y$ es un factor de $x^n + y^n$.

22. La suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono convexo con n lados (sin agujeros ni dientes) es $(n-2)\pi$.

23. El número de diagonales de un polígono convexo con n lados es $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

24. $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} + \cdots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{3}{5}$

25. $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \dfrac{n+1}{2n}$

26. Sean $f_0 = 0, f_1 = 1$ y $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ para $n \geq 0$ (ésta es la sucesión de Fibonacci). Entonces

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

27. Sean $a_0 = 0, a_1 = 1$ y $a_{n+2} = (a_{n+1} + a_n)/2$ para $n \geq 0$. Entonces

$$a_n = \frac{2}{3}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

28. ¿Cuál es el error en el siguiente argumento que propone demostrar que todas las personas en cualquier conjunto de n personas tienen la misma edad? La afirmación es verdadera para un conjunto que consta de una persona. Suponga que es verdadera para cualquier conjunto de i personas y considere un conjunto W de $i + 1$ personas. Podemos pensar W como la unión de conjuntos X y Y, cada uno con i personas (por ejemplo, trace una figura cuando W tiene 6 personas). Por hipótesis, cada uno de estos conjuntos consta de personas con la misma edad. Pero X y Y se traslapan (en $X \cap Y$) de modo que todos los elementos de $W = X \cup Y$ tienen la misma edad.

A.2
Demostración de varios teoremas

Teorema A **Teorema principal de límites**

Sea n un entero positivo, k una constante, y f y g funciones con límites en c. Entonces

1. $\lim\limits_{x \to c} k = k$
2. $\lim\limits_{x \to c} x = c$
3. $\lim\limits_{x \to c} kf(x) = k \lim\limits_{x \to c} f(x)$
4. $\lim\limits_{x \to c}[f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x)$
5. $\lim\limits_{x \to c}[f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x)$
6. $\lim\limits_{x \to c}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to c} g(x)$
7. $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$, siempre siempre que $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$
8. $\lim\limits_{x \to c}[f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to c} f(x)\right]^n$
9. $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$, siempre que $\lim\limits_{x \to c} f(x) > 0$ cuando n sea par

Demostración Casi al final de la sección 1.3 demostramos las partes de 1 a 5, de modo que deberíamos comenzar con la parte 6. Sin embargo, primero demostraremos un caso particular de la parte 8:

$$\lim_{x \to c}[g(x)]^2 = \left[\lim_{x \to c} g(x)\right]^2$$

Para ver esto, recuerde que hemos demostrado que $\lim\limits_{x \to c} x^2 = c^2$ (ejemplo 7 de la sección 1.2), de modo que $f(x) = x^2$ es continua en todas partes. Así, por el teorema de composición de límites (teorema 1.6E),

$$\lim_{x\to c}[g(x)]^2 = \lim_{x\to c} f(g(x)) = f\left[\lim_{x\to c} g(x)\right] = \left[\lim_{x\to c} g(x)\right]^2$$

Ahora escribimos

$$f(x)g(x) = \frac{1}{4}\left\{[f(x) + g(x)]^2 - [f(x) - g(x)]^2\right\}$$

y aplicamos las partes 3, 4 y 5, más lo que acabamos de demostrar. Se demuestra la parte 6.

Para demostrar la parte 7 aplicamos el teorema de la composición de límites con $f(x) = 1/x$ y usamos el ejemplo 8 de la sección 1.2. Entonces

$$\lim_{x\to c}\frac{1}{g(x)} = \lim_{x\to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right) = \frac{1}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$$

Por último, por la parte 6,

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\left[f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right] = \lim_{x\to c} f(x)\cdot\lim_{x\to c}\frac{1}{g(x)}$$

de donde se sigue el resultado.

La parte 8 es consecuencia del uso repetido de la parte 6 (técnicamente, por inducción matemática).

Demostraremos la parte 9 sólo para raíces cuadradas. Sea $f(x) = \sqrt{x}$, que es continua para números positivos por el ejemplo 5 de la sección 1.2. Por el teorema de composición de límites,

$$\lim_{x\to c}\sqrt{g(x)} = \lim_{x\to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right) = \sqrt{\lim_{x\to c} g(x)}$$

que es equivalente al resultado deseado. ■

Teorema B Regla de la cadena

Si g es diferenciable en a y f es diferenciable en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es diferenciable en a y

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a)$$

Demostración Daremos una demostración que se generaliza con facilidad a dimensiones superiores (véase la sección 12.6). Por hipótesis, f es diferenciable en $b = g(a)$; es decir, existe un número $f'(b)$ tal que

$$(1) \qquad \lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(b + \Delta u) - f(b)}{\Delta u} = f'(b)$$

Definimos una función ε que depende de Δu como

$$\varepsilon(\Delta u) = \frac{f(b + \Delta u) - f(b)}{\Delta u} - f'(b)$$

y multiplicamos ambos lados por Δu para obtener

$$(2) \qquad f(b + \Delta u) - f(b) = f'(b)\,\Delta u + \Delta u\,\varepsilon(\Delta u)$$

La existencia del límite en (1) es equivalente a que $\varepsilon(\Delta u) \to 0$ cuando $\Delta u \to 0$ en (2). Si en (2) reemplazamos Δu por $g(a + \Delta x) - g(a)$ y b por $g(a)$, obtenemos

$$\begin{aligned} f(g(a + \Delta x)) - f(g(a)) &= f'(g(a))[g(a + \Delta x) - g(a)] \\ &\quad + [g(a + \Delta x) - g(a)]\varepsilon(\Delta u) \end{aligned}$$

o bien, al dividir ambos lados entre Δx,

$$(3) \qquad \begin{aligned} \frac{f(g(a + \Delta x)) - f(g(a))}{\Delta x} &= f'(g(a))\frac{g(a + \Delta x) - g(a)}{\Delta x} \\ &\quad + \frac{g(a + \Delta x) - g(a)}{\Delta x}\varepsilon(\Delta u) \end{aligned}$$

En (3), hagamos $\Delta x \to 0$. Como g es diferenciable en a, es continua ahí, de modo que $\Delta x \to 0$ implica que $\Delta u \to 0$; esto, a su vez, implica que $\varepsilon(\Delta u) \to 0$. Concluimos que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(a+\Delta x)) - f(g(a))}{\Delta x} = f'(g(a)) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(a+\Delta x) - g(a)}{\Delta x} + 0$$

Es decir, $f \circ g$ es diferenciable en a y

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a) \qquad \blacksquare$$

Teorema C **Regla de la potencia**

Si r es racional, entonces x^r es diferenciable en cualquier x que esté en un intervalo abierto donde x^{r-1} sea real y

$$D_x(x^r) = rx^{r-1}$$

Demostración Considere primero el caso en que $r = 1/q$, con q un entero positivo. Recuerde que $a^q - b^q$ se factoriza como

$$a^q - b^q = (a-b)(a^{q-1} + a^{q-2}b + \cdots + ab^{q-2} + b^{q-1})$$

de modo que

$$\frac{a-b}{a^q - b^q} = \frac{1}{a^{q-1} + a^{q-2}b + \cdots + ab^{q-2} + b^{q-1}}$$

Así, si $f(t) = t^{1/q}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{t \to x} \frac{t^{1/q} - x^{1/q}}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{t^{1/q} - x^{1/q}}{(t^{1/q})^q - (x^{1/q})^q} \\ &= \lim_{t \to x} \frac{1}{t^{(q-1)/q} + t^{(q-2)/q}x^{1/q} + \cdots + x^{(q-1)/q}} \\ &= \frac{1}{qx^{(q-1)/q}} = \frac{1}{q}x^{1/q-1} \end{aligned}$$

Ahora, por la regla de la cadena y con p un entero,

$$D_x(x^{p/q}) = D_x[(x^{1/q})^p] = p(x^{1/q})^{p-1} D_x(x^{1/q}) = px^{p/q-1/q}\frac{1}{q}x^{1/q-1} = \frac{p}{q}x^{p/q-1} \quad \blacksquare$$

Teorema D **Límites de vectores**

Sea $\mathbf{F}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$. Entonces $\mathbf{F}$ tiene un límite en c si y sólo si f y g tienen límites en c. En ese caso,

$$\lim_{t \to c} \mathbf{F}(t) = \left[\lim_{t \to c} f(t)\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{t \to c} g(t)\right]\mathbf{j}$$

Demostración Primero, observe que para cualquier vector $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$,

$$\boxed{|u_1| \le \|\mathbf{u}\| \le |u_1| + |u_2|}$$

Este hecho se ve fácilmente en la figura 1.

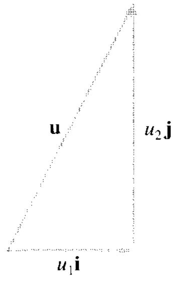


Figura 1

Ahora suponga que $\lim_{t \to c} \mathbf{F}(t) = \mathbf{L} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j}$. Esto significa que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ correspondiente, tal que

$$0 < |t - c| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{F}(t) - \mathbf{L}\| < \varepsilon$$

Pero, por la parte izquierda de la desigualdad en el recuadro,

$$|f(t) - a| \leq \|\mathbf{F}(t) - \mathbf{L}\|$$

y así

$$0 < |t - c| < \delta \Rightarrow |f(t) - a| < \varepsilon$$

Esto muestra que $\lim\limits_{t \to c} f(t) = a$. Un argumento similar establece que $\lim\limits_{t \to c} g(t) = b$. Esto concluye la primera mitad de nuestro teorema.

Recíprocamente, suponga que

$$\lim_{t \to c} f(t) = a \quad \text{y} \quad \lim_{t \to c} g(t) = b$$

y sea $\mathbf{L} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$. Para cualquier $\varepsilon > 0$, tal que $\delta > 0$ existe $0 < |t - c| < \delta$ implica que

$$|f(t) - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |g(t) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por lo tanto, por la parte derecha de la desigualdad en el recuadro,

$$0 < |t - c| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{F}(t) - \mathbf{L}\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Así,

$$\lim_{t \to c} \mathbf{F}(t) = \mathbf{L} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} = \lim_{t \to c} f(t)\,\mathbf{i} + \lim_{t \to c} g(t)\,\mathbf{j} \qquad \blacksquare$$

Respuestas a problemas con número impar

Conjunto de problemas 0.1

1. 16 **3.** −148 **5.** $\frac{58}{91}$ **7.** $\frac{1}{24}$ **9.** $\frac{6}{49}$ **11.** $\frac{7}{15}$

13. $\frac{1}{3}$ **15.** 2 **17.** $3x^2 - x - 4$ **19.** $6x^2 - 15x - 9$

21. $9t^4 - 6t^3 + 7t^2 - 2t + 1$ **23.** $x + 2, x \neq 2$

25. $t - 7, t \neq -3$ **27.** $\dfrac{2(3x + 10)}{x(x + 2)}$

29. **(a)** 0; **(b)** No definida; **(c)** 0; **(d)** No definida; **(e)** 0; **(f)** 1

31. 0.08333... **33.** 0.142857... **35.** 3.6666...

37. $\frac{41}{333}$ **39.** $\frac{254}{99}$ **41.** $\frac{1}{5}$

43. Aquellos números racionales que pueden expresarse mediante un decimal que termina seguido con ceros.

49. Irracional **51.** 20.39230485 **53.** 0.00028307388

55. 0.000691744752 **59.** 132,700,874 pies

61. 651,441 pies de tablas

63. **(a)** Si me quedo en casa, entonces llueve. Si no me quedo en casa, entonces no llueve.
(b) Si la candidata será contratada, entonces cumple con todos los requisitos.

65. **(a)** Si un triángulo es un triángulo rectángulo, entonces $a^2 + b^2 = c^2$. Si un triángulo no es un triángulo rectángulo, entonces $a^2 + b^2 \neq c^2$.
(b) Si la medida del ángulo ABC es mayor que 0° y menor que 90°, es agudo. Si la medida del ángulo ABC es menor que 0° o mayor que 90°, entonces no es agudo.

67. **(a)** La proposición, la recíproca y la contrapositiva son verdaderas.
(b) La proposición, la recíproca y la contrapositiva son verdaderas.

69. **(a)** Algunos triángulos isósceles no son equiláteros. La negación es verdadera.
(b) Todos los números reales son enteros. La proposición original es verdadera. **(c)** Algún número natural es mayor que su cuadrado. La proposición original es verdadera.

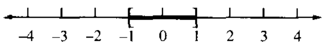
71. **(a)** Verdadera; **(b)** Falsa; **(c)** Falsa; **(d)** Verdadera; **(e)** Verdadera

75. **(a)** $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ o 3^5; **(b)** $2 \cdot 2 \cdot 31$ o $2^2 \cdot 31$
(c) $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 17$ o $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 17$

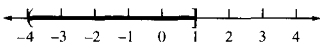
81. **(a)** Racional; **(b)** Racional; **(c)** Racional; **(d)** Irracional

Conjunto de problemas 0.2

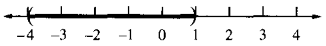
1. **(a)**



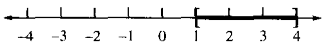
(b)



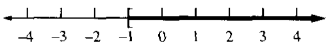
(c)



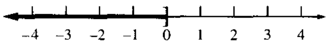
(d)



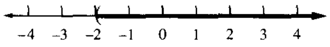
(e)



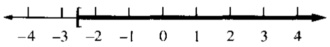
(f)



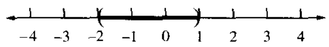
3. $(-2, \infty)$;



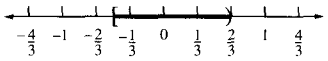
5. $\left[-\frac{5}{2}, \infty\right)$;



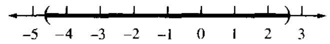
7. $(-2, 1)$;



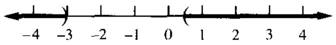
9. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$;


$-\frac{4}{3}$ −1 $-\frac{2}{3}$ $-\frac{1}{3}$ 0 $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ 1 $\frac{4}{3}$

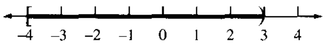
11. $\left(-1 - \sqrt{13}, -1 + \sqrt{13}\right)$;



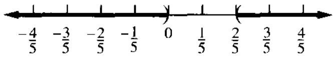
13. $(-\infty, -3) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$;



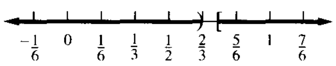
15. $[-4, 3)$;



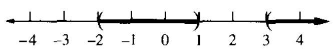
17. $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{5}, \infty\right)$;


$-\frac{4}{5}$ $-\frac{3}{5}$ $-\frac{2}{5}$ $-\frac{1}{5}$ 0 $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{5}$

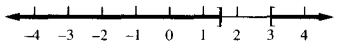
19. $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup \left[\frac{3}{4}, \infty\right)$;


$-\frac{1}{6}$ 0 $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{6}$ 1 $\frac{7}{6}$

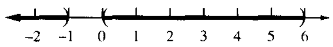
21. $(-2, 1) \cup (3, \infty)$;



23. $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup [3, \infty)$;



25. $(-\infty, -1) \cup (0, 6)$;



27. **(a)** Falsa; **(b)** Verdadera; **(c)** Falsa

31. **(a)** $(-2, 1)$; **(b)** $(-2, \infty)$; **(c)** No hay valores

33. **(a)** $[-3, -1] \cup [2, \infty)$; **(b)** $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$; **(c)** $(-2, -1) \cup (1, 2)$

35. $(-\infty, -3] \cup [7, \infty)$ **37.** $\left[-\frac{15}{4}, \frac{5}{4}\right]$

39. $(-\infty, -7] \cup [42, \infty)$ **41.** $(-\infty, 1) \cup \left(\frac{7}{5}, \infty\right)$

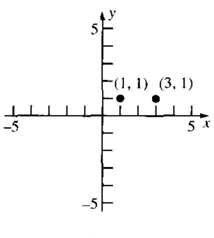
43. $\left(-\frac{1}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{9}\right)$ **45.** $(-\infty, -1] \cup [4, \infty)$

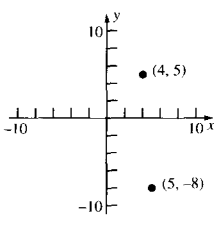
47. $(-\infty, -6) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$ **53.** $\frac{\varepsilon}{3}$ **55.** $\frac{\varepsilon}{6}$ **57.** 0.0064 pulg.

59. $\left(-\infty, \frac{7}{3}\right) \cup (5, \infty)$ **61.** $\left(-\frac{4}{5}, \frac{16}{3}\right)$ **77.** $\frac{60}{11} \leq R \leq \frac{120}{13}$

Conjunto de problemas 0.3

1. 2 **3.** $\sqrt{170}$





7. $(-1, 3), (-1, -1); (7, 3), (7, -1); (1, 1), (5, 1)$

9. $\dfrac{\sqrt{61}}{2}$ **11.** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$

13. $(x-2)^2+(y+1)^2=25$ **15.** $(x-2)^2+(y-5)^2=5$

17. Centro $=(-1,3)$; radio $=\sqrt{10}$

19. Centro $=(6,0)$; radio $=1$

21. Centro $=\left(-2,-\frac{3}{4}\right)$; radio $=\dfrac{\sqrt{13}}{4}$

23. 1 **25.** $\frac{9}{7}$ **27.** $-\frac{5}{3}$ **29.** $y=-x+4$; $x+y-4=0$

31. $y=2x+3$; $2x-y+3=0$

33. $y=\frac{5}{2}x-2$; $5x-2y-4=0$

35. Pendiente $=-\frac{2}{3}$; intercepción con el eje $y=\frac{1}{3}$

37. Pendiente = -5; intercepción con el eje $y=4$

39. **(a)** $y=2x-9$; **(b)** $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$; **(c)** $y=-\frac{2}{3}x-1$; **(d)** $y=\frac{3}{2}x-\frac{15}{2}$; **(e)** $y=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$; **(f)** $x=3$; **(g)** $y=-3$

41. $y=\frac{3}{2}x+2$ **43.** Está por arriba de la recta.

45. $(-1,2)$; $y=\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$ **47.** $(3,1)$; $y=-\frac{4}{3}x+5$

49. Inscrita; $(x-4)^2+(y-1)^2=4$; circunscrita: $(x-4)^2+(y-1)^2=8$

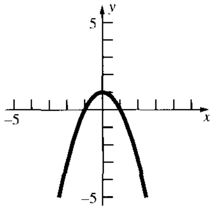
55. $d=2\sqrt{3}+4$ **61.** $18+2\sqrt{17}+4\pi\approx 38.8$

63. $\dfrac{7}{5}$ **65.** $\dfrac{18}{13}$ **67.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ **69.** $y=\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}$ **71.** $r=1$

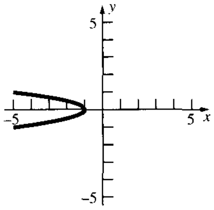
73. $x+\sqrt{3}y=12$ y $x-\sqrt{3}y=12$ **77.** 8

Conjunto de problemas 0.4

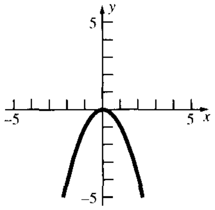
1.



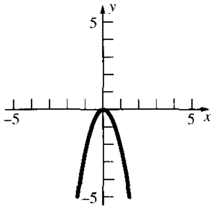
3.



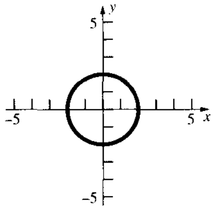
5.



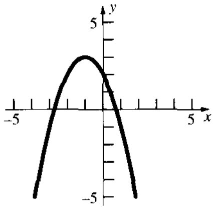
7.



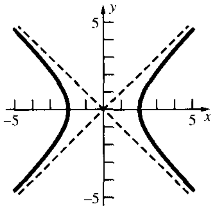
9.



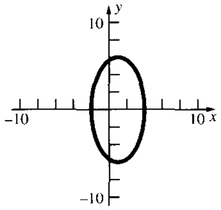
11.



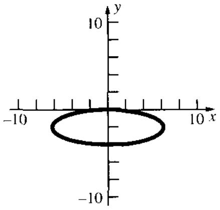
13.



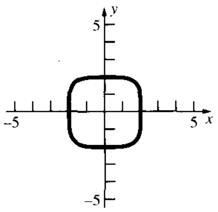
15.



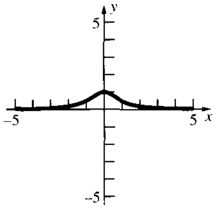
17.



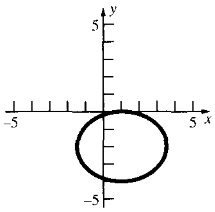
19.



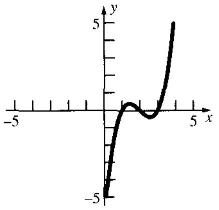
21.



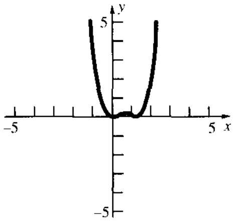
23.



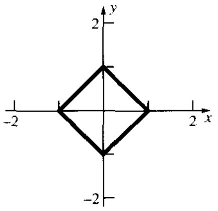
25.



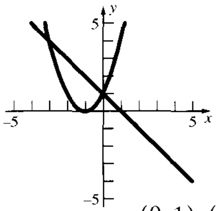
27.



29.

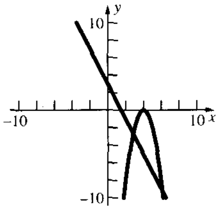


31.



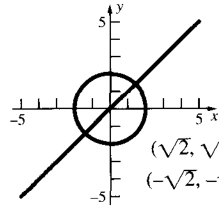
$(0,1)$, $(-3,4)$

33.



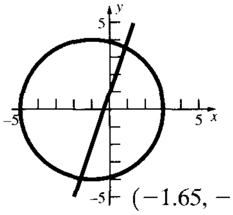
$\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{11},-6+\sqrt{11}\right)$,
$\left(\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{11},-6-\sqrt{11}\right)$

35.



$(\sqrt{2},\sqrt{2})$,
$(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$

37.



$(-1.65,-3.95)$,
$(0.85,3.55)$

39. **(a)** (2) **(b)** (1) **(c)** (3) **(d)** (4)

41. Cuatro distancias distintas.

Conjunto de problemas 0.5

1. **(a)** 0; **(b)** -3; **(c)** 1; **(d)** $1-k^2$; **(e)** -24; **(f)** $\frac{15}{16}$; **(g)** $-2h-h^2$; **(h)** $-2h-h^2$; **(i)** $-4h-h^2$

3. **(a)** -1; **(b)** -1000; **(c)** 100; **(d)** $\dfrac{1}{y^2-1}$; **(e)** $-\dfrac{1}{x+1}$; **(f)** $\dfrac{x^2}{1-x^2}$

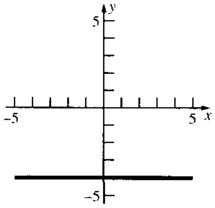
5. **(a)** No definido; **(b)** 2.658; **(c)** 0.841

7. **(a)** No es una función; **(b)** $f(x) = \frac{1 - x}{x + 1}$;
(c) $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$; **(d)** $f(x) = \frac{x}{1 - x}$

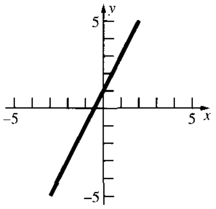
9. $4a + 2h$ **11.** $-\frac{3}{x^2 - 4x + hx - 2h + 4}$

13. **(a)** $\{z \in \text{reales}: z \geq -\frac{3}{2}\}$; **(b)** $\{v \in \text{reales}: v \neq \frac{1}{4}\}$;
(c) $\{x \in \text{reales}: |x| \geq 3\}$; **(d)** $\{y \in \text{reales}: |y| \leq 5\}$

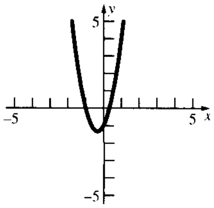
15. Par



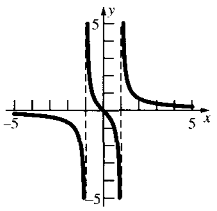
17. Ninguna



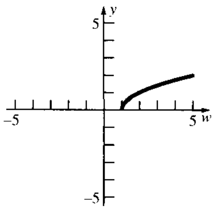
19. Ninguna



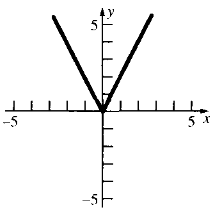
21. Impar



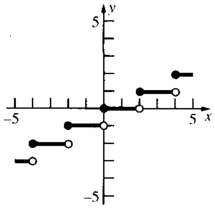
23. Ninguna



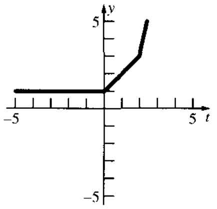
25. Par



27. Ninguna

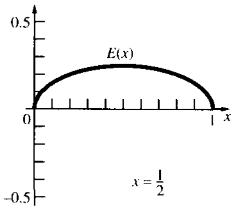


29. Ninguna



31. $T(x) = 5000 + 805x$, $\{x \in \text{integrales}: 0 \leq x \leq 100\}$;
$u(x) = \frac{5000}{x} + 805$, $\{x \in \text{integrales}: 0 < x \leq 100\}$

33. $E(x) = x - x^2$



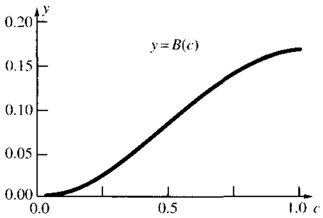
35. $L(x) = \sqrt{h^2 - x^2}$

37. **(a)** $E(x) = 24 + 0.40x$; **(b)** 240 millas

39. $A(d) = \frac{2d - \pi d^2}{4}$, $\left\{d \in \text{reales}: 0 < d < \frac{1}{\pi}\right\}$

41. **(a)** $B(0) = 0$ **(b)** $B\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}B(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

(c)

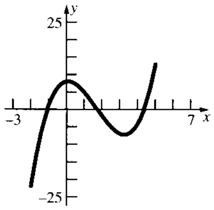


45. **(a)** $f(1.38) \approx 0.2994$, $f(4.12) \approx 3.6852$

(b)

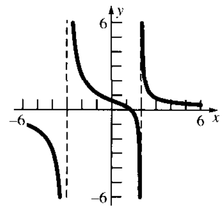
x	$f(x)$
−4	−4.05
−3	−3.1538
−2	−2.375
−1	−1.8
0	−1.25
1	−0.2
2	1.125
3	2.3846
4	3.55

47.



(a) $\{y \in \text{reales}: -22 \leq y \leq 13\}$;
(b) $[-1.1, 1.7] \cup [4.3, 5]$

49.



(a) intercepción $x\ \frac{4}{3}$, intercepción $y\ \frac{2}{3}$;
(b) todos los reales;
(c) $x = -3, x = 2$; **(d)** $y = 0$

Conjunto de problemas 0.6

1. **(a)** 9; **(b)** 0; **(c)** $\frac{3}{2}$; **(d)** 4; **(e)** 16; **(f)** 25

3. **(a)** $t^3 + 1 + \frac{1}{t}$; **(b)** $\frac{1}{r^3} + 1$; **(c)** $\frac{1}{r^3 + 1}$; **(d)** $(z^3 + 1)^3$;
(e) $125t^3 + 1 - \frac{1}{5t}$; **(f)** $\frac{1}{t^3} + 1 - t$

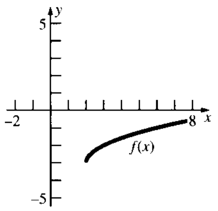
5. $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$; $(g \circ f)(x) = 1 + \sqrt{x^2 - 4}$

7. 1.188 **9.** 4.789

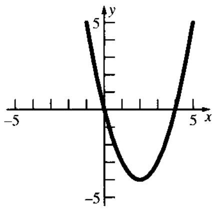
11. **(a)** $g(x) = \sqrt{x}, f(x) = x + 7$;
(b) $g(x) = x^{15}, f(x) = x^2 + x$

13. $p = f \circ g \circ h$ si $f(x) = 1/x, g(x) = \sqrt{x}, h(x) = x^2 + 1$;
$p = f \circ g \circ h$ si $f(x) = 1/\sqrt{x}, g(x) = x + 1, h(x) = x^2$

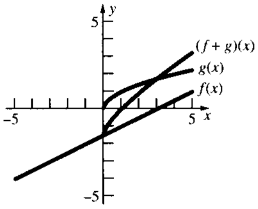
15.



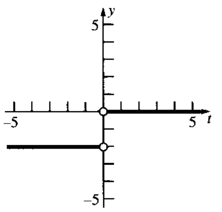
17.



19.



21.



23. **(a)** Par; **(b)** Impar; **(c)** Par; **(d)** Par; **(e)** Impar

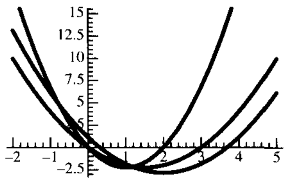
25. No, en ambos casos. (Considere $f(x) = x^2 + x$ y $f(x) = x^3 + 1$).

27. **(a)** $P = \sqrt{t + \sqrt{t} + 27}$; **(b)** $P \approx 7$

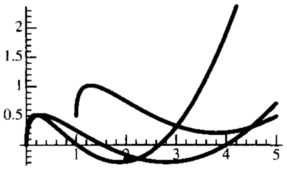
29. $D(t) = \begin{cases} 400t & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ \sqrt{250{,}000t^2 - 180{,}000t + 90{,}000} & \text{si } t > 1 \end{cases}$

33. **(a)** $\dfrac{1}{1 - x}$; **(b)** x; **(c)** $1 - x$

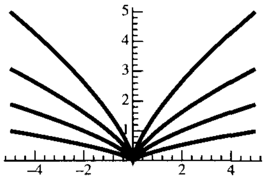
37.



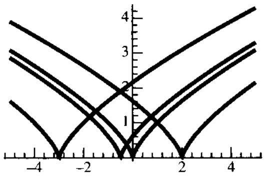
39.



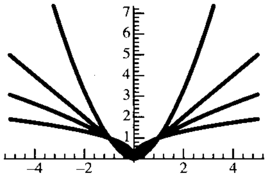
41. **(a)**



(b)



(c)



Conjunto de problemas 0.7

1. **(a)** $\frac{\pi}{6}$; **(b)** $\frac{\pi}{4}$; **(c)** $-\frac{\pi}{3}$; **(d)** $\frac{4\pi}{3}$; **(e)** $-\frac{37\pi}{18}$; **(f)** $\frac{\pi}{18}$;

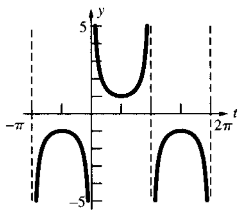
3. **(a)** 0.5812; **(b)** 0.8029; **(c)** −1.1624; **(d)** 4.1907; **(e)** −6.4403; **(f)** 0.1920;

5. **(a)** 68.37; **(b)** 0.8845; **(c)** 0.4855; **(d)** −0.3532;

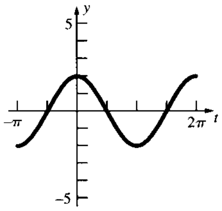
7. **(a)** 46.097; **(b)** 0.0789

9. **(a)** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; **(b)** −1; **(c)** $-\sqrt{2}$; **(d)** 1; **(e)** 1; **(f)** −1

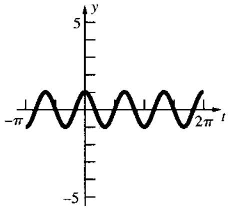
15. **(a)**



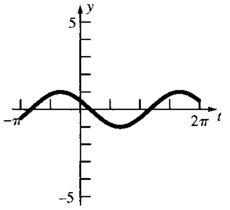
(b)



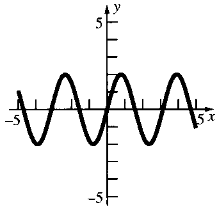
(c)



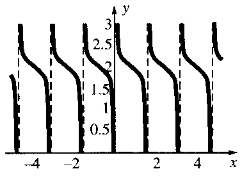
(d)



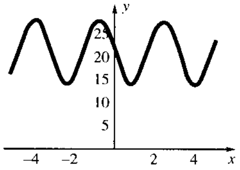
17. Periodo = π; Amplitud = 2



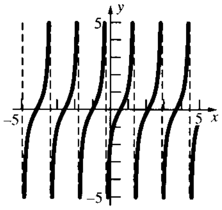
19. Periodo $= \frac{\pi}{2}$; corrimiento: 2 unidades hacia arriba



21. Periodo = π; amplitud = 7; corrimiento: 21 unidades hacia arriba, $\frac{3}{2}$ unidades hacia la izquierda



23. Periodo = $\frac{\pi}{2}$; corrimiento: $\frac{\pi}{6}$ unidades hacia la derecha



25. **(a)** Par; **(b)** Par; **(c)** Impar; **(d)** Par; **(e)** Par; **(f)** Impar

27. $\frac{1}{4}$ **29.** $\frac{1}{8}$ **31.** $\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$

35. 336 rev/min **37.** 28 rev/sec

39. **(a)** $\frac{\pi}{3}$; **(b)** $\frac{5\pi}{6}$

41. **(a)** 0.1419; **(b)** 1.8925; **(c)** 1.7127

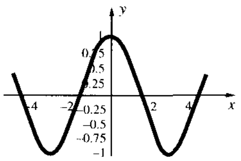
43. 25 cm^2 **45.** $r^2 \operatorname{sen}\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2} + \dfrac{\pi r^2}{2}\operatorname{sen}^2\dfrac{t}{2}$

47. 67.5°F

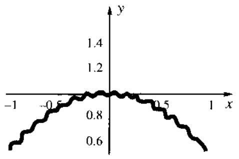
49. Conforme t aumenta, el punto en el borde de la rueda se moverá alrededor del círculo de radio 2.
(a) $x(2) \approx 1.902$; $y(2) \approx 0.618$; $x(6) \approx -1.176$; $y(6) \approx -1.618$; $x(10) = 0$; $y(10) = 2$; $x(0) = 0$; $y(0) = 2$
(b) $x(t) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}t\right)$, $y(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{5}t\right)$
(c) El punto está en $(2, 0)$, cuando $\frac{\pi}{5}t = \frac{\pi}{2}$; es decir, cuando $t = \frac{5}{2}$.

51. **(c)**
$$\begin{aligned} &A_1 \operatorname{sen}(\omega t + \phi_1) + A_2 \operatorname{sen}(\omega t + \phi_2) + A_3 \operatorname{sen}(\omega t + \phi_3) \\ &= (A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2 + A_3\cos\phi_3)\operatorname{sen}\omega t \\ &\quad + (A_1\operatorname{sen}\phi_1 + A_2\operatorname{sen}\phi_2 + A_3\operatorname{sen}\phi_3)\cos\omega t \end{aligned}$$

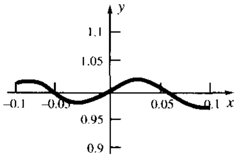
53. **(a)**



(b)



(c)



0.8 Revisión del capítulo

Examen de conceptos

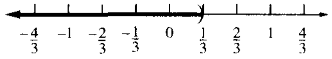
1. Falso **3.** Falso **5.** Falso **7.** Falso **9.** Verdadero **11.** Verdadero **13.** Verdadero **15.** Falso **17.** Verdadero **19.** Verdadero **21.** Verdadero **23.** Verdadero **25.** Verdadero **27.** Verdadero **29.** Verdadero **31.** Verdadero **33.** Verdadero **35.** Verdadero **37.** Falso **39.** Falso **41.** Verdadero **43.** Verdadero **45.** Falso **47.** Verdadero **49.** Verdadero **51.** Falso **53.** Verdadero **55.** Falso **57.** Verdadero **59.** Falso **61.** Verdadero **63.** Verdadero

Problemas de examen

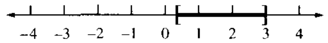
1. **(a)** $2, \frac{25}{4}, \frac{4}{25}$; **(b)** $1, 9, 49$; **(c)** $64, 8, \frac{1}{8}$; **(d)** $1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}$

7. 2.66

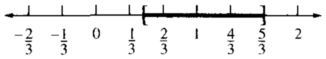
9. $\left\{x\colon x < \frac{1}{3}\right\}$; $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$;



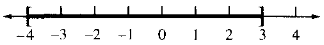
11. $\left\{x\colon \frac{1}{3} \le x \le 3\right\}$; $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$;



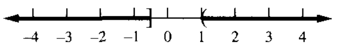
13. $\left\{t\colon \frac{3}{7} \le t \le \frac{5}{3}\right\}$; $\left[\frac{3}{7}, \frac{5}{3}\right]$;



15. $\{x\colon -4 \le x \le 3\}$; $[-4, 3]$;

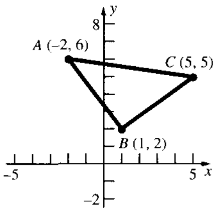


17. $\left\{x\colon x \le -\frac{1}{2} \text{ o } x > 1\right\}$; $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup (1, \infty)$;



19. Cualquier número negativo **21.** $t \le 5$

25.

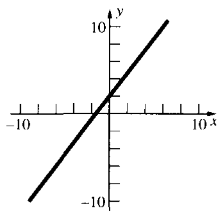


27. $(x-6)^2 + (y-2)^2 = 20$ **29.** 5

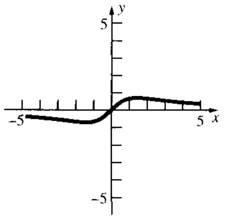
31. **(a)** $y = \frac{2}{9}x + \frac{13}{9}$; **(b)** $y = \frac{3}{2}x + 4$; **(c)** $y = \frac{4}{3}x + \frac{11}{3}$; **(d)** $x = -2$; **(e)** $y = x + 3$

33. (b)

35.



37.

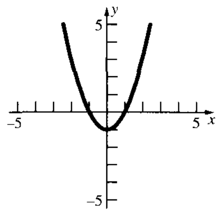


39. $(0, 4)$ y $(3, 7)$

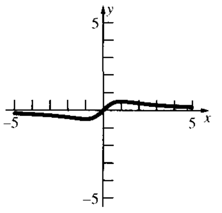
41. **(a)** $-\frac{1}{2}$; **(b)** 4; **(c)** No existe; **(d)** $\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t-1}$; **(e)** $\dfrac{t}{1+t} - t$

43. **(a)** $\{x \in \text{reales}\colon x \ne -1, 1\}$; **(b)** $\{x \in \text{reales}\colon |x| \le 2\}$;

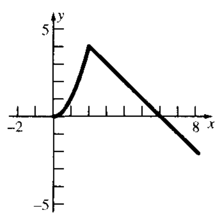
45. **(a)**



(b)

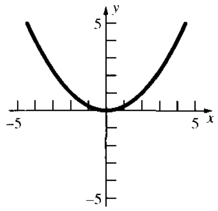


(c)

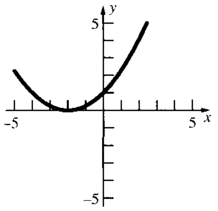


47. $V(x) = x(32 - 2x)(24 - 2x)$, $\{x \in \text{reales}: 0 \leq x \leq 12\}$

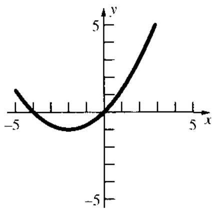
49. (a)



(b)



(c)



51. $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = 1 + x, h(x) = x^2, k(x) = \sin x$

53. (a) -0.8; **(b)** -0.6; **(c)** -0.96; **(d)** -1.333;
(e) 0.8; **(f)** -0.8

55. 18.85 pulgadas.

Problemas de repaso e introducción capítulo 1

1. (a) $0 < x < 2$; **(b)** $-6 < x < 8$

3. 4,10 **5.** 4,10

7. (a) $4 < x < 10$; **(b)** $4 \leq x \leq 10$; **(c)** $6 \leq x \leq 8$;
(d) $6.9 < x < 7.1$

9. (a) $x \neq 1$; **(b)** $x \neq 1, -0.5$

11. 1, 1.9, 1.99, 1.999, 2.001, 2.01, 2.1, 3; -1, -0.0357143, -0.0033557, -0.000333556, 0.000333111, 0.00331126, 0.03125, 0.2

13. $4.9 < x < 5.1$

15. (a) Verdadero; **(b)** Falso; **(c)** Verdadero; **(d)** Verdadero

Conjunto de problemas 1.1

1. -2 **3.** -1 **5.** 0 **7.** 4 **9.** 12 **11.** $-2t$

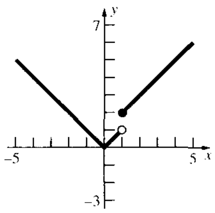
13. $\frac{\sqrt{6}}{9}$ **15.** 36 **17.** 4 **19.** 0.5 **21.** 0 **23.** 2

25. 0 **27.** 0.25

29. (a) 2; **(b)** 1; **(c)** No existe; **(d)** $\frac{5}{2}$; **(e)** 2;
(f) No existe; **(g)** 2; **(h)** 1; **(i)** 2.5

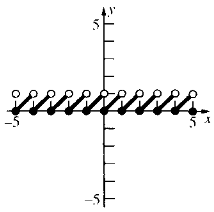
31. (a) 2; **(b)** no definido; **(c)** 2; **(d)** 4; **(e)** no existe;
(f) no existe;

33.



(a) 0; **(b)** No existe;
(c) 2; **(d)** 2

35.



(a) 0; **(b)** No existe; **(c)** 1;
(d) $\frac{1}{2}$

37. No existe;

39. (a) No existe; **(b)** 0

41. $a = -1, 0, 1$

43. (a) No existe; **(b)** -1; **(c)** -3; **(d)** No existe

45. (a) 1; **(b)** 0; **(c)** -1; **(d)** -1

47. No existe **49.** 0 **51.** $\frac{1}{2}$ **53.** No existe;

55. 6 **57.** -3

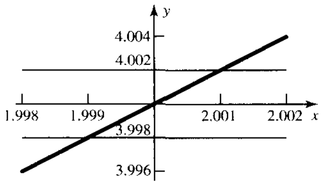
Conjunto de problemas 1.2

1. $0 < |t - a| < \delta \Rightarrow |f(t) - M| < \varepsilon$

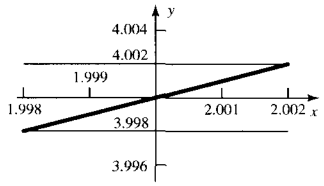
3. $0 < |z - d| < \delta \Rightarrow |h(z) - P| < \varepsilon$

5. $0 < c - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

7. 0.001



9. 0.0019



31. (b), (c)

33. (a) $\frac{x^3 - x^2 - 2x - 4}{x^4 - 4x^3 + x^2 + x + 6}$; **(b)** No; **(c)** 3

Conjunto de problemas 1.3

1. 3 **3.** -3 **5.** -5 **7.** 2 **9.** -1 **11.** 2 **13.** 0

15. -4 **17.** $-\frac{2}{3}$ **19.** $\frac{3}{2}$ **21.** $\frac{x + 2}{5}$ **23.** -1

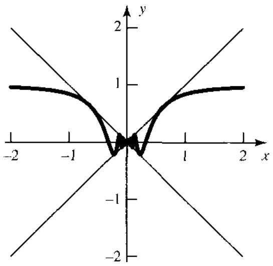
25. $\sqrt{10}$ **27.** -6 **29.** 6 **31.** 12 **33.** $-\frac{1}{4}$ **41.** 0

43. 0 **45.** $\frac{2}{5}$ **47.** -1 **51. (a)** 1; **(b)** 0

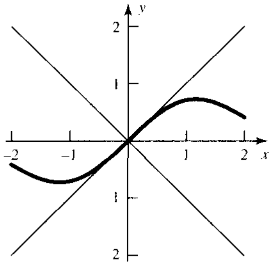
Conjunto de problemas 1.4

1. 1 **3.** 1 **5.** $\frac{1}{2}$ **7.** 3 **9.** $\frac{1}{2\pi}$ **11.** 0 **13.** 7

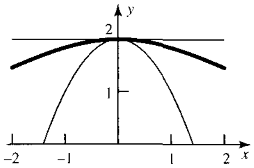
15. 0



17. 0



19. 2



Conjunto de problemas 1.5

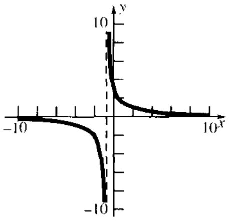
1. 1 **3.** −1 **5.** −1 **7.** $\frac{1}{2}$ **9.** $\frac{3}{\pi}$ **11.** $\frac{3}{\sqrt{2}}$

13. 2 **15.** $\frac{1}{2}$ **17.** ∞ **19.** 2 **21.** 0 **23.** $-\infty$

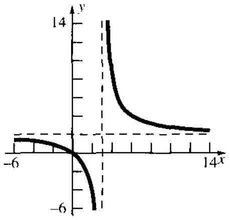
25. 1 **27.** ∞ **29.** ∞ **31.** ∞ **33.** $-\infty$ **35.** 5

37. 0 **39.** −1 **41.** $-\infty$

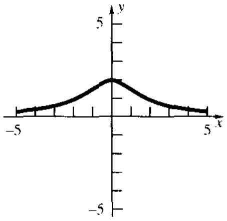
43. Asíntota horizontal $y = 0$
Asíntota vertical $x = -1$



45. Asíntota horizontal $y = 2$
Asíntota vertical $x = 3$



47. Asíntota horizontal $y = 0$
No tiene asíntotas verticales



49. La asíntota oblicua es $y = 2x + 3$.

51. **(a)** Decimos que $\lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$, si para cada número negativo M existe un correspondiente $\delta > 0$ tal que
$0 < x - c < \delta \Rightarrow f(x) < M$.

(b) Decimos que $\lim_{x \to c^-} f(x) = \infty$, si para cada número positivo M existe un correspondiente $\delta > 0$ tal que
$0 < c - x < \delta \Rightarrow f(x) > M$.

55. **(a)** No existe **(b)** 0 **(c)** 1 **(d)** ∞ **(e)** 0
(f) $\frac{1}{2}$ **(g)** No existe **(h)** 0

57. $\frac{3}{2}$ **59.** $-\frac{3}{2\sqrt{2}}$ **61.** 1 **63.** ∞ **65.** −1

67. $-\infty$ **69.** e **71.** 1

Conjunto de problemas 1.6

1. Continua

3. No es continua; $\lim_{x \to 3} \frac{3}{x - 3}$ y $h(3)$ no existen

5. No es continua; $\lim_{t \to 3} \frac{|t - 3|}{t - 3}$ y $h(3)$ no existen

7. Continua **9.** No es continua; $h(3)$ no existe

11. Continua **13.** Continua **15.** Continua

17. $(-\infty, -5), [-5, 4], (4, 6), [6, 8], (8, \infty)$

19. Definir $f(3) = -12$. **21.** Definir $H(1) = \frac{1}{2}$.

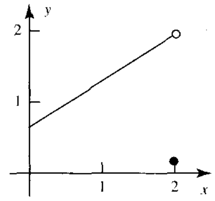
23. Definir $F(-1) = -\text{sen}\, 2$. **25.** $3, \pi$

27. Todo $\theta = n\pi + \frac{\pi}{2}$, donde n es cualquier entero. **29.** −1

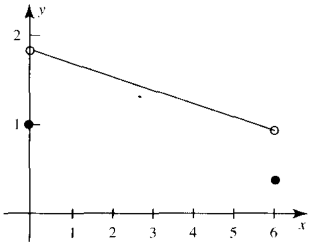
31. $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ **33.** 1

35. Todo $t = n + \frac{1}{2}$, donde n es cualquier entero.

37.



39.



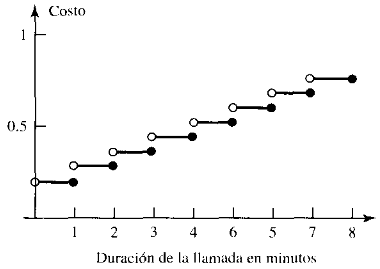
41. Continua.

43. Discontinua; removible, definir $f(0) = 1$

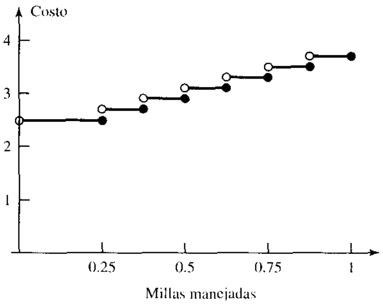
45. Discontinua, removible, redefinir $g(0) = 1$

47. Discontinua, no removible.

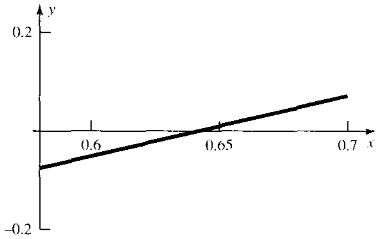
49. La función es continua en los intervalos $(0, 1], (1, 2], (2, 3], \ldots$



51. 51. La función es continua en los intervalos $(0, 0.25], (0.25, 0.375], (0.375, 0.5], \ldots$



55. El intervalo $[0.6, 0.7]$ contiene a la solución.



65. Sí, g es continua.

71. **(a)** Dominio $\left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right]$, Rango $\{-3/4, 0, 3/4\}$.

(b) Discontinua en $x = 0$ **(c)** $-\frac{3}{4}, 0, \frac{3}{4}$

1.7 Revisión del capítulo

Examen de conceptos

1. Falso **3.** Falso **5.** Falso **7.** Verdadero **9.** Falso **11.** Verdadero **13.** Verdadero **15.** Falso **17.** Falso **19.** Falso **21.** Verdadero **23.** Verdadero **25.** Verdadero **27.** Verdadero **29.** Falso **31.** Verdadero

Problemas de examen

1. 0 **3.** 2 **5.** $\frac{1}{8}$ **7.** $\frac{1}{2}$ **9.** 4 **11.** -1 **13.** -1 **15.** $\frac{5}{3}$ **17.** 1 **19.** ∞ **21.** ∞

25. **(a)** $x = -1, 1$ **(b)** $f(-1) = -1$

27. **(a)** 14 **(b)** -12 **(c)** -2 **(d)** -2 **(e)** 5 **(f)** 0

29. $a = 2, b = -1$ **31.** Vertical: ninguna, Horizontal: $y = 0$

33. Vertical: $x = -1, 1$, Horizontal: $y = 1$

35. Vertical: $x = \pm\pi/4, \pm 3\pi/4, \pm 5\pi/4, \ldots$, Horizontal: ninguna

Problemas de repaso e introducción del capítulo 2

1. **(a)** 4 **(b)** 4.41 **(c)** 0.41 **(d)** 4.1 **(e)** $a^2 + 2ah + h^2$ **(f)** $2ah + h^2$ **(g)** $2a + h$ **(h)** $2a$

3. **(a)** $\sqrt{2} \approx 1.41$ **(b)** $\sqrt{2.1} \approx 1.45$ **(c)** 0.035 **(d)** 0.35 **(e)** $\sqrt{a+h}$ **(f)** $\sqrt{a+h} - \sqrt{a}$ **(g)** $\left(\sqrt{a+h} - \sqrt{a}\right)/h$ **(h)** $\frac{1}{2\sqrt{a}}$

5. **(a)** $a^3 + 3a^2b$ **(b)** $a^4 + 4a^3b$ **(c)** $a^5 + 5a^4b$

7. $\operatorname{sen}(x + h) = \operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h$

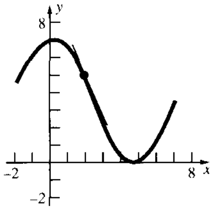
9. **(a)** $(10, 0), (10, 0), (10, 0)$ **(b)** $t = 1/4$

11. **(a)** El avión hacia el norte ha recorrido 600 millas, el avión hacia el este ha recorrido 400 millas **(b)** 721 millas **(c)** 840 millas

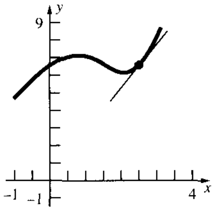
Conjunto de problemas 2.1

1. 4

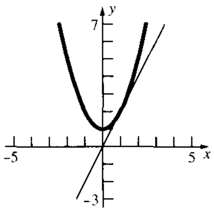
3. -2



5. $\frac{5}{2}$



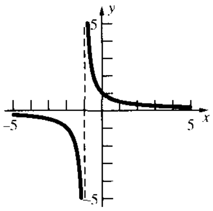
7. **(a), (b)**



(c) 2; **(d)** 2.01; **(e)** 2

9. $-4, -2, 0, 2, 4$

11.



$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 1)$

13. **(a)** 16 pies; **(b)** 48 pies; **(c)** 80 pies /s; **(d)** 96.16 pies /s; **(e)** 96 pies /s

15. **(a)** $\frac{1}{\sqrt{2\alpha + 1}}$ pies/s; **(b)** 1.5 seg

17. **(a)** 0.02005 g; **(b)** 2.005 g/h; **(c)** 2 g/h

19. **(a)** 49 g/cm; **(b)** 27 g/cm

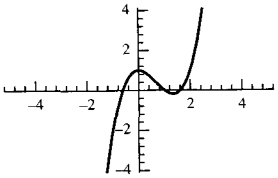
21. 4 **23.** 29,167 gal/h; 75,000 gal/h

25. **(a)** 0.5 °F/día **(b)** 0.067 °F/día **(c)** Enero y julio **(d)** Marzo y noviembre

27. **(a)** Creciente **(b)** Decreciente

29. $24\pi \text{ km}^2/\text{día}$

31.



(a) 7; **(b)** 0; **(c)** -1; **(d)** 17.92

33. 2.818

Conjunto de problemas 2.2

1. 2 **3.** 5 **5.** 2 **7.** $6x$ **9.** $2ax + b$

11. $3x^2 + 4x$ **13.** $-\frac{2}{x^2}$ **15.** $-\frac{12x}{(x^2 + 1)^2}$

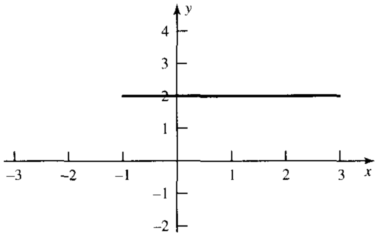
17. $-\frac{7}{(x - 4)^2}$ **19.** $\frac{3}{2\sqrt{3x}}$ **21.** $-\frac{3}{2(x - 2)^{3/2}}$

23. $2x - 3$ **25.** $-\frac{5}{(x - 5)^2}$ **27.** $f(x) = 2x^3$ en $x = 5$

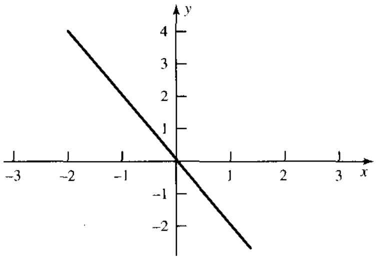
29. $f(x) = x^2$ en $x = 2$ **31.** $f(x) = x^2$ en x

33. $f(t) = \frac{2}{t}$ en t **35.** $f(x) = \cos x$ en x

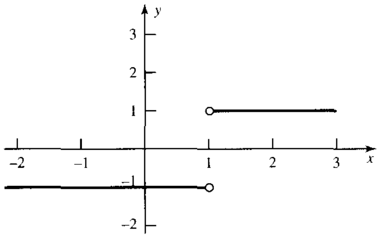
37.



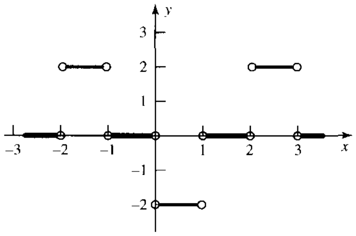
39.



41.



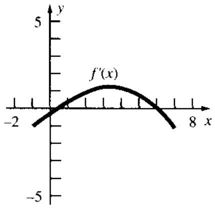
43.



45. 1.5 **47.** −0.1667 **49.** 0.0081 **51.** $2x$

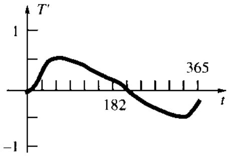
53. $-1/(x+1)^2$ **55.** $2/(x+1)^2$ **57.** $-\frac{1}{2}, 1, \frac{2}{3}, -3$

59.



61. **(a)** $\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 1.8, -0.6$; **(b)** 0.5; **(c)** 5; **(d)** 3, 5; **(e)** 1, 3, 5; **(f)** 0; **(g)** −0.7, 1.5, (5, 7)

63.

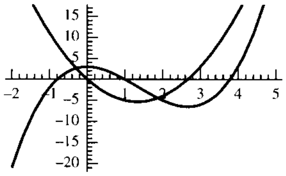


65. f aparece con trazos pequeños y discontinuos; $g = f'$ es línea continua; g' aparece con trazos largos y discontinuos

67. $m = 4, b = -4$

69. **(a)** m; **(b)** $-m$

71.



(a) $\left(0, \frac{8}{3}\right)$; **(b)** $\left[0, \frac{8}{3}\right]$;

(c) $f(x)$ decrece conforme x aumenta cuando $f'(x) < 0$.

Conjunto de problemas 2.3

1. $4x$ **3.** π **5.** $-4x^{-3}$ **7.** $-\frac{\pi}{x^2}$ **9.** $-\frac{500}{x^6}$

11. $2x + 2$ **13.** $4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

15. $7\pi x^6 - 10x^4 + 10x^{-3}$ **17.** $-\frac{9}{x^4} - 4x^{-5}$

19. $-\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}$ **21.** $-\frac{1}{2x^2} + 2$ **23.** $3x^2 + 1$

25. $8x + 4$ **27.** $5x^4 + 6x^2 + 2x$

29. $5x^4 + 42x^2 + 2x - 51$ **31.** $60x^3 - 30x^2 - 32x + 14$

33. $-\frac{6x}{(3x^2+1)^2}$ **35.** $\frac{-8x+3}{(4x^2-3x+9)^2}$ **37.** $\frac{2}{(x+1)^2}$

39. $\frac{6x^2+20x+3}{(3x+5)^2}$ **41.** $\frac{4x^2+4x-5}{(2x+1)^2}$ **43.** $\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

45. **(a)** 23; **(b)** 4; **(c)** $-\frac{17}{9}$

49. $y = 1$ **51.** $(0, 0)$ y $\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{27}\right)$

53. (2.817, 0.563) y (−2.817, −0.563)

55. **(a)** −24 ft/s; **(b)** 1.25 s

57. $y = 2x + 1, y = -2x + 9$ **59.** $3\sqrt{5}$

61. 681 cm^3 por semana

Conjunto de problemas 2.4

1. $2\cos x - 3\operatorname{sen} x$ **3.** 0 **5.** $\sec x \tan x$ **7.** $\sec^2 x$

9. $\sec^2 x$ **11.** $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ **13.** $\frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$

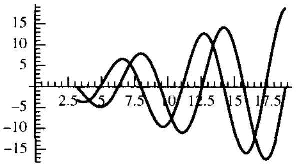
15. $-x^2 \operatorname{sen} x + 2x\cos x$ **17.** $2\tan x \sec^2 x$

19. $y - 0.5403 = -0.8415(x - 1)$ **21.** $-2\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x$

23. $30\sqrt{3}$ pies/sec **25.** $y = x$

27. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ donde k es un entero.

33. **(a)**



(b) 6; 5;

(c) Un contraejemplo es $f(x) = x \operatorname{sen} x$ con $a = 0$ y $b = \pi$.

(d) 24.93

Conjunto de problemas 2.5

1. $15(1+x)^{14}$ **3.** $-10(3-2x)^4$

5. $11(3x^2 - 4x + 3)(x^3 - 2x^2 + 3x + 1)^{10}$

7. $-\frac{5}{(x+3)^6}$ **9.** $(2x+1)\cos(x^2+x)$

11. $-3\operatorname{sen} x \cos^2 x$ **13.** $-\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}$

15. $-\frac{3x^2+12x}{(x+2)^2}\operatorname{sen}\left(\frac{3x^2}{x+2}\right)$

17. $2(3x-2)(3-x^2)(9+4x-9x^2)$

19. $\frac{(x+1)(3x-11)}{(3x-4)^2}$ **21.** $4x(x^2+4)$

23. $\frac{51(3t-2)^2}{(t+5)^4}$ **25.** $\frac{(6t+47)(3t-2)^2}{(t+5)^2}$

27. $\frac{3\operatorname{sen}^2 x(\cos x\cos 2x + 2\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x)}{\cos^4 2x}$ **29.** 9.6

31. 1.4183 **33.** $4(2x+3)\operatorname{sen}^3(x^2+3x)\cos(x^2+3x)$

35. $-3\operatorname{sen} t \operatorname{sen}^2(\cos t)\cos(\cos t)$

37. $-8\theta\cos^3(\operatorname{sen}\theta^2)\operatorname{sen}(\operatorname{sen}\theta^2)(\cos\theta^2)$

39. $-2\cos[\cos(\operatorname{sen} 2x)]\operatorname{sen}(\operatorname{sen} 2x)(\cos 2x)$

41. 2 **43.** 1 **45.** −1 **47.** $2F'(2x)$

49. $-2(F(t))^{-3}F'(t)$ **51.** $4(1+F(2z))F'(2z)$

53. $-\operatorname{sen} xF'(\cos x)$ **55.** $2F'(2x)\sec^2(F(2x))$

57. $2F(x)F'(x)\operatorname{sen} F(x)\cos F(x) + F'(x)\operatorname{sen}^2 F(x)$

59. $-2\operatorname{sen} 1$ **61.** −1 **63.** $x = \pi/4 + k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

65. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ **67.** $x = 3/2$

69. **(a)** $(10\cos 8\pi t, 10\operatorname{sen} 8\pi t)$; **(b)** 80π cm/s

71. **(a)** $(\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$; **(b)** $\operatorname{sen} 2\pi t + \sqrt{25 - \cos^2 2\pi t}$;

(c) $2\pi\cos 2\pi t\left(1 + \frac{\operatorname{sen} 2\pi t}{\sqrt{25 - \cos^2 2\pi t}}\right)$

73. 0.38 pulgadas/min **75.** $x_0 = \pi/3; \theta = 1.25$ rad.

79. $\cot x|\operatorname{sen} x|$ **81.** 16

Conjunto de problemas 2.6

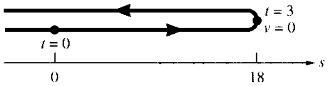
1. 6 **3.** 162 **5.** $-343\cos(7x)$ **7.** $-\frac{6}{(x-1)^4}$

9. 2 **11.** $\frac{1}{2}$ **13.** $2\pi^2$ **15.** −900

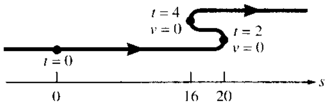
19. **(a)** 0; **(b)** 0; **(c)** 0

21. $f''(-5) = -24; f''(3) = 24$

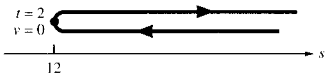
23. **(a)** $v(t) = 12 - 4t; a(t) = -4$ **(b)** $(-\infty, 3)$; **(c)** $(3, \infty)$;
(d) Para toda t; **(e)**



25. **(a)** $v(t) = 3t^2 - 18t + 24; a(t) = 6t - 18$;
(b) $(-\infty, 2) \cup (4, \infty)$; **(c)** $(2, 4)$; **(d)** $(-\infty, 3)$;
(e)



27. **(a)** $v(t) = 2t - \frac{16}{t^2}; a(t) = 2 + \frac{32}{t^3}$; **(b)** $(2, \infty)$;
(c) $(0, 2)$; **(d)** No;
(e)



29. $v(1) = 11; v(4) = -16$

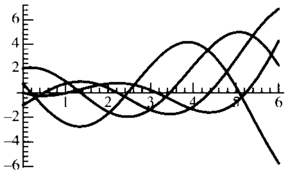
31. **(a)** $\frac{3}{4}$s; **(b)** $\frac{1}{2}$s, $\frac{3}{4}$s; **(c)** 0 s, $\frac{3}{2}$s

33. **(a)** 48 pies/s; **(b)** $\frac{3}{2}$s; **(c)** 292 pies; **(d)** 5.77 s; **(e)** 137 pies/s

35. 581 pies/s **37.** $(-\infty, -2) \cup (1, 4)$

39. $D_x^n(uv) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_x^{n-k}(u) D_x^k(v)$ donde $\binom{n}{k}$ es el coeficiente binomial $\frac{n!}{(n-k)!k!}$.

41. **(a)**



(b) -1.2826

Conjunto de problemas 2.7

1. $\frac{x}{y}$ **3.** $-\frac{y}{x}$ **5.** $\frac{1 - y^2}{2xy}$ **7.** $\frac{12x^2 + 7y^2}{6y^2 - 14xy}$

9. $\dfrac{y^3 - \dfrac{5y}{2\sqrt{5xy}}}{\dfrac{5x}{2\sqrt{5xy}} + 2 - 2y - 3xy^2}$ **11.** $-\frac{y}{x}$

13. $y - 3 = -\frac{9}{7}(x - 1)$ **15.** $y = 1$

17. $y + 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$ **19.** $5x^{2/3} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

21. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$ **23.** $\frac{3x - 2}{2\sqrt[4]{(3x^2 - 4x)^3}}$

25. $-\frac{6x^2 + 4}{3\sqrt[3]{(x^3 + 2x)^5}}$ **27.** $\frac{2x + \cos x}{2\sqrt{x^2 + \operatorname{sen} x}}$

29. $-\frac{x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x}{3\sqrt[3]{(x^2 \operatorname{sen} x)^4}}$ **31.** $-\frac{(x + 1)\operatorname{sen}(x^2 + 2x)}{2\sqrt[4]{[1 + \cos(x^2 + 2x)]^3}}$

33. $\frac{ds}{dt} = -\frac{s^2 + 3t^2}{2st}; \frac{dt}{ds} = -\frac{2st}{s^2 + 3t^2}$

35. $\sqrt{3}y + x = 0, \sqrt{3}y - x = 0$

37. **(a)** $y' = -\frac{y}{x + 3y^2}$; **(b)** $y'' = \frac{2xy}{(x + 3y^2)^3}$

39. -15; **45.** $\theta \approx 2.0344$

47. $y = 2(x + 4); y = 2(x - 4)$ **49.** $\frac{13}{3}$

Conjunto de problemas 2.8

1. 1296 pulg^3/s **3.** 392 mi/h **5.** 471 mi/h **7.** 0.258 pies/s
9. 0.0796 pies/s **11.** $\frac{1}{12}$pies/min **13.** 1.018 pulg^2/s

15. 15.71 km/min

17. **(a)** $\frac{1}{2}$pies/s; **(b)** $\frac{5}{2}$pies/s **(c)** $\frac{1}{24}$rad/s

19. 110 pies/s **21.** -0.016 pies/h **23.** 13.33 pies/s

25. 4049 pies^3/h

27. **(a)** -1.125 pies/s; **(b)** -0.08 pies/s^2

29. **(b)** 3 horas

31. $\frac{16}{3}$pies/s cuando la niña está al menos 30 pies alejada del poste y $\frac{80}{17}$pies/s cuando ella está a menos de 30 pies del poste.

Conjunto de problemas 2.9

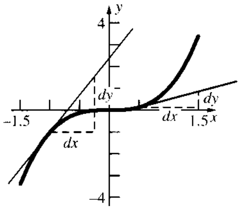
1. $dy = (2x + 1)\,dx$ **3.** $dy = -8(2x + 3)^{-5}\,dx$

5. $dy = 3(\operatorname{sen} x + \cos x)^2(\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx$

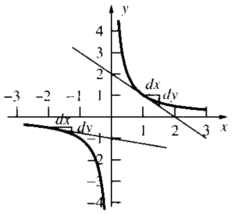
7. $dy = -\frac{3}{2}(14x + 3)(7x^2 + 3x - 1)^{-5/2}\,dx$

9. $ds = \frac{3}{2}(2t + \csc^2 t)\sqrt{t^2 - \cot t + 2}\,dt$

11.



13.



15. **(a)** $\Delta y = -\frac{1}{3}$ **(b)** $\Delta y = -0.3$

17. **(a)** $\Delta y = 67$ $dy = 34$ **(b)** $\Delta y \approx 0.1706$ $dy = 0.17$

19. 5.9917 **21.** 39.27 cm^3 **23.** 893 pies^3 **25.** 12.6 pies

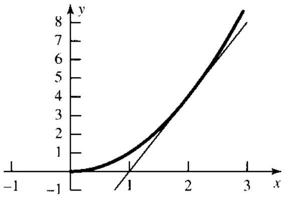
27. 4189 ± 62.8 cm^3; error relativo ≈ 0.015

29. 79.097 ± 0.729 cm; error relativo ≈ 0.0092

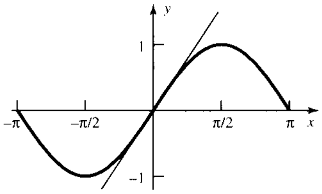
31. $dy = 0.01; |\Delta y - dy| \leq 0.000003$ **33.** 8.0125

35. 754 cm^3

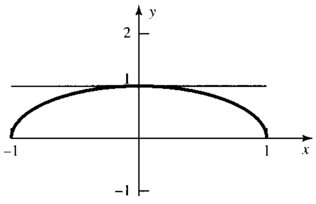
37. $L(x) = 4x - 4$



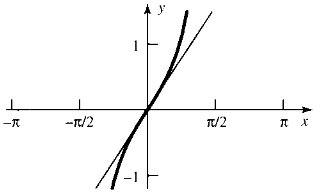
39. $L(x) = x$



41. $L(x) = 1$



43. $L(x) = x$



45. $L(x) = f(x)$

2.10 Revisión del capítulo

Examen de conceptos

1. Falso **3.** Verdadero **5.** Verdadero **7.** Verdadero
9. Verdadero **11.** Verdadero **13.** Falso **15.** Verdadero
17. Falso **19.** Verdadero **21.** Verdadero **23.** Verdadero
25. Verdadero **27.** Falso **29.** Verdadero **31.** Verdadero
33. Verdadero **35.** Verdadero **37.** Falso

Problemas de examen

1. **(a)** $9x^2$; **(b)** $10x^4 + 3$; **(c)** $-\frac{1}{3x^2}$; **(d)** $-\frac{6x}{(3x^2+2)^2}$; **(e)** $\frac{3}{2\sqrt{3x}}$; **(f)** $3 \cos 3x$; **(g)** $\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$; **(h)** $-\pi \operatorname{sen} \pi x$

3. **(a)** $f(x) = 3x$ en $x = 1$; **(b)** $f(x) = 4x^3$ en $x = 2$; **(c)** $f(x) = \sqrt{x^3}$ en $x = 1$; **(d)** $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $x = \pi$; **(e)** $f(x) = \frac{4}{x}$ en x; **(f)** $f(x) = -\operatorname{sen} 3x$ en x; **(g)** $f(x) = \tan x$ en $x = \frac{\pi}{4}$; **(h)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ en $x = 5$

5. $15x^4$ **7.** $3z^2 + 8z + 2$ **9.** $\frac{-24t^2 + 60t + 10}{(6t^2 + 2t)^2}$

11. $\frac{-4x^4 + 10x^2 + 2}{(x^3 + x)^2}$ **13.** $-\frac{x}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$

15. $-\operatorname{sen} \theta + 6 \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta - 3 \cos^3 \theta$ **17.** $2\theta \cos(\theta^2)$

19. $2\pi \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\pi\theta)) \cos(\operatorname{sen}(\pi\theta)) \cos(\pi\theta)$ **21.** $3 \sec^2 3\theta$

23. 672 **25.** $\frac{-\csc^2 x - 2x \cot x \tan x^2}{\sec x^2}$ **27.** $16 - 4\pi$

29. 458.8

31. $F'(r(x) + s(x))(r''(x) + s''(x)) + (r'(x) + s'(x))^2 F''(r(x) + s(x)) + s''(x)$

33. $27z^2 \cos(9z^3)$

35. 314 m³ por metro aumenta el radio **37.** 0.167 pies/min

39. **(a)** $(1, 3)$ **(b)** $a(1) = -6, a(3) = 6$; **(c)** $(2, \infty)$

41. **(a)** $\frac{1-x}{y}$; **(b)** $-\frac{y^2 + 2xy}{x^2 + 2xy}$; **(c)** $\frac{x^2y^3 - x^2}{y^2 - x^3y^2}$; **(d)** $\frac{2x - \operatorname{sen}(xy) - xy\cos(xy)}{x^2 \cos(xy)}$; **(e)** $-\frac{\tan(xy) + xy\sec^2(xy)}{x^2 \sec^2(xy)}$

43. 0.0714

45. **(a)** 84; **(b)** 23; **(c)** 20; **(d)** 26

47. 104 mi/h

49. **(a)** $\cot \theta \, |\operatorname{sen} \theta|$; **(b)** $-\tan \theta \, |\cos \theta|$

Problemas de repaso e introducción del capítulo 3

1. $(2, 3)$ **3.** $(-\infty, 0] \cup [1, 2]$

5. $(-\infty, -2) \cup [0, 2) \cup (2, \infty)$

7. $8(2x + 1)^3$ **9.** $-2(x^2 - 1) \operatorname{sen} 2x + 2x \cos 2x$

11. $6(\sec^2 3x)(\tan 3x)$ **13.** $\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

15. $x = k\pi$, donde k es un entero

17. $x = (2k + 1)\pi/2$, donde k es un entero

19. $\frac{\sqrt{x^2+1}}{4} + \frac{4-x}{10}$

21. **(a)** $x^2 + 3$ es una de tales funciones
(b) $-\cos x + 8$ es una de tales funciones
(c) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 2$ es una de tales funciones

Conjunto de problemas 3.1

1. Puntos críticos: $-2, 0, 2, 4$; valor máximo 10; valor mínimo 1

3. Puntos críticos: $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$; valor máximo 3; valor mínimo 1

5. Puntos críticos: $-4, -2, 0$; valor máximo 4; valor mínimo 0

7. Puntos críticos: $-2, -\frac{3}{2}, 1$; valor máximo 4; valor mínimo $-\frac{9}{4}$

9. Puntos críticos: $-1, 1$; no hay valor máximo; valor mínimo -1

11. Puntos críticos: $-1, 3$; no hay valor máximo; no hay valor mínimo

13. Puntos críticos: $-2, -1, 0, 1, 2$; valor máximo 10; valor mínimo 1

15. Punto crítico: 0; valor máximo 1; no hay valor mínimo

17. Puntos críticos: $-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$; valor máximo $\frac{1}{2}$; valor mínimo $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

19. Puntos críticos: $0, 1, 3$; valor máximo 2; valor mínimo 0

21. Puntos críticos: $-1, 0, 27$; valor máximo 3; valor mínimo -1

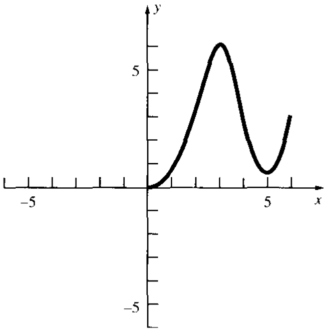
23. Puntos críticos: $0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi, 8\pi$; valor máximo 1; valor mínimo -1

25. Puntos críticos: $-\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}$; valor máximo $\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}$; valor mínimo 0

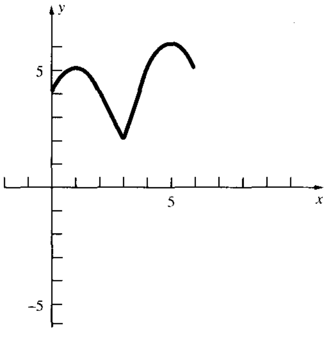
27. **(a)** Puntos críticos: $-1, 2 - \frac{\sqrt{33}}{3}, 2 + \frac{\sqrt{33}}{3}, 5$; valor máximo ≈ 2.04; valor mínimo ≈ -26.04

(b) Puntos críticos: $-1, -0.4836, 2 - \frac{\sqrt{33}}{3}, 0.7172, 2 + \frac{\sqrt{33}}{3}, 5$; valor máximo ≈ 26.04; valor mínimo $= 0$

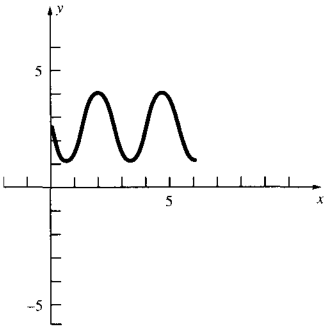
29. Las respuestas variarán. Una posibilidad:



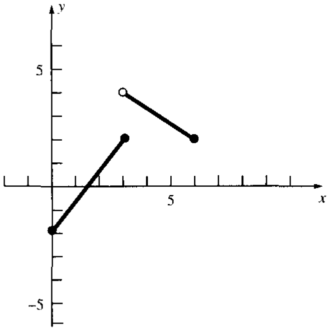
31. Las respuestas variarán. Una posibilidad:



33. Las respuestas variarán. Una posibilidad:



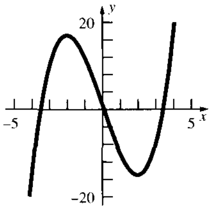
35. Las respuestas variarán. Una posibilidad:



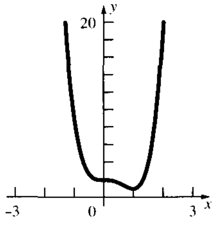
Conjunto de problemas 3.2

1. Creciente en $(-\infty,\infty)$
3. Creciente en $[-1,\infty)$,decreciente en $(-\infty,-1]$
5. Creciente en $(-\infty,1]\cup[2,\infty)$, decreciente en $[1,2]$
7. Creciente en $[2,\infty)$, decreciente en $(-\infty,2]$
9. Creciente en $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$, decreciente en $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$
11. Cóncava hacia arriba para toda x; no hay puntos de inflexión
13. Cóncava hacia arriba en $(0,\infty)$, cóncava hacia abajo en $(-\infty,0)$; punto de inflexión $(0,0)$.
15. Cóncava hacia arriba en $(-\infty,-1)\cup(4,\infty)$, cóncava hacia abajo en $(-1,4)$; puntos de inflexión $(-1,-19)$ y $(4,-499)$
17. Cóncava hacia arriba para toda x; no hay puntos de inflexión

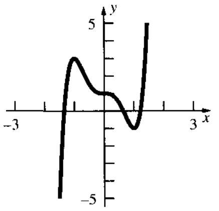
19. Creciente en $(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$; decreciente en $[-2,2]$; cóncava hacia arriba en $(0,\infty)$, cóncava hacia abajo en $(-\infty,0)$



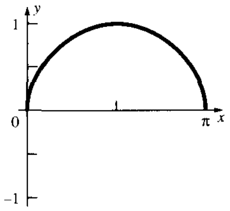
21. Creciente en $[1,\infty)$, decreciente en $(-\infty,1]$; cóncava hacia arriba en $(-\infty,0)\cup\left(\frac{2}{3},\infty\right)$, cóncava hacia abajo en $\left(0,\frac{2}{3}\right)$



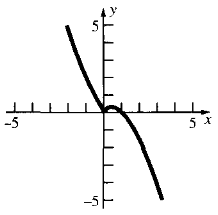
23. Creciente en $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$, decreciente en $[-1,1]$; cóncava hacia arriba en $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\infty\right)$, cóncava hacia abajo en $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.



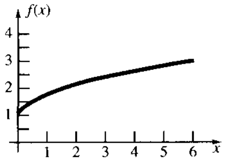
25. Creciente en $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, decreciente en $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$; cóncava hacia abajo en $(0,\pi)$.



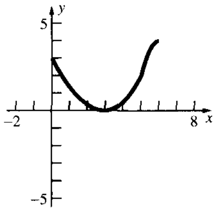
27. Creciente en $\left[0,\frac{2}{5}\right]$, decreciente en $(-\infty,0]\cup\left[\frac{2}{5},\infty\right)$; cóncava hacia arriba en $\left(-\infty,-\frac{1}{5}\right)$, cóncava hacia abajo en $\left(-\frac{1}{5},0\right)\cup(0,\infty)$.



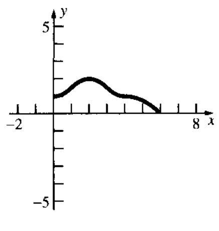
29.



31.



33.



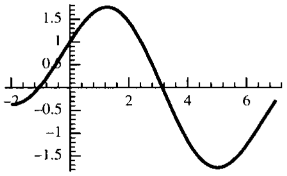
41. $a = \frac{39}{8}, b = \frac{13}{2}$

43. **(a)** No se necesita otra condición;

(b) $f(x) > -\dfrac{f'(x)}{g'(x)} g(x)$ para toda x;

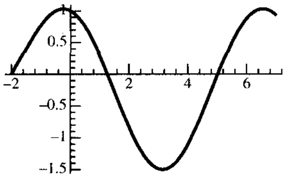
(c) No se necesita otra condición

45. **(a)**

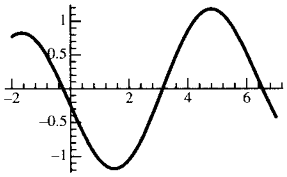


(b) $(1.3, 5)$; **(c)** $(-0.25, 3.1) \cup (6.5, 7]$

(d)



(e)



47. $[-0.598, 0.680]$

49. **(a)** $\dfrac{ds}{dt} = ks$, k una constante; **(b)** $\dfrac{d^2s}{dt^2} > 0$

(c) $\dfrac{d^3s}{dt^3} < 0, \dfrac{d^2s}{dt^2} > 0$ **(d)** $\dfrac{d^2s}{dt^2} = 10$ mph/min

(e) $\dfrac{ds}{dt}$ y $\dfrac{d^2s}{dt^2}$ tienden a cero **(f)** $\dfrac{ds}{dt}$ es constante.

51. **(a)** $\dfrac{dC}{dt} > 0, \dfrac{d^2C}{dt^2} > 0$, donde C es el costo del automóvil. Cóncava hacia arriba.

(b) $f(t)$ es el consumo de petróleo en el instante t. $\dfrac{df}{dt} < 0, \dfrac{d^2f}{dt^2} > 0$. Cóncava hacia arriba.

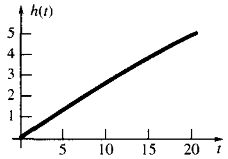
(c) $\dfrac{dP}{dt} > 0, \dfrac{d^2P}{dt^2} < 0$, donde P es la población mundial. Cóncava hacia abajo.

(d) $\dfrac{d\theta}{dt} > 0, \dfrac{d^2\theta}{dt^2} > 0$, donde θ es el ángulo que forma la torre con la vertical. Cóncava hacia arriba.

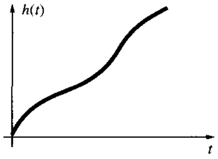
(e) $P = f(t)$ es la utilidad en el instante t. $\dfrac{dP}{dt} > 0, \dfrac{d^2P}{dt^2} < 0$. Cóncava hacia abajo.

(f) R es el ingreso en el instante t, $R < 0, \dfrac{dR}{dt} > 0$. Podría ser cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

53. $h(t) = \sqrt[3]{\dfrac{2400}{\pi}t + 27000} - 30$



55.



57. **(a)**

Profundidad	V	$A \approx \Delta V$	$r \approx \sqrt{\Delta V/\pi}$
1	4	4	1.13
2	8	4	1.13
3	11	3	0.98
4	14	3	0.98
5	20	6	1.38
6	28	8	1.60

(b)

Profundidad	V	$A \approx \Delta V$	$r \approx \sqrt{\Delta V/\pi}$
1	4	4	1.13
2	9	5	1.26
3	12	3	0.98
4	14	2	0.80
5	20	6	1.38
6	28	8	1.60

Conjunto de problemas 3.3

1. Puntos críticos: 0, 4; mínimo local en $x = 4$; máximo local en $x = 0$

3. No hay puntos críticos, no hay mínimos ni máximos locales en $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

5. Punto crítico: 0; mínimo local en $\theta = 0$

7. Puntos críticos: $-2, 2$; mínimo local en $x = -2$; máximo local en $x = 2$

9. Punto crítico $-\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$; mínimo local en $-\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$

11. Puntos críticos: $-1, 1$; valor mínimo local $f(1) = -2$; valor máximo local $f(-1) = 2$

13. Puntos críticos: $0, \frac{3}{2}$; valor mínimo local $0, \frac{3}{2}$; no hay máximo local

15. Puntos críticos: 2; no hay valores mínimos locales; valor máximo local $g(2) = \pi$

17. No hay puntos críticos.
No hay valores mínimo ni máximo locales

19. No hay puntos críticos.
No hay valores mínimo ni máximo locales

21. Valor máximo $f(\pi/4) = 1$; valor mínimo $f(0) = f(\pi/2) = 0$

23. Valor máximo $g(4) = \dfrac{1}{6}$; valor mínimo $g(0) = 0$

25. Valor máximo $F(9/16) = 9/4$; valor mínimo $F(4) = -4$

27. Valor mínimo $f(\tan^{-1}(4/3)) = 125$; no hay valor máximo

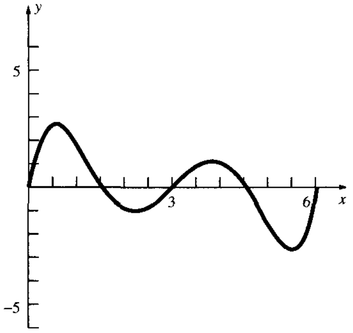
29. Valor máximo $H(-2) = H(2) = 3$; valor mínimo $H(-1) = H(1) = 0$

31. Mínimo local en $x = 0$

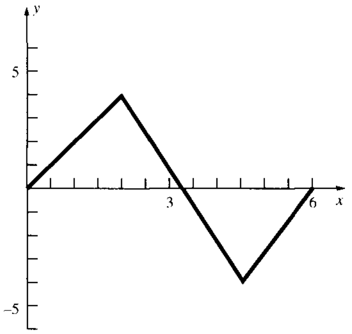
33. Mínimo local en $x = 4$; máximo local en $x = 3$

35. No hay extremos locales

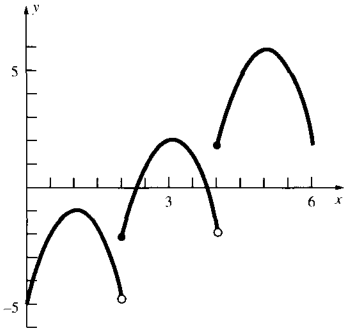
37. Las respuestas pueden variar. Una posibilidad:



39. Las respuestas pueden variar. Una posibilidad:



41. Las respuestas pueden variar. Una posibilidad:



45. f tiene un punto de inflexión en c.

Conjunto de problemas 3.4

1. -4 y 4 **3.** $\frac{1}{16}$ **5.** $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{9}{2}\right), \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{9}{2}\right)$ **7.** $\frac{1}{2}$

9. 1024 pulg^3 **11.** $x = 10$ pies, $y = 40$ pies

13. $x = 15\sqrt{3}$ pies, $y = 20\sqrt{3}$ pies

15. $x = \frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ pies, $y = 6\sqrt{15}$ pies **17.** $P(2\sqrt{2}, 2), Q(0, 0)$

19. $\frac{6}{\sqrt{7}}$ millas hacia abajo de la costa medidos desde P.

21. En el pueblo

23. alrededor de las 8:09 a.m. **25.** $\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}r^3$

27. $h = \sqrt{2}r, x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ donde h = altura del cilindro, x = radio del cilindro, r = radio de la esfera

29. **(a)** 43.50 cm de uno de los extremos; la longitud más corta se dobla para formar un cuadrado

(b) No cortar, doblar el alambre para formar un cuadrado.

31. altura $= \left(\frac{3V}{\pi}\right)^{1/3}$, radio $= \frac{1}{2}\left(\frac{3V}{\pi}\right)^{1/3}$

33. $r = \sqrt{A}, \theta = 2$ **35.** 4 por 8

37. $r = \sqrt{A/(6\pi)}, \quad h = 2r$

39. El área máxima es para un cuadrado. **41.** $\pi/3$

43. $x = 1, y = 3, z = 3$

45. **(a)** $x = 2a/3$ maximiza el área de A.

(b) $x = 2a/3$ minimiza el área de B.

(c) $x = 3a/4$ minimiza la longitud z.

47. **(a)** $L' = 3, L = 4, \phi = 90°$; **(b)** $L' = 5, L = 12, \phi = 90°$;

(c) $\phi = 90°, L = \sqrt{m^2 - h^2}, L' = h$

49. $t \approx 13.8279$, distancia ≈ 0.047851 millones de millas

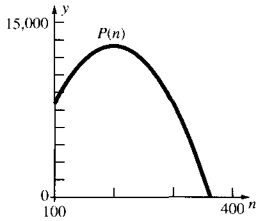
51. $5\sqrt{5}$ pies

53. **(a)** $b = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - 5\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ **(b)** $b \approx 3.0119$

(c) 50.179 horas

55. $p(n) = 300 - \frac{n}{2}; R(n) = 300n - \frac{n^2}{2}$

57. $n = 200$



59. \$1.92 por unidad; \$1.33

61. **(a)** $R(x) = 20x + 4x^2 - \frac{x^3}{3}; \frac{dR}{dx} = 20 + 8x - x^2$

(b) $0 \le x \le 10$ **(c)** 4

63. $x_1 = 25, \frac{dR}{dx} = 0$ en x_1

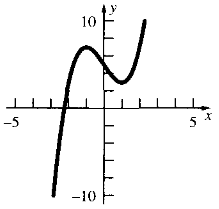
65. **(a)** No.

(b) $x = 500$.

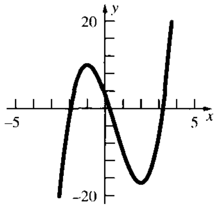
67. $P(300) = \$2410$

Conjunto de problemas 3.5

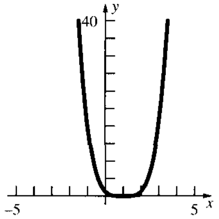
1.



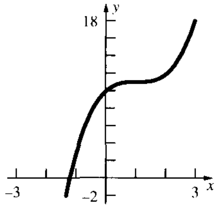
3.



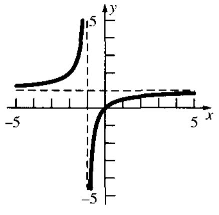
5.



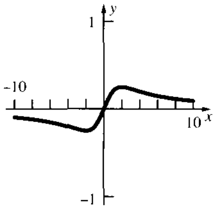
7.



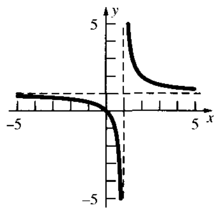
9.



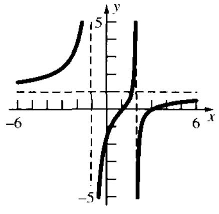
11.



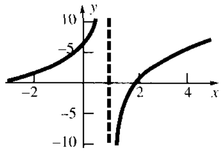
13.



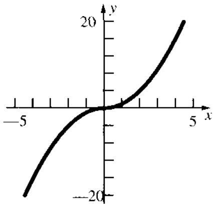
15.



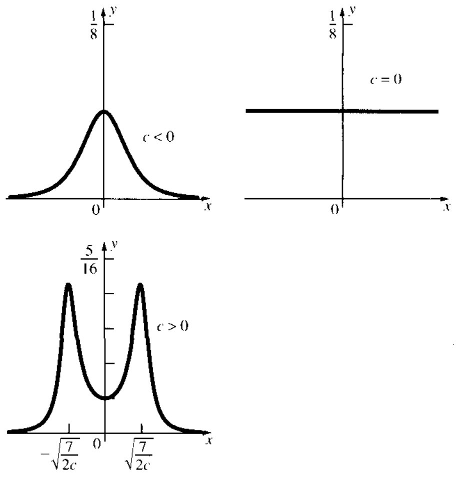
17.



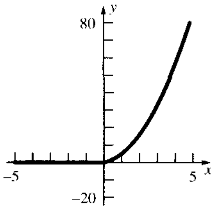
19.



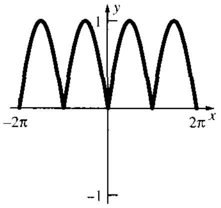
45.



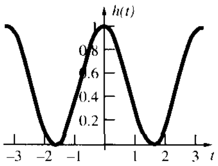
21.



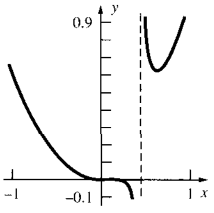
23.



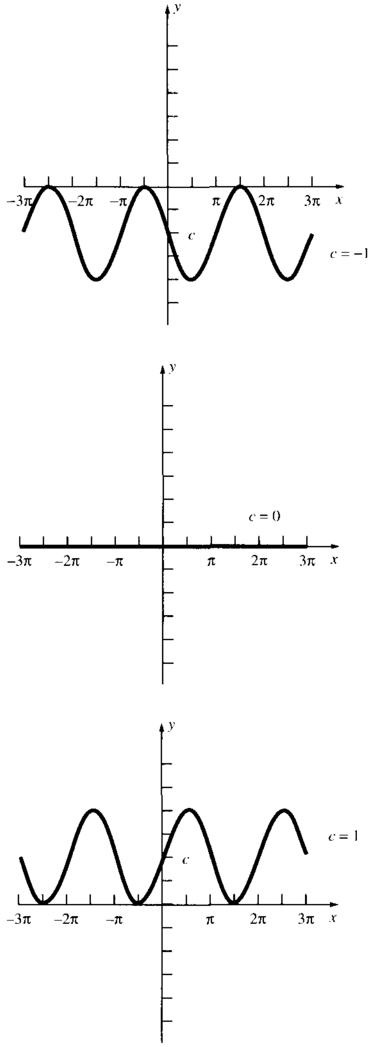
25.



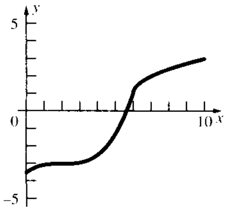
27.



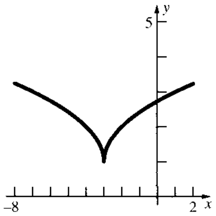
47.



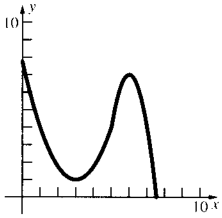
29.



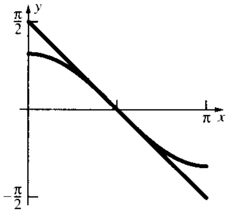
31.



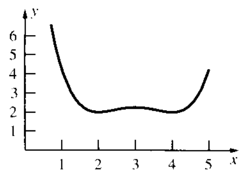
33.



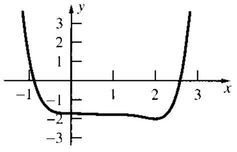
35.



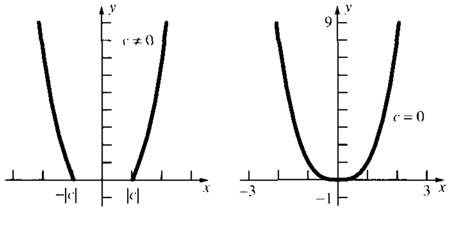
37.



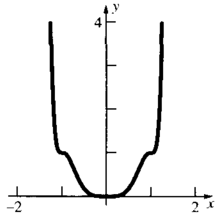
39.



43.

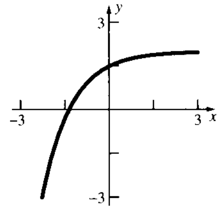


49.

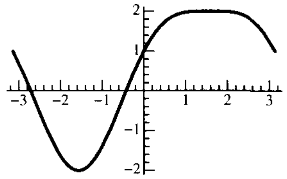


51. **(a)** No es posible; **(b)** No es posible

(c)



53. **(a)**

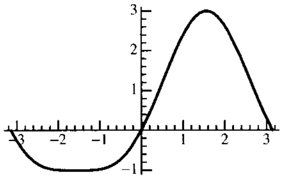


Mínimo global: $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2$

Máximo global: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

Puntos de inflexión: $\left(-\frac{\pi}{6}, -\frac{1}{4}\right), \left(-\frac{5\pi}{6}, -\frac{1}{4}\right)$

(b)

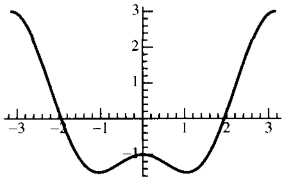


Mínimo global: $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

Máximo global: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$

Puntos de inflexión: $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{4}\right), \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5}{4}\right)$

(c)

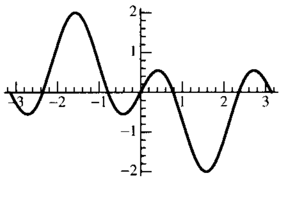


Mínimo global: $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1.5$

Máximo global: $f(-\pi) = f(\pi) = 3$

Puntos de inflexión: $\approx(-2.206, 0.890), (-0.568, -1.265), (0.568, -1.265), (2.206, 0.890)$

(d)

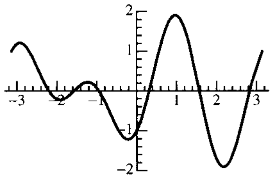


Mínimo global: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$

Máximo global: $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2$

Punto de inflexión: $(0, 0), \approx(-2.126, 0.755), (-1.016, 0.755), (1.016, -0.755), (2.126, -0.755)$

(e)



Mínimo global: $f(2.17) \approx -1.9$

Máximo global: $f(0.97) \approx 1.9$

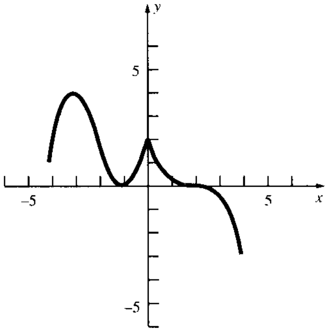
Puntos de inflexión: $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \approx(-2.469, 0.542), (-0.673, -0.542), (0.413, 0.408), (2.729, -0.408)$

55. **(a)** Creciente en $(-\infty, -3] \cup [-1, 0]$; decreciente en $[-3, -1] \cup [0, \infty)$;

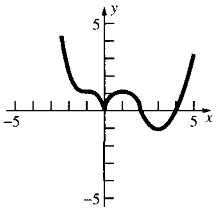
(b) Cóncava hacia arriba en $(-2, 0) \cup (0, 2)$; cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

(c) Máximo local en $x = -3$; mínimo local en $x = -1$;

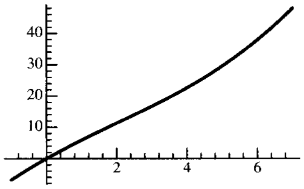
(d) $x = -2, 2$



57.



59. **(a)**

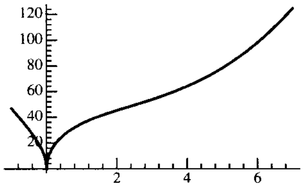


Mínimo global: $f(-1) \approx -6.9$

Máximo global: $f(7) \approx 48.0$

Punto de inflexión: $\approx (2.02, 11.4)$

(b)

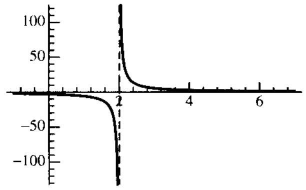


Mínimo global: $f(0) = 0$

Máximo global: $f(7) \approx 124.4$

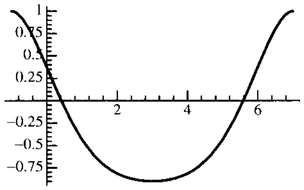
Punto de inflexión: $\approx (2.34, 48.09)$

(c)



No hay máximo ni mínimo globales.
No hay puntos de inflexión.

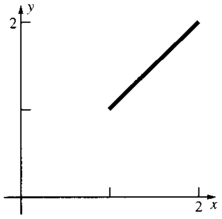
(d)



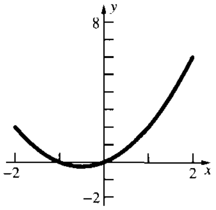
Mínimo global: $f(3) \approx -0.9$
Máximo global: $f(-1) = f(7) \approx 1.0$
Puntos de inflexión: $\approx (0.05, 0.3), (5.9, 0.3)$

Conjunto de problemas 3.6

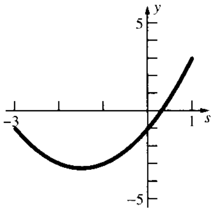
1. $1 < c < 2$



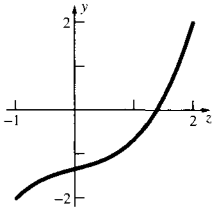
3. $c = 0$



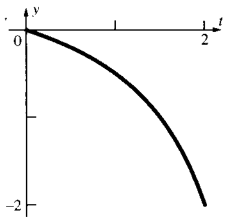
5. $c = -1$



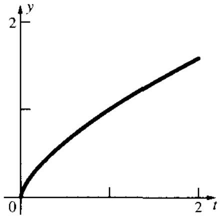
7. $c = 1$



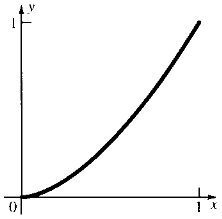
9. $c = 3 - \sqrt{3} \approx 1.27$



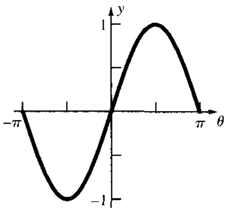
11. $c = \frac{16}{27} \approx 0.59$



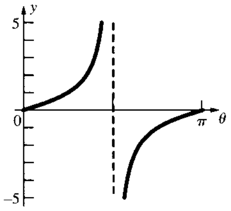
13. $c = \left(\frac{3}{5}\right)^{3/2} \approx 0.46$



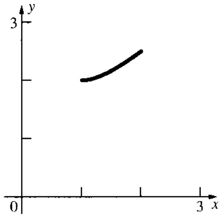
15. $c = \pm\frac{\pi}{2}$



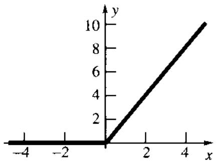
17. No aplica, $T(\theta)$ no es continua en $\theta = \frac{\pi}{2}$



19. $c = \sqrt{2} \approx 1.41$



21. No se aplica, $f(x)$ no es diferenciable en $x = 0$

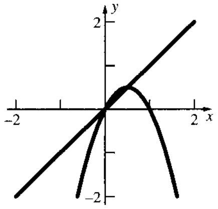


23. $\approx 1.5, 3.75, 7$

Conjunto de problemas 3.7

1. 1.46 **3.** 1.11 **5.** −0.12061 **7.** 3.69815
9. 0.45018 **11.** 2, 0.58579, 3.41421 **13.** 0.48095
15. 1.81712
17. Mínimo $f(-0.60583) \approx -0.32645$; máximo $f(1) = 4$
19. Mínimo $f(4.493409) \approx -0.21723$;
máximo $f(7.725252) \approx 0.128375$
21. 0.9643 **23.** **(c)** $i = 0.0151308$; $r = 18.157\%$
25. 0.91486 **27.** 2.21756

29. **(a)**



(b) 0.5; **(c)** $\frac{1}{2}$;

31. **(a)** $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1.4142136, x_4 = 1.553774,$
$x_5 = 1.5980532$; **(b)** $x = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right) \approx 1.618034$
(c) $x = 1.618034$
33. **(a)** $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1.5, x_4 \approx 1.6666667, x_5 = 1.6$
(b) $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618034.$ **(c)** $\left(1 + \sqrt{5}\right)/2 \approx 1.618034.$
35. **(a)** El algoritmo calcula la raíz de $\frac{1}{x} - a = 0$ para x_1 cercana a $\frac{1}{a}$.
37. 20.84 pies.
39. **(a)** $(28.0279, 7.1828)$ **(b)** $(6.7728, 45.1031)$

Conjunto de problemas 3.8

1. $5x + C$ **3.** $\frac{1}{3}x^3 + \pi x + C$ **5.** $\frac{4}{9}x^{9/4} + C$
7. $3\sqrt[3]{x} + C$ **9.** $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C$ **11.** $\frac{2}{3}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + C$
13. $\dfrac{27}{8}x^8 + \dfrac{1}{2}x^6 - \dfrac{45}{4}x^4 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}x^2 + C$ **15.** $-\dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2} + C$
17. $x^4 + \frac{3}{2}x^2 + C$ **19.** $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$ **21.** $\frac{1}{3}(x + 1)^3 + C$
23. $\frac{2}{9}z^{9/2} + \frac{4}{5}z^{5/2} + 2z^{1/2} + C$ **25.** $-\cos\theta - \operatorname{sen}\theta + C$
27. $\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}x + 1\right)^4 + C$ **29.** $\frac{1}{21}(5x^3 + 3x - 8)^7 + C$
31. $\frac{9}{16}\sqrt[3]{(2t^2 - 11)^4} + C$ **33.** $\frac{2}{9}(x^3 + 4)^{3/2} + C$
35. $-\frac{1}{5}(1 + \cos x)^5 + C$ **37.** $\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2$

39. $\frac{4}{15}x^{5/2} + C_1x + C_2$ **41.** $\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x} + C_1x + C_2$

45. $x^2\sqrt{x - 1} + C$ **47.** $\dfrac{5x^3 + 2}{2\sqrt{x^3 + 1}} + C$

51. $\frac{1}{2}x^2 + C$ si $x \geq 0$, $-\frac{1}{2}x^2 + C$ si $x < 0$

53. **(a)** $-2\cos(3(x - 2)) + C$ **(b)** $\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2} - \dfrac{9}{2}\cos\dfrac{x}{6} + C$

(c) $\dfrac{1}{2}x^2 \operatorname{sen} 2x + C$

Conjunto de problemas 3.9

5. $y = \frac{1}{3}x^3 + x + C$; $y = \frac{1}{3}x^3 + x - \frac{1}{3}$

7. $y = \pm\sqrt{x^2 + C}$; $y = \sqrt{x^2}$ **9.** $z = \dfrac{3}{C - t^3}$; $z = \dfrac{3}{10 - t^3}$

11. $s = \frac{16}{3}t^3 + 2t^2 - t + C$; $s = \frac{16}{3}t^3 + 2t^2 - t + 100$

13. $y = \frac{1}{10}(2x + 1)^5 + C$; $y = \frac{1}{10}(2x + 1)^5 + \frac{59}{10}$

15. $y = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ **17.** $v = 5$ cm/s; $s = \frac{22}{3}$ cm

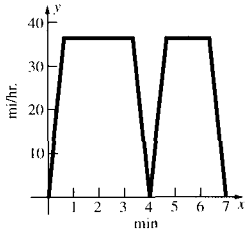
19. $v \approx 2.83$ cm/s; $s \approx 12.6$ cm **21.** 144 pies

23. $v = 32.24$ pies/s; $s = 1198.54$ pies

27. Luna; ≈ 1.470 mi/s; Venus: ≈ 6.257 mi/s; Júpiter: ≈ 36.812 mi/s; Sol: ≈ 382.908 mi/s

29. 2.2 pies/s^2 **31.** 5500 m

33. **(a)**



(b) 36 mi/h;
(c) 0.9 mi/min^2

35. **(a)** $\dfrac{dV}{dt} = C_1\dfrac{\sqrt{V}}{10}$, $V(0) = 1600$, $V(40) = 0$;

(b) $V = \frac{1}{400}(-20t + 800)^2$; **(c)** 900 cm^3

37. **(a)** $v(t) = \begin{cases} -32t & \text{para } 0 \leq t < 1 \\ -32(t - 1) + 24 & \text{para } 1 < t \leq 2.5 \end{cases}$

(b) $t \approx 0.66, 1.75$ s

3.10 Revisión del capítulo

Examen de conceptos

1. Verdadero **3.** Verdadero **5.** Verdadero **7.** Verdadero
9. Verdadero **11.** Falso **13.** Verdadero **15.** Verdadero
17. Verdadero **19.** Falso **21.** Falso **23.** Falso
25. Verdadero **27.** Verdadero **29.** Verdadero **31.** Falso
33. Verdadero **35.** Verdadero **37.** Falso **39.** Verdadero
41. Verdadero **43.** Verdadero **45.** Falso **47.** Verdadero

Problemas de examen

1. Puntos críticos: 0, 1, 4; valor mínimo $f(1) = -1$; valor máximo $f(4) = 8$.

3. Puntos críticos: $-2, -\frac{1}{2}$; valor mínimo $f(-2) = \frac{1}{4}$; valor máximo $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4$

5. Puntos críticos: $-\frac{1}{2}$, 0, 1; valor mínimo $f(0) = 0$; valor máximo $f(1) = 1$.

7. Puntos críticos: $-2, 0, 1, 3$; valor mínimo $f(1) = -1$; valor máximo $f(3) = 135$

9. Puntos críticos: $-1, 0, 2, 3$; valor mínimo $f(2) = -9$; valor máximo $f(3) = 88$

11. Puntos críticos: $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}$; valor mínimo $f\left(\frac{4\pi}{3}\right) \approx -0.87$; valor máximo $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

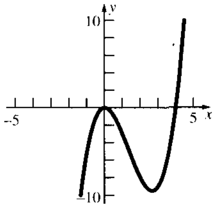
13. Creciente: $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$; cóncava hacia abajo: $(-\infty, \infty)$

15. Creciente: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$; cóncava hacia abajo: $(-\infty, 0)$

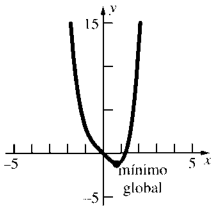
17. Creciente: $\left[0, \frac{1}{5}\right]$; cóncava hacia abajo: $\left(\frac{3}{20}, \infty\right)$

19. Creciente: $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$; cóncava hacia abajo: $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

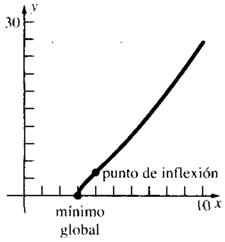
21. Creciente: $\left(-\infty, 0\right] \cup \left[\frac{8}{3}, \infty\right)$; decreciente $\left[0, \frac{8}{3}\right]$;
Valor mínimo local $f\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{256}{27}$
Valor máximo local $f(0) = 0$
Punto de inflexión: $\left(\frac{4}{3}, -\frac{128}{27}\right)$



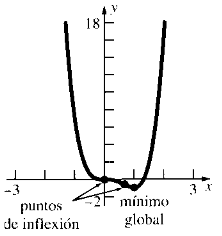
23.



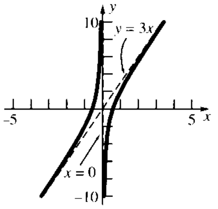
25.



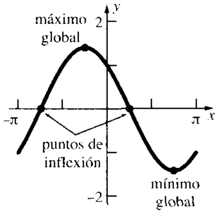
27.



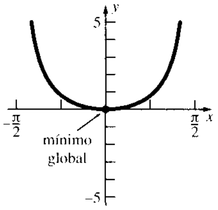
29.



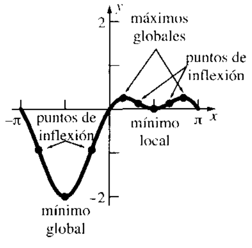
31.



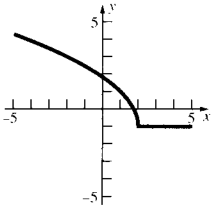
33.



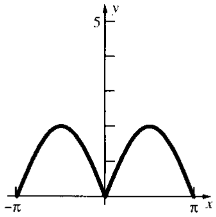
35.



37.

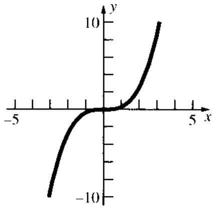


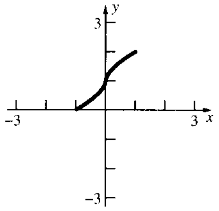
39.



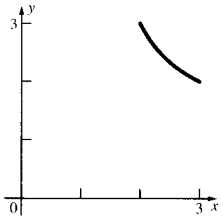
41. 11.18 pies **43.** $r = 4\sqrt[3]{2}, h = 8\sqrt[3]{2}$

45. **(a)** $c = \pm\sqrt{3}$ **(b)** No se aplica, $F'(0)$ no existe

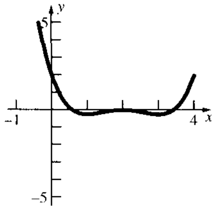




(c) $c = 1 + \sqrt{2}$



47.



49. 0.281785 **51.** 0.281785 **53.** $\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 2x^{3/2} + C$

55. $\frac{1}{3}y^3 + 9\cos y - \frac{26}{y} + C$ **57.** $\frac{3}{16}(2z^2 - 3)^{4/3} + C$

59. $\frac{1}{18}\tan^3(3x^2 + 6x) + C$ **61.** $\frac{3}{25}(t^5 + 5)^{5/3} + C$

63. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3 + 9} + C$ **65.** $-\frac{1}{2(2y - 1)^2} + C$

67. $\frac{5}{24}(2y^3 + 3y^2 + 6y)^{4/5} + C$ **69.** $y = 2\sqrt{x + 1} + 14$

71. $y = \frac{1}{3}(2t - 1)^{3/2} - 1$ **73.** $y = \sqrt{3x^2 - \frac{1}{4}x^4 + 9}$

75. 7 s; −176 ft/s

Problemas de repaso e introducción del capítulo 4

1. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ **3.** $\frac{5}{4}a^2 \cot 36°$ **5.** $3.6 \cdot 5.8 + \frac{1}{2}\pi(1.8)^2 \approx 25.97$

7. 3.5 **9.** $\frac{1}{2}x^2 + x$ **11.** 6

Conjunto de problemas 4.1

1. 15 **3.** $\frac{481}{280}$ **5.** $\frac{85}{2}$ **7.** 3 **9.** $\sum_{i=1}^{41} i$ **11.** $\sum_{i=1}^{100} \frac{1}{i}$

13. $\sum_{i=1}^{50} a_{2i-1}$ **15.** 90 **17.** −10 **19.** 14,950

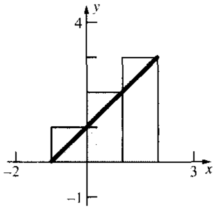
21. 2640 **23.** $\frac{4n^3 - 3n^2 - n}{6}$

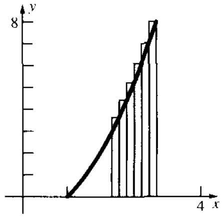
27. **(a)** $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$; **(b)** $2^{11} - 2$

33. $\overline{x} = 55/7 \approx 7.86; s^2 \approx 12.41$ **37.** $c = \overline{x}$ **39.** 715

41. $S = \frac{m(m + 1)(3n - m + 1)}{6}$ **43.** $\frac{7}{2}$ **45.** $\frac{9}{2}$ **47.** $\frac{23}{8}$

49. $A = 6$ **51.** $A = \frac{1243}{216}$





53. $\frac{5}{2}$ **55.** 4 **57.** $\frac{1}{4}$ **59.** $2\frac{1}{2}$ft

63. **(a)** $\frac{125}{3}$; **(b)** 21; **(c)** 39

65. **(a)** 4; **(b)** $\frac{15}{4}$; **(c)** 10.5; **(d)** 102.4

Conjunto de problemas 4.2

1. 5.625 **3.** 15.6875 **5.** 2.625 **7.** $\int_1^3 x^3\,dx$

9. $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1 + x}dx$ **11.** 4 **13.** $3\pi - 3$ **15.** $\frac{35}{2}$

17. $\frac{27}{2}$ **19.** $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$ **21.** $\frac{1}{2}\pi A^2$ **23.** $\frac{2}{15}$ **25.** 3

27. 40, 80, 120, 160, 200, 240 **29.** 20, 80, 160, 240, 320, 400

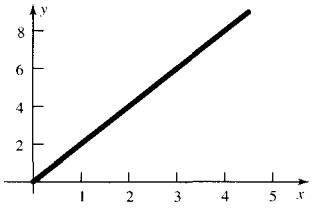
31. **(a)** −3; **(b)** 19; **(c)** 3; **(d)** 2; **(e)** 9; **(f)** 0; **(g)** 1; **(h)** 2

35. Izquierda: 5.24; Derecha: 6.84; Punto medio: 5.98

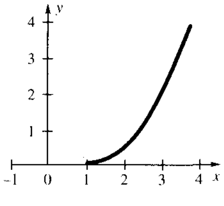
37. Izquierda: 0.8638; Derecha: 0.8178; Punto medio: 0.8418

Conjunto de problemas 4.3

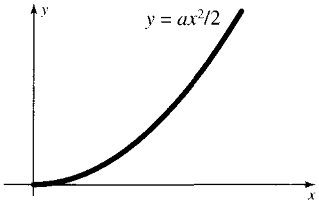
1. $A(x) = 2x$



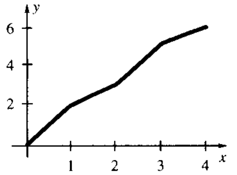
3. $A(x) = \frac{1}{2}(x - 1)(-1 + x), x > 1$



5. $A(x) = ax^2/2$

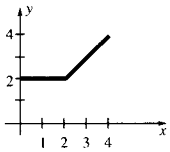


7. $A(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2 + (x - 1) & \text{si } 1 < x \le 2 \\ 3 + 2(x - 2) & \text{si } 2 < x \le 3 \\ 5 + (x - 3) & \text{si } 3 < x \le 4 \\ \text{etc.} \end{cases}$

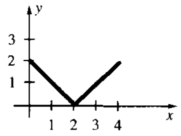


9. 6 **11.** 14 **13.** -31 **15.** 23 **17.** $2x$
19. $2x^2 + \sqrt{x}$ **21.** $-(x - 2)\cot 2x$ **23.** $2x\,\text{sen}(x^2)$
25. $\dfrac{2x^5}{1 + x^4} + \dfrac{x^2}{1 + x^2}$
27. $f(x)$ es creciente en $[0, \infty)$ y cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$.
29. $f(x)$ es creciente en $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \left[\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}\right], \ldots$ y cóncava hacia arriba en $(\pi, 2\pi), (3\pi, 4\pi), \ldots$
31. $f(x)$ es creciente en $(0, \infty)$ y nunca es cóncava hacia arriba.

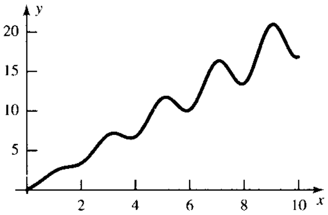
33. 10;



35. 4;

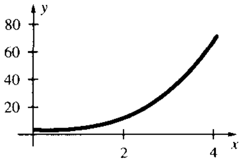


37. **(a)** Mínimos locales en $0, \approx 3.8, \approx 5.8, \approx 7.9, \approx 9.9, 10$; máximos locales en $\approx 3.1, \approx 5.0, \approx 7.1, \approx 9.0$
(b) $G(0) = 0$ es mínimo global, $G(9)$ es máximo global
(c) G es cóncava hacia abajo en $\approx(0.7, 1.5), (2.5, 3.5), (4.5, 5.5), (6.5, 7.5), (8.5, 9.5)$
(d)

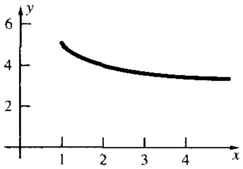


39. **(a)** 0 **(b)** $\frac{1}{5}x^5 + x + C$ **(c)** $\frac{1}{5}x^5 + x$ **(d)** $\frac{6}{5}$

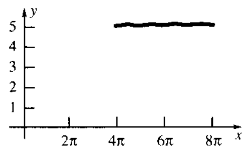
43. Cota inferior 20; cota superior 276



45. Cota inferior $\frac{68}{5}$; cota superior 20



47. Cota inferior 20π; cota superior $\frac{101}{5}\pi$



49. $\frac{1}{2}$ **51.** 2 **53.** $\sqrt{x}/2$ **55.** Verdadero **57.** Falso
59. Verdadero
61. $s(t) = \begin{cases} t^2/2, & 0 \le t \le 2 \\ -4 + 4t - t^2/2, & t > 2 \end{cases}$
$t = 4 + 2\sqrt{2} \approx 6.83$

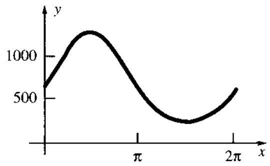
Conjunto de problemas 4.4

1. 4 **3.** 15 **5.** $\frac{3}{4}$ **7.** $\frac{16}{3}$ **9.** $\frac{1783}{96}$ **11.** 1 **13.** $\frac{22}{5}$
15. $\frac{2}{9}(3x + 2)^{3/2} + C$ **17.** $\frac{1}{3}\text{sen}(3x + 2) + C$
19. $-\frac{1}{6}\cos(6x - 7) + C$ **21.** $\frac{1}{3}(x^2 + 4)^{3/2} + C$
23. $-\frac{7}{10}(x^2 + 3)^{-5/7} + C$ **25.** $-\frac{1}{2}\cos(x^2 + 4) + C$
27. $-\cos\sqrt{x^2 + 4} + C$ **29.** $\frac{1}{27}\text{sen}[(x^3 + 5)^9] + C$
31. $\frac{1}{3}[\text{sen}(x^2 + 4)]^{3/2} + C$ **33.** $-\frac{1}{30}\cos^{10}(x^3 + 5) + C$
35. $\frac{2047}{11}$ **37.** $\frac{4}{5}$ **39.** $\frac{122}{9}$ **41.** 0 **43.** $\frac{1}{3}$ **45.** $\frac{9}{2}$
47. $\frac{1}{64}$ **49.** $\frac{\text{sen}\,3}{3}$ **51.** $\frac{1}{\pi}$ **53.** 1 **55.** $1 - \cos 1$
57. $\dfrac{1 - \cos^4 1}{8}$
59. **(a)** positiva, **(b)** negativa, **(c)** negativa, **(d)** positiva
61. 50 galones; 20 horas **63.** 86 galones **65.** 134
69. 9 **71.** 2

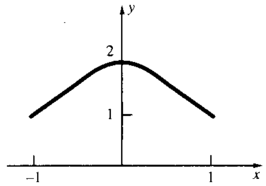
Conjunto de problemas 4.5

1. 40 **3.** $\frac{1}{3}$ **5.** $\frac{17}{6}$ **7.** 0 **9.** 0 **11.** $\frac{609}{8}$
13. $\frac{8}{\pi}\left(-\cos\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \cos\sqrt{\frac{\pi}{4}}\right)$ **15.** $\frac{115}{81}$ **17.** $\frac{\sqrt{39}}{3}$
19. $c = 1$ **21.** $c = 0$ **23.** $c = \frac{\sqrt{21} + 3}{6}$ **25.** $c = \frac{5}{2}$
27. $(A + B)/2$

29. $\approx 1250\pi$



31. ≈ 3.2



33. ≈ 25 **35.** 0 **37.** 0 **39.** 2π **41.** $\frac{8}{3}$ **43.** $\frac{1}{2}$
45. Par: $\displaystyle\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$;
Impar; $\displaystyle\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
47. 8 **49.** 2 **51.** 2
57. **(a)** Par; **(b)** 2π
(c)

Intervalo	Valor de la integral
$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	0.46
$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	0.92
$\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$	−0.46
$\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$	−0.92
$[0, 2\pi]$	0
$\left[\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right]$	0
$\left[\frac{\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right]$	−0.44
$\left[\frac{13\pi}{6}, \frac{10\pi}{3}\right]$	−0.44

Conjunto de problemas 4.6

1. 0.7877, 0.5654, 0.6766, 0.6671, $\frac{2}{3}$

3. 1.6847, 2.0382, 1.8615, 1.8755, $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

5. 3.4966, 7.4966, 5.4966, 5.2580, 5.25

7.

	SRI	SRD	SRM	Trap.	Parábola
$n = 4$	0.5728	0.3728	0.4590	0.4728	0.4637
$n = 8$	0.5159	0.4159	0.4625	0.4659	0.4636
$n = 16$	0.4892	0.4392	0.4634	0.4642	0.4636

9.

	SRI	SRD	SRM	Trap.	Parábola
$n = 4$	2.6675	3.2856	2.9486	2.9765	2.9580
$n = 8$	2.8080	3.1171	2.9556	2.9625	2.9579
$n = 16$	2.8818	3.0363	2.9573	2.9591	2.9579

11. 12, 1.1007 **13.** 8, 4.6637 **15.** 6, 1.0989 **19.** menor

21. mayor **25.** LRS < MRS < Parábola < Trap < RRS

27. 4570 pies^2 **29.** 1,074,585,600 pies^3

31. Utilizando la suma de Riemann con puntos de la derecha ≈ 13,740 galones

4.7 Revisión del capítulo

Examen de conceptos

1. Verdadero **3.** Verdadero **5.** Falso **7.** Verdadero
9. Verdadero **11.** Verdadero **13.** Verdadero **15.** Verdadero
17. Verdadero **19.** Falso **21.** Verdadero **23.** Verdadero
25. Falso **27.** Falso **29.** Falso **31.** Verdadero **33.** Falso
35. Verdadero **37.** Falso **39.** Verdadero **41.** Verdadero
43. Verdadero **45.** Falso

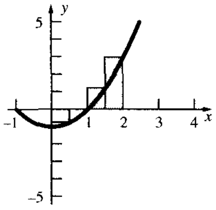
Problemas de examen

1. $\frac{5}{4}$ **3.** $\frac{50}{3} - \frac{26}{\pi} + \frac{\pi^3}{3} - 9\cos 1$

5. $\frac{1}{16}\left[-15\left(-125 + \sqrt[3]{5}\right)\right]$ **7.** $\frac{1}{18}\tan^3(3\pi^2 + 6\pi)$

9. 46.9 **11.** $-\frac{1}{2}\cos(x^2 + 2x + 3) + C$

13. $\frac{7}{4}$



15. $\frac{5}{6}$ **17.** $\frac{39}{4}$ **19.** 1870

21. **(a)** $\sum_{n=2}^{78} \frac{1}{n}$; **(b)** $\sum_{n=1}^{50} nx^{2n}$

23. **(a)** -2; **(b)** -4; **(c)** 6; **(d)** -12; **(e)** -2

25. **(a)** -8; **(b)** 8; **(c)** 0; **(d)** -16; **(e)** -2 **(f)** -5

27. $c = -\sqrt{7}$

29. **(a)** $\operatorname{sen}^2 x$; **(b)** $f(x + 1) - f(x)$

(c) $-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(z)\,dz + \frac{1}{x}f(x)$; **(d)** $\int_0^x f(t)\,dt$;

(e) $g'(g(x))g'(x)$; **(f)** $-f(x)$

33. 0.2043 **35.** 372 **37.** MRS < Trap < LRS

Problemas de repaso e introducción del capítulo 5

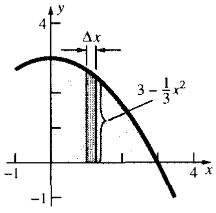
1. $\frac{1}{4}$ **3.** $\sqrt[3]{4} - 1$ **5.** $\sqrt{10}$ **7.** 1.6π

9. $[\pi(r_2{}^2 - r_1{}^2)]\,\Delta x$ **11.** $\frac{51}{10}$ **13.** $\frac{16}{15}$

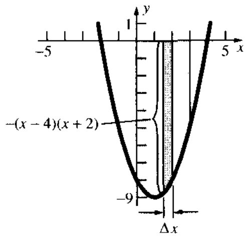
Conjunto de problemas 5.1

1. 6 **3.** $\frac{40}{3}$ **5.** $\frac{9}{2}$ **7.** $\frac{253}{12}$ **9.** $\frac{9}{2}$

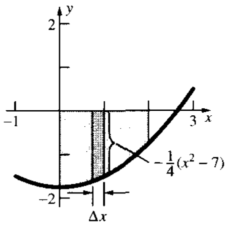
11. 6



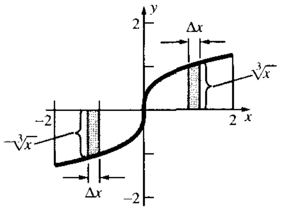
13. 24



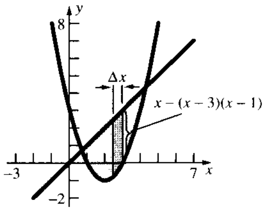
15. $\frac{17}{6}$



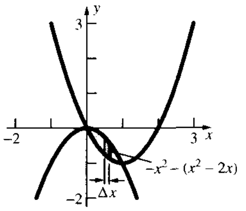
17. $3\sqrt[3]{2}$



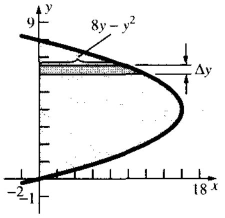
19. $\frac{13\sqrt{13}}{6}$



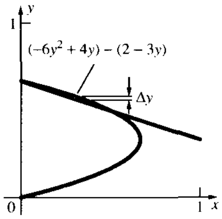
21. $\frac{1}{3}$



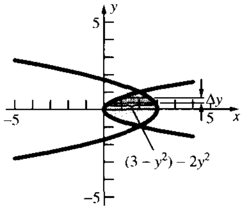
23. $\frac{256}{3}$



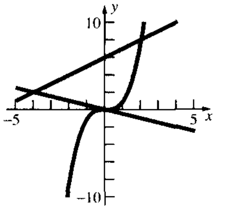
25. $\frac{1}{216}$



27. 4



29. 22



31. 130 pies; 194 pies **33.** 6 s; $2 + 2\sqrt{2}$ s

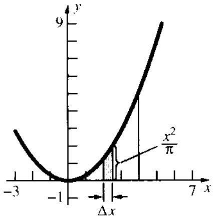
35. Área $(A) = 9$; $A(B) = \frac{37}{6}$; $A(C) = \frac{37}{6}$; $A(D) = \frac{44}{3}$; $A(A + B + C + D) = 36$

Conjunto de problemas 5.2

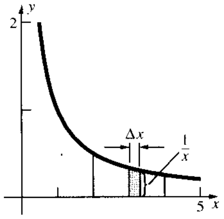
1. $\frac{206\pi}{15}$

3. **(a)** $\frac{256\pi}{15}$; **(b)** 8π

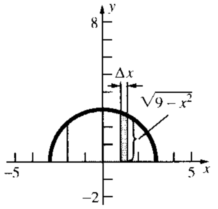
5. $\frac{1024}{5\pi}$


y
9
$\frac{x^2}{\pi}$
−3
−1
Δx
7
x

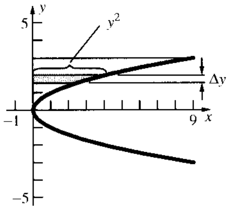
7. $\frac{\pi}{4}$


y
2
Δx
$\frac{1}{x}$
5
x

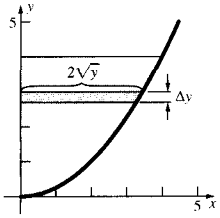
9. $\frac{100\pi}{3}$


y
8
Δx
$\sqrt{9-x^2}$
−5
5
x
−2

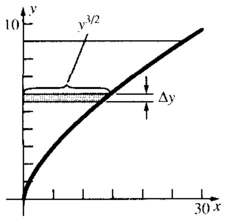
11. $\frac{243\pi}{5}$


y
5
y^2
Δy
−1
9
x
−5

13. 32π


y
5
$2\sqrt{y}$
Δy
5
x

15. $\frac{6561\pi}{4}$


y
10
$y^{3/2}$
Δy
30
x

17. $\frac{4}{3}ab^2\pi$ **19.** $\frac{512\pi}{3}$ **21.** $\frac{2\pi}{3}$ **23.** $\frac{128}{3}$ **25.** 2 **27.** $\frac{2}{3}$

29. $2\pi r^2 L - \frac{16}{3}r^3$ **31.** $\pi r^2(L_1 + L_2) - \frac{8}{3}r^3$

33. **(a)** $\frac{1024\pi}{35}$; **(b)** $\frac{704\pi}{5}$

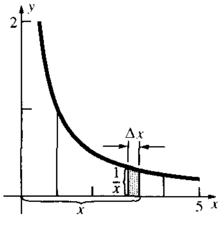
35. $2\pi + \frac{16}{3}$ **37.** $\frac{2}{3}r^3 \tan\theta$

39. **(a)** $\frac{1}{3}\pi r^2 h$; **(b)** $\frac{\sqrt{2}}{12}r^3$

41. $\frac{2}{3}\pi r^3$

Conjunto de problemas 5.3

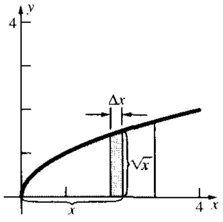
1. **(a), (b)**


y
2
Δx
$\frac{1}{x}$
x
5
x

(c) $\Delta V \approx 2\pi\Delta x$;

(d) $2\pi \int_1^4 dx$; **(e)** 6π

3. **(a), (b)**

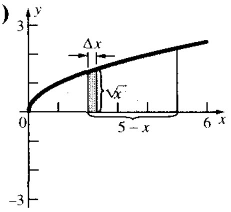

y
4
Δx
$\sqrt{x}$
x
4
x

(c) $\Delta V \approx 2\pi x^{3/2}\Delta x$;

(d) $2\pi \int_0^3 x^{3/2}\, dx$;

(e) $\frac{36\sqrt{3}}{5}\pi$

5. **(a), (b)**

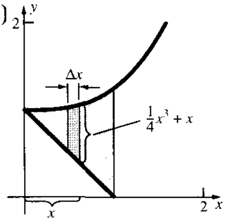

y
3
Δx
$\sqrt{x}$
0
5 − x
6
x
−3

(c) $\Delta V \approx 2\pi(5x^{1/2} - x^{3/2})\Delta x$

(d) $2\pi \int_0^5 (5x^{1/2} - x^{3/2})\, dx$

(e) $\frac{40\sqrt{5}}{3}\pi$

7. **(a), (b)**

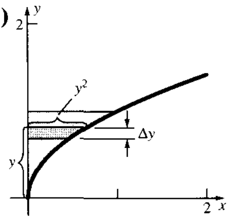

y
2
Δx
$\frac{1}{4}x^3 + x$
x
2
x

(c) $\Delta V \approx 2\pi\left(\frac{1}{4}x^4 + x^2\right)\Delta x$;

(d) $2\pi \int_0^1 \left(\frac{1}{4}x^4 + x^2\right) dx$

(e) $\frac{23\pi}{30}$

9. **(a), (b)**

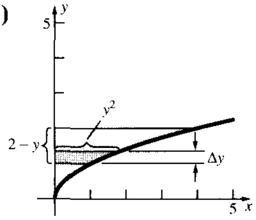

y
2
y^2
Δy
y
2
x

(c) $\Delta V \approx 2\pi y^3 \Delta y$;

(d) $2\pi \int_0^1 y^3\, dy$

(e) $\frac{\pi}{2}$

11. **(a), (b)**


y
5
y^2
2 − y
Δy
5
x

(c) $\Delta V \approx 2\pi(2y^2 - y^3)\Delta y$

(d) $2\pi \int_0^2 (2y^2 - y^3)\, dy$;

(e) $\frac{8\pi}{3}$

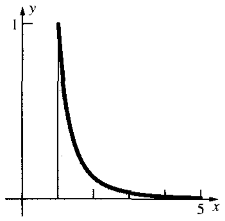
13. **(a)** $\pi \int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2]\, dx$;

(b) $2\pi \int_a^b x[f(x) - g(x)]\, dx$;

(c) $2\pi \int_a^b (x - a)[f(x) - g(x)]\, dx$;

(d) $2\pi \int_a^b (b - x)[f(x) - g(x)]\, dx$

15.



(a) $\int_1^3 \frac{1}{x^3} dx$;

(b) $2\pi \int_1^3 \frac{1}{x^2} dx$;

(c) $\pi \int_1^3 \left(\frac{1}{x^6} + \frac{2}{x^3}\right) dx$;

(d) $2\pi \int_1^3 \left(\frac{4}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right) dx$

17. $\frac{64\pi}{5}$ **19.** $\frac{4\pi}{3}(b^2 - a^2)^{3/2}$ **21.** $\pi(\sqrt{2} - 1)$

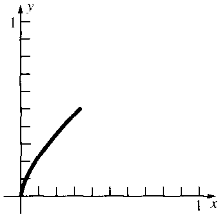
23. **(a)** $\frac{2\pi}{15}$; **(b)** $\frac{\pi}{6}$; **(c)** $\frac{\pi}{60}$

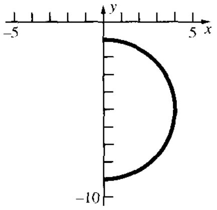
25. $\frac{1}{3}rS$

Conjunto de problemas 5.4

1. $\frac{1}{54}\left(181\sqrt{181} - 13\sqrt{13}\right)$ **3.** 9 **5.** $\frac{595}{144}$

7. $\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$ **9.** 4π

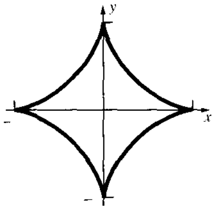




11. $2\sqrt{5}$ **13.** $\int_0^2 \sqrt{1 + 4t^2}\, dt \approx 4.6468$

15. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t + 4\,\mathrm{sen}^2 2t}\, dt \approx 2.3241$

17. $6a$



19. $8a$

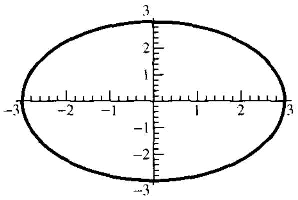
21. **(a)** $\frac{2}{5}\left(4\sqrt{2} - 1\right)$; **(b)** 16

23. $6\sqrt{37}\pi$ **25.** $248\sqrt{2}\pi/9$ **27.** $\frac{\pi}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$

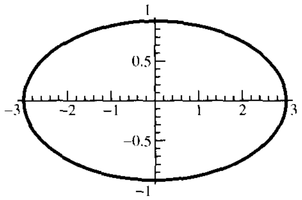
29. $4\pi r^2$

33. **(b)** $\frac{64}{3}\pi a^2$

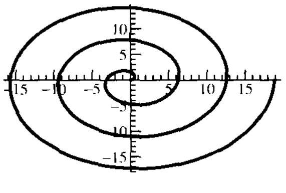
35. **(a)**



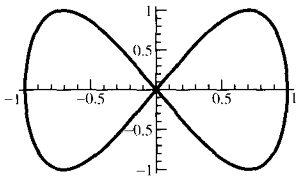
(b)



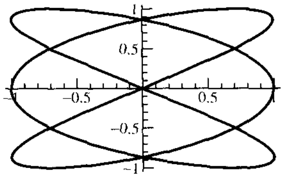
(c)



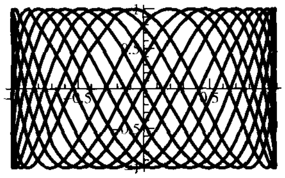
(d)



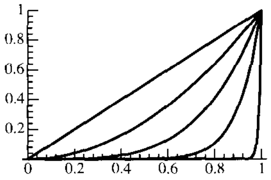
(e)



(f)



37. $n = 1$: $L \approx 1.41$; $n = 2$: $L \approx 1.48$; $n = 4$: $L \approx 1.60$
$n = 10$: $L \approx 1.75$; $n = 100$: $L \approx 1.95$; $n = 10{,}000$: $L \approx 2$



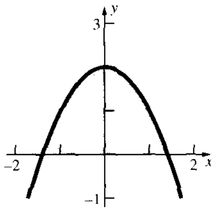
Conjunto de problemas 5.5

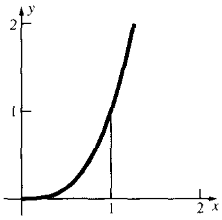
1. 1.5 lbs-pie **3.** 0.012 joules **7.** 18 lbs-pie **9.** 52,000 lbs-pie
11. 76.128 lbs-pie **13.** 125.664 lbs-pie **17.** 2075.83 lbs-pulg.
19. 350,000 lbs-pie **21.** 952.381 lbs-mi **23.** 43,200 lbs-pie
25. 1684.8 libras **27.** 1684.8 libras **29.** 16.64 libras
33. 74,880 libras **35.** $\frac{3mh}{4} + 15m$ **37.** $\frac{8475}{32}$ lbs − pie

Conjunto de problemas 5.6

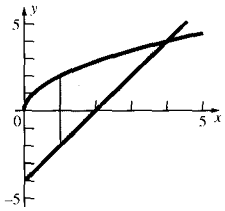
1. $\frac{5}{21}$ **3.** $\frac{21}{5}$ **5.** $M_y = 17, M_x = -3; \overline{x} = 1, \overline{y} = -\frac{3}{17}$

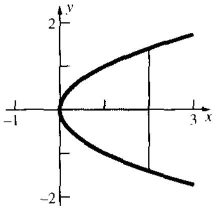
9. $\overline{x} = 0, \overline{y} = \frac{4}{5}$ **11.** $\overline{x} = \frac{4}{5}, \overline{y} = \frac{2}{7}$





13. $\overline{x} = \frac{192}{95}, \overline{y} = \frac{27}{19}$ **15.** $\overline{x} = \frac{6}{5}, \overline{y} = 0$





17. $m(R_1) = \frac{1}{2}\delta, \overline{x}_1 = \frac{2}{3}, \overline{y} = \frac{1}{3}, M_y(R_1) = \frac{1}{3}\delta, M_x(R_1) = \frac{1}{6}\delta$;
$m(R_2) = 2\delta, \overline{x}_2 = 2, \overline{y}_2 = \frac{1}{2}, M_y(R_2) = 4\delta, M_x(R_2) = \delta.$

21. $\overline{x} = -\frac{3}{14}, \overline{y} = \frac{1}{14}$ **23.** $\overline{x} = \frac{9}{16}, \overline{y} = \frac{31}{16}$ **25.** $\frac{2\pi}{5}$

27. El centroide es $\frac{4a}{3\pi}$ unidades perpendiculares del centro del diámetro. $\left(\overline{y} = \frac{4a}{3\pi}, \overline{x} = 0\right)$

29. **(a)** $V = 2\pi \int_c^d (K - y)w(y)\, dy$

31. **(a)** $4\pi r^3 n \operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}\cos^2\frac{\pi}{2n}$

35. $\bar{x} \approx 7.00$ cm por arriba del centro del agujero; $\bar{y} \approx 0.669$ cm a la derecha del centro del agujero.

Conjunto de problemas 5.7

1. **(a)** 0.1 **(b)** 0.35

3. **(a)** 0.2 **(b)** 0

5. **(a)** 0.6 **(b)** 2.2

7. **(a)** 0.6 **(b)** 2

9. **(a)** 0.9 **(b)** 10 **(c)** $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x/20, & 0 \le x \le 20 \\ 1, & x > 20 \end{cases}$

11. **(a)** $\dfrac{27}{32}$ **(b)** 4

(c) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{3}{64}x^2 - \dfrac{1}{256}x^3, & 0 \le x \le 8 \\ 1, & x > 8 \end{cases}$

13. **(a)** 0.6875 **(b)** 2.4

(c) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{1}{16}x^3 - \dfrac{3}{256}x^4, & 0 \le x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$

15. **(a)** $\dfrac{1}{2}$ **(b)** 2

(c) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi x}{4}, & 0 \le x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$

17. **(a)** $\dfrac{1}{3}$ **(b)** $\dfrac{4}{3}\ln 4$ **(c)** $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \dfrac{4x - 4}{3x}, & 1 \le x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$

21. $\dfrac{a + b}{2}$ **23.** $k = \dfrac{6}{125}$

25. **(a)** $\dfrac{1}{4}$ **(b)** $\dfrac{1}{8}$ **(c)** 2

(d) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ x^2/8, & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ -x^2/8 + x - 1, & \text{si } 2 < x \le 4 \\ 1, & \text{si } x > 4 \end{cases}$

(e) $F(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y < 0 \\ y^2/28800, & \text{si } 0 \le y \le 120 \\ -y^2/28800 + y/60 - 1, & \text{si } 120 < y \le 240 \\ 1, & \text{si } y > 240 \end{cases}$

27. **(a)** $\approx$95,802,719 **(b)** $\approx$0.884 **(c)** 0.2625

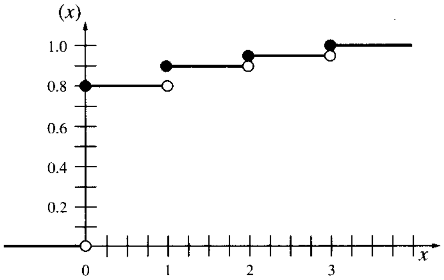
(d) Para $0 \le x \le 0.6$, $F(x) \approx 6.3868 \times 10^6 x^{15}$
$- 3.2847 \times 10^7 x^{14} + 7.4284 \times 10^7 x^{13} - 9.6569 \times 10^7 x^{12}$
$+ 7.9011 \times 10^7 x^{11} - 4.1718 \times 10^7 x^{10} + 1.3906 \times 10^7 x^9$
$- 2.6819 \times 10^6 x^8 + 2.2987 \times 10^5 x^7$

(e) $F(25.4y)$ en donde F es como en (d)

29. $G(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \sqrt{y^2 - 1}, & 0 \le y \le \sqrt{2} \\ 1, & y > \sqrt{2} \end{cases}$

$g(y) = y/\sqrt{y^2 - 1}, 0 \le y \le \sqrt{2}.$

33. $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.8, & 0 \le x < 1 \\ 0.9, & 1 \le x < 2 \\ 0.95, & 2 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$



35. **(a)** 1 **(b)** $\dfrac{1}{12}$ **(c)** $\dfrac{2}{(y + 1)^2}$ para $0 \le y \le 1$ **(d)** 0.38625

37. $2, \dfrac{32}{7}$ **39.** $\dfrac{4}{7}$

5.8 Revisión del capítulo

Examen de conceptos

1. Falso **3.** Falso **5.** Verdadero **7.** Falso **9.** Falso
11. Falso **13.** Verdadero **15.** Verdadero **17.** Verdadero
19. Verdadero **21.** Verdadero **23.** Verdadero

Problemas de examen

1. $\frac{1}{6}$ **3.** $\frac{\pi}{6}$ **5.** $\frac{5\pi}{6}$

7. $V(S_1) = \frac{\pi}{30}; V(S_2) = \frac{\pi}{6}; V(S_3) = \frac{7\pi}{10}; V(S_4) = \frac{5\pi}{6}$

9. 205,837 lbs-pie, **11.** **(a), (b)** $\frac{32}{3}$ **13.** $\frac{2048\pi}{15}$

15. $\dfrac{53}{6}$ **17.** 36 **19.** $\pi \displaystyle\int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]\, dx$

21. $M_y = \delta \displaystyle\int_a^b x[f(x) - g(x)]\, dx$

$M_x = \frac{\delta}{2} \displaystyle\int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]\, dx$

23. $2\pi \displaystyle\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$

$+ 2\pi \displaystyle\int_a^b g(x)\sqrt{1 + [g'(x)]^2}\, dx$

$+ \pi[f^2(a) - g^2(a)] + \pi[f^2(b) - g^2(b)]$

25. **(a)** $\dfrac{3}{4}$ **(b)** $\dfrac{6 - x}{18}$ para $0 \le x \le 6$ **(c)** 2

Problemas de repaso e introducción del capítulo 6

1. $-\dfrac{1}{x} + C$ **3.** $-\dfrac{100}{x^{0.01}} + C$ **5.** 0 **7.** $\dfrac{2}{x}$

9. **(a)** 2; **(b)** 2.48832; **(c)** 2.593742; **(d)** 2.691588;
(e) 2.704814

11. **(a)** 2.25; **(b)** 2.593742; **(c)** 2.6533; **(d)** 2.70481;
(e) 2.71152

13. $x = \dfrac{12k + 1}{6}\pi$ o $x = \dfrac{12k + 5}{6}\pi$ **15.** $x = \dfrac{4k + 1}{4}\pi$

17. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$; $\cos\theta = \dfrac{1}{x}$; $\tan\theta = \sqrt{x^2-1}$

$\cot\theta = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; $\sec\theta = x$; $\csc\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

19. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; $\tan\theta = \dfrac{1}{x}$

$\cot\theta = x$; $\sec\theta = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$; $\csc\theta = \sqrt{1+x^2}$

21. $y = \dfrac{-2}{x^2-2}$

Conjunto de problemas 6.1

1. **(a)** 1.792; **(b)** 0.406; **(c)** 4.396; **(d)** 0.3465; **(e)** −3.584; **(f)** 3.871

3. $\dfrac{2x+3}{x^2+3x+\pi}$ **5.** $\dfrac{3}{x-4}$ **7.** $\dfrac{3}{x}$

9. $2x + 4x\ln x + \frac{3}{x}(\ln x)^2$ **11.** $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ **13.** $\frac{1}{243}$

15. $\frac{1}{2}\ln|2x+1| + C$ **17.** $\ln|3v^2+9v| + C$

19. $(\ln x)^2 + C$ **21.** $\frac{1}{10}[\ln(486+\pi) - \ln\pi]$

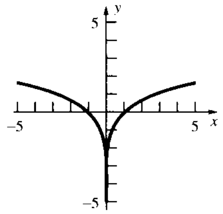
23. $\dfrac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| + C$

25. $\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{4x^3}{3} + 8x^2 - 64x + 256\ln|x+4| + C$

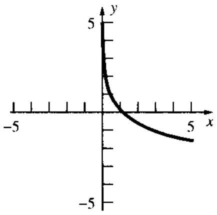
27. $\ln\dfrac{(x+1)^2}{x}$ **29.** $\ln\dfrac{x^2(x-2)}{x+2}$ **31.** $-\dfrac{x^3+33x^2+8}{2(x^3-4)^{3/2}}$

33. $-\dfrac{10x^2+219x-118}{6(x-4)^2(x+13)^{1/2}(2x+1)^{4/3}}$

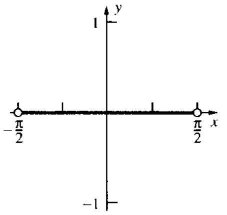
35.



37.



39.



41. Mínimo $f(1) = -1$ **43.** $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$

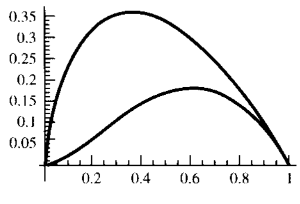
45. $x = 3$ **47.** $\ln 2$

49. **(a)** 1 **(b)** 3

51. $\ln\sqrt{3} \approx 0.5493$ **53.** $\pi\ln 4 \approx 4.355$

57. **(a)** Máximos: $\left(\frac{\pi}{2}, 0.916\right)$, $\left(\frac{5\pi}{2}, 0.916\right)$; mínimo: $\left(\frac{3\pi}{2}, -0.693\right)$; **(b)** (3.871, −0.182), (5.553, −0.183); **(c)** 4.042

59.



(a) 0.139;
(b) 0.260

Conjunto de problemas 6.2

1. $f^{-1}(2) = 4$ **3.** No tiene inversa **5.** $f^{-1}(2) \approx -1.3$

15. $f^{-1}(x) = x - 1$ **17.** $f^{-1}(x) = x^2 - 1, x \ge 0$

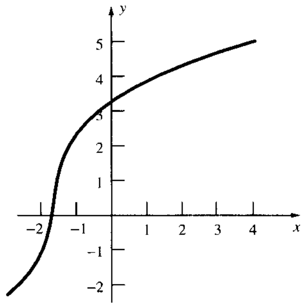
19. $f^{-1}(x) = 3 - \dfrac{1}{x}$ **21.** $f^{-1}(x) = -\dfrac{\sqrt{x}}{2}$

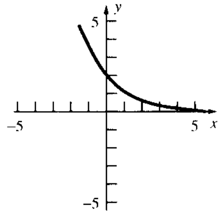
23. $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$ **25.** $f^{-1}(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$

27. $f^{-1}(x) = \left(\dfrac{2-x}{x-1}\right)^{1/3}$ **29.** $V = \dfrac{4\pi h^3}{27}$; $h = 3\sqrt[3]{\dfrac{V}{4\pi}}$

31. $(-\infty, -0.25]$ o $[-0.25, \infty)$; entonces
$f^{-1}(x) = \frac{1}{4}\left(-1 - \sqrt{8x+33}\right)$ o $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}\left(-1 + \sqrt{8x+33}\right)$

33. $(f^{-1})'(3) \approx \frac{1}{3}$ **35.** $(f^{-1})'(3) \approx -\frac{1}{3}$





37. $\frac{1}{16}$ **39.** $\frac{1}{4}$

43. **(a)** 1 **(b)** $\dfrac{2}{\sqrt{7}}$ **(c)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

45. $\frac{3}{5}$

Conjunto de problemas 6.3

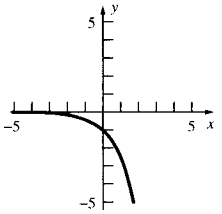
1. **(a)** 20.086; **(b)** 8.1662; **(c)** 4.1; **(d)** 1.20

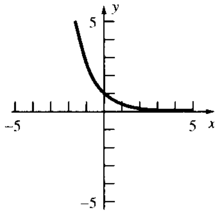
3. x^3 **5.** $\cos x$ **7.** $3\ln x - 3x$ **9.** $3x^2$ **11.** e^{x+2}

13. $\dfrac{e^{\sqrt{x+2}}}{2\sqrt{x+2}}$ **15.** $2x$ **17.** $x^2e^x(x+3)$

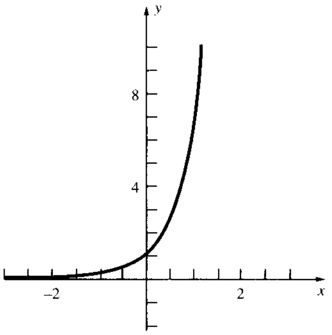
19. $x\sqrt{e^{x^2}} + \dfrac{x}{|x|}e^{\sqrt{x^2}}$ **21.** $-\dfrac{y}{x}$

23. **(a)** **(b)**

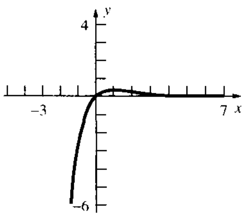




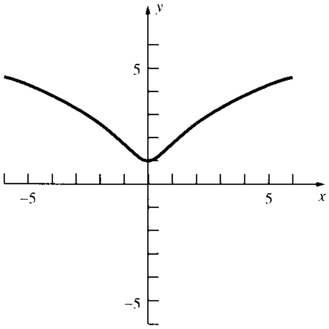
25. Dominio = $(-\infty, \infty)$; creciente en $(-\infty, \infty)$; cóncava hacia arriba en $(-\infty, \infty)$; no hay valores extremos ni puntos de inflexión.



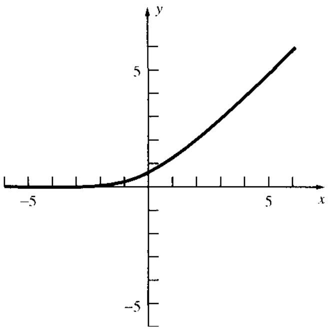
27. Dominio = $(-\infty, \infty)$; creciente en $(-\infty, 1)$ y decreciente en $(1, \infty)$; máximo en $(1, 1/e)$; cóncava hacia arriba en $(2, \infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty, 2)$; punto de inflexión en $(2, 2/e^2)$



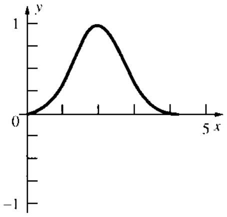
29. Dominio = $(-\infty, \infty)$; creciente en $(0, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0)$; mínimo en $(0, 0)$; cóncava hacia arriba en $(-1, 1)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; puntos de inflexión en $(-1, \ln 2)$ y $(1, \ln 2)$



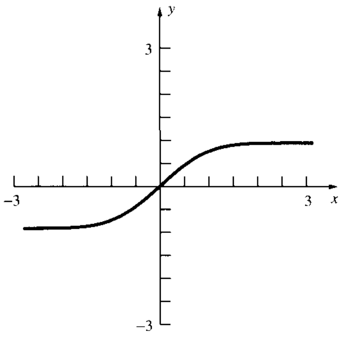
31. Dominio = $(-\infty, \infty)$; creciente en $(-\infty, \infty)$; cóncava hacia arriba en $(-\infty, \infty)$ no hay valores extremos ni puntos de inflexión.



33. Dominio = $(-\infty, \infty)$; creciente en $(-\infty, 2)$ y decreciente en $(2, \infty)$; máximo en $(2, 1)$; cóncava hacia arriba en $\left(-\infty, \frac{4-\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{4+\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$ y cóncava hacia abajo en $\left(\frac{4-\sqrt{2}}{2}, \frac{4+\sqrt{2}}{2}\right)$; puntos de inflexión en $\left(\frac{4-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ y $\left(\frac{4+\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$



35. Dominio = $(-\infty, \infty)$; creciente en $(-\infty, \infty)$; cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia abajo en $(0, \infty)$; punto de inflexión en $(0, 0)$; no tiene valores extremos



37. $\frac{1}{3}e^{3x+1} + C$ **39.** $\frac{1}{2}e^{x^2+6x} + C$ **41.** $e^{-1/x} + C$

43. $\frac{1}{2}e^3(e^2 - 1)$ **45.** 4π **47.** $\dfrac{3 - e}{2e}$

49. **(a)** 3,628,800; 3,598,696; **(b)** 8.31×10^{81}

51. $\sqrt{2}(e^{\pi} - 1)$

53. **(a)** 0; 0 **(b)** Máximo: $\left(e, \frac{1}{2}\right)$; mínimo: $\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{2}\right)$ **(c)** $\sqrt{e}$

55. **(a)** 3.11; **(b)** 0.910

57. 4.2614 **59.** Se comporta como $-x$; se comporta como $2 \ln x$

Conjunto de problemas 6.4

1. 3 **3.** 8 **5.** 9 **7.** 1 **9.** 1.544 **11.** 0.1747

13. 4.08746 **15.** 1.9307 **17.** $2 \cdot 6^{2x} \ln 6$ **19.** $\dfrac{1}{\ln 3}$

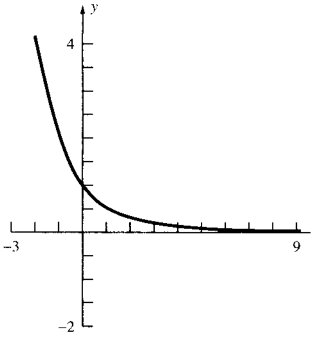
21. $3^z\left[\dfrac{1}{z + 5} + \ln(z + 5) \ln 3\right]$ **23.** $\dfrac{2^{x^2-1}}{\ln 2} + C$

25. $\dfrac{40}{\ln 5}$ **27.** $10^{x^2}2x \ln 10 + 20x^{19}$

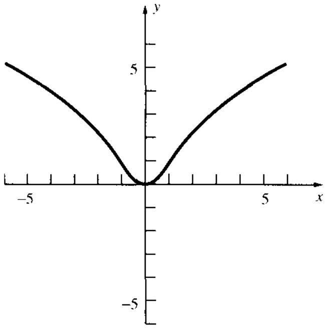
29. $(\pi + 1)x^{\pi} + (\pi + 1)^x \ln(\pi + 1)$

31. $(x^2 + 1)^{\ln x}\left(\dfrac{\ln(x^2 + 1)}{x} + \dfrac{2x \ln x}{x^2 + 1}\right)$ **33.** sen 1

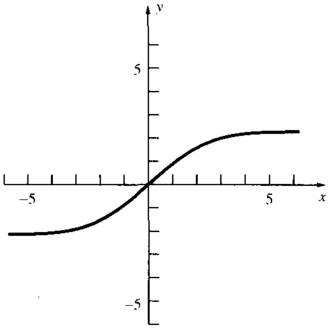
35. Dominio = $(-\infty, \infty)$; decreciente en $(-\infty, \infty)$; cóncava hacia arriba en $(-\infty, \infty)$; no tiene valores extremos ni puntos de inflexión.



37. Dominio = $(-\infty, \infty)$; creciente en $(0, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0)$; cóncava hacia arriba en $(-1, 1)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$; mínimo en $(0,0)$; puntos de inflexión en $(-1,1)$ y $(1,1)$



39. Dominio $= (-\infty,\infty)$; creciente en $(-\infty,\infty)$; cóncava hacia arriba en $(-\infty,0)$ y cóncava hacia abajo en $(0,\infty)$; no hay valores extremos; punto de inflexión en $\left(0,\ \int_1^0 2^{-t^2}\,dt\right) \approx (0, -0.81)$



41. $\log_{1/2} x = -\log_2 x$

43. $E \approx 5.017 \times 10^8$ kW-h para la magnitud 7;
$E \approx 1.560 \times 10^{10}$ kW-h para la magnitud 8

45. $r = 2^{1/12} \approx 1.0595$; frecuencia de $\overline{C} = 440\sqrt[4]{2} \approx 523.25$

47. Si $y = A \cdot b^x$, entonces $\ln y = \ln A + x \ln b$, por lo que la gráfica de $\ln y$ contra x será lineal. Si $y = C \cdot x^d$, entonces $\ln y = \ln C + d \ln x$, por lo que la gráfica de $\ln y$ contra $\ln x$ será lineal.

49. $f'(x) = x^{(x^2)}(2x \ln x + x)$

$g'(x) = x^{x^x + x}\left[\ln x + (\ln x)^2 + \frac{1}{x}\right]$

53. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x = 1$; mínimo: $(e^{-1}, e^{-1/e})$ **55.** 20.2259

57. $b \approx 2^{5/2}, C \approx 2^{3/2}$

Conjunto de problemas 6.5

1. $y = 4e^{-6t}$ **3.** $y = 2e^{0.005(t-10)}$ **5.** 56,569

7. 15.8 días **9.** 4.64 millones; 4.79 millones; 6.17 millones; 105 millones

11. 126,822 **13.** 7.43 g

15. $t_c \approx 201$ años (2187) $t_s \approx 191$ años (2177)

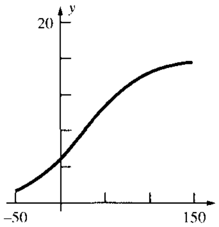
17. Hace 2950 años **19.** 81.6°F **21.** 83.7°C **23.** 8:45 pm

25. **(a)** \$401.71 **(b)** \$402.15 **(c)** \$402.19 **(d)** \$402.19

27. **(a)** 11.58 años **(b)** 11.55 años

29. \$133.6 mil millones **31.** \$1051.27 **33.** $t = \dfrac{100 \ln 2}{p}$

35.

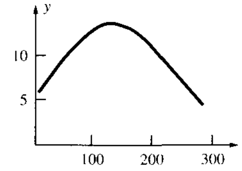


37. **(a)** $\frac{1}{e}$; **(b)** e^3; **(c)** e^2; **(d)** $\frac{1}{e^2}$

39. 15.25 millones **45.** 75.25 años a partir de 2004

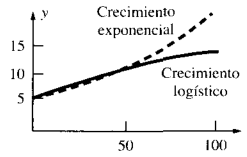
47. **(a)** $k = 0.0132 - 0.0001t$ **(b)** $y' = (0.0132 - 0.0001t)y$
(c) $y = 6.4^{0.0132t - 0.00005t^2}$

(d)



(e) La población máxima ocurrirá cuando $t = 132$, que es el año 2136 (se toma como base a 2004). El modelo predice que la población regresará al nivel de 2004 en el año 2268.

49.



Crecimiento exponencial: 6.93 mil millones en 2010; 10.29 mil millones en 2040; 19.92 mil millones en 2090;
Crecimiento logístico: 7.13 mil millones en 2010; 10.90 mil millones en 2040; 15.15 mil millones en 2090

Conjunto de problemas 6.6

1. $y = e^{-x}(x + C)$ **3.** $y = a + C(1 - x^2)^{1/2}$

5. $y = xe^x + Cx$ **7.** $y = 1 + Cx^{-1}$

9. $y = 1 + Ce^{-\int f(x)\,dx}$ **11.** $y = x^4 + 2x$ pasa por $(1, 3)$.

13. $y = e^{-x}(1 - x^{-1})$ pasa por $(1, 0)$ **15.** 38.506 lb.

17. $y(t) = 2(60 - t) - \left(\frac{1}{1800}\right)(60 - t)^3$

19. $I(t) = 10^{-6}(1 - \exp(-10^6 t))$

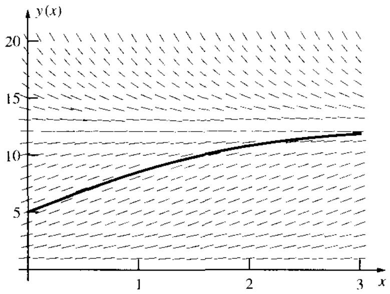
21. $I(t) = 0.12 \operatorname{sen} 377t$

23. **(a)** 21.97 min **(b)** 26.67 min **(c)** $c > 7.7170$
(d) $400e^{-0.04T} + T = 150.$

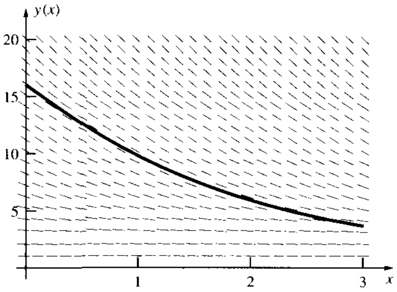
25. **(a)** 200.32 pies **(b)** $95 - 4T - 95e^{-0.05T} = 0$

Conjunto de problemas 6.7

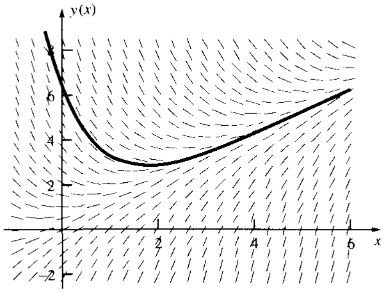
1. $\lim\limits_{t \to \infty} y(t) = 12$ y $y(2) \approx 10.5$



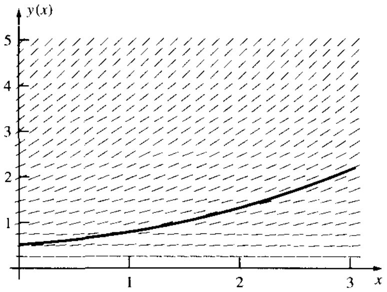
3. $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ y $y(2) \approx 6$



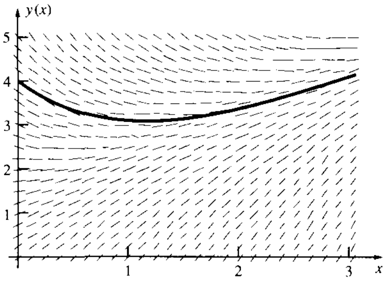
5. La asíntota oblicua es $y = x$



7. $y = \frac{1}{2}e^{x/2}$



9. $y = x + 1 + 3e^{-x}$.



11.

x_n	Método de Euler y_n
0.0	3.0
0.2	4.2
0.4	5.88
0.6	8.232
0.8	11.5248
1.0	16.1347

13.

x_n	Método de Euler y_n
0.0	0.0
0.2	0.0
0.4	0.04
0.6	0.12
0.8	0.24
1.0	0.40

15.

x_n	Método de Euler y_n
1.0	1.0
1.2	1.2
1.4	1.488
1.6	1.90464
1.8	2.51412
2.0	3.41921

19. **(a)** $y(x_1) \approx 0$ **(b)** $y(x_2) \approx 0.00099998$
(c) $y(x_{10}) \approx 0.269097$

21. **(a)** $\Delta y = \frac{1}{2}[f(x_0, y_0) + f(x_1, \hat{y}_1)]$

(c) $x_n = x_{n-1} + h$

$$\hat{y}_n = y_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_n, \hat{y}_n)]$$

23.

x_n	y_n
0.0	2.0
0.2	1.64
0.4	1.3448
0.6	1.10274
0.8	0.90424
1.0	0.74148

25.

x_n	y_n
0.0	0.0
0.2	0.004
0.4	0.024
0.6	0.076
0.8	0.176
1.0	0.340

27.

x_n	y_n
1.0	2.0
1.2	1.312
1.4	0.80609
1.6	0.46689
1.8	0.25698
2.0	0.13568

Conjunto de problemas 6.8

1. $\frac{\pi}{4}$ **3.** $-\frac{\pi}{3}$ **5.** $\frac{\pi}{3}$ **7.** $-\frac{\pi}{6}$ **9.** 0.4567 **11.** 0.1115
13. 0.9548 **15.** 2.038 **17.** 0.6259 **19.** $\theta = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{8}$
21. $\theta = \operatorname{sen}^{-1}\frac{5}{x}$ **23.** $\theta = \tan^{-1}\frac{3}{x} - \tan^{-1}\frac{1}{x}$ **25.** $\frac{1}{9}$ **27.** $\frac{56}{65}$
33. **(a)** $\frac{\pi}{2}$; **(b)** $-\frac{\pi}{2}$
35. **(a)** $\frac{\pi}{2}$; **(b)** $-\frac{\pi}{2}$
37. Las rectas tangentes se aproximan a la vertical.
39. $\frac{\cos x}{2 + \operatorname{sen} x}$ **41.** $\sec x$ **43.** $\frac{4x}{\sqrt{1 - 4x^4}}$

45. $x^2\left[\frac{xe^x}{1+e^{2x}} + 3\tan^{-1}(e^x)\right]$ **47.** $\frac{3(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}$

49. $\frac{3}{|x|\sqrt{x^6-1}}$ **51.** $\frac{3(1+\operatorname{sen}^{-1}x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$ **53.** $\frac{2}{x[1+(\ln x^2)^2]}$

55. $\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + C$ **57.** $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2x + C$ **59.** $\frac{\operatorname{sen} e^2 - \operatorname{sen} 1}{2}$

61. $\frac{\pi}{4}$ **63.** $\frac{\pi}{2}$ **65.** $\frac{1}{2}\arctan 2x + C$

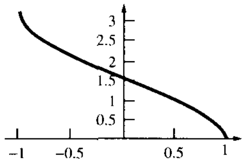
67. $\frac{1}{3}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C$ **69.** $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x-3}{2}\right) + C$

71. $\frac{1}{3}\sec^{-1}\left(\frac{2|x|}{3}\right) + C$

73. $\theta = \tan^{-1}\frac{7.6}{b} - \tan^{-1}\frac{2.6}{b}$; si $b = 12.9, \theta \approx 0.3335$

77. $\pi b^2 - b^2\cos^{-1}\frac{b}{2a} - 2a^2\operatorname{sen}^{-1}\frac{b}{2a} + \frac{1}{2}b\sqrt{4a^2-b^2}$

79.



$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} x = \arccos x$

87. 4.9 pies **89.** $\frac{1}{13}$ rad/s **91.** 1 rev/min

93. 3.96×10^{-4} rad/s

Conjunto de problemas 6.9

13. $2\operatorname{senh} x\cosh x = \operatorname{senh} 2x$

15. $10\operatorname{senh} x\cosh x = 5\operatorname{senh} 2x$ **17.** $3\operatorname{senh}(3x+1)$

19. $\coth x$ **21.** $x^2\operatorname{senh} x + 2x\cosh x$

23. $\cosh 3x\cosh x + 3\operatorname{senh} 3x\operatorname{senh} x$

25. $2\tanh x\cosh 2x + \operatorname{senh} 2x\operatorname{sech}^2 x$

27. $\frac{2x}{\sqrt{x^4+1}}$ **29.** $-\frac{1}{2(x^2-3x+2)}$

31. $\frac{3x}{\sqrt{9x^2-1}} + \cosh^{-1}3x$ **33.** $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}\cosh^{-1}x}$

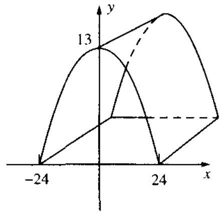
35. $-\csc^2 x\operatorname{sech}^2(\cot x)$ **37.** $\frac{20}{9}$

39. $\frac{1}{2\pi}\operatorname{senh}(\pi x^2+5) + C$ **41.** $2\cosh(2z^{1/4}) + C$

43. $\cosh(\operatorname{sen} x) + C$ **45.** $\frac{1}{4}[\ln(\operatorname{senh} x^2)]^2 + C$ **47.** $\frac{1}{4}$

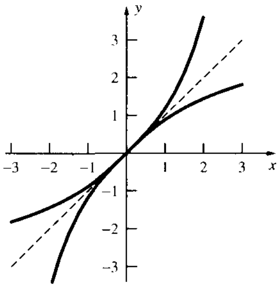
49. $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\operatorname{senh} 2$ **51.** $\pi + \frac{\pi}{2}\operatorname{senh} 2$

55. **(a)**



(b) 42,200 pies^3;
(c) 5640 pies^2

61.



$y = \operatorname{senh} x$ y
$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
son funciones inversas.

6.10 Revisión del capítulo

Examen de conceptos

1. Falso **3.** Verdadero **5.** Verdadero **7.** Falso **9.** Verdadero **11.** Verdadero **13.** Verdadero **15.** Verdadero **17.** Falso **19.** Verdadero **21.** Falso **23.** Verdadero **25.** Falso **27.** Falso **29.** Falso **31.** Verdadero **33.** Falso **35.** Verdadero **37.** Verdadero **39.** Verdadero **41.** Verdadero **43.** Verdadero **45.** Falso **47.** Verdadero

Problemas de examen

1. $\frac{4}{x}$ **3.** $(2x-4)e^{x^2-4x}$ **5.** $\sec^2 x$ **7.** $\frac{\operatorname{sech}^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

9. $|\sec x|$ **11.** $\frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$ **13.** $\frac{15e^{5x}}{e^{5x}+1}$

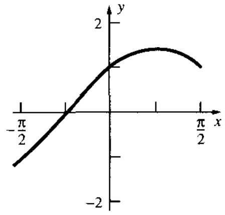
15. $-\frac{e^{\sqrt{x}}\operatorname{sen} e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ **17.** $-\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ **19.** $-\frac{\csc\sqrt{x}\cot\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

21. $20\sec 5x(2\sec^2 5x - 1)$ **23.** $x^{1+x}\left(\ln x + 1 + \frac{1}{x}\right)$

25. $\frac{1}{3}e^{3x-1} + C$ **27.** $-\cos e^x + C$ **29.** $\frac{\ln(e^{x+3}+1)}{e} + C$

31. $2\operatorname{sen}^{-1}2x + C$ **33.** $-\tan^{-1}(\ln x) + C$

35. Creciente: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$; decreciente: $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$; cóncava hacia arriba: $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$; cóncava hacia abajo: $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$; punto de inflexión: $(-\frac{\pi}{4}, 0)$; mínimo global; $(-\frac{\pi}{2}, -1)$ máximo global: $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$



37. **(b)** 1 **(c)** $\frac{1}{15}$

39.

x_n	y_n
1.0	2.0
1.2	2.4
1.4	2.976
1.6	3.80928
1.8	5.02825
2.0	6.83842

41. $y = 1$ **43.** $y = Cx^{-1}$ **45.** $y = 1 + 2e^{-x^2}$

47. $y = -e^x + Ce^{2x}$

Problemas de repaso e introducción del capítulo 7

1. $-\frac{1}{2}\cos 2x + C$ **3.** $-\frac{1}{2}\cos x^2 + C$ **5.** $\ln|\sec t| + C$

7. $\frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2} + C$ **9.** $\ln x$ **11.** $x^2\operatorname{sen} x$

13. $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ **15.** $\cos^4 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2$

17. $\cos 3x\cos 5x = \frac{\cos 8x + \cos 2x}{2}$ **19.** $|a|\cos t$

21. $|a|\cdot|\tan t|$ **23.** $\frac{2x-1}{x(1-x)}$ **25.** $\frac{5x+3}{x(x+1)(x-3)}$

Conjunto de problemas 7.1

1. $\frac{1}{6}(x-2)^6 + C$ **3.** 1302 **5.** $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

7. $\frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C$ **9.** $2(4+z^2)^{3/2} + C$

11. $\frac{1}{2}\tan^2 z + C$ **13.** $-2\cos\sqrt{t} + C$ **15.** $\tan^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$

17. $\frac{3}{2}x^2 - x + \ln|x+1| + C$ **19.** $-\frac{1}{2}\cos(\ln 4x^2) + C$

21. $6\,\text{sen}^{-1}(e^x) + C$ **23.** $-3\sqrt{1 - e^{2x}} + C$ **25.** $1/\ln 3$

27. $x - \ln|\text{sen}\, x| + C$ **29.** $\ln|\sec e^x + \tan e^x| + C$

31. $\tan x + e^{\text{sen}\, x} + C$ **33.** $-\frac{1}{3\,\text{sen}(t^3 - 2)} + C$

35. $-\frac{1}{3}[\cot(t^3 - 2) + t^3] + C$ **37.** $\frac{1}{2}e^{\tan^{-1}2t} + C$

39. $\frac{1}{6}\text{sen}^{-1}\left(\frac{3y^2}{4}\right) + C$ **41.** $\frac{1}{3}\cosh x^3 + C$

43. $\frac{1}{3}\text{sen}^{-1}\left(\frac{e^{3t}}{2}\right) + C$ **45.** $\frac{1}{4}\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$

47. $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$ **49.** $\frac{1}{3}\tan^{-1}(3x + 3) + C$

51. $\frac{1}{18}\ln|9x^2 + 18x + 10| + C$ **53.** $\frac{1}{3}\sec^{-1}\left(\frac{|\sqrt{2}t|}{3}\right) + C$

55. $\ln(\sqrt{2} + 1)$ **57.** π^2

Conjunto de problemas 7.2

1. $xe^x - e^x + C$ **3.** $\frac{1}{5}te^{5t+\pi} - \frac{1}{25}e^{5t+\pi} + C$

5. $x\,\text{sen}\, x + \cos x + C$

7. $(t - 3)\,\text{sen}(t - 3) + \cos(t - 3) + C$

9. $\frac{2}{3}t(t+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(t+1)^{5/2} + C$ **11.** $x\ln 3x - x + C$

13. $x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$ **15.** $-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$

17. $\frac{2}{9}(e^{3/2} + 2)$ **19.** $\frac{1}{4}z^4\ln z - \frac{1}{16}z^4 + C$

21. $t\arctan\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{2}\ln(1 + t^2) + C$ **23.** $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \ln 2$

25. $\frac{2}{9}x^3(x^3 + 4)^{3/2} - \frac{4}{45}(x^3 + 4)^{5/2} + C$

27. $\frac{t^4}{6(7 - 3t^4)^{1/2}} + \frac{1}{9}(7 - 3t^4)^{1/2} + C$

29. $\frac{z^4}{4(4 - z^4)} + \frac{1}{4}\ln|4 - z^4| + C$

31. $x\cosh x - \text{senh}\, x + C$

33. $\frac{x}{150}(3x + 10)^{50} - \frac{1}{22950}(3x + 10)^{51} + C$

35. $\frac{x}{\ln 2}2^x - \frac{1}{(\ln 2)^2}2^x + C$ **37.** $x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

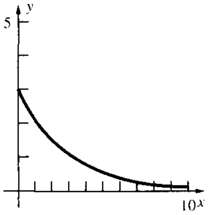
39. $z\ln^2 z - 2z\ln z + 2z + C$ **41.** $\frac{1}{2}e^t(\text{sen}\, t + \cos t) + C$

43. $x^2\,\text{sen}\, x + 2x\cos x - 2\,\text{sen}\, x + C$

45. $\frac{x}{2}[\text{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$

47. $x\ln^3 x - 3x\ln^2 x + 6x\ln x - 6x + C$ **65.** 1

67. $9 - \frac{9}{e^3} \approx 8.552$



69. $\frac{\sqrt{2}\pi}{4} - 1$ **71.** $\bar{x} = \frac{e^2 + 1}{4}, \bar{y} = \frac{e - 2}{4}$

73. **(a)** $(x^3 - 2x)e^x - (3x^2 - 2)e^x + 6xe^x - 6e^x + C$

(b) $(x^2 - 3x + 1)(-\cos x) - (2x - 3)(-\text{sen}\, x) + 2\cos x + C$

87. $e^x(3x^4 - 12x^3 + 38x^2 - 76x + 76)$

Conjunto de problemas 7.3

1. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\text{sen}\, 2x + C$ **3.** $-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$ **5.** $\frac{8}{15}$

7. $-\frac{1}{12}\cos^3 4x + \frac{1}{10}\cos^5 4x - \frac{1}{28}\cos^7 4x + C$

9. $-\frac{1}{3}\csc 3\theta - \frac{1}{3}\text{sen}\, 3\theta + C$

11. $\frac{3}{128}t - \frac{1}{384}\text{sen}\, 12t + \frac{1}{3072}\text{sen}\, 24t + C$

13. $\frac{1}{2}\cos y - \frac{1}{18}\cos 9y + C$

15. $\frac{1}{16}w - \frac{1}{32}\text{sen}\, 2w - \frac{1}{24}\text{sen}^3 w + C$

17. $\frac{1}{3}\left[-x\cos^3 x + \text{sen}\, x - \frac{1}{3}\text{sen}^3 x\right] + C$

19. $\frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C$ **21.** $\frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$

23. $\frac{1}{2}\tan^4\left(\frac{\theta}{2}\right) - \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 2\ln\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| + C$

25. $-\frac{1}{2}\tan^{-2} x + \ln|\tan x| + C$ **27.** $\frac{1}{4}\sec^4 x - \frac{1}{2}\sec^2 x + C$

29. 0 para $m \neq n$, ya que sen $k\pi = 0$ para todos los enteros k.

31. $\frac{\pi^4}{3} + \frac{5\pi^2}{2}$

Conjunto de problemas 7.4

1. $\frac{2}{5}(x + 1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x + 1)^{3/2} + C$

3. $\frac{2}{27}(3t + 4)^{3/2} - \frac{8}{9}(3t + 4)^{1/2} + C$

5. $2\sqrt{2} - 2 - 2e\ln\left(\frac{\sqrt{2} + e}{1 + e}\right)$

7. $\frac{2}{63}(3t + 2)^{7/2} - \frac{4}{45}(3t + 2)^{5/2} + C$

9. $2\ln\left|\frac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{x}\right| + \sqrt{4 - x^2} + C$

11. $\frac{x}{4\sqrt{x^2 + 4}} + C$ **13.** $-\frac{\sqrt{2}}{9} - \frac{1}{2}\sec^{-1}(-3) + \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{3}$

15. $-2\sqrt{1 - z^2} - 3\,\text{sen}^{-1} z + C$

17. $\ln\left|\sqrt{x^2 + 2x + 5} + x + 1\right| + C$

19. $3\sqrt{x^2 + 2x + 5} - 3\ln\left|\sqrt{x^2 + 2x + 5} + x + 1\right| + C$

21. $\frac{9}{2}\text{sen}^{-1}\left(\frac{x + 2}{3}\right) + \frac{x + 2}{2}\sqrt{5 - 4x - x^2} + C$

23. $\text{sen}^{-1}\left(\frac{x - 2}{2}\right) + C$

25. $\ln|x^2 + 2x + 2| - \tan^{-1}(x + 1) + C$

27. $\frac{\pi}{16}\left(\frac{1}{10} + \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$ **29.** $\frac{1}{2}\ln|x^2 + 9| + C$

31. $2\ln\left|\frac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{x}\right| + \sqrt{4 - x^2} + C$

35. $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}, y = -\sqrt{a^2 - x^2} - a\ln\left|\frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right|$

Conjunto de problemas 7.5

1. $\ln|x| - \ln|x + 1| + C$

3. $-\frac{3}{2}\ln|x + 1| + \frac{3}{2}\ln|x - 1| + C$

5. $3\ln|x + 4| - 2\ln|x - 1| + C$

7. $4\ln|x + 5| - \ln|x - 2| + C$

9. $2\ln|2x - 1| - \ln|x + 5| + C$

11. $\frac{5}{3}\ln|3x - 2| + 4\ln|x + 1| + C$

13. $2\ln|x| - \ln|x + 1| + \ln|x - 2| + C$

15. $\ln|2x - 1| - \ln|x + 3| + 3\ln|x - 2| + C$

17. $\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{8}{3}\ln|x + 2| + \frac{1}{3}\ln|x - 1| + C$

19. $\frac{1}{2}x^2 - 2\ln|x| + 7\ln|x + 2| + 7\ln|x - 2| + C$

21. $\ln|x - 3| - \frac{4}{x - 3} + C$

23. $-\frac{3}{x + 1} + \frac{1}{2(x + 1)^2} + C$

25. $2\ln|x| + \ln|x - 4| + \frac{1}{x - 4} + C$

27. $-2\ln|x| + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + 2\ln|x^2 + 4| + C$

29. $-2\ln|2x - 1| + \frac{3}{2}\ln|x^2 + 9| + C$

31. $-\frac{2}{125}\ln|x - 1| - \frac{1}{25(x - 1)}$
$+ \frac{2}{125}\ln|x + 4| - \frac{1}{25(x + 4)} + C$

33. $\operatorname{sen} t - \frac{50}{13}\ln|\operatorname{sen} t + 3| - \frac{68}{13}\tan^{-1}(\operatorname{sen} t - 2)$
$-\frac{41}{26}\ln|\operatorname{sen}^2 t - 4\operatorname{sen} t + 5| + C$

35. $\frac{1}{2}\ln|x^2 + 1| + \frac{5}{2(x^2 + 1)} + C$

37. $\frac{3}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + \frac{2x - 5}{2(x^2 + 4)} + C$

39. $\frac{1}{8}\ln\left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}\right) + \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6\sqrt{2}}$

41. $y(t) = \frac{e^t}{1 + e^t}$; $y(3) \approx 0.953$

43. $y(t) = \frac{8000e^{2.4t}}{7 + e^{2.4t}}$; $y(3) \approx 7958.4$

45. $y(t) = \dfrac{Le^{KLt}}{\left(\frac{L - y_0}{y_0}\right) + e^{KLt}}$

47. Si $y_0 < L$, entonces $y'(0) = Ky_0(L - y_0) > 0$ y la población al inicio está creciendo.

49. **(a)** $y = \dfrac{16}{1 + 7e^{-\left(\frac{1}{50}\ln\frac{7}{3}\right)t}}$ **(b)** $y(90) \approx 6.34$ mil millones
(c) La población será de 9 mil millones en 2055.

51. **(a)** $x(t) = \dfrac{ab(1 - e^{(a-b)kt})}{b - ae^{(a-b)kt}}$ **(c)** 1.65 gramos
(d) $x(t) = a\left(\frac{akt}{akt + 1}\right)$

53. $y(t) = \dfrac{ACe^{(A+B)kt} - B}{1 + Ce^{(A+B)kt}}$

Conjunto de problemas 7.6

1. $-\frac{1}{5}e^{-5x}(\frac{1}{5} + x) + C$ **3.** $\frac{1}{2}[\ln 2]^2$

5. $\frac{1}{64}[24x + 8\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 8x] + C$

7. $\frac{1}{2}\left(\ln\frac{2}{3} - \ln\frac{3}{5}\right) \approx 0.0527$ **9.** $\frac{2}{15}\left[77\sqrt{7} + 8\sqrt{2}\right] \approx 28.67$

11. 0

13. **(a)** $\frac{2}{135}(9x - 2)(3x + 1)^{3/2} + C$
(b) $\frac{2}{135}(9e^x - 2)(3e^x + 1)^{3/2} + C$

15. **(a)** $\frac{1}{24}\ln\left|\frac{4x + 3}{4x - 3}\right| + C$ **(b)** $\frac{1}{24}\ln\left|\frac{4e^x + 3}{4e^x - 3}\right| + C$

17. **(a)** $\frac{1}{16}\left[x(4x^2 - 9)\sqrt{9 - 2x^2} + \frac{81}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}x}{3}\right)\right] + C$
(b) $\frac{1}{16}\Big[\operatorname{sen} x(4\operatorname{sen}^2 x - 9)\sqrt{9 - 2\operatorname{sen}^2 x}$
$+ \frac{81}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}\operatorname{sen} x}{3}\right)\Big] + C$

19. **(a)** $\frac{\sqrt{3}}{3}\ln|\sqrt{3}x + \sqrt{5 + 3x^2}| + C$
(b) $\frac{\sqrt{3}}{6}\ln|\sqrt{3}x^2 + \sqrt{5 + 3x^4}| + C$

21. **(a)** $\ln|(t + 1) + \sqrt{t^2 + 2t - 3}| + C$
(b) $\ln\left|\left(t + \frac{3}{2}\right) + \sqrt{t^2 + 3t - 5}\right| + C$

23. **(a)** $\frac{2}{27}(3y - 10)\sqrt{3y + 5} + C$
(b) $\frac{2}{27}(3\operatorname{sen} t - 10)\sqrt{3\operatorname{sen} t + 5} + C$

25. $\frac{1}{12}(\operatorname{senh} 6t - 6t) + C$

27. $\frac{1}{3}(1 - \cos t)\sqrt{2\cos t + 1} + C$

29. $-\frac{2}{5}\sqrt{\cos t + 1}\left[\cos^2 t - \frac{4}{3}(\cos t - 2)\right] + C$

31. $\pi - 2 \approx 1.14159$ **33.** $\frac{231\pi}{2048} \approx 0.35435$

35. 0.11083 **37.** 1.10577 **39.** $4\ln 2 + 2 \approx 4.77259$
41. $e - 1 \approx 1.71828$ **43.** $e - 1 \approx 1.71828$
45. $c \approx 0.59601$ **47.** $c \approx 0.16668$ **49.** $c \approx 9.2365$

51. $\bar{x} = \frac{8}{3(c + 1)}$; $c = \frac{1}{3}$

53. $\bar{x} = \frac{cu}{u + 18} + 3$ donde $u = -18e^{-c/3}$; $c \approx 5.7114$

55. **(a)** $\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ **(b)** $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$

57. **(a)** $\operatorname{erf}(x)$ es creciente en $(0, \infty)$.
(b) $\operatorname{erf}(x)$ no es cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$.

59. **(a)** $C(x)$ es creciente en $(0, 1) \cup (\sqrt{3}, 2)$.
(b) $C(x)$ es cóncava hacia arriba en $(\sqrt{2}, 2)$.

7.7 Revisión del capítulo

Examen de conceptos

1. Verdadero **3.** Falso **5.** Verdadero **7.** Verdadero
9. Verdadero **11.** Falso **13.** Verdadero **15.** Verdadero
17. Falso **19.** Verdadero **21.** Falso **23.** Verdadero
25. Falso **27.** Verdadero

Problemas de examen

1. 2 **3.** $e - 1$ **5.** $\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + 2y - 2\ln|1 + y| + C$

7. $\frac{1}{2}\ln|y^2 - 4y + 2| + C$ **9.** $e^t + 2\ln|e^t - 2| + C$

11. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x - 1}{3}\right) + C$ **13.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{y^2 + \frac{2}{3}} + y\right| + C$

15. $-\ln|\ln|\cos x|| + C$ **17.** $\cosh x + C$

19. $-x\cot x - \frac{1}{2}x^2 + \ln|\operatorname{sen} x| + C$ **21.** $\frac{1}{4}[\ln(t^2)]^2 + C$

23. $-\frac{3}{82}e^{t/3}(9\cos 3t - \operatorname{sen} 3t) + C$

25. $-\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$ **27.** $\frac{1}{6}\sec^3(2x) - \frac{1}{2}\sec(2x) + C$

29. $\frac{2}{5}\tan^{5/2} x + \frac{2}{9}\tan^{9/2} x + C$ **31.** $-\sqrt{9 - e^{2y}} + C$

33. $3\operatorname{sen} x + C$ **35.** $\frac{1}{4}\tan^{-1}(e^{4x}) + C$

37. $\frac{2}{3}(w + 5)^{3/2} - 10(w + 5)^{1/2} + C$

39. $-\frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{\cos^2 y}{3}\right) + C$

41. $\ln|x| - \frac{2}{x} - \frac{1}{2}\ln|x^2 + 3| + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$

43. **(a)** $\frac{A}{2x + 1} + \frac{B}{(2x + 1)^2} + \frac{C}{(2x + 1)^3}$

(b) $\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{2 - x} + \frac{D}{(2 - x)^2} + \frac{E}{(2 - x)^3}$

(c) $\frac{Ax + B}{x^2 + x + 10} + \frac{Cx + D}{(x^2 + x + 10)^2}$

(d) $\frac{A}{1 - x} + \frac{B}{(1 - x)^2} + \frac{C}{1 + x} + \frac{D}{(1 + x)^2}$
$+ \frac{Ex + F}{x^2 - x + 10} + \frac{Gx + H}{(x^2 - x + 10)^2}$

(e) $\frac{A}{x + 3} + \frac{B}{(x + 3)^2} + \frac{C}{(x + 3)^3} + \frac{D}{(x + 3)^4}$
$+ \frac{Ex + F}{x^2 + 2x + 10} + \frac{Gx + H}{(x^2 + 2x + 10)^2}$

(f) $\frac{Ax + B}{2x^2 + x + 10} + \frac{Cx + D}{(2x^2 + x + 10)^2} + \frac{Ex + F}{(2x^2 + x + 10)^3}$

45. $\sqrt{5} + 4\ln\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$

47. $2\pi \ln \frac{32}{25}$ **49.** $4\pi[2 - \ln 3 - \frac{1}{2}(\ln 3)^2]$ **51.** $\ln 7 - \frac{6}{7}$

53. $\ln\left(\frac{2\sqrt{3} + 3}{3}\right)$

55. **(a)** $\frac{\operatorname{sen} x}{2}\sqrt{\operatorname{sen}^2 x + 4} + 2\ln|\operatorname{sen} x + \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + 4}| + C$

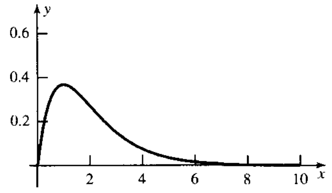
(b) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1 + 2x}{1 - 2x}\right| + C$

57. $c \approx 0.5165$

Problemas de repaso e introducción del capítulo 8

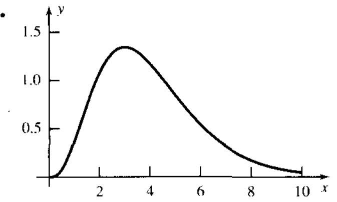
1. $\frac{5}{3}$ **3.** 6 **5.** 2 **7.** 1 **9.** 0 **11.** ∞ **13.** $\frac{\pi}{2}$

15.



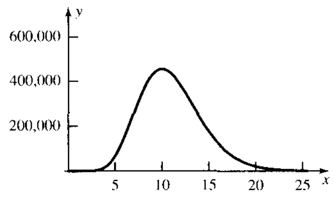
$\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0.$

17.



$\lim_{x\to\infty} x^3e^{-x} = 0.$

19.



$\lim_{x\to\infty} x^{10}e^{-x} = 0.$

21.

a	1	2	4	8	16
$1 - e^{-a}$	0.632	0.865	0.982	0.99966	0.999999887

23.

a	1	2	4	8	16
$\ln(\sqrt{1 + a^2})$	0.3466	0.8047	1.4166	2.0872	2.7745

25.

a	2	4	8	16
$1 - \frac{1}{a}$	0.5	0.75	0.875	0.9375

27.

a	1	1/2	1/4	1/8	1/16
$4 - 2\sqrt{a}$	2	2.58579	3	3.29289	3.5

Conjunto de problemas 8.1

1. 1 **3.** -1 **5.** $-\frac{2}{7}$ **7.** $-\infty$ **9.** 0

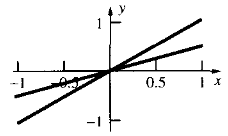
11. $-\frac{3}{2}$ **13.** $-\frac{2}{7}$ **15.** $-\frac{1}{4}$ **17.** $-\infty$ **19.** $-\frac{1}{24}$

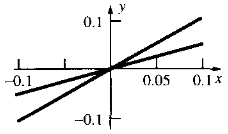
21. $-\infty$ **23.** 1

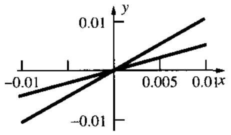
27. **(a)** $\frac{3}{4}$; **(b)** $\frac{1}{2}$

29. $c = 1$ **31.** $4\pi b^2$ **35.** $\frac{1}{24}$ **37.** 2

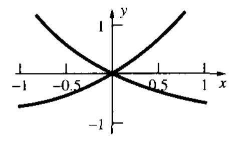
39. La razón de las pendientes es 1/2, lo cual indica que el límite de la razón debe ser alrededor de 1/2.

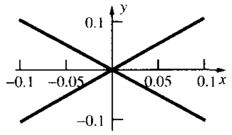


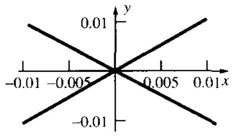




41. La razón de las pendientes es $-1/1 = -1$, lo cual indica que el límite de esta razón debe ser alrededor de -1.



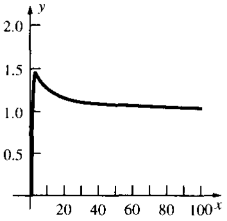




Conjunto de problemas 8.2

1. 0 **3.** 0 **5.** 3 **7.** 0 **9.** ∞ **11.** 0 **13.** 1
15. 1 **17.** 0 **19.** e^4 **21.** 1 **23.** 1 **25.** 0
27. 1 **29.** 0 **31.** ∞ **33.** 1
35. El límite no existe. **37.** 0 **39.** 1
41. **(a)** 1; **(b)** 1; **(c)** $\ln a$; **(d)** ∞

43. Cuando $x \to 0^+$, $y \to 0$. Cuando $x \to \infty$, $y \to 1$.
Valor máximo $e^{1/e}$ at $x = e$.



45. $1/(k + 1)$
47. **(a)** 3.162; **(b)** 4.163; **(c)** 4.562
49. No hay mínimo absoluto; mínimo absoluto en $x \approx 25$

Conjunto de problemas 8.3

1. Diverge **3.** $\frac{1}{e}$ **5.** Diverge **7.** 100,000
9. Diverge **11.** Diverge **13.** $\frac{1}{2}(\ln 2 + 1)$ **15.** $-\frac{1}{4}$
17. Diverge **19.** $\frac{\pi}{3}$ **21.** π **23.** $\frac{1}{2}$ **25.** $\frac{1}{2}\ln 3$
29. \$1,250,000
31. **(b)** $\mu = \dfrac{a + b}{2}; \sigma^2 = \dfrac{(b - a)^2}{12}$; **(c)** $\dfrac{1}{5}$
35. **(a)** $C = 3$ y $M = \dfrac{4 \times 10^4}{3}$; **(b)** $\sigma^2 = \dfrac{4 \times 10^8}{3}$
(c) $^6\!/_{25}$ de 1% gana más de \$100,000

41. $\displaystyle\int_1^{100} \frac{1}{x^2}dx = 0.99; \int_1^{100} \frac{1}{x^{1.1}}dx \approx 3.69$

$\displaystyle\int_1^{100} \frac{1}{x^{1.01}}dx \approx 4.50; \int_1^{100} \frac{1}{x}dx = \ln 100 \approx 4.61;$

$\displaystyle\int_1^{100} \frac{1}{x^{0.99}}dx \approx 4.71$

43. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-0.5x^2)\,dx \approx 0.6827;$

$\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-0.5x^2)\,dx \approx 0.9545;$

$\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-0.5x^2)\,dx \approx 0.9973;$

$\displaystyle\int_{-4}^{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-0.5x^2)\,dx \approx 0.9999$

Conjunto de problemas 8.4

1. $\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$ **3.** $2\sqrt{7}$ **5.** $\frac{\pi}{2}$ **7.** Diverge **9.** $\frac{21}{2}$
11. $\frac{1}{2}(2^{2/3} - 10^{2/3})$ **13.** Diverge **15.** Diverge
17. Diverge **19.** Diverge **21.** Diverge
23. Diverge **25.** Diverge **27.** $2\sqrt{2}$ **29.** Diverge
31. $\ln(2 + \sqrt{3})$ **35.** 0 **37.** Diverge **41.** 6
43. **(a)** 3 **45.** No **49.** Converge

55. **(a)** $C = \beta^\alpha/\Gamma(\alpha)$; **(b)** $\mu = \alpha/\beta$; **(c)** $\sigma^2 = \alpha/\beta^2$
57. **(a)** $\frac{\pi}{2}$; **(b)** π

8.5 Revisión del capítulo

Examen de conceptos

1. Verdadero **3.** Falso **5.** Falso **7.** Verdadero
9. Verdadero **11.** Falso **13.** Verdadero **15.** Verdadero
17. Falso **19.** Verdadero **21.** Verdadero **23.** Verdadero
25. Falso

Problemas de examen

1. 4 **3.** 0 **5.** 2 **7.** 0 **9.** 0 **11.** 1 **13.** 0
15. 0 **17.** 1 **19.** 1 **21.** $\frac{1}{2}e^2$ **23.** Diverge
25. $1 - \frac{\pi}{4}$ **27.** Diverge **29.** $\frac{1}{\ln 2}$ **31.** 6
33. Diverge **35.** $\frac{\pi}{4}$ **37.** 0
39. Converge: $p > 1$; diverge: $p \leq 1$
41. Converge **43.** Diverge

Problemas de repaso e introducción del capítulo 9

1. Original: si $x > 0$, entonces $x^2 > 0$. (ST, siempre verdadera)
Recíproco: si $x^2 > 0$, entonces $x > 0$.
Contrapositiva: si $x^2 \leq 0$, entonces $x \leq 0$. (SV)
3. Original: f es derivable en $c \Rightarrow f$ es continua en c (SV)
Recíproca: f es continua en $c \Rightarrow f$ es derivable en c
Contrapositiva: f discontinua en $c \Rightarrow f$ no es derivable en c (SV)
5. Original: f continua por la derecha en $c \Rightarrow f$ es continua en c
Recíproca: f continua en $c \Rightarrow f$ es continua por la derecha en c (SV)
Contrapositiva: f no es continua en $c \Rightarrow f$ no es continua a la derecha en c
7. Original: $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$ (SV)
Recíproca: $f'(x) = 2x \Rightarrow f(x) = x^2$
Contrapositiva: $f'(x) \neq 2x \Rightarrow f(x) \neq x^2$ (SV)
9. $\dfrac{7}{4}$ **11.** $\dfrac{25}{12}$ **13.** $\dfrac{1}{2}$ **15.** 0 **17.** Diverge
19. Converge **21.** Diverge

Conjunto de problemas 9.1

1. $\frac{1}{3}$ **3.** 4 **5.** 1 **7.** Diverge **9.** 0 **11.** Diverge
13. 0 **15.** 2 **17.** 0 **19.** e **21.** $a_n = \dfrac{n}{n + 1}$; 1
23. $a_n = (-1)^n\dfrac{n}{2n - 1}$; diverge **25.** $a_n = \dfrac{n}{2n - 1}; \dfrac{1}{2}$
27. $a_n = n \operatorname{sen}\dfrac{1}{n}$; 1 **29.** $a_n = \dfrac{2^n}{n^2}$; diverge **31.** $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{8}, \frac{13}{16}$
33. $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{3}{5}$ **35.** $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}$ **37.** 2.3028 **39.** $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{13})$
41. 1.1118 **43.** $1 - \cos 1$ **51.** No **53.** $\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$
55. $e^{1/2}$ **57.** e^{-2} **59.** e^{-1}

Conjunto de problemas 9.2

1. $\frac{1}{6}$ **3.** $\frac{31}{6}$ **5.** Diverge **7.** -1 **9.** Diverge
11. $\dfrac{e^2}{\pi(\pi - e)}$ **13.** 3 **15.** $\frac{2}{9}$ **17.** $\frac{13}{999}$ **19.** $\frac{1}{2}$
21. 1 **25.** 500 pies **27.** \$4 mil millones **29.** $\frac{1}{4}$ **31.** $\frac{4}{5}$; No
33. **(a)** Perímetro infinito, **(b)** $A = \dfrac{8}{5}\left(\dfrac{81\sqrt{3}}{4}\right)$
35. $111\frac{1}{9}$yd **37.** $\dfrac{3}{5}$ **39.** $\Pr(X = n) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}\left(\dfrac{1}{6}\right)$

43. **(b)** De manera indefinida.
47. **(a)** 2; **(b)** 1
49. **(a)** $\frac{Ce^{kt}}{e^{kt}-1}$; **(b)** $\frac{8}{3}$mg
51. 1

Conjunto de problemas 9.3

1. Diverge **3.** Diverge **5.** Diverge **7.** Diverge
9. Converge **11.** Converge **13.** Diverge
15. Diverge **17.** Diverge **19.** Converge
21. Converge **23.** 0.0404 **25.** 0.1974 **27.** $n > 5000$
29. $n > 5000$ **31.** $n > 50$ **33.** $p > 1$
39. 272,404,866

Conjunto de problemas 9.4

1. Diverge **3.** Converge **5.** Converge **7.** Diverge
9. Converge **11.** Diverge; criterio del n-ésimo término
13. Converge; criterio de comparación de límites
15. Converge; criterio del cociente
17. Converge; criterio de comparación de límites
19. Converge; criterio de comparación de límites
21. Converge; criterio de comparación de límites
23. Converge; criterio del cociente
25. Converge; criterio de la integral
27. Diverge; criterio del n-ésimo término
29. Converge; criterio de comparación de límites
31. Converge; criterio del cociente
33. Converge; criterio del cociente
43. **(a)** Diverge; **(b)** Converge; **(c)** Converge;
(d) Converge; **(e)** Diverge **(f)** Converge
45. Converge para $p > 1$, diverge para $p \leq 1$.

Conjunto de problemas 9.5

1. $|S - S_9| \leq 0.065$ **3.** $|S - S_9| \leq 0.417$
5. $|S - S_9| \leq 0.230$ **13.** Condicionalmente convergente
15. Divergente **17.** Condicionalmente convergente
19. Absolutamente convergente **21.** Condicionalmente convergente
23. Condicionalmente convergente **25.** Absolutamente convergente
27. Condicionalmente convergente **29.** Divergente
35. **(a)** $1 + \frac{1}{3} \approx 1.33$; **(b)** $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \approx 0.833$
45. ln 2

Conjunto de problemas 9.6

1. Toda x **3.** $-1 \leq x \leq 1$ **5.** $-1 \leq x \leq 1$
7. $1 < x \leq 3$ **9.** $-1 \leq x \leq 1$ **11.** All x
13. $-1 < x < 1$ **15.** $-1 < x \leq 1$ **17.** $-1 \leq x \leq 1$
19. $-2 < x < 2$ **21.** Toda x **23.** $0 \leq x < 2$
25. $-3 < x < 1$ **27.** $-6 \leq x \leq -4$
29. Si $\lim_{n\to\infty} \frac{x_0^n}{n!} \neq 0$, entonces $\sum \frac{x_0^n}{n!}$ no convergerá.
31. $\sqrt{2}$ **33.** $\frac{1}{4-x}$; $2 < x < 4$
35. **(a)** $-1 \leq x < \frac{1}{3}$; **(b)** $-\frac{1}{2} < x \leq \frac{7}{2}$
37. $S(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2}{1 - x^3}$, $|x| < 1$

Conjunto de problemas 9.7

1. $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots; 1$
3. $1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots; 1$
5. $\frac{1}{2} + \frac{3x}{4} + \frac{9x^2}{8} + \frac{27x^3}{16} + \cdots; \frac{2}{3}$
7. $x^2 + x^6 + x^{10} + x^{14} + \cdots; 1$
9. $\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{20} + \cdots; 1$
11. $2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \cdots; 1$
13. $1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots$
15. $2 + \frac{2x^2}{2!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{2x^6}{6!} + \cdots$
17. $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{3x^4}{8} + \frac{11x^5}{30} + \cdots$
19. $x - x^2 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots$
21. $x + \frac{2x^3}{3} + \frac{13x^5}{15} - \frac{29x^7}{105} + \cdots$
23. $x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{3x^5}{40} - \cdots$
25. **(a)** $\frac{x}{1+x}$; **(b)** $\frac{e^x - (1 + x)}{x^2}$; **(c)** $-\ln(1 - 2x)$
27. $\frac{x}{(1-x)^2}$, $-1 < x < 1$
29. **(a)** $x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \cdots$; **(b)** $1 + x + x^2 + \frac{5x^3}{6} + \cdots$
31. $\frac{x}{2} + \frac{3x^2}{4} + \frac{7x^3}{8} + \cdots$ **33.** $\frac{x}{1 - x - x^2}$ **35.** 3.14159

Conjunto de problemas 9.8

1. $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$ **3.** $x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30}$
5. $x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40}$ **7.** $1 + 3x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{60}$
9. $1 + x + \frac{3x^2}{2} + \frac{3x^3}{2} + \frac{37x^4}{24} + \frac{37x^5}{24}$ **11.** $1 - x + x^3 - x^4$
13. $x^3 - \frac{x^5}{2}$ **15.** $2x - \frac{x^3}{6} + \frac{61x^5}{120}$
17. $1 + \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + \frac{3x^4}{128} - \frac{3x^5}{256}$
19. $e + e(x - 1) + \frac{e}{2}(x - 1)^2 + \frac{e}{6}(x - 1)^3$
21. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3$
23. $3 + 5(x - 1) + 4(x - 1)^2 + (x - 1)^3$
27. $x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112}$ **29.** 0.9045
31. $1 - (x - 1) + (x - 1)^2 - (x - 1)^3 + \cdots$
33. **(a)** 25; **(b)** -3; **(c)** 0; **(d)** $4e$; **(e)** -4
35. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$ **41.** $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$
43. $-2 + x - x^2 - \frac{5x^3}{6}$ **45.** $x + \frac{x^2}{2} - \frac{5x^4}{24} - \frac{23x^5}{120}$
47. $x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30}$

Conjunto de problemas 9.9

1. $1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4$; 1.2712 **3.** $2x - \frac{4}{3}x^3$; 0.2377
5. $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$; 0.1133 **7.** $x - \frac{1}{3}x^3$; 0.1194

9. $e + e(x - 1) + \frac{e}{2}(x - 1)^2 + \frac{e}{6}(x - 1)^3$

11. $\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{4}{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{4\sqrt{3}}{9}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{8}{9}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3$

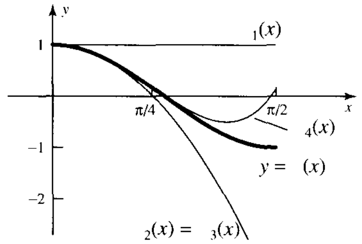
13. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{4}(x - 1)^2 - \frac{1}{12}(x - 1)^3$

15. $7 + 2(x - 1) + (x - 1)^2 + (x - 1)^3$

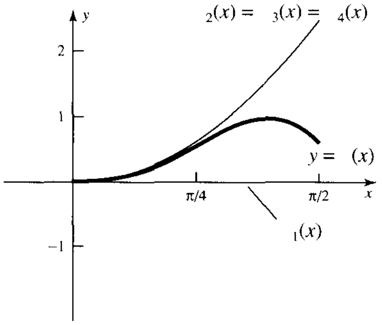
17. $f(x) \approx 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

(a) 1.1111; **(b)** 1.9375; **(c)** 4.0951; **(d)** 31

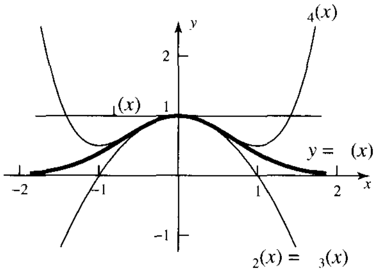
19.



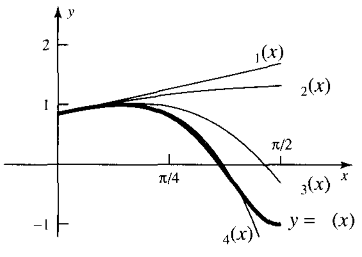
21.



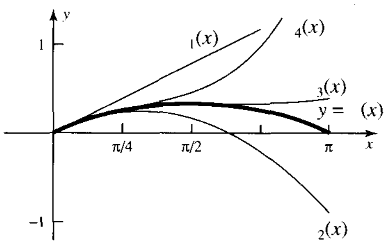
23.



25.



27.



29. $e^6 + 1$ **31.** $2\sqrt{2}\pi$ **33.** $\frac{e^4}{3}$ **35.** $\frac{17}{10 \ln 2}$

37. $R_6(x) = \frac{x^7}{7(2 + c)^7}$; 8.719×10^{-6}

39. $R_6(x) = -\frac{\cos c}{5040}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^7$; 2.685×10^{-8}

41. $R_6(x) = \frac{-(x - 1)^7}{c^8}$; 2 **43.** $n \geq 9$

45. $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$; $|R_3(x)| \leq 0.0276$

47. $1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3$; $|R_3(x)| \leq 2.15 \times 10^{-6}$

49. 0.1224; $|\text{Error}| \leq 0.00013025$ **51.** $n > 42$

53. $A = \frac{1}{2}tr^2 - \frac{1}{2}r^2 \operatorname{sen} t$; $A \approx \frac{1}{12}r^2t^3$

55. (c)

r	n (exacta)	n (aprox.)	n (regla del 72)
0.05	13.892	13.889	14.4
0.10	6.960	6.959	7.2
0.15	4.650	4.649	4.8
0.20	3.495	3.494	3.6

57. $-1 - (x - 1)^2 + (x - 1)^3 + (x - 1)^4$

59. 0.681998; $|R_3| \leq 6.19 \times 10^{-8}$

9.10 Revisión del capítulo

Examen de conceptos

1. Falso **3.** Verdadero **5.** Falso **7.** Falso **9.** Verdadero
11. Verdadero **13.** Falso **15.** Verdadero **17.** Falso
19. Verdadero **21.** Verdadero **23.** Verdadero **25.** Verdadero
27. Verdadero **29.** Verdadero **31.** Verdadero **33.** Falso
35. Verdadero **37.** Verdadero **39.** Verdadero **41.** Verdadero

Problemas de examen

1. 3 **3.** e^4 **5.** 1 **7.** 0 **9.** 1 **11.** Diverge

13. $\frac{e^2}{e^2 - 1}$ **15.** $\frac{91}{99}$ **17.** cos 2 **19.** Diverge

21. Converge **23.** Converge **25.** Diverge
27. Converge **29.** Diverge **31.** Converge
33. Condicionalmente convergente **35.** Diverge

37. $-1 \leq x \leq 1$ **39.** $3 < x \leq 5$ **41.** $1 < x < 5$

43. $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots$; $-1 < x < 1$

45. $x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} - \frac{x^8}{315} + \cdots$; toda x

47. $1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$; toda x **49.** $n > 3$

51. **(a)** $1 + x^3 + x^6$ **(b)** $1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4$ **(c)** $\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$
(d) $x + \frac{x^3}{2} + \frac{5x^5}{4!}$ **(e)** $x - x^2 + \frac{x^3}{3}$ **(f)** $1 - x + x^2$

53. $P(x) = x$; 0.2

55. $P_4(x) = 3 + 9(x - 2) + 4(x - 2)^2 + (x - 2)^3$

57. $f(x) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x - 1) + \frac{1}{8}(x - 1)^2 - \frac{1}{16}(x - 1)^3 + \frac{1}{32}(x - 1)^4$

59. $\operatorname{sen}^2 x \approx x^2 - \frac{1}{3}x^4$; $|R_4(x)| < 2.85 \times 10^{-6}$

61. -0.00269867; Error $< 1.63 \times 10^{-5}$

Problemas de repaso e introducción del capítulo 10

1. **(a)** $y = x - 1$ **(b)** $y = -x + 3$

3. $(2.4, 2.4), (-2.4, 2.4), (2.4, -2.4), (-2.4, -2.4)$

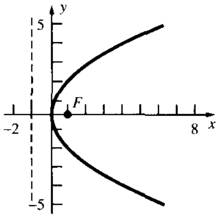
5. $y = 2\sqrt{3}x + 4$

7. $(5, 4\sqrt{3}), (-5, 4\sqrt{3}), (5, -4\sqrt{3}), (-5, -4\sqrt{3})$;
$T_1: 4\sqrt{3}x + 15y = 80\sqrt{3}$; $T_2: 5\sqrt{3}x - 4y = 9\sqrt{3}$; $\alpha = 90°$

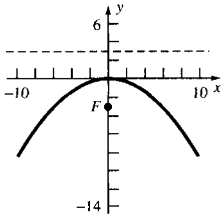
9. $r = 5$; $\theta = \text{sen}^{-1}(0.6)$ **11.** $x = y = 4\sqrt{2}$

Conjunto de problemas 10.1

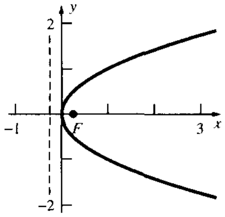
1. Foco en $(1, 0)$;
directriz $x = -1$



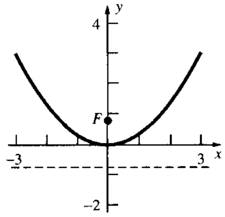
3. Foco en $(0, -3)$;
directriz $y = 3$



5. Foco en $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$;
directriz $x = -\frac{1}{4}$

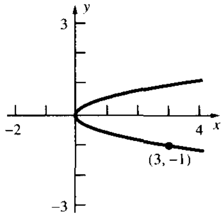


7. Foco en $\left(0, \frac{3}{4}\right)$;
directriz $y = -\frac{3}{4}$

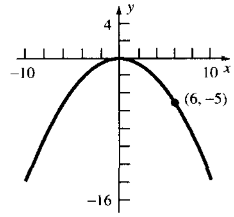


9. $y^2 = 8x$ **11.** $x^2 = -8y$ **13.** $y^2 = -16x$

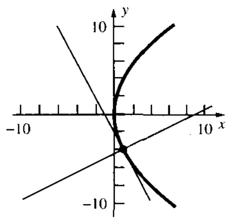
15. $y^2 = \frac{1}{3}x$



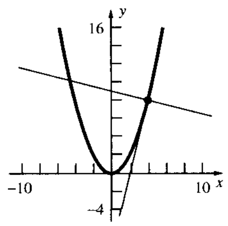
17. $x^2 = -\frac{36}{5}y$



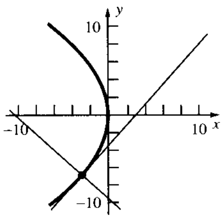
19. $y = -2x - 2$;
$y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$



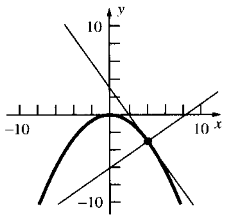
21. $y = 4x - 8$;
$y = -\frac{1}{4}x + 9$



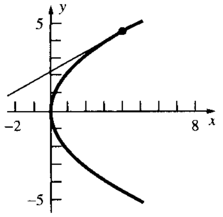
23. $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x - \frac{3\sqrt{5}}{2}$;
$y = -\frac{2\sqrt{5}}{5}x - \frac{21\sqrt{5}}{5}$



25. $y = -\sqrt{2}x + 3$;
$y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - 6$



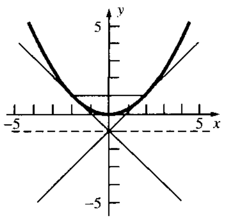
27. $(4, 2\sqrt{5})$



29. $y = \frac{3}{2}x - 3$ **35.** 14.8 millones de millas **37.** $2p$

39. $L = 4p$ **41.** $y = \dfrac{\delta x^2}{2H}$

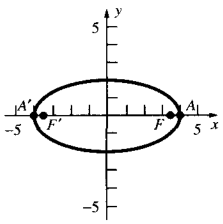
43.



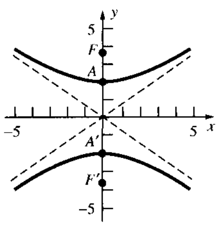
Conjunto de problemas 10.2

1. Elipse horizontal **3.** Hipérbola vertical
5. Parábola vertical (abre hacia arriba) **7.** Elipse vertical

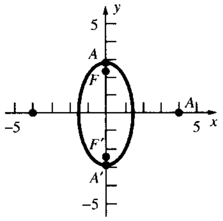
9.



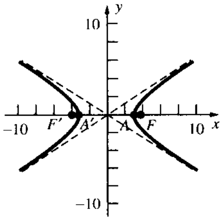
11.



13.



15.



17. $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{27} = 1$ **19.** $\dfrac{x^2}{200} + \dfrac{y^2}{225} = 1$ **21.** $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{\frac{225}{21}} = 1$

23. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ **25.** $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{16} = 1$ **27.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

29. $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{20} = 1$ **31.** $\frac{x^2}{88} + \frac{y^2}{169} = 1$ **33.** $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{13} = 1$

35. $x + \sqrt{6}y = 9$ **37.** $x - \sqrt{6}y = 9$

39. $5x + 12y = 169$ **41.** $y = 13$ **43.** 8.66 pies **45.** $\frac{2b^2}{a}$

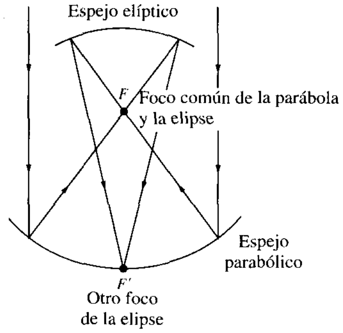
47. 0.58 AU **49.** 0.05175 **51.** $\left(-\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right), \left(\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$

53. $(-7, 3), (7, -3)$ **55.** πab

57. $\frac{\pi b^2}{3a^2}\left[(a^2 + b^2)^{3/2} - 3a^2\sqrt{a^2 + b^2} + 2a^3\right]$

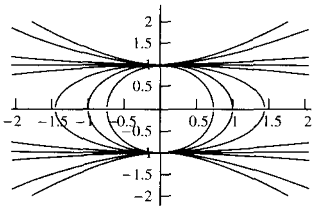
59. $a\sqrt{2}$ by $b\sqrt{2}$ **61.** $\left(6, 5\sqrt{3}\right)$

63.



69. $\left(\sqrt{\frac{17}{3}}, 5\right)$ **73.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

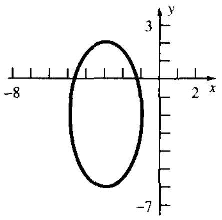
77.



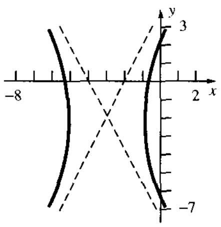
Conjunto de problemas 10.3

1. Circunferencia **3.** Elipse **5.** Un punto **7.** Parábola
9. Conjunto vacío **11.** Rectas que se intersecan **13.** Una recta

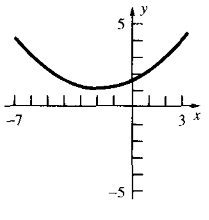
15.



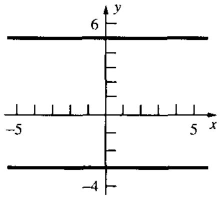
17.



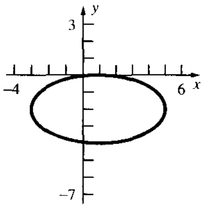
19.



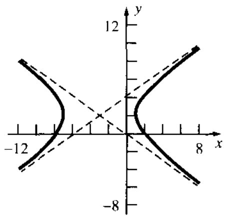
21.



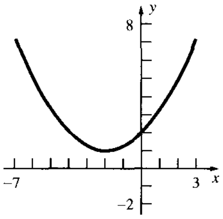
23.



25.



27.



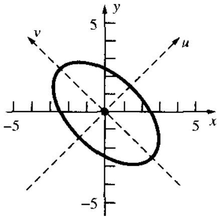
29. Foco en $\left(\frac{21}{20}, 1\right)$; directriz $x = -\frac{29}{20}$ **31.** $(-2, 2), (4, -2)$

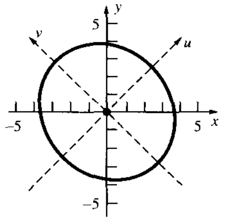
33. $\frac{(x - 5)^2}{25} + \frac{(y - 1)^2}{16} = 1$ **35.** $(x - 2)^2 = 8(y - 3)$

37. $\frac{(y - 3)^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ **39.** $(y - 5)^2 = -16(x - 6)$

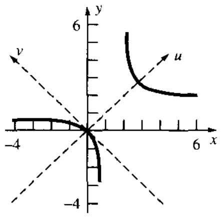
41. $\frac{x^2}{8} + \frac{(y - 2)^2}{4} = 1$

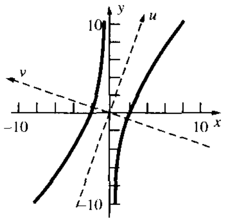
43. $\frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{12} = 1$ **45.** $\frac{u^2}{\frac{112}{9}} + \frac{v^2}{16} = 1$



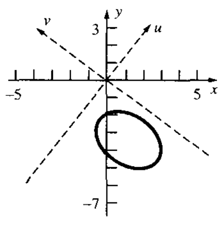


47. $\frac{(u - 2)^2}{4} - \frac{v^2}{3} = 1$ **49.** $\frac{v^2}{4} - \frac{u^2}{36} = 1$





51. $\frac{(u + 2)^2}{2} + \frac{(v + 3)^2}{4} = 1$



53. **(a)** $y = x^2 - x$; **(b)** $x = \frac{1}{4}y^2 - y$;
(c) $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$

55. Si $K < -1$, la cónica es una elipse vertical. Si $K = -1$, la cónica es una circunferencia. Si $-1 < K < 0$, la cónica es una elipse horizontal Si $K = 0$, la cónica es una parábola horizontal. Si $K > 0$, la cónica es una hipérbola horizontal.

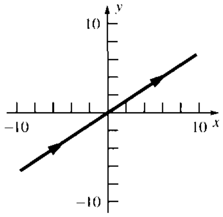
59. $u = x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta$, $v = -x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta$

61. $\left(-\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}\right), \left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$

67. **(a)** $-2 < B < 2$; **(b)** $B = 0$; **(c)** $B < -2$ o $B > 2$;
(d) $B = \pm 2$

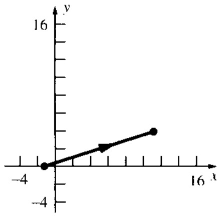
Conjunto de problemas 10.4

1. **(a)**



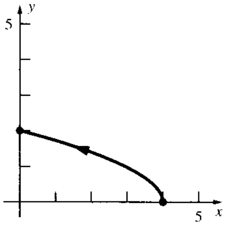
(b) Simple; no cerrada
(c) $y = \frac{2}{3}x$

3. **(a)**



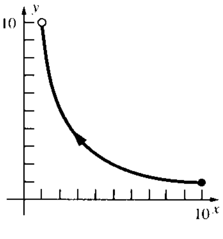
(b) Simple; no cerrada
(c) $y = \frac{1}{3}(x + 1)$

5. **(a)**



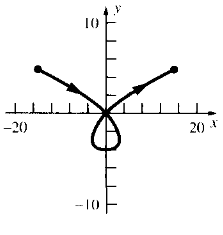
(b) Simple; no cerrada
(c) $y = \sqrt{4 - x}$

7. **(a)**



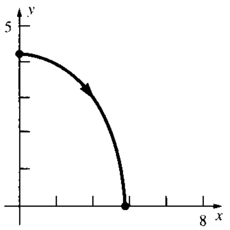
(b) Simple; no cerrada
(c) $y = \frac{1}{x}$

9. **(a)**



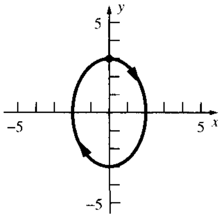
(b) No es simple; no es cerrada
(c) $x^2 = y^3 + 4y^2$

11. **(a)**



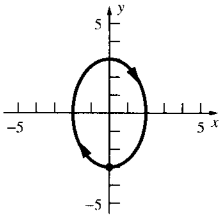
(b) Simple; no cerrada
(c) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{18} = 1$

13. **(a)**



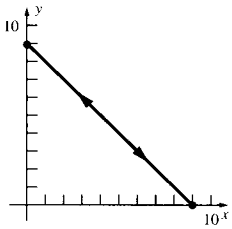
(b) Simple; cerrada
(c) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

15. **(a)**



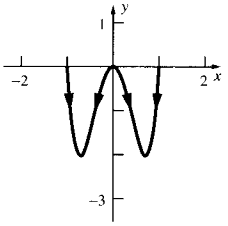
(b) No es simple; cerrada
(c) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

17. **(a)**



(b) No es simple; cerrada
(c) $x + y = 9$

19. **(a)**



(b) No es simple; no es cerrada
(c) $y = -8x^2(1 - x^2)$

21. $\frac{dy}{dx} = 2\tau; \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3\tau}$ **23.** $\frac{dy}{dx} = \frac{3\sqrt{5}}{4}\theta; \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3\sqrt{5}}{16\theta}$

25. $\frac{dy}{dx} = \cot t; \frac{d^2y}{dx^2} = -\csc^3 t$

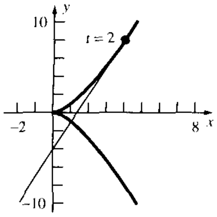
27. $\frac{dy}{dx} = \frac{5}{3}\mathrm{sen}\, t; \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{5}{9}\cos^3 t$

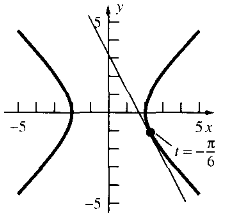
29. $\frac{dy}{dx} = \frac{(1 - 2t)(1 + t^2)^2}{2t^3(1 - t)^2}$;

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(3t^5 + 7t^4 - 6t^3 + 10t^2 - 9t + 3)(1 + t^2)^2}{4t^5(1 - t)^3}$$

31. $y - 8 = 3(x - 4)$

33. $y + \frac{2}{\sqrt{3}} = -2\left(x - \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$





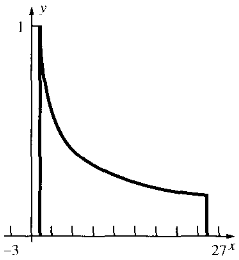
35. $3\sqrt{13}$ **37.** $\frac{1}{27}\left(31\sqrt{31} - 8\right)$ **39.** $16\sqrt{2} - 8$

41. $\frac{713\sqrt{713} - 227\sqrt{227}}{243}$ **43.** $\frac{39}{16}$ **45.** $\frac{1}{2}\ln 2$

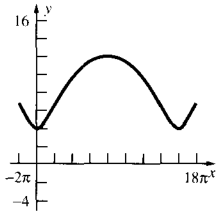
47. **(a)** 2π; **(b)** 6π;
(c) La curva en la parte **(a)** da una vuelta alrededor de la circunferencia unitaria. La curva en la parte **(b)** da tres vueltas alrededor de la circunferencia unitaria.

49. $4\pi^2$ **51.** $4\pi^2$ **53.** $\frac{2\pi}{3}\left(29\sqrt{29} - 1\right)$ **55.** $-\frac{44}{3}$

57. 8



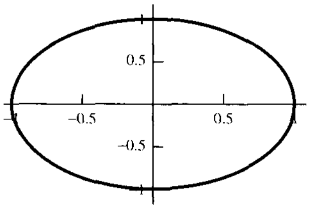
59.



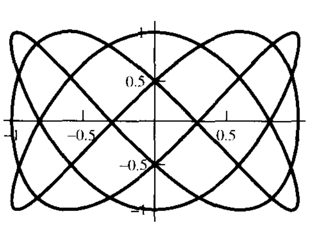
61. $x = (a - b)\cos t + b\cos\left(\frac{a - b}{b}t\right)$,
$y = (a - b)\operatorname{sen} t - b\operatorname{sen}\left(\frac{a - b}{a}t\right)$

65. $L = \frac{16a}{3}$

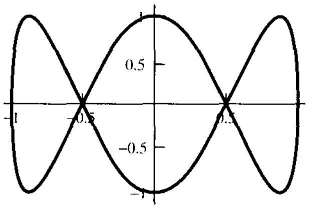
67. **(a)**



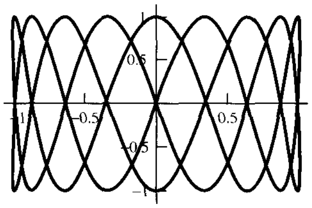
(b)



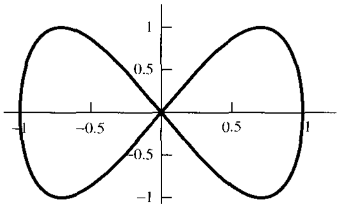
(c)



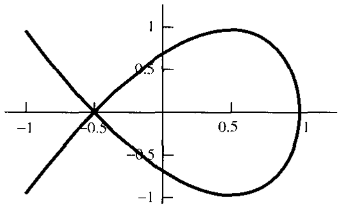
(d)



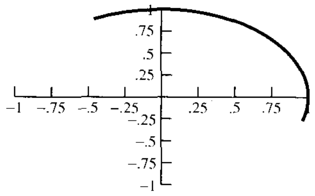
69. a, b, c



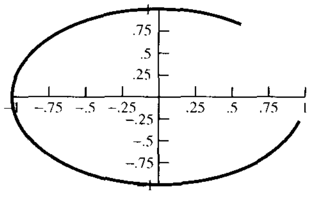
d, e, f



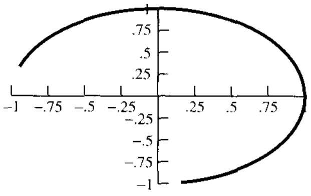
71. **(a)** $0 \le t \le 2$



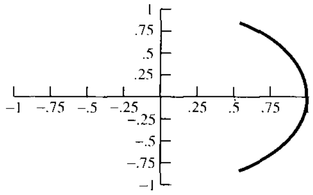
(b) $0 \le t \le 1$



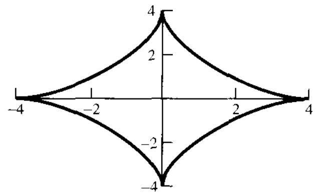
(c) $0.25 \le t \le 2$



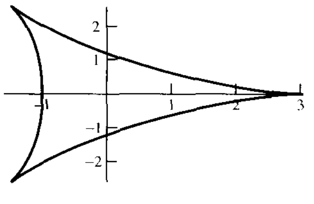
(d) $0 \le t \le 2\pi$



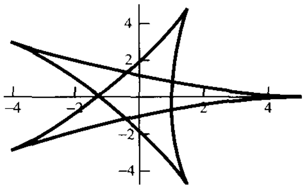
73. **(a)**



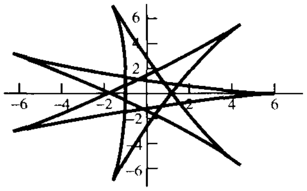
(b)



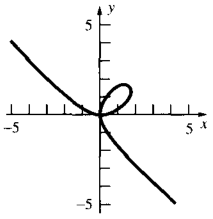
(c)



(d)

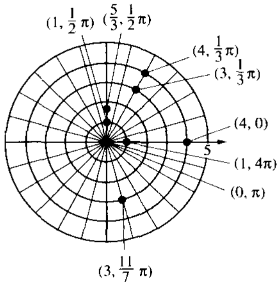


75. Primer cuadrante para $t > 0$; segundo cuadrante para $-1 < t < 0$; tercer cuadrante para ninguna t; cuarto cuadrante para $t < -1$.

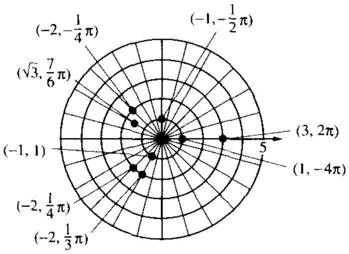


Conjunto de problemas 10.5

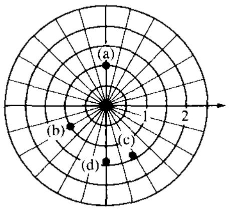
1.



3.



5.



(a) $\left(1, -\frac{3}{2}\pi\right), \left(1, \frac{5}{2}\pi\right), \left(-1, -\frac{1}{2}\pi\right), \left(-1, \frac{3}{2}\pi\right)$

(b) $\left(1, -\frac{3}{4}\pi\right), \left(1, \frac{5}{4}\pi\right), \left(-1, -\frac{7}{4}\pi\right), \left(-1, \frac{9}{4}\pi\right)$

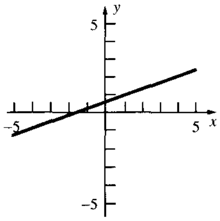
(c) $\left(\sqrt{2}, -\frac{7}{3}\pi\right), \left(\sqrt{2}, \frac{5}{3}\pi\right), \left(-\sqrt{2}, -\frac{4}{3}\pi\right), \left(-\sqrt{2}, \frac{2}{3}\pi\right)$

(d) $\left(\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\pi\right), \left(\sqrt{2}, \frac{3}{2}\pi\right), \left(-\sqrt{2}, -\frac{3}{2}\pi\right), \left(-\sqrt{2}, \frac{1}{2}\pi\right)$

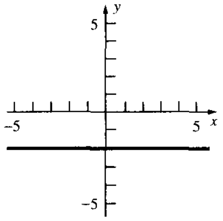
7. **(a)** $(0, 1)$; **(b)** $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; **(c)** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$; **(d)** $\left(0, -\sqrt{2}\right)$

9. **(a)** $\left(6, \frac{1}{6}\pi\right)$; **(b)** $\left(4, \frac{5}{6}\pi\right)$; **(c)** $\left(2, \frac{5}{4}\pi\right)$; **(d)** $(0, 0)$

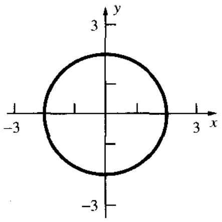
11. $r = \dfrac{2}{3 \operatorname{sen} \theta - \cos \theta}$



13. $r = -2 \csc \theta$

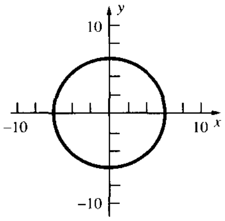


15. $r = 2$

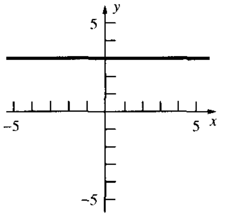


17. $x = 0$ **19.** $x = -3$ **21.** $y = 1$

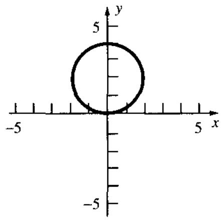
23. Circunferencia



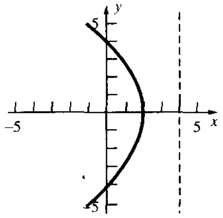
25. Recta



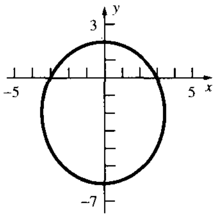
27. Circunferencia



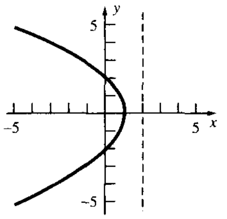
29. Parábola; $e = 1$



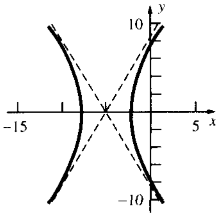
31. Elipse; $e = \frac{1}{2}$



33. Parábola; $e = 1$

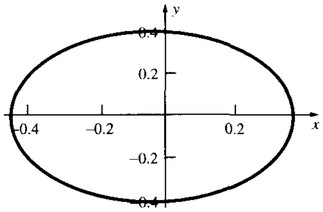


35. Hipérbola; $e = 2$

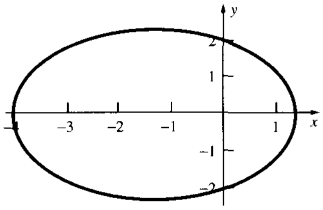


39. $2ed$ **41.** 0.83 **43.** 25 millones de millas

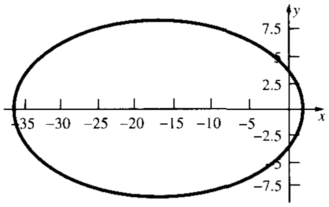
45. $e = 0.1$



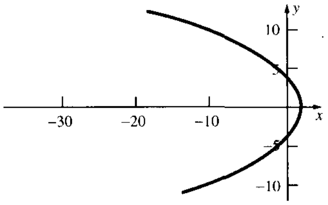
$e = 0.5$



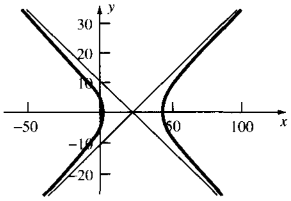
$e = 0.9$



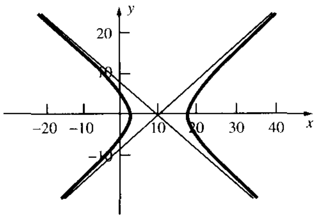
$e = 1$



$e = 1.1$

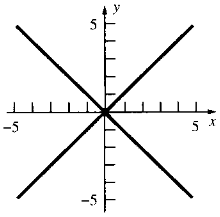


$e = 1.3$

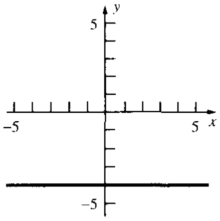


Conjunto de problemas 10.6

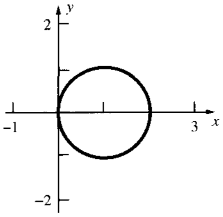
1.



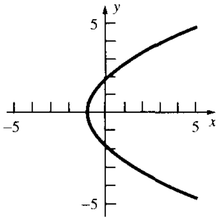
3.



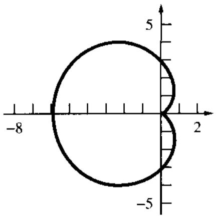
5.



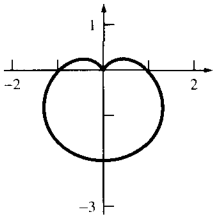
7.



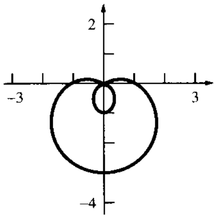
9.



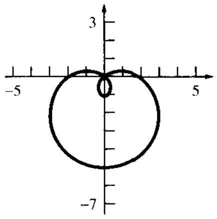
11.



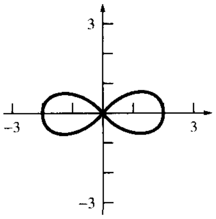
13.



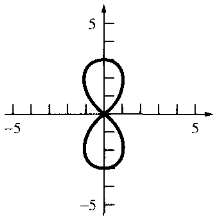
15.



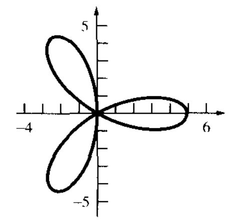
17.



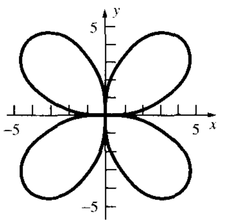
19.



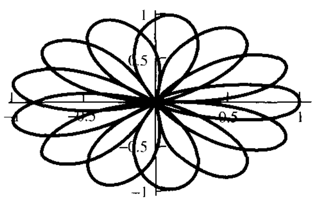
21.



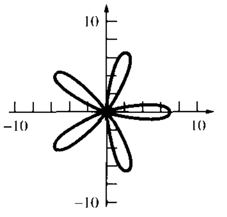
23.



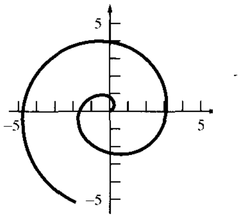
47.



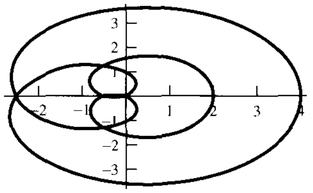
25.



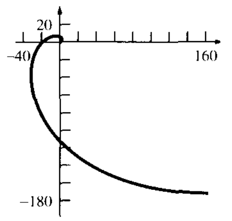
27.



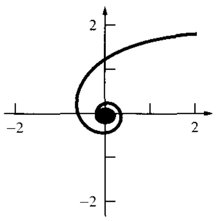
49.



29.

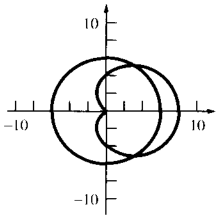


31.

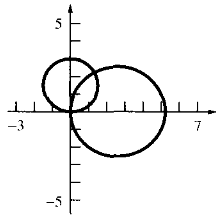


51. **(a)** La gráfica para $\phi = 0$ es la gráfica para $\phi \neq 0$, girando ϕ en contra del sentido de las manecillas del reloj alrededor del polo.
(b) Conforme n aumenta, el número de "hojas" aumenta.
53. La espiral se desenrolla en el sentido de las manecillas del reloj para $c < 0$. La espiral se desenrolla en el sentido contrario a las manecillas del reloj para $c > 0$.
55. **(a)** III; **(b)** IV; **(c)** I; **(d)** II; **(e)** VI; **(f)** V

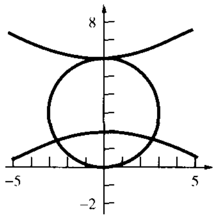
33. $\left(6, \frac{\pi}{3}\right), \left(6, \frac{5\pi}{3}\right)$



35. $(0, 0), \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$



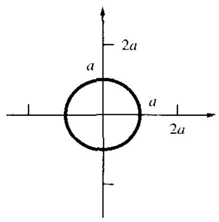
37. $\left(3, \frac{\pi}{6}\right), \left(3, \frac{5\pi}{6}\right), \left(6, \frac{\pi}{2}\right)$



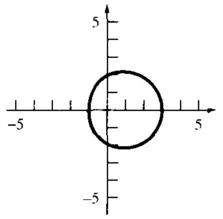
43. **(a)** $r = \frac{45}{\mathrm{sen}\,\theta}$; **(b)** $r = 6$; **(c)** $r = \pm\frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}$
(d) $r = \pm\frac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{sen}\,2\theta}}$; **(e)** $r = \frac{2}{\mathrm{sen}\,\theta - 3\cos\theta}$;
(f) $r = \frac{-2\,\mathrm{sen}\,\theta \pm \sqrt{4\,\mathrm{sen}^2\theta + 6\cos^2\theta}}{3\cos^2\theta}$;
(g) $r = -\cos\theta + 2\,\mathrm{sen}\,\theta \pm \sqrt{(\cos\theta - 2\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 + 25}$;
45. **(a)** VII **(b)** I **(c)** VIII **(d)** III **(e)** V **(f)** II **(g)** VI **(h)** IV

Conjunto de problemas 10.7

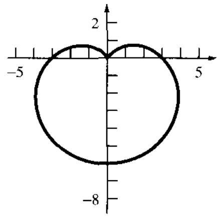
1. πa^2



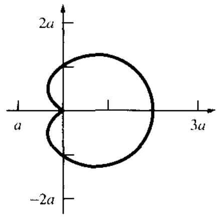
3. $\frac{9}{2}\pi$



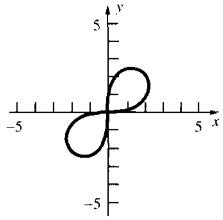
5. $\frac{27}{2}\pi$



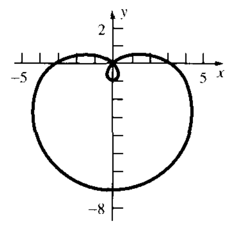
7. $\frac{3}{2}\pi a^2$



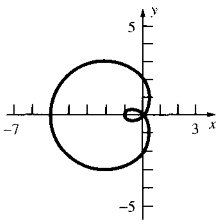
9. 9



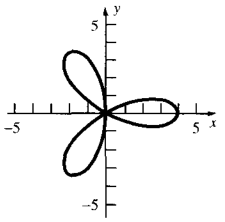
11. $\frac{17}{2}\pi - 17\,\mathrm{sen}^{-1}\frac{3}{4} - \frac{9\sqrt{7}}{2}$



13. $\frac{17}{2}\pi - \frac{17}{2}\cos^{-1}\frac{2}{3} + 3\sqrt{5}$

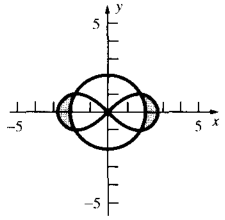


15. 4π

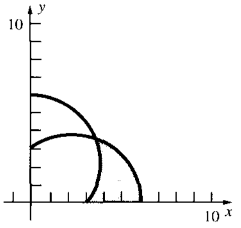


17. 51π

19. $4\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi$



21. $9\sqrt{2} - \frac{27}{4}$



23. **(a)** $\frac{1}{\sqrt{3}}$; **(b)** -1 **(c)** $\frac{\sqrt{3}}{5}$ **(d)** $-\frac{7}{\sqrt{3}}$

25. $\left(-1, \frac{\pi}{2}\right), \left(3, \frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{2}, \pi - \operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{4}\right)$ **27.** $8a$

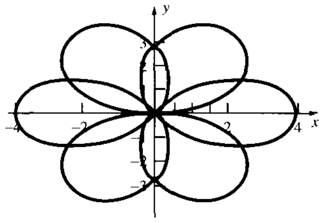
29. $\frac{1}{2}\pi a^2$ si n es par, $\frac{1}{4}\pi a^2$, si n es impar.

31. **(a)** $a^2 \tan^{-1}\frac{b}{a} + b^2\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{b}{a}\right) - ab$

33. $a^2\left[(k^2 - 1)\pi + (2 - k^2)\cos^{-1}\left(\frac{k}{2}\right) + \frac{k\sqrt{4 - k^2}}{2}\right]$

35. $1.26a$ **37.** 4π; 26.73

39. 63.46



10.8 Revisión del capítulo

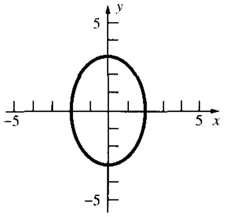
Examen de conceptos

1. Falso **3.** Falso **5.** Verdadero **7.** Verdadero **9.** Falso **11.** Verdadero **13.** Falso **15.** Verdadero **17.** Verdadero **19.** Falso **21.** Falso **23.** Falso **25.** Falso **27.** Falso **29.** Verdadero **31.** Falso **33.** Verdadero

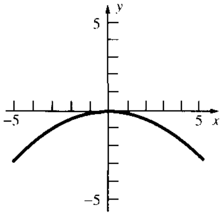
Problemas de examen

1. **(a)** (5); **(b)** (9); **(c)** (4); **(d)** (3); **(e)** (2); **(f)** (8); **(g)** (8); **(h)** (1); **(i)** (7); **(j)** (6)

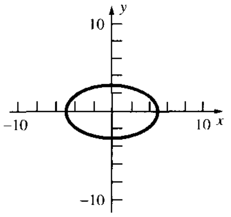
3. Elipse
Focos en $(0, \pm\sqrt{5})$
Vértices en $(0, \pm 3)$



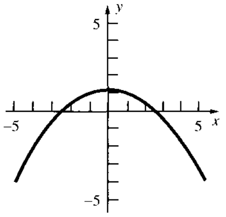
5. Parábola
Foco en $\left(0, -\frac{9}{4}\right)$
Vértices en $(0, 0)$



7. Elipse
Focos en $(\pm 4, 0)$
Vértice en $(\pm 5, 0)$



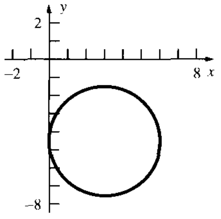
9. Parábola
Foco en $(0, 0)$
Vértices en $\left(0, \frac{5}{4}\right)$



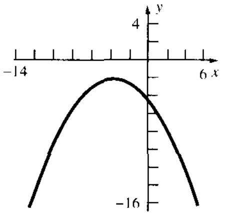
11. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ **13.** $y^2 = -9x$ **15.** $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

17. $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$

19. Circunferencia

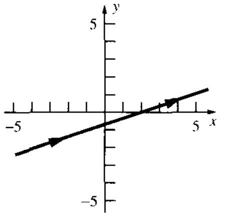


21. Parábola

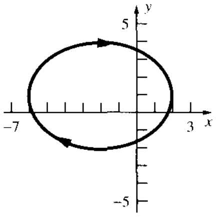


23. $r = \frac{5}{2}$; $s = -\frac{1}{2}$; hipérbola; $4\sqrt{6}$

25. $y = \frac{1}{3}(x - 2)$

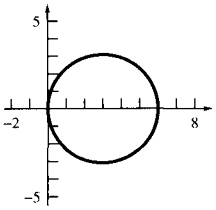


27. $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

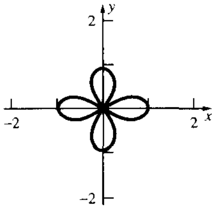


29. $y = -\frac{1}{2}(x - 7)$ **31.** $27\sqrt{2}$

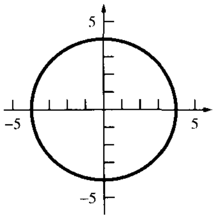
33.



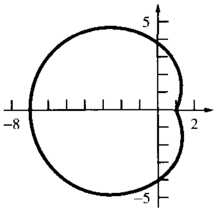
35.



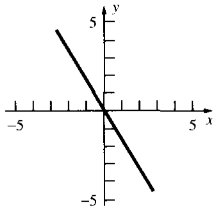
37.



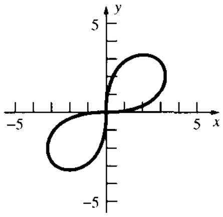
39.



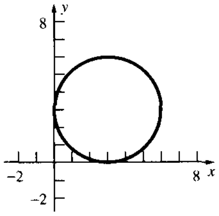
41.



43.



45. $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$

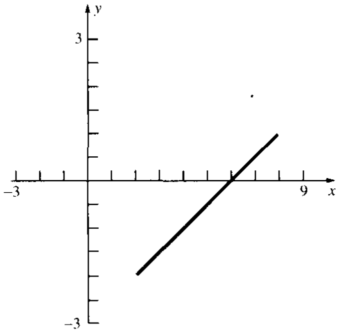


47. -1 **49.** $\frac{75}{2}\pi$ **51.** $\frac{22}{3}$

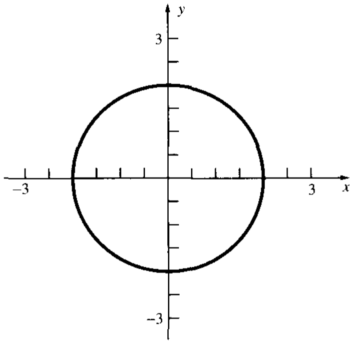
53. **(a)** I; **(b)** IV; **(c)** III; **(d)** II; **(e)** V

Problemas de repaso e introducción del capítulo 11

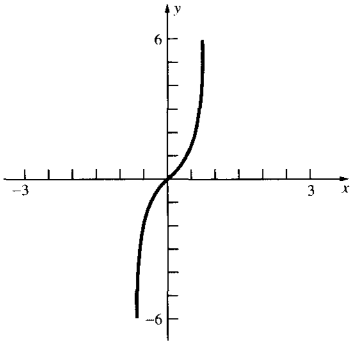
1.



3.



5.



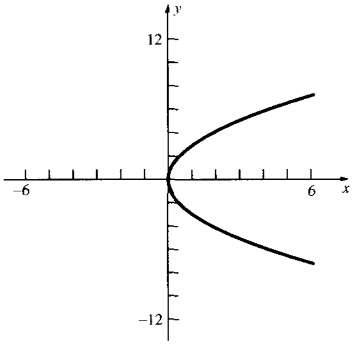
7. $x = h \cdot \cos\theta$
$y = h \cdot \operatorname{sen}\theta$

9. $\frac{1}{243}\left[(328)^{3/2} - 8\right] \approx 24.4129$

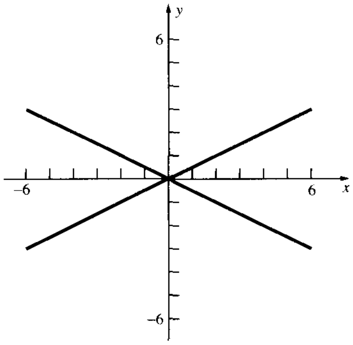
11. $\pi|a|$ **13.** $(0.8, 2.6)$, la distancia es $\sqrt{0.8}$

15. **(a)** $v(t) = 2t - 6$; $a(t) = 2$ **(b)** $t > 3$

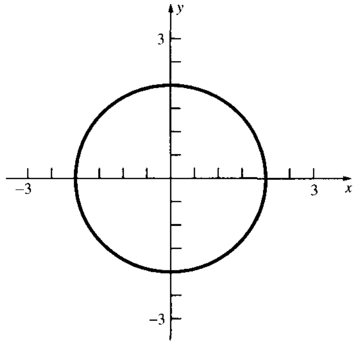
17.



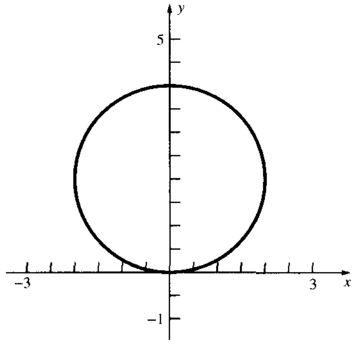
19.



21.

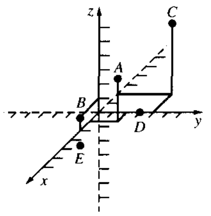


23.



Conjunto de problemas 11.1

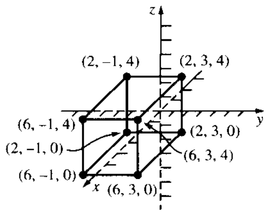
1. $A(1, 2, 3)$, $B(2, 0, 1)$, $C(-2, 4, 5)$, $D(0, 3, 0)$, $E(-1, -2, -3)$



3. $x = 0; x = 0, y = 0$

5. **(a)** $\sqrt{43}$; **(b)** 5; **(c)** $\sqrt{(e + \pi)^2 + (\pi + 4)^2 + 3}$

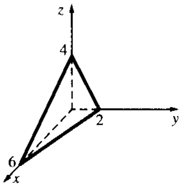
9.



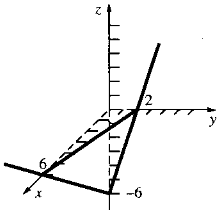
11. **(a)** $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$;
(b) $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 + (z + 6)^2 = 5$;
(c) $(x - \pi)^2 + (y - e)^2 + \left(z - \sqrt{2}\right)^2 = \pi$

13. $(6, -7, 4)$; 10 **15.** $\left(\frac{1}{2}, -1, -2\right)$; $\sqrt{\frac{17}{2}}$

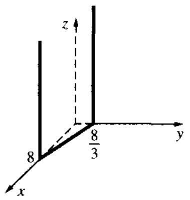
17.



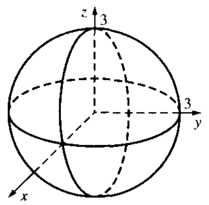
19.



21.



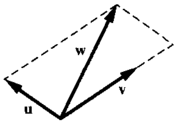
23.



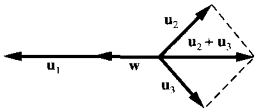
25. $2\sqrt{6}$ **27.** 16.59 **29.** 72 **31.** $2\pi\sqrt{13}$
33. 7.2273 **35.** 34.8394
37. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + \left(z - \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{53}{4}$
39. $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2 = 36$
41. **(a)** Plano paralelo a y 2 unidades por encima del plano xy;
(b) Plano perpendicular al plano xy, cuya traza en el plano xy es la recta $x = y$;
(c) Unión del plano yz $(x = 0)$ y el plano xz $(y = 0)$;
(d) Unión de los tres planos coordenados;
(e) Cilindro de radio 2, paralelo al eje z,
(f) Mitad superior de la esfera con centro en $(0, 0, 0)$ y radio 3
43. Centro $(1, 2, 5)$, radio 4 **45.** $\dfrac{11\pi}{12}$

Conjunto de problemas 11.2

1.



3.



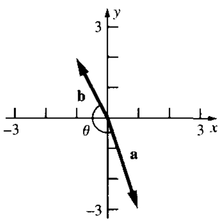
5. $\frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$ **7.** 1
9. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle 2, 4\rangle$; $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \langle -4, -4\rangle$; $\|\mathbf{u}\| = 1$; $\|\mathbf{v}\| = 5$
11. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle 10, 14\rangle$; $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \langle 14, 10\rangle$; $\|\mathbf{u}\| = 12\sqrt{2}$; $\|\mathbf{v}\| = 2\sqrt{2}$
13. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle 2, 4, 0\rangle$; $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \langle -4, -4, 0\rangle$; $\|\mathbf{u}\| = 1$; $\|\mathbf{v}\| = 5$

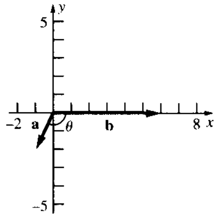
15. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle -4, 0, 1\rangle$; $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \langle 6, 0, 1\rangle$; $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2}$; $\|\mathbf{v}\| = 5$
17. $\|\mathbf{w}\| \approx 79.34$; S 7.5°W **19.** 150 N
21. N 2.08° E; 467 mi/h **23.** 80 mi/h
33. $\alpha + \beta = 143.13°, \beta + \gamma = 126.87°, \alpha + \gamma = 90°$
35. $50/\sqrt{2}$ lbs.

Conjunto de problemas 11.3

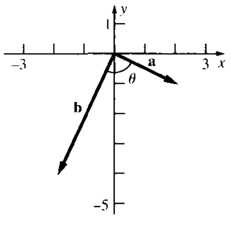
1. **(a)** $-12\mathbf{i} + 18\mathbf{j}$; **(b)** -13; **(c)** -28; **(d)** 375;
(e) $-15\sqrt{13}$ **(f)** $13 - \sqrt{13}$

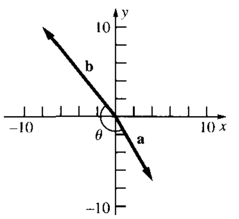
3. **(a)** $-\dfrac{7}{5\sqrt{2}}$ **(b)** $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$





(c) 0 **(d)** $-\dfrac{51}{\sqrt{2665}}$





5. **(a)** 1; **(b)** 4; **(c)** $\dfrac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{i}+\dfrac{\sqrt{6}}{3}\mathbf{j}-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{k}$; **(d)** 2;
(e) $\sqrt{3}/6$; **(f)** 0

7. $\theta_{a,b}=90°$; $\theta_{a,c}=90°$; $\theta_{b,c}=125.26°$

9. **(a)** $\alpha_a=45°$, $\beta_a=45°$, $\gamma_a=90°$;
(b) $\alpha_b\approx 54.74°$, $\beta_b\approx 125.26°$, $\gamma_b\approx 54.74°$
(c) $\alpha_c\approx 131.81°$, $\beta_c\approx 48.19°$, $\gamma_c\approx 70.53°$

15. $\dfrac{10}{\sqrt{593}}\mathbf{i}-\dfrac{40}{\sqrt{593}}\mathbf{j}+\dfrac{240}{\sqrt{593}}\mathbf{k}$;
$-\dfrac{10}{\sqrt{593}}\mathbf{i}+\dfrac{40}{\sqrt{593}}\mathbf{j}-\dfrac{240}{\sqrt{593}}\mathbf{k}$

17. $\cos^{-1}\dfrac{11}{\sqrt{129}}$ **19.** $\pm 2\sqrt{6}$ **21.** c es cualquier número; $d=-2$

23. **0** **25.** $\left\langle \dfrac{11}{5},\dfrac{22}{5}\right\rangle$ **27.** $\langle 0,2\rangle$ **29.** $\langle 2,0,-1\rangle$

31. $\left\langle \dfrac{15}{7},\dfrac{10}{7},\dfrac{5}{7}\right\rangle$ **33.** $\langle 0,0,1\rangle$

35. **(a)** **u**; **(b)** **u**

37. $\sqrt{3}$ **39.** $2\sqrt{3}$

41. Hay un número infinito de respuestas; una es
$\mathbf{u}=\langle 1,2,0\rangle$, $\mathbf{v}=\langle -2,1,-2\rangle$

43. a, b **51.** $k=\dfrac{2}{3}$, $m=-\dfrac{5}{3}$ **57.** 37.86°

59. 100 joules **61.** 94 lbs-pie **63.** 32 joules

65. $2x-4y+3z=-15$ **67.** $x+4y+4z=13$

69. 56.91°

71. **(a)** $z=2$; **(b)** $2x-3y-4z=-13$ **73.** $7/\sqrt{11}$

75. $37/\sqrt{56}$ **77.** 0 **81.** $a=5$, $b=-2$, $c=5$

85. $(4,2,3)$

87. $a\mathbf{i}+b\mathbf{j}-c\mathbf{k}$; $a\mathbf{i}-b\mathbf{j}-c\mathbf{k}$; $-a\mathbf{i}-b\mathbf{j}-c\mathbf{k}$, dirección opuesta a la original.

Conjunto de problemas 11.4

1. **(a)** $-4\mathbf{i}-10\mathbf{j}-4\mathbf{k}$; **(b)** $-6\mathbf{i}-36\mathbf{j}-27\mathbf{k}$; **(c)** 8;
(d) $-98\mathbf{i}-59\mathbf{j}+88\mathbf{k}$

3. $c(-14\mathbf{i}-2\mathbf{j}+6\mathbf{k})$, c in $\mathbb{R}$ **5.** $\pm\left\langle \dfrac{7}{\sqrt{86}},-\dfrac{1}{\sqrt{86}},\dfrac{6}{\sqrt{86}}\right\rangle$

7. $2\sqrt{74}$ **9.** $4\sqrt{6}$ **11.** $2x-y-z=-3$

13. $15x+35y+21z=105$ **15.** $x-y+2z=-1$

17. $7x+5y+4z=-5$ **19.** $x-2y-2z=4$

21. $-x+10y+17z=-3$ **23.** 69

25. **(a)** 9; **(b)** $\sqrt{35}$; **(c)** 40.01°

27. (c), (d) **35.** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$

Conjunto de problemas 11.5

1. $2\mathbf{i}-\mathbf{j}$ **3.** $\frac{1}{2}\mathbf{i}-4\mathbf{j}$ **5.** **i** **7.** No existe

9. **(a)** $\{t\in\mathbb{R}: t\le 3\}$; **(b)** $\{t\in\mathbb{R}: t\le 20\}$
(c) $\{t\in\mathbb{R}: -3\le t\le 3\}$

11. **(a)** $\{t\in\mathbb{R}: t\le 3\}$; **(b)** $\{t\in\mathbb{R}: t<20, t^2 \text{ no un entero}\}$
(c) $\{t\in\mathbb{R}: -3\le t\le 3\}$

13. **(a)** $9(3t+4)^2\mathbf{i}+2te^{t^2}\mathbf{j}$; $54(3t+4)\mathbf{i}+2(2t^2+1)\,e^{t^2}\mathbf{j}$;
(b) $\operatorname{sen} 2t\mathbf{i}-3\operatorname{sen} 3t\mathbf{j}+2t\mathbf{k}$; $2\cos 2t\mathbf{i}-9\cos 3t\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

15. $-2e^{-2t}-\dfrac{4}{t^3}+\dfrac{4}{t^3}\ln t^2$

17. $-\dfrac{e^{-3t}}{2}\left(\dfrac{6t-7}{\sqrt{t-1}}\right)\mathbf{i}+e^{-3t}\left(\dfrac{2}{t}-3\ln(2t^2)\right)\mathbf{j}$

19. $\mathbf{v}(1)=4\mathbf{i}+10\mathbf{j}+2\mathbf{k}$; $\mathbf{a}(1)=10\mathbf{j}$; $s(1)=2\sqrt{30}$

21. $\mathbf{v}(2)=-\frac{1}{4}\mathbf{i}-\frac{4}{9}\mathbf{j}+80\mathbf{k}$; $\mathbf{a}(2)=\frac{1}{4}\mathbf{i}+\frac{26}{27}\mathbf{j}+160\mathbf{k}$;
$s(2)=\dfrac{\sqrt{8{,}294{,}737}}{36}$

23. $\mathbf{v}(2)=4\mathbf{j}+\dfrac{2^{2/3}}{3}\mathbf{k}$; $\mathbf{a}(2)=4\mathbf{j}-\dfrac{1}{9\sqrt[3]{2}}\mathbf{k}$;
$s(2)=\sqrt{16+\dfrac{2^{4/3}}{9}}$

25. $\mathbf{v}(\pi)=-\mathbf{j}+\mathbf{k}$; $\mathbf{a}(\pi)=\mathbf{i}$, $s(\pi)=\sqrt{2}$

27. $\mathbf{v}\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\mathbf{i}+3e^{\pi/4}\mathbf{j}$; $\mathbf{a}\left(\frac{\pi}{4}\right)=4\mathbf{i}+3e^{\pi/4}\mathbf{j}+16\mathbf{k}$;
$s\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{4+9e^{\pi/2}}$

29. $\mathbf{v}(2)=2\pi\mathbf{i}+\mathbf{j}-e^{-2}\mathbf{k}$; $\mathbf{a}(2)=2\pi\mathbf{i}-2\pi^2\mathbf{j}+e^{-2}\mathbf{k}$;
$s(2)=\sqrt{4\pi^2+1+e^{-4}}$

33. $2\sqrt{2}$ **35.** 144 **37.** $\sqrt{41}$

39. $-6t\operatorname{sen}(3t^2-4)\mathbf{i}+18te^{9t^2-12}\mathbf{j}$

41. $(e-1)\mathbf{i}+(1-e^{-1})\mathbf{j}$

43. $\mathbf{r}(t)=5\cos(6t)\mathbf{i}+5\operatorname{sen}(6t)\mathbf{j}$;
$\mathbf{v}(t)=-30\operatorname{sen}(6t)\mathbf{i}+30\cos(6t)\mathbf{j}$;
$\|\mathbf{v}(t)\|=30$; $\mathbf{a}(t)=-180\cos(6t)\mathbf{i}-180\operatorname{sen}(6t)\mathbf{j}$

45. **(b)** $R_p=10R_m$; $t=\frac{\pi}{9}$

47. **(a)** Enrollándose hacia arriba alrededor del cilindro circular recto $x=\operatorname{sen} t$, $y=\cos t$, conforme t crece.
(b) Igual que en la parte (a), pero enrollándose más rápido en un factor de $3t^2$.
(c) Con la orientación estándar de los ejes, el movimiento es enrollándose hacia la derecha alrededor del cilindro circular recto $x=\operatorname{sen} t$, $z=\cos t$.
(d) Serpenteando hacia arriba, con aumento del radio, a lo largo de la espiral $x=t\operatorname{sen} t$, $y=t\cos t$.
(e) Serpenteando hacia arriba, con disminución del radio, a lo largo de la espiral $x=\dfrac{1}{t^2}\operatorname{sen} t$, $y=\dfrac{1}{t^2}\cos t$.
(f) Serpenteando hacia la derecha, con aumento del radio, a lo largo de la espiral $x=t^2\operatorname{sen}(\ln t)$, $z=t^2\cos(\ln t)$

Conjunto de problemas 11.6

1. $x=1+3t$, $y=-2+7t$, $z=3+3t$

3. $x=4+t$, $y=2$, $z=3-2t$

5. $x=4+3t$, $y=5+2t$, $z=6+t$; $\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z-6}{1}$

7. $x=1+t$, $y=1+10t$, $z=1+100t$;
$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{10}=\dfrac{z-1}{100}$

9. $\dfrac{x-4}{27}=\dfrac{y+5}{-50}=\dfrac{z}{-6}$ **11.** $\dfrac{x+8}{10}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+\frac{21}{2}}{9}$

13. $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z-6}{2}$ **15.** $x=5t$, $y=-3t$, $z=4$

17. $x+y+6z=11$ **19.** $3x-2y=5$

21. **(b)** $2x + y - z = 7$; **(c)** $(-1, 2, -1)$; **(d)** $\sqrt{6}$

23. $\frac{x-1}{-\sqrt{3}} = \frac{y-3\sqrt{3}}{3} = \frac{z-\frac{\pi}{3}}{1}$ **25.** $3x - 4y + 5z = -22$

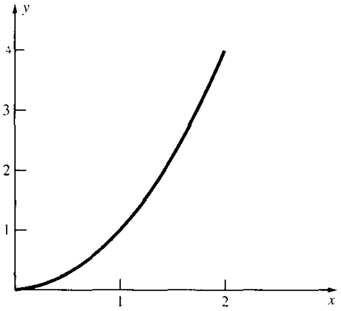
27. $\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{37}{4\sqrt{7}}\right)$ **29.** $\left(\frac{5}{2}, 1, 0\right)$

31. **(a)** $\frac{8\sqrt{2}}{3}$; **(b)** $\frac{3\sqrt{26}}{7}$

Conjunto de problemas 11.7

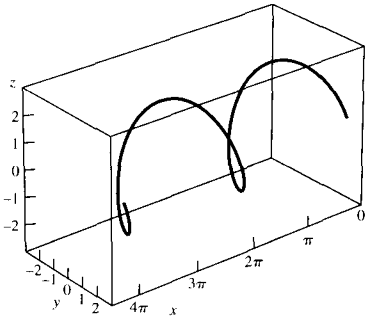
1. $\mathbf{v}(1) = \langle 1, 2\rangle$; $\mathbf{a}(1) = \langle 0, 2\rangle$

$\mathbf{T}(1) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right\rangle$; $\kappa = \frac{2}{5^{3/2}}$



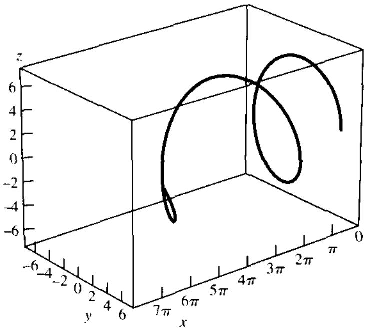
3. $\mathbf{v}(\pi) = \langle 1, 0, -2\rangle$; $\mathbf{a}(\pi) = \langle 0, 2, 0\rangle$

$\mathbf{T}(\pi) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right\rangle$; $\kappa = \frac{2}{5}$



5. $\mathbf{v}(\pi) = \left\langle \frac{\pi}{4}, 0, -5\right\rangle$; $\mathbf{a}(\pi) = \left\langle \frac{1}{4}, 5, 0\right\rangle$

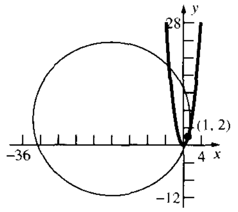
$\mathbf{T}(\pi) = \left\langle \frac{\pi}{\sqrt{400+\pi^2}}, 0, -\frac{20}{\sqrt{400+\pi^2}}\right\rangle$; $\kappa \approx 0.195422$

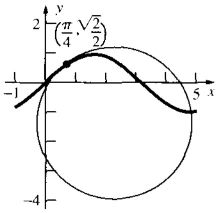


7. $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$; $\frac{1}{4\sqrt{2}}$ **9.** $-\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$; $\frac{24\sqrt{2}}{125}$

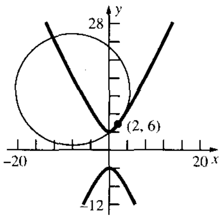
11. $-\frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{j}$; $\frac{6}{13\sqrt{13}}$ **13.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}$

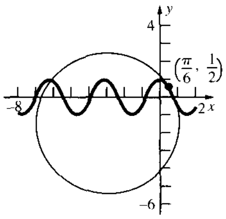
15. $\kappa = \frac{4}{17\sqrt{17}}$; $R = \frac{17\sqrt{17}}{4}$ **17.** $\kappa = \frac{2}{3\sqrt{3}}$; $R = \frac{3\sqrt{3}}{2}$



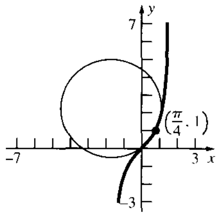


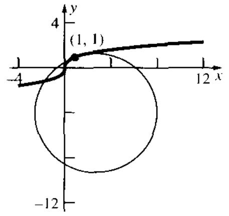
19. $\kappa = \frac{2}{25}$; $R = \frac{25}{2}$ **21.** $\kappa = \frac{1}{4}$; $R = 4$





23. $\kappa = \frac{4}{5\sqrt{5}}$; $R = \frac{5\sqrt{5}}{4}$ **25.** $\kappa = \frac{3}{5\sqrt{10}}$; $R = \frac{5\sqrt{10}}{3}$





27. $\frac{\sqrt{11}}{21\sqrt{7}}$; $\mathbf{T} = \frac{2}{\sqrt{21}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{21}}\mathbf{j} + \frac{4}{\sqrt{21}}\mathbf{k}$;

$\mathbf{N} = -\frac{5}{\sqrt{77}}\mathbf{i} - \frac{6}{\sqrt{77}}\mathbf{j} + \frac{4}{\sqrt{77}}\mathbf{k}$;

$\mathbf{B} = \frac{4}{\sqrt{33}}\mathbf{i} - \frac{4}{\sqrt{33}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{33}}\mathbf{k}$

29. $\kappa = \frac{9}{91}$; $\mathbf{T} = \left\langle -\frac{3}{\sqrt{13}}, 0, \frac{2}{\sqrt{13}}\right\rangle$; $\mathbf{N} = \langle 0, 1, 0\rangle$;

$\mathbf{B} = \left\langle -\frac{2}{\sqrt{13}}, 0, -\frac{3}{\sqrt{13}}\right\rangle$

31. $\kappa = \frac{1}{3}\operatorname{sech}^2\frac{1}{3}$; $\mathbf{T} = \tanh\frac{1}{3}\mathbf{i} + \operatorname{sech}\frac{1}{3}\mathbf{j}$;

$\mathbf{N} = \operatorname{sech}\frac{1}{3}\mathbf{i} - \tanh\frac{1}{3}\mathbf{j}$; $\mathbf{B} = -\mathbf{k}$

33. $\kappa = \frac{1}{2\sqrt{2}}$; $\mathbf{T} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$;

$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$; $\mathbf{B} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$

35. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\ln 2}{2}\right)$ **37.** $(0, 1)$ **39.** $\left(-\frac{1}{2}\ln 2, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

41. $a_T = \frac{12}{\sqrt{13}}, a_N = \frac{18}{\sqrt{13}}$ **43.** $a_T = -\sqrt{2}, a_N = \sqrt{2}$

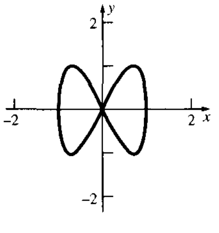
45. $a_T = \dfrac{40a}{3\sqrt{41}}, a_N = \dfrac{3a}{\sqrt{41}}$

47. $a_T(1) = \dfrac{4}{\sqrt{14}};\quad a_N(1) = 2\sqrt{\dfrac{5}{7}}$

49. $a_T(0) = 0;\quad a_N(0) = \sqrt{2}$

51. $a_T(3) = 36\sqrt{\dfrac{3}{55}};\quad a_N(3) = 6\sqrt{\dfrac{2}{55}}$

53. $(0, 0); (1, 0), (-1, 0)$



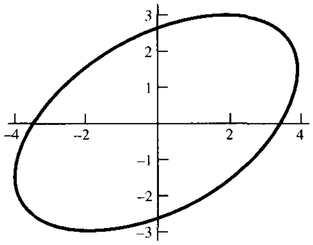
55. La rapidez es constante; la curvatura es cero.

57. $(\cos 5)\mathbf{i} - (\sin 5)\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ **59.** $5\mathbf{T} + 5\mathbf{N}; -\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$

61. 72 pies/s **67.** $P_5(x) = 10x^3 - 15x^4 + 6x^5$ **71.** $\frac{3}{4}$

73. $\dfrac{3}{8\sqrt{2}}$ **75.** $\frac{3}{16}$

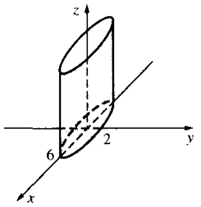
79. máx ≈ 0.7606; mín ≈ 0.1248



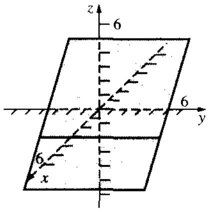
85. $(6, 0, 8); 8\sqrt{9\pi^2 + 1}$

Conjunto de problemas 11.8

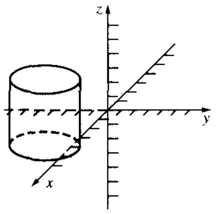
1. Cilindro elíptico



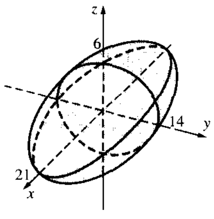
3. Plano



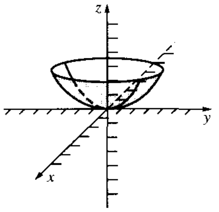
5. Cilindro circular



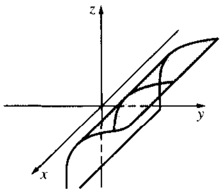
7. Elipsoide



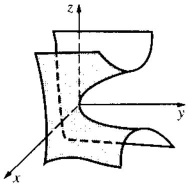
9. Paraboloide elíptico



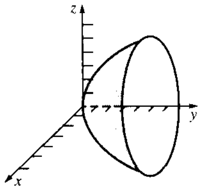
11. Cilindro



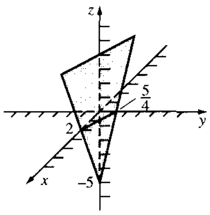
13. Paraboloide hiperbólico



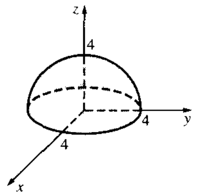
15. Paraboloide elíptico



17. Plano



19. Hemisferio



21. (a) Al reemplazar x por $-x$ resulta en una ecuación equivalente **(b)** Al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$ resulta en una ecuación equivalente. **(c)** Al reemplazar x por $-x$, y por $-y$ y z por $-z$ resulta en una ecuación equivalente.

23. Todos los elipsoides centrales son simétricos respecto a (a) el origen, (b) el eje x, y (c) el plano xy.

25. Todos los hiperboloides centrales de dos hojas son simétricos respecto a (a) el origen, (b) el eje z y (c) el plano yz.

27. $y = 2x^2 + 2z^2$ **29.** $4x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 12$

31. $\left(0, \pm 2\sqrt{5}, 4\right)$ **33.** $\dfrac{\pi ab(c^2 - h^2)}{c^2}$

35. Diámetro mayor 4; diámetro menor $2\sqrt{2}$

37. $x^2 + 9y^2 - 9z^2 = 0$

Conjunto de problemas 11.9

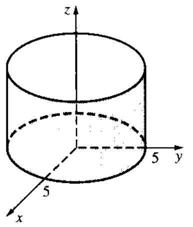
1. Cilíndricas a esféricas; $\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$, $\cos\phi = \dfrac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}$, $\theta = \theta$

Esféricas a cilíndricas: $r = \rho \operatorname{sen}\phi$, $z = \rho\cos\phi$, $\theta = \theta$

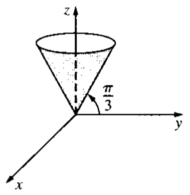
3. (a) $\left(3\sqrt{3}, 3, -2\right)$; **(b)** $\left(-2, -2\sqrt{3}, -8\right)$

5. (a) $\left(4\sqrt{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$; **(b)** $\left(4, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$

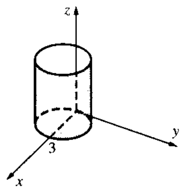
7.



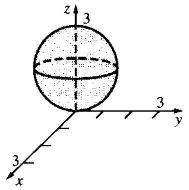
9.



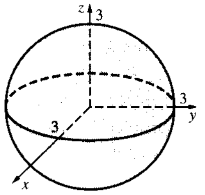
11.



13.



15.



17. $r = 3$ **19.** $r^2 + 4z^2 = 10$ **21.** $\cos^2 \phi = \frac{1}{3}$

23. $\rho^2 = \dfrac{4}{1 + \cos^2 \phi}$ **25.** $r = \dfrac{4}{\operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$

27. $\rho \operatorname{sen} \phi = 3$ **29.** $x^2 - y^2 = z$ **31.** $z = 2r^2$

33. 4029 mi **35.** 4552 mi **37.** 2252 mi

41. **(a)** 3485 mi; **(b)** 4552 mi; **(c)** 9331 mi; **(d)** 7798 mi; **(e)** 12,441 mi

11.10 Revisión del capítulo

Examen del capítulo

1. Verdadero **3.** Verdadero **5.** Falso **7.** Verdadero
9. Verdadero **11.** Falso **13.** Verdadero **15.** Verdadero
17. Verdadero **19.** Verdadero **21.** Verdadero **23.** Falso
25. Verdadero **27.** Verdadero **29.** Verdadero
31. Verdadero **33.** Falso **35.** Falso **37.** Falso **39.** False
41. Falso **43.** Verdadero **45.** Verdadero **47.** Falso
49. Verdadero **51.** Verdadero **53.** Falso **55.** Falso **57.** Falso

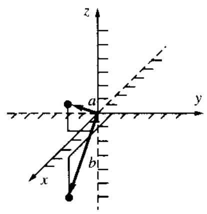
Problemas de examen

1. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 = 11$

3. **(a)** $\langle 4, -17 \rangle$ **(b)** -3 **(c)** -15 **(d)** -234 **(e)** -36 **(f)** 30

5. **(a)** $2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$; **(b)** -9; **(c)** -14; **(d)** no existe; **(e)** $\sqrt{17}$; **(f)** 7

7.



(a) 3; $\sqrt{35}$; **(b)** $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \frac{5}{\sqrt{35}}, \frac{1}{\sqrt{35}}, -\frac{3}{\sqrt{35}}$;

(c) $\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$; **(d)** $\cos^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{35}}$

9. $c\langle 10, -11, -3 \rangle$, c en $\mathbb{R}$

11. **(a)** $y = 7$; **(b)** $x = -5$; **(c)** $z = -2$; **(d)** $3x - 4y + z = -45$

13. 1 **15.** $x = -2 + 8t, y = 1 + t, z = 5 - 8t$

17. $x = 2t, y = 25 + t, z = 16$

19. $\mathbf{r}(t) = \langle 2, -2, 1 \rangle + t\langle 5, -4, -3 \rangle$

21. Recta tangente: $\dfrac{x - 2}{1} = \dfrac{y - 2}{2} = \dfrac{z - \frac{8}{3}}{4}$

Plano normal: $3x + 6y + 12z = 50$

23. $\sqrt{3}(e^5 - e)$ **25.** N 12.22°W; 409.27 mi/h

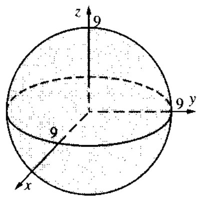
27. **(a)** $\left\langle \frac{1}{t}, -6t \right\rangle; \left\langle -\frac{1}{t^2}, -6 \right\rangle$;

(b) $\langle \cos t, -2 \operatorname{sen} 2t \rangle; \langle -\operatorname{sen} t, -4 \cos 2t \rangle$;

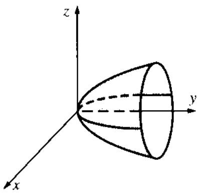
(c) $\langle \sec^2 t, -4t^3 \rangle; \langle 2 \sec^2 t \tan t, -12t^2 \rangle$;

29. $a_T = \dfrac{22}{\sqrt{14}}; a_N = \dfrac{2\sqrt{19}}{\sqrt{14}}$

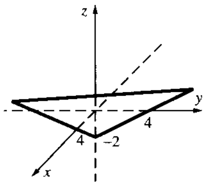
31. Esfera



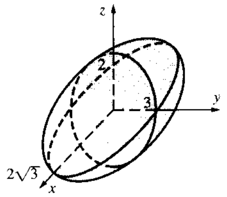
33. Paraboloide circular



35. Plano



37. Elipsoide



39. **(a)** $r = 3$; **(b)** $r^2 = \dfrac{16}{1 + 3 \operatorname{sen}^2 \theta}$; **(c)** $r^2 = 9z$;

(d) $r^2 + 4z^2 = 10$

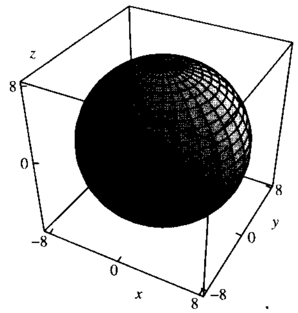
41. **(a)** $\rho = 2$; **(b)** $\cos^2 \phi = \frac{1}{2}$ (Son posibles otras formas);

(c) $\rho^2 = \dfrac{1}{2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \theta - 1}$; **(d)** $r = \cot \phi \csc \phi$

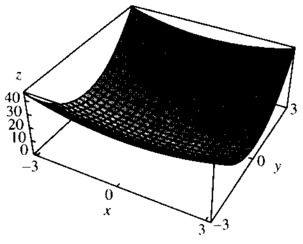
43. 1.25

Problemas de repaso e introducción del capítulo 12

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 64$



3. $z = x^2 + 4y^2$



5. **(a)** $6x^2$; **(b)** $15x^2$; **(c)** $3kx^2$; **(d)** $3ax^2$

7. **(a)** $2 \cos 2a$; **(b)** $17 \cos 17a$; **(c)** $t \cos ta$; **(d)** $s \cos sa$

9. Continua y derivable en $x = 2$

11. Continua en $x = 4$, no derivable en $x = 4$

13. El valor máximo de f en $[0, 4]$ es 5; el valor mínimo es -15

15. $S(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{16}{r}$

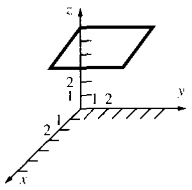
Conjunto de problemas 12.1

1. (a) 5; **(b)** 0; **(c)** 6; **(d)** $a^6 + a^2$; **(e)** $2x^2$; **(f)** $(2, -4)$ no está en el dominio de f. El dominio es el conjunto de todos los (x, y) tales que $y > 0$.

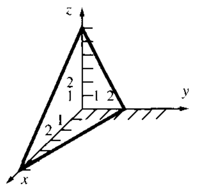
3. (a) 0; **(b)** 2; **(c)** 16; **(d)** -4.2469;

5. t^2

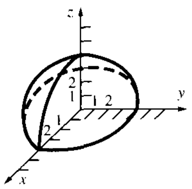
7.



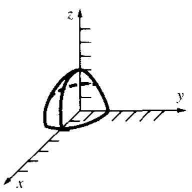
9.



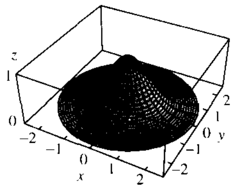
11.



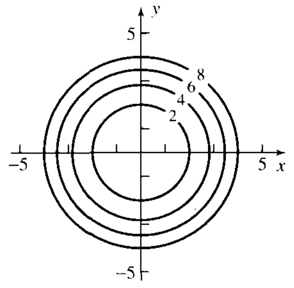
13.



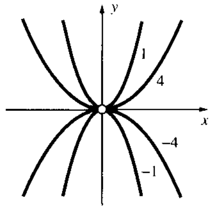
15.



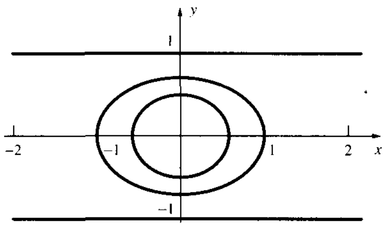
17.



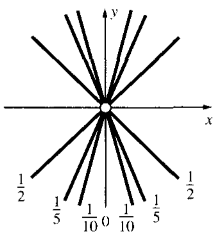
19.



21.



23.



25. (a) San Francisco **(b)** noroeste; sureste **(c)** suroeste o noreste

27. El conjunto de todos los puntos en y fuera de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

29. El conjunto de todos los puntos en y dentro del elipsoide $x^2/9 + y^2/16 + z^2/1 = 1$.

31. Todos los puntos en $\mathbb{R}^3$, excepto el origen $(0, 0, 0)$.

33. El conjunto de todas las esferas con centros en el origen

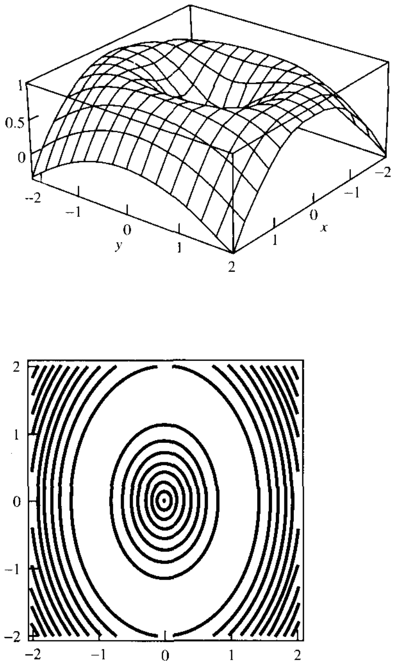
35. Un conjunto de hiperboloides de revolución alrededor del eje z cuando $k = 0$. Cuando $k \neq 0$, la superficie de nivel es un cono elíptico.

37. A Un conjunto de cilindros hiperbólicos paralelos al eje z cuando $k \neq 0$. Cuando $k = 0$, la superficie de nivel es un par de planos.

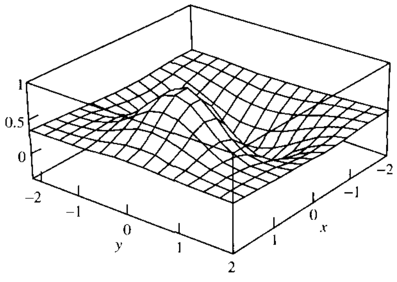
39. (a) Todos los puntos en $\mathbb{R}^4$ excepto el origen $(0, 0, 0, 0)$.
(b) Todos los puntos en $\mathbb{R}^n$.
(c) Todos los puntos en $\mathbb{R}^n$ que satisfacen $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1$.

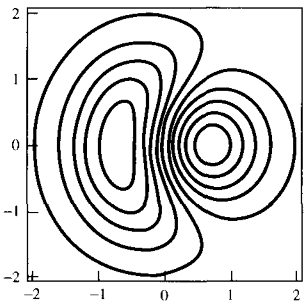
41. (a) ascenso suave, ascenso empinado; **(b)** 6490 pies, 3060 pies

43.



45.





Conjunto de problemas 12.2

1. $f_x(x, y) = 8(2x - y)^3; f_y(x, y) = -4(2x - y)^3$

3. $f_x(x, y) = (x^2 + y^2)/(x^2y); f_y(x, y) = -(x^2 + y^2)/(xy^2)$

5. $f_x(x, y) = e^y \cos x; f_y(x, y) = e^y \operatorname{sen} x$

7. $f_x(x, y) = x(x^2 - y^2)^{-1/2}; f_y(x, y) = -y(x^2 - y^2)^{-1/2}$

9. $g_x(x, y) = -ye^{-xy}; g_y(x, y) = -xe^{-xy}$

11. $f_x(x, y) = 4/[1 + (4x - 7y)^2];$
$f_y(x, y) = -7/[1 + (4x - 7y)^2]$

13. $f_x(x, y) = -2xy \operatorname{sen}(x^2 + y^2);$
$f_y(x, y) = -2y^2 \operatorname{sen}(x^2 + y^2) + \cos(x^2 + y^2)$

15. $F_x(x, y) = 2 \cos x \cos y; F_y(x, y) = -2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

17. $f_{xy}(x, y) = 12xy^2 - 15x^2y^4 = f_{yx}(x, y)$

19. $f_{xy}(x, y) = -6e^{2x} \operatorname{sen} y = f_{yx}(x, y)$

21. $F_x(3, -2) = \frac{1}{9}; F_y(3, -2) = -\frac{1}{2}$

23. $f_x\left(\sqrt{5}, -2\right) = -\frac{4}{21}; f_y\left(\sqrt{5}, -2\right) = -4\sqrt{5}/21$

25. 1 **27.** 3 **29.** 120π **31.** $k/100$

33. $\partial^2 f/\partial x^2 = 6xy; \partial^2 f/\partial y^2 = -6xy$

35. $180x^4y^2 - 12x^2$

37. **(a)** $\partial^3 f/\partial y^3$; **(b)** $\partial^3 f/\partial y\, \partial x^2$; **(c)** $\partial^4 f/\partial y^3\, \partial x$

39. **(a)** $6xy - yz$; **(b)** 8; **(c)** $6x - z$

41. $-yze^{-xyz} - y(xy - z^2)^{-1}$ **43.** $(1, 0, 29)$

45. $\left\{(x, y): x < \frac{1}{2}, y > \frac{1}{2}, y < x + \frac{1}{2}\right\}$
$\cup \left\{(x, y): x > \frac{1}{2}, y < \frac{1}{2}, x < y + \frac{1}{2}\right\}, \left\{z: 0 < z \leq \sqrt{3}/36\right\}$

47. **(a)** -4; **(b)** $\frac{2}{3}$; **(c)** $\frac{2}{5}$; **(d)** $\frac{8}{3}$

49. **(a)** $f_y(x, y, z) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$

(b) $f_z(x, y, z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$

(c) $G_x(w, x, y, z) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{G(w, x + \Delta x, y, z) - G(w, x, y, z)}{\Delta x}$

(d) $\dfrac{\partial}{\partial z}\lambda(x, y, z, t) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\lambda(x, y, z + \Delta z, t) - \lambda(x, y, z, t)}{\Delta z}$

(e) $\dfrac{\partial}{\partial b_2} S(b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n)$

$$= \lim_{\Delta b_2 \to 0}\left(\frac{S(b_0, b_1, b_2 + \Delta b_2, \ldots, b_n) - S(b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n)}{\Delta b_2}\right)$$

Conjunto de problemas 12.3

1. -18 **3.** $2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ **5.** $-\dfrac{5}{2}$; **7.** 1;

9. No existe; **11.** 0 **13.** 0 **15.** 0

17. Todo el plano **19.** $\{(x, y): x^2 + y^2 < 1\}$

21. $\{(x, y): y \neq x^2\}$ **23.** $\{(x, y): y \leq x + 1\}$

25. Toda (x, y, z), excepto $(0, 0, 0)$.

27. La frontera consiste en los segmentos de recta que forman los lados exteriores del rectángulo dado; el conjunto es cerrado.

29. Frontera: $\{(x, y): x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0, 0)\}$; el conjunto no es abierto ni cerrado.

31. Frontera: $\{(x, y): y = \operatorname{sen}(1/x), x > 0\} \cup \{(x, y): x = 0, y \leq 1\}$; el conjunto es abierto.

33. $g(x) = 2x$

35. $\lim\limits_{x \to 0} f(x, 0) = \lim\limits_{x \to 0}[0/(x^2 + 0)] = 0;$
$\lim\limits_{x \to 0} f(x, x) = \lim\limits_{x \to 0}[x^2/(x^2 + x^2)] = \frac{1}{2}$

37. **(a)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x, mx) = \lim\limits_{x \to 0} mx^3/(x^4 + m^2x^2)$
$= \lim\limits_{x \to 0} mx/(x^2 + m^2) = 0;$

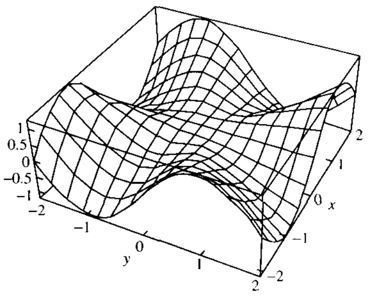
(b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x, x^2) = \lim\limits_{x \to 0} x^4/(x^4 + x^4) = \frac{1}{2};$

(c) $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$ no existe.

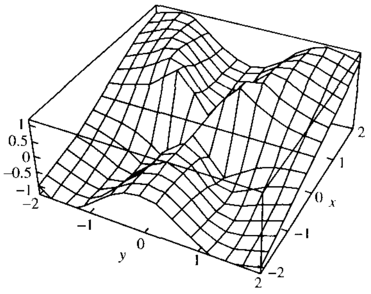
39. **(a)** $\{(x, y, z): x^2 + y^2 = 1, 1 \leq z \leq 2\}$;
(b) $\{(x, y, z): x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$; **(c)** $\{(x, y, z): z = 1\}$;
(d) conjunto vacío.

41. **(a)** $\{(x, y): x > 0, y = 0\}$;
(b) $\{(u, v, x, y): \langle x, y\rangle = k\langle u, v\rangle, k > 0, \langle u, v\rangle \neq \langle 0, 0\rangle\}$

43.



45.



Conjunto de problemas 12.4

1. $(2xy + 3y)\mathbf{i} + (x^2 + 3x)\mathbf{j}$ **3.** $e^{xy}(1 + xy)\mathbf{i} + x^2e^{xy}\mathbf{j}$

5. $(x + y)^{-2}[(x^2y + 2xy^2)\mathbf{i} + x^3\mathbf{j}]$

7. $(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$

9. $xe^{x-z}[(yx + 2y)\mathbf{i} + x\mathbf{j} - xy\mathbf{k}]$

11. $\langle -21, 16\rangle, z = -21x + 16y - 60$

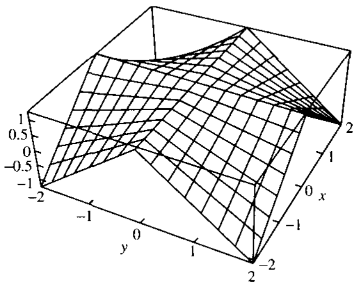
13. $\langle 0, -2\pi\rangle, z = -2\pi y + \pi - 1$

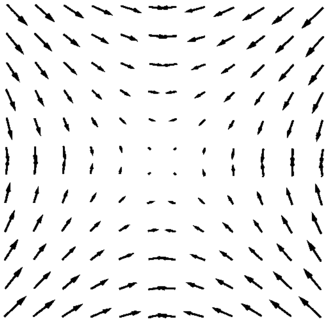
15. $w = 7x - 8y - 2z + 3$ **19.** $(1, 2)$

21. **(a)** $x = 2 + t, y = 1, z = 9 + 12t$
(b) $x = 2, y = 1 + 10t, z = 9 + 10t$
(c) $x = 2 - t, y = 1 - t, z = 9 - 22t$

23. $z = -5x + 5y$ **25.** $\mathbf{c} = \langle 1, \frac{1}{2}\rangle$

29.





(a) El gradiente apunta en la dirección de mayor crecimiento de la función.
(b) No.

Conjunto de problemas 12.5

1. $\frac{8}{5}$ **3.** $3\sqrt{2}/2$ **5.** $(\sqrt{2} + \sqrt{6})/4$ **7.** $\frac{52}{3}$
9. $\frac{12}{13}\mathbf{i} - \frac{5}{13}\mathbf{j}$; 13 **11.** $-\frac{4}{\sqrt{21}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{21}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{21}}\mathbf{k}$; $\sqrt{21}$
13. $(1/\sqrt{5})(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$
15. $\nabla f(\mathbf{p}) = -4\mathbf{i} + \mathbf{j}$ es perpendicular a la recta tangente en **p**.
17. $\frac{2}{3}$
19. **(a)** $(0, 0, 0)$; **(b)** $-\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$; **(c)** sí.
21. $(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \cos\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\langle x, y, z\rangle$
23. N 63.43°E **25.** Desciende: $-300\sqrt{2}e^{-3}$ **27.** $x = -2y^2$
29. **(a)** $-10/\sqrt{2 + \pi^2}$ grados/m; **(b)** -10 grados/s
31. **(a)** $(100, 120)$; **(b)** $(190, 25)$; **(c)** $-\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{5}$
33. Sale de alrededor de $(-0.1, -5)$. **35.** Sale de alrededor de $(3, 5)$.

Conjunto de problemas 12.6

1. $12t^{11}$ **3.** $e^{3t}(3 \operatorname{sen} 2t + 2 \cos 2t) + e^{2t}(3 \cos 3t + 2 \operatorname{sen} 3t)$
5. $7t^6 \cos(t^7)$ **7.** $2s^3t - 3s^2t^2$
9. $2(s^2 \operatorname{sen} t \cos t + t \operatorname{sen}^2 s) \exp(s^2 \operatorname{sen}^2 t + t^2 \operatorname{sen}^2 s)$
11. $s^4t(1 + s^4t^2)^{-1/2}$ **13.** 72 **15.** $-\frac{1}{2}(\pi + 1)$
17. 244.35 pies de tablones por año **19.** $\sqrt{20}$ pies/s
21. $(3x^2 + 4xy)/(3y^2 - 2x^2)$
23. $(y \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y)/(x \cos y + \cos x)$
25. $(yz^3 - 6xz)/(3x^2 - 3xyz^2)$
27. $\partial T/\partial s = (\partial T/\partial x)(\partial x/\partial s) + (\partial T/\partial y)(\partial y/\partial s) + (\partial T/\partial z)(\partial z/\partial s) + (\partial T/\partial w)(\partial w/\partial s)$
31. $10\sqrt{2} - 3\pi\sqrt{2}$ **33.** 288 mi/h

Conjunto de problemas 12.7

1. $2(x - 2) + 3(y - 3) + \sqrt{3}(z - \sqrt{3}) = 0$
3. $(x - 1) - 3(y - 3) + \sqrt{7}(z - \sqrt{7}) = 0$
5. $x + y - z = 2$ **7.** $z + 1 = -2\sqrt{3}(x - \frac{1}{3}\pi) - 3y$
9. 0.08; 0.08017992 **11.** −0.03; −0.03015101
13. $(3, -1, -14)$
15. $\langle 0, 1, 1\rangle$ es normal a las dos superficies en $(0, -1, 2)$
17. $(1, 2, -1)$ y $(-1, -2, 1)$
19. $x = 1 + 32t$; $y = 2 - 19t$; $z = 2 - 17t$ **21.** 0.004375 lb
23. 7% **25.** 20 ± 0.34 **27.** $V = 9|k|/2$
29. **(a)** 4.98; **(b)** 4.98196; **(c)** 4.9819675

Conjunto de problemas 12.8

1. $(2, 0)$; punto mínimo local.
3. $(0, 0)$; punto silla; $(\pm\frac{1}{2}, 0)$; puntos mínimos locales.
5. $(0, 0)$; punto silla.
7. $(1, 2)$; punto mínimo local. **9.** No hay puntos críticos.
11. Máximo global de 7 en $(1, 1)$; mínimo global de −4 en $(0, -1)$.
13. Máximo global de 2 en $(\pm 1, 0)$; mínimo global de 0 en $(0, \pm 1)$.
15. Cada uno de los tres números es $N/3$. **17.** Un cubo.
19. Base de 8 por 8 pies; profundidad de 4 pies. **21.** $3\sqrt{3}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$
23. (0.393, 0.786, 0.772); 1.56
25. El ancho de los lados que se doblan hacia arriba es 4″; el ángulo en la base ${}^{2\pi}/_{3}$
27. **(a)** El valor máximo de 8 ocurre en $(-1, 2)$
(b) El valor mínimo de −11 ocurre en $(4, 0)$
29. Máximo de 3 en $(1, 2)$; mínimo de $-\frac{12}{5}$ en $(\frac{8}{5}, -\frac{2}{5})$.
31. $y = \frac{7}{10}x + \frac{1}{10}$ **33.** $x = 50/\sqrt{3}$, $y = 100/\sqrt{1.25}$; \$79,681
35. Máximo de $10 + 3\sqrt{2}$ en $(3/\sqrt{2}, 3/\sqrt{2})$; mínimo de $10 - 3\sqrt{2}$ en $(-3/\sqrt{2}, -3/\sqrt{2})$
37. Largo 1.1544 pies, ancho 1.1544 pies, altura 1.501 pies
39. $(\pm\sqrt{3}/2, -\frac{1}{2})$ donde $T = 9/4$; $(0, 1/2)$, donde $T = -1/4$
41. Triángulo equilátero.
43. Máximo local: $f(1.75, 0) = 1.15$; máximo global: $f(-3.8, 0) = 2.30$
45. Mínimo global: $f(0, 1) = f(0, -1) = -0.12$
47. Máximo global $f(1.13, 0.79) = f(1.13, -0.79) = 0.53$, mínimo global $f(-1.13, 0.79) = f(-1.13, -0.79) = -0.53$.
49. Máximo global $f(3, 3) = f(-3, 3) \approx 74.9225$, mínimo global $f(1.5708, 0) = f(-1.5708, 0) = -8$.
51. Máximo global: $f((0.67, 0) = 5.06$; mínimo global: $f(-0.75, 0) = -3.54$.
53. Máximo global: $f(2.1, 2.1) = 3.5$; mínimo global: $f(4.2, 4.2) = -3.5$.

Conjunto de problemas 12.9

1. $f(\sqrt{3}, \sqrt{3}) = f(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = 6$
3. $f(2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}) = f(-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}) = 5$
5. $f(\frac{6}{7}, \frac{18}{7}, -\frac{12}{7}) = \frac{72}{7}$ **7.** La base es de 4 por, la profundidad es 2.
9. $10\sqrt{5}$ pies^3 **11.** $8abc/(3\sqrt{3})$
13. El máximo es $9\sqrt{3}$ cuando $\langle x, y, z\rangle = \langle 3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\rangle$.
15. La distancia mínima es 1.5616 en el punto (0.393, 0.786, 0.772)
17. Largo = ancho = 1.1544 pies, altura = 1.501 pies
19. $c_0 = \dfrac{\pi k}{8 + \pi}$; $p_0 = \dfrac{4k}{8 + \pi}$; $q_0 = \dfrac{4k}{8 + \pi}$;
$A(c_0, p_0, q_0) = \dfrac{k}{4(8 + \pi)} \approx 0.224k^2$ es un valor mínimo.

21. $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 10 + \sqrt{2}$ es el valor máximo;

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 10 - \sqrt{2}$ es el valor mínimo.

23. $f\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right) \approx 20.6913$ es el valor máximo;

$f(-2, -1) = -3$ es el valor mínimo

25. $f\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{8}{\sqrt{5}}\right) \approx 29.9443$ es el valor máximo;

$f(x, -1-x) = 0$ para $-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}\sqrt{19} \leq x \leq -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\sqrt{19}$ es el valor mínimo

27. $x = \alpha d/a, y = \beta d/b, z = \gamma d/c$

29. $f(-1, 1, 0) = 3, f(1, -1, 1) = -1$

31. $\sqrt{A}$ es el valor máximo de w, donde $A = a_1{}^2 + a_2{}^2 + \cdots + a_n{}^2$

33. $f(4, 0) = -4$ **35.** $f(0, 3) = f(0, -3) = -0.99$

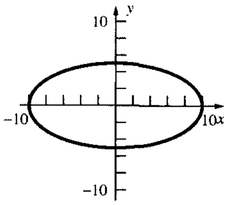
12.10 Revisión del capítulo

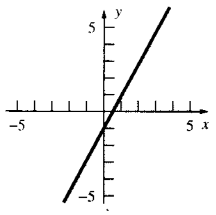
Examen de conceptos

1. Verdadero **3.** Verdadero **5.** Verdadero **7.** Falso
9. Falso **11.** Verdadero **13.** Verdadero **15.** Verdadero
17. Verdadero **19.** Falso

Problemas de examen

1. (a) $\{(x, y): x^2 + 4y^2 \geq 100\}$ **(b)** $\{(x, y): 2x - y \geq 1\}$





3. $12x^3y^2 + 14xy^7; 36x^2y^2 + 14y^7; 24x^3y + 98xy^6$

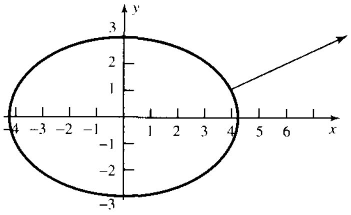
5. $e^{-y}\sec^2 x; 2e^{-y}\sec^2 x \tan x; -e^{-y}\sec^2 x$

7. $450x^2y^4 - 42y^5$ **9.** 1 **11.** No existe

13. (a) $-4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$; **(b)** $-4(\cos 1\mathbf{i} + \operatorname{sen} 1\mathbf{j} - \cos 1\mathbf{k})$

15. $\sqrt{3} + 2$

17. (a) $x^2 + 2y^2 = 18$; **(b)** $4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$;



19. $(x^2 + 3y - 4z)/x^2yz; (-x^2 - 4x)/xy^2z; (3y - x^2)/xyz^2$

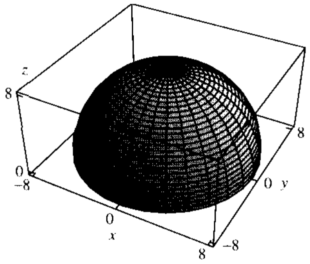
21. $15xy\sqrt{t}/z^3 + 5x^2/tz^3 - 45x^2ye^{3t}/z^4$

23. $18\mathbf{i} + 16\mathbf{j} - 18\mathbf{k}; 9x + 8y - 9z = 34$ **25.** 0.7728

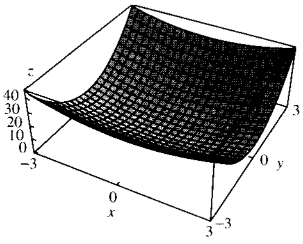
27. $16\sqrt{3}/3$ **29.** Radio 2; altura 4.

Problemas de repaso e introducción del capítulo 13

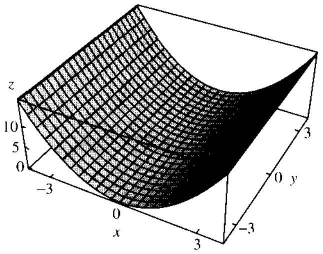
1.



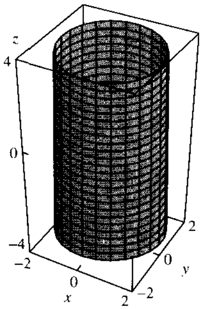
3.



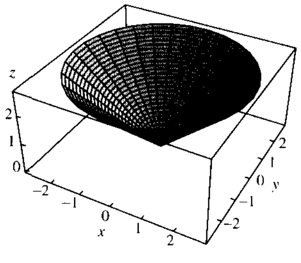
5.



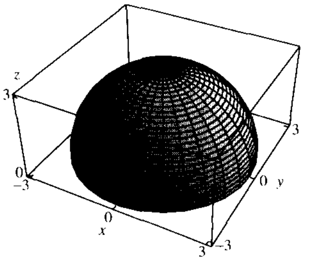
7.



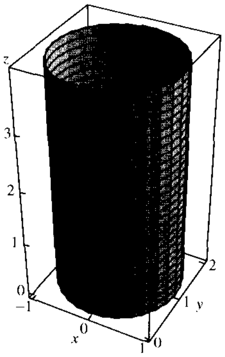
9.



11.



13.



15. $-\frac{1}{2}e^{-2x} + C$ **17.** $\frac{2a}{\pi}$ **19.** $\frac{\pi}{2}$ **21.** $\frac{1}{2}\ln 2$

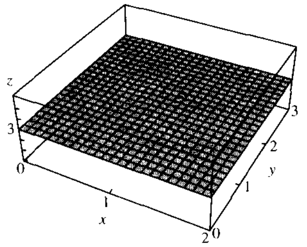
23. $\frac{-1 + 37^{3/2}}{12}$ **25.** $\frac{\pi}{4}$ **27.** $2\pi\left(\sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{a^2 - c^2}\right)$

29. 36π **31.** $\frac{\pi^2}{2}$ **33.** $\frac{81\pi}{2}$

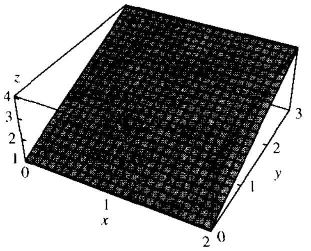
Conjunto de problemas 13.1

1. 14 **3.** 12 **5.** 4 **7.** 3 **9.** 168 **11.** 520
13. 52.57

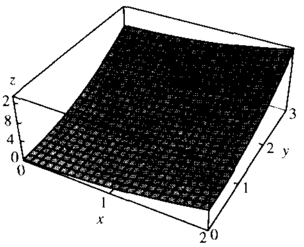
15.



17.



19.



21. 5.5 **25.** $c = 15.30, C = 30.97$
27. **(a)** -6; **(b)** 6
29. Número de pulgadas cúbicas de lluvia que cayeron en todo Colorado en 1999; promedio de lluvia en Colorado durante 1999.
31. Aproximadamente 458.

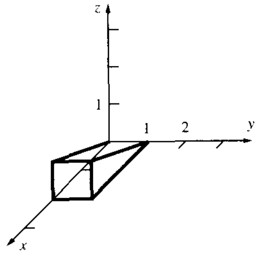
Conjunto de problemas 13.2

1. 48 **3.** $\frac{32}{3}$ **5.** $\frac{55}{4}$ **7.** 1 **9.** $\pi/2 - 1$

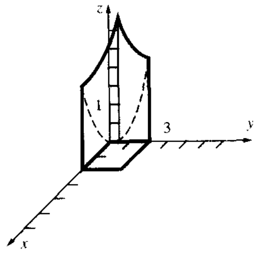
11. $\frac{4}{15}\left[31 - 9\sqrt{3}\right] \approx 4.110$ **13.** $1 - \frac{1}{2}\ln 3 \approx 0.4507$

15. $\frac{9\pi}{4}$ **17.** 0 **19.** 2 **21.** 105 **23.** 112

25.



27.



29. 7 **31.** $\frac{10}{3}$ **35.** $\frac{1}{4}(e - 1)^2$

37. **(a)** $\frac{8}{3}$ **39.** $5 - \sqrt{3} - \sqrt{2}$

Conjunto de problemas 13.3

1. $\frac{3}{4}$ **3.** 240 **5.** $\frac{1}{2}(e^{27} - e)$ **7.** $-\sqrt{2}/(2\pi)$

9. $(3\ln 2 - \pi)/9$ **11.** $e - 2$ **13.** $\frac{16}{3}$ **15.** 0 **17.** $\frac{27}{70}$

19. $4\tan^{-1}2 - \ln 5$ **21.** 6 **23.** 20 **25.** 10 **27.** $\frac{4}{15}$

29. $-\frac{1}{2}\ln(\cos 1)$ **31.** 3π **33.** $\int_0^1 \int_y^1 f(x, y)\,dx\,dy$

35. $\int_0^1 \int_{y^4}^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx\,dy$

37. $\int_{-1}^0 \int_{-x}^1 f(x, y)\,dy\,dx + \int_0^1 \int_x^1 f(x, y)\,dy\,dx$ **39.** $\frac{256}{15}$

41. $15\pi/4$ **43.** $\frac{1}{3}(1 - \cos 8)$

45. Aproximadamente 4,133,000 pies^3

Conjunto de problemas 13.4

1. $\frac{1}{12}$ **3.** $\frac{4}{9}$ **5.** $4\sqrt{2}$ **7.** $2\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi \approx 7.653$

9. $\pi a^2/8$ **11.** $8\pi + 6\sqrt{3} \approx 35.525$ **13.** $\frac{\pi}{2}$ **15.** $\frac{\pi^3}{48}$

17. $\frac{\pi}{4}$ **19.** $\pi(e^4 - 1) \approx 168.384$ **21.** $(\pi\ln 2)/8 \approx 0.272$

23. $\pi\left(2 - \sqrt{3}\right)/2 \approx 0.421$ **25.** $\frac{1}{12}$ **27.** $81\pi/8 \approx 31.809$

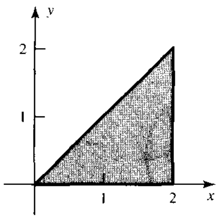
29. $625\left(3\sqrt{3} + 1\right)/12 \approx 322.716$ **31.** $\frac{2}{3}\pi d^2(3a - d)$

33. $\frac{2}{9}a^3(3\pi - 4)$

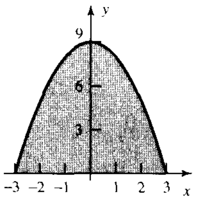
Conjunto de problemas 13.5

1. $m = 30; \overline{x} = 2; \overline{y} = 1.8$
3. $m = \pi/4; \overline{x} = \pi/2; \overline{y} = 16/(9\pi)$
5. $m \approx 0.1056; \overline{x} \approx 0.281; \overline{y} \approx 0.581$
7. $m = 32/9; \overline{x} = 0; \overline{y} = 6/5$ **9.** $m = \pi; \overline{x} = 0; \overline{y} = \frac{3}{\pi}$
11. $I_x \approx 269; I_y \approx 5194; I_z \approx 5463$
13. $I_x = I_y = 5a^5/12; I_z \approx 5a^5/6$

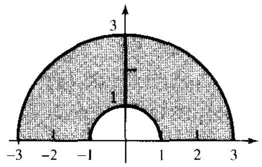
15. $k; 2k; \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$



17. La densidad es proporcional al cuadrado de la distancia al origen: $\frac{25596k}{35}; \left(0, \frac{450}{79}\right)$



19. La densidad es proporcional a la distancia al origen: $\frac{26k\pi}{3}; \left(0, \frac{60}{13\pi}\right)$



21. $\bar{r} = \sqrt{5/12}a \approx 0.6455a$ **23.** $I_x = \pi\delta a^4/4; \bar{r} = a/2$
25. $5\pi\delta a^4/4$ **27.** $\bar{x} = 0, \bar{y} = (15\pi + 32)a/(6\pi + 48)$
29. **(a)** a^3; **(b)** $7a/12$; **(c)** $11a^5/144$
31. $I_x = \pi k a^4/2, I_y = 17k\pi a^4/2, I_z = 9\pi k a^4$

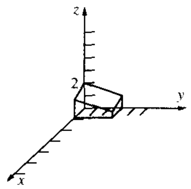
Conjunto de problemas 13.6

1. $\sqrt{61}/3$ **3.** $\pi/3$ **5.** $9 \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ **7.** $8\sqrt{2}$
9. $4\pi a\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right)$ **11.** $2a^2(\pi - 2)$
13. $\frac{1}{6}\pi a^2\left(5\sqrt{5} - 1\right)$ **15.** $\frac{(17^{3/2} - 1)\pi}{6}$
17. $\frac{D^2\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{2ABC}$
19. $(h_1 + h_2)/2$
21. $A = \pi b^2, B = 2\pi a^2[1 - \cos(b/a)], C = \pi b^2,$
$D = \pi b^2\left[2a/\left(a + \sqrt{a^2 - b^2}\right)\right], B < A = C < D$
27. **(a)** 29.3297 **(b)** 15.4233
29. E/F (empate), A/B (empate), C/D (empate)

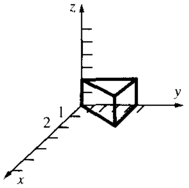
Conjunto de problemas 13.7

1. -40 **3.** $\frac{189}{2}$ **5.** 1927.54 **7.** $\frac{2}{3}$ **9.** 156

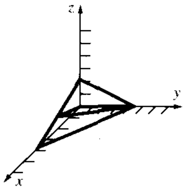
11. $\int_0^1 \int_0^3 \int_0^{(1/6)(12-3x-2y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$



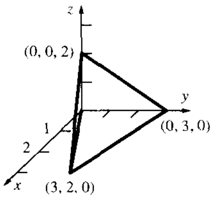
13. $\int_0^2 \int_0^4 \int_0^{y/2} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$



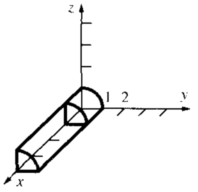
15. $\int_0^{12/5} \int_{x/3}^{(4-x)/2} \int_0^{4-x-2z} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$



17. $\int_0^3 \int_{2x/3}^{(9-x)/3} \int_0^{(18-2x-6y)/9} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$



19. $\int_1^4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$



21. $\frac{128}{15}$ **23.** $4\int_0^1 \int_{x^2}^1 \int_0^{\sqrt{y}} dz\, dy\, dx = 2$

25. $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = \frac{4}{15}$ **27.** $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 3a/8$

29. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

31. $\int_0^2 \int_0^{2-z} \int_0^{9-x^2} f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz$ **33.** 4

35. Promedio $T = 29.54$ **37.** $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{11}{24}, \frac{25}{12}, \frac{11}{24}\right)$

39. $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{17}{36}, \frac{17}{36}, \frac{55}{36}\right)$

43. **(a)** $k = \dfrac{1}{288}$ **(b)** $\dfrac{26}{27}$ **(c)** 9

45. **(a)** $\dfrac{7}{16}$ **(b)** $\dfrac{1}{4}$ **(c)** 5

47. $x^2/576, 0 \le x \le 12, 9$

Conjunto de problemas 13.8

1. Cilindro circular recto alrededor del eje z con radio 3 y altura 12; $V = 108\pi$

3. Región bajo el paraboloide $z = 9 - r^2$ por arriba del plano xy en la parte del primer cuadrante que satisface $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$; $V = \dfrac{243\pi}{16}$

5. Esfera con centro en el origen con radio a: $V = \frac{4}{3}\pi a^3$

7. 8π **9.** $14\pi/3$ **11.** $2\pi(5\sqrt{5} - 4)/3 \approx 15.038$

13. $\bar{x} = \bar{y} = 0; \bar{z} = \frac{16}{3}$ **15.** $k\pi(b^4 - a^4)$

17. $\bar{x} = \bar{y} = 0; \bar{z} = 2a/5$ **19.** $k\pi^2 a^6/16$ **21.** $\pi/9$

23. $\pi/32$

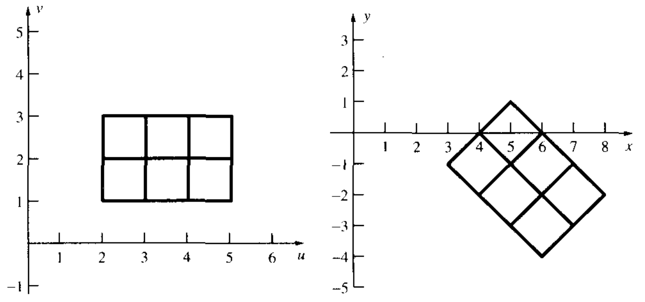
25. **(a)** $3a/4$; **(b)** $3\pi a/16$; **(c)** $6a/5$

27. **(a)** $3\pi a$ sen $\alpha/16\alpha$; **(b)** $3\pi a/16$

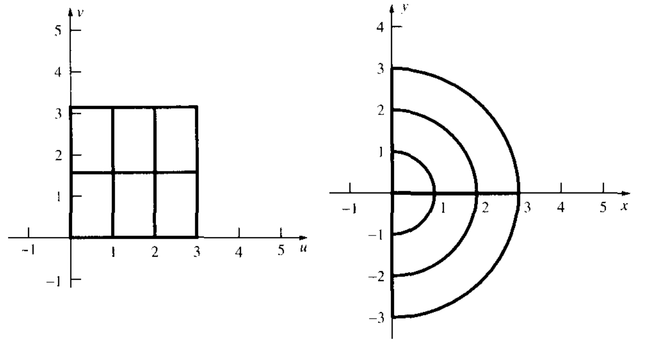
29. $(a + b)(c - 1)/(c + 1)$

Conjunto de problemas 13.9

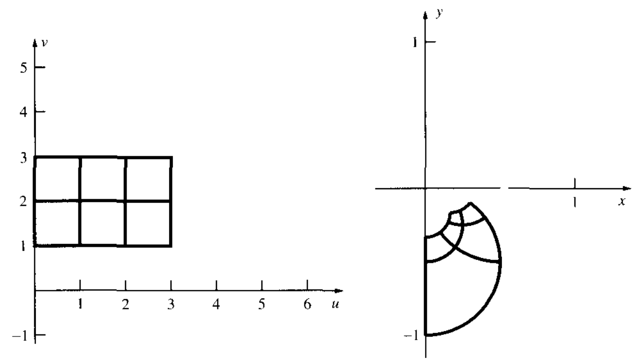
1.



3.



5.



7. La imagen es el cuadrado con esquinas (0, 0), (2, 2), (4, 0) y (2, −2); $J = -4$.

9. La imagen es el conjunto de (x, y) que satisfacen $y^2 \le x \le y^2 + 1, 0 \le y \le 1$; $J = 2u$.

11. $x = u/2 + v/2; y = u/4 - v/4; J = -\dfrac{1}{4}$

13. $x = v; y = \sqrt{u - v^2}; J = -\dfrac{1}{2\sqrt{u - v^2}}$

15. $x = v; y = u/v; J = -\dfrac{1}{v}$ **17.** 3.15669 **19.** 0

21. $-\rho^2$ sen ϕ

25. **(a)** $g(u, v) = \begin{cases} e^{-u}, & \text{si } 0 \le v \le u \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

(b) $g_U(u) = \begin{cases} ue^{-u}, & \text{si } 0 \le u \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

13.10 Revisión del capítulo

Examen de conceptos

1. Verdadero **3.** Verdadero **5.** Verdadero **7.** Falso **9.** Verdadero **11.** Verdadero **13.** Falso **15.** Verdadero **17.** Falso

Problemas de examen

1. $\frac{1}{24}$ **3.** $\frac{2}{3}$ **5.** $\int_0^1 \int_0^y f(x, y)\, dx\, dy$

7. $\int_0^{1/2} \int_0^{1-2y} \int_0^{1-2y-z} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$

9. **(a)** $8\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz\, dy\, dx$;

(b) $8\int_0^{\pi/2} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} r\, dz\, dr\, d\theta$;

(c) $8\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^a \rho^2 \text{ sen } \phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

11. 0.8857 **13.** $\bar{x} = \frac{13}{6}; \bar{y} = \frac{3}{2}$ **15.** 6 **17.** $80\pi k$

19. $ka^2bc/24$ **21.** 0

Problemas de repaso e introducción del capítulo 14

1. $x = 3 \cos t, y = 3$ sen $t, 0 \le t < 2\pi$ es una posibilidad.

3. $x = 2 \cos t, y = 2$ sen $t, 0 < t < \pi$ es una posibilidad.

5. $x = -2 + 5t, y = 2, 0 \le t \le 1$ es una posibilidad.

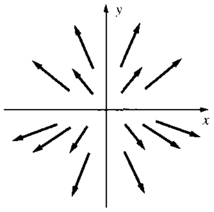
7. $x = 9 - t, y = t, 0 < t < 9$ es una posibilidad.

9. $x = -t, y = 9 - t^2, -3 \le t \le 3$ es una posibilidad.

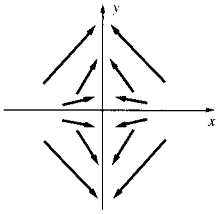
11. $\nabla f(x, y) = (x\cos x + \operatorname{sen} x)\mathbf{i} + (\cos y - y\operatorname{sen} y)\mathbf{j}$
13. $\nabla f(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$
15. $\nabla f(x, y, z) = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$
17. $\dfrac{\pi}{2}$ **19.** $\dfrac{3}{4}$ **21.** $\dfrac{14\pi}{3}$
23. El volumen en el problema 22 es el de un cascarón esférico con centro en $(0, 0, 0)$ con radio exterior = 2 y radio interno = 1.
25. $\left\langle \dfrac{3}{13}, \dfrac{4}{13}, \dfrac{12}{13} \right\rangle$

Conjunto de problemas 14.1

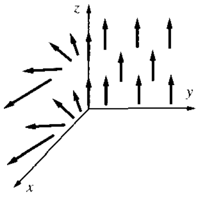
1.



3.

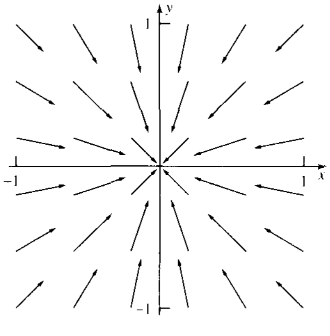


5.



7. $(2x - 3y)\mathbf{i} - 3x\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ **9.** $x^{-1}\mathbf{i} + y^{-1}\mathbf{j} + z^{-1}\mathbf{k}$
11. $e^y\cos z\mathbf{i} + xe^y\cos z\mathbf{j} - xe^y\operatorname{sen} z\mathbf{k}$ **13.** $2yz$; $z^2\mathbf{i} - 2y\mathbf{k}$
15. 0;$\mathbf{0}$ **17.** $2e^x\cos y + 1$; $2e^x\operatorname{sen} y\mathbf{k}$
19. **(a)** Sin sentido; **(b)** campo vectorial; **(c)** campo vectorial; **(d)** campo escalar; **(e)** campo vectorial; **(f)** campo vectorial; **(g)** campo vectorial; **(h)** sin sentido; **(i)** sin sentido; **(j)** campo escalar **(k)** sin sentido.
25. **(a)** div $\mathbf{F} = 0$, div $\mathbf{G} < 0$, div $\mathbf{H} = 0$, div $\mathbf{L} > 0$;
(b) en sentido del reloj para H, no para los otros.
(c) div $\mathbf{F} = 0$, rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, div $\mathbf{G} = -2ye^{-y^2}$, rot $\mathbf{G} = \mathbf{0}$, div $\mathbf{H} = 0$, rot $\mathbf{H} = -2xe^{-x^2}\mathbf{k}$. div $\mathbf{L} = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$, rot $\mathbf{L} = \mathbf{0}$

27.



div $\mathbf{F} > 0$. Una rueda con paleta en el origen no girará.

Conjunto de problemas 14.2

1. $14(2\sqrt{2} - 1)$ **3.** $2\sqrt{5}$ **5.** $\frac{1}{6}(14\sqrt{14} - 1)$ **7.** $\frac{100}{3}$
9. 144 **11.** 0 **13.** $\frac{17}{6}$ **15.** 19 **17.** $k(17\sqrt{17} - 1)/6$
19. $-\frac{7}{44}$ **21.** $-\frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ **23.** $2 - 2/\pi$
25. El trabajo a lo largo de C_1 es positivo; el trabajo a lo largo de C_2 es negativo; el trabajo a lo largo de C_3 es cero.
27. 2.25 gal **29.** $2\pi a^2$ **31.** $4a^2$
33. **(a)** 27; **(b)** $-297/2$

Conjunto de problemas 14.3

1. $f(x, y) = 5x^2 - 7xy + y^2 + C$ **3.** No es conservativo.
5. $f(x, y) = \frac{2}{5}x^3y^{-2} + C$ **7.** $f(x, y) = 2xe^y - ye^x + C$
9. $f(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + 3z^3 + C$ **11.** $\ln\left(\dfrac{1}{x^2 + z^2}\right) + C$
13. 14 **15.** $\dfrac{20}{1377}$ **17.** 6 **19.** $-\pi$
23. $f(x, y, z) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2)$
25.
$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b m\mathbf{r}''(t)\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt$$
$$= \tfrac{1}{2}m\int_a^b (d/dt)[\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}'(t)]\,dt = \tfrac{1}{2}m\int_a^b (d/dt)|\mathbf{r}'(t)|^2\,dt$$
$$= \left[\tfrac{1}{2}m|\mathbf{r}'(t)|^2\right]_a^b = \tfrac{1}{2}m[|\mathbf{r}'(b)|^2 - |\mathbf{r}'(a)|^2]$$
27. $f(x, y, z) = -gmz$

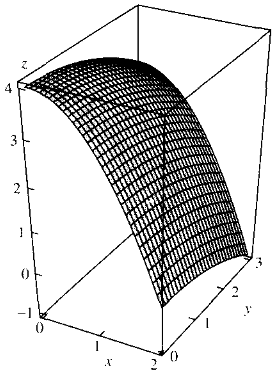
Conjunto de problemas 14.4

1. $-\frac{64}{15}$ **3.** $\frac{72}{35}$ **5.** 0 **7.** $\frac{8}{3}$
9. **(a)** 0; **(b)** 0
11. **(a)** 0; **(b)** 0
13. 50 **15.** -2
19. **(c)** M y N tienen una discontinuidad en $(0, 0)$.
23. $3\pi a^2/8$
27. **(a)** div $\mathbf{F} = 4$; **(b)** 144
29. **(a)** div $\mathbf{F} < 0$ en el primero y en el tercer cuadrantes; div $\mathbf{F} > 0$ en el segundo y en el cuarto cuadrantes.
(b) 0; $-2(1 - \cos 3)^2$

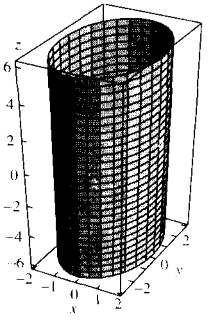
Conjunto de problemas 14.5

1. $8\sqrt{3}/3$ **3.** $2 + \pi/3$ **5.** $5\pi/8$ **7.** 6 **9.** 2
11. 20 **13.** $\sqrt{3}ka^4/12$ **15.** $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = a/3$

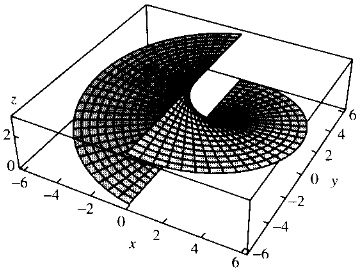
17.



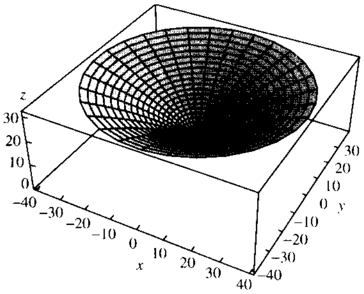
19.



21. $\pi\left[6\sqrt{37} + \ln\sqrt{\dfrac{\sqrt{37}+6}{\sqrt{37}-6}}\right]$



23. $\dfrac{\pi}{4}\left[\dfrac{\pi}{2}(32\pi^2 + 25)\sqrt{16\pi^2 + 25} - \dfrac{625}{8}\ln\left|4\pi + \sqrt{16\pi^2 + 25}\right| + \dfrac{625}{8}\ln 5\right]$



25. $\dfrac{702965k}{32}$

29. **(a)** 0; **(b)** 0; **(c)** $4\pi a^4$; **(d)** $4\pi a^4/3$; **(e)** $8\pi a^4/3$

31. **(a)** $4k\pi a^3$; **(b)** $2k\pi a^3$; **(c)** $hk\pi a(a + h)$

Conjunto de problemas 14.7

1. 0 **3.** 8 **5.** $3a^2b^2c^2/4$ **7.** $64\pi/3$ **9.** 4π
11. 1176π **13.** 100π

15. $\nabla \cdot \mathbf{F} = 3$ y por lo que $\displaystyle\iint_{\partial S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = \iiint_{S} 3\, dV = 3V(S)$.

19. **(a)** $20\pi/3$; **(b)** 4π; **(c)** $16\pi/3$; **(d)** 1; **(e)** 36;
(f) $12\pi/5$; **(g)** $32\pi \ln 2$

Revisión del capítulo

1. 0 **3.** −2 **5.** -48π **7.** 8π **9.** 2 **11.** $\pi/4$
15. 1/3 **17.** $\frac{4}{3}a^2$ joules

14.8 Revisión del capítulo

Examen de conceptos

1. Verdadero **3.** Falso **5.** Verdadero **7.** Falso
9. Verdadero **11.** Verdadero.

Problemas de examen

3. $\operatorname{rot}(f\,\nabla f) = f\operatorname{rot}(\nabla f) + \nabla f \times \nabla f = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$

5. **(a)** $\pi/4$; **(b)** $(3\pi - 5)/6$

7. 47

9. **(a)** $\frac{1}{2}$; **(b)** $\frac{4}{3}$; **(c)** 0

11. 6π **13.** 0 **15.** $9\pi(3a - 2)/\sqrt{a^2 + b^2 + 1}$

Índice

A
Abel, Niels, Henrik, 485
Aceleración, 98, 127
  componentes de la, 598-601
Afelio, 542
Algoritmos, 193
  de punto fijo, 194-195
Amplitud de funciones trigonométricas, 43-45
Análisis de error, 266-268
Ángulos, 46-47
  de inclinación, 49
  dirección, 569
  rotación de ejes de cónicas, 526
Antiderivadas, 197-202
  general, 198
  notación para, 198-199
  Regla de la potencia generalizada, 200-201
Antidiferenciación, 411
Antiguos problemas de la cabra (o del chivo), 551, 705
Aproximaciones, 144-146, 413
  derivadas, 144-146
de Taylor para una función, 497-502
  lineales, 145-146
  planos tangentes y, 654-655
Área, 215-221
  de una región plana, 275-279
    distancia y desplazamiento, 278
    región entre dos curvas, 277-278
    región por abajo del eje *x*, 275-276
    región por arriba del eje *x*, 275
  de una superficie, 700-704
  de una superficie de revolución, 299
  mediante polígonos circunscritos, 216
  mediante polígonos inscritos, 216
  problemas, 701
  superficie, 700-704
Arquímedes, 93, 232, 513
Asíntota, 31, 80-81
  horizontal, 80
  oblicua, 82, 180
  vertical, 80
Axioma de completez, 8

B
Banda de Möbius, 758, 770
Barrow, Isaac, 232
Bola, 556
Bouyer, Martine, 488
Brahe, Tycho, 585

C
Calculadora graficadora, 24, 26
Calculadoras, 3, 413-416
Cálculo,
  definido, 55, 66
  diferencial, 100
  en el sistema de coordenadas polares, 547-550
  graficación de funciones por medio de, 178-182
  Primer Teorema Fundamental del, 232-240
  Segundo Teorema Fundamental del, 243
Cálculo vectorial, 731-774
  campos vectoriales, 731-733
  integrales de línea, 735-740
  integrales de superficie, 755-763
Campo
  de fuerza, 731
  de pendientes, 359-360
  escalar, 731
    gradiente de, 732-733
  gradientes, 640, 732-733
  vectoriales, 731-733
    conservativos, 732
    definición, 731
    divergencia y rotacional de, 733-734
    estacionarios, 731
Capas, 281
Cardioide, 543
Cascarones, 288-292
  cilíndricos, 288-289
  método de, 289-291
Catenaria, 378-379
Cauchy, Augustin Louis, 66
Centro
  de curvatura, para una curva plana, 595-596
  de masa, 309
    e integrales dobles, 696-698
    e integrales triples en coordenadas cartesianas, 709-710
  geográfico, 315
Centroide, 311
Cicloide, 295, 531-532, 536
  prolata (alargada), 536
  reducida, 536
Cilindros, en el espacio tridimensional, 604
  rectos, 281
Circulación, 753, 772
Círculo de curvatura, 595
Circunferencia:
  definición, 17
  ecuación de la, 17-18
  ecuaciones polares para, 540-541
Cocientes, 35-36
Coeficiente de fricción, 602
Cola, de vectores, 560-561
Completar el cuadrado, 524
Componentes
  de la aceleración, 598-601
  formas vectoriales de, 599
  normales de la aceleración, 598
  tangenciales de la aceleración, 598
Composición
  de funciones, 36-37
  (o capitalización) continua, uso del término de, 351-352
Computadoras, 3
Concavidad, 156-160
  hacia abajo, 156-157
  hacia arriba, 156-157
  puntos de inflexión, 159-160
Conchoide, 545
Cónicas centrales, 513
Conjunto
  abierto, 633
  cerrado, 633
  conexo, 743
  de convergencia, 480-481
  disconexo, 743
  r-simple, 692
  simplemente conexo, 745-746
  q simple, 692
  x-simple, 685
  y-simple, 684-685
  z-simple, 707
Cono elíptico, en el espacio tridimensional, 606
Conservación de la energía, 747
Constante
  de Euler, 468
  de resorte, 302
Continuidad:
  bajo operaciones con funciones, 84
  de funciones, 82-88
  de funciones comunes, 83-84
  de funciones polinomiales y racionales, 83
  de funciones trigonométricas, 84
  de funciones valor absoluto y raíz *n*-ésima, 84
  de una función de dos o más variables, 632
  en un conjunto, 632-633
  en un intervalo, 86-87
    abierto, 86
    cerrado, 86
  en un punto, 83, 632
Contrapositiva, 4, 457
Convergencia, 449-450
  absoluta, 477
  de la serie de Taylor, 489-493
  uso del término, 434, 450, 456, 463
Coordenada, 2
  x (abscisa), 16
  y (ordenada), 16
Coordenadas cartesianas, 16
  curvas en el espacio tridimensional, 558-559
  en el espacio tridimensional, 555-559
    esferas, 556-557
  fórmula de la distancia, 556
  fórmula del punto medio, 557
  gráficas en el espacio tridimensional, 557-558
  integrales triples en, 706-711
Coordenadas cilíndricas, 609-610
  integrales triples en, 713-715
  y coordenadas polares, 714
Coordenadas esféricas, 609-611
  en geografía, 611-612
  integrales triples en, 715-717
Coordenadas polares:
  integrales dobles en, 691-694
    integrales iteradas, 691-692
  y coordenadas cilíndricas, 714

- Copo de nieve de Koch, 462
- Corriente, 99
- Cosecante, 45-46
- Coseno, 41-42
  - gráficas del, 42-43
  - propiedades básicas del, 41-42
- Costo
  - fijo, 172
  - marginal, 173
  - variable, 172
- Cota superior, 8
- Cotangente, 45-46
- Crecimiento y decaimiento exponencial, 347-352
  - crecimiento exponencial, definición, 348
  - decaimiento exponencial, definición, 348
  - decaimiento radiactivo, 350
  - ecuaciones diferenciales, para resolver, 348-349
  - interés compuesto, 351-352
  - ley de enfriamiento de Newton, 350-351
  - modelo logístico, 349
  - tiempo de duplicación, 349
- Criterio(s)
  - de comparación, 469
  - de comparación de límites, 470, 473
  - de la integral, 464, 473
  - de la primera derivada, 163-164
  - de la razón (cociente), 471-473
  - de la segunda derivada, 164, 171
  - de las sumas acotadas, 464, 473
  - de perpendicularidad, 567
  - de segundas parciales, 660
  - del n-ésimo término para la divergencia, 473
  - ordinario de comparación, 469-471, 473
- Criterios de convergencia:
  - criterio de comparación de límites, 470
  - criterio de comparación ordinaria, 469
  - criterio de convergencia absoluta, 476
  - criterio de la razón, 471
  - criterio de la razón de valores absolutos, 477
  - criterio de *p-series*, 465
  - criterio de sumas acotadas, 464
  - criterio para series alternantes, 475
- Cuadrados, 13-14
- Cuadrantes, 16
- Cuádricas centrales, 605
- Cuantificadores, 5-6
- Cuarta derivada, 125
- Cuña esférica, 715
- Curva plana, 295, 530
  - longitud de arco, 294-299
    - diferencial de, 298-299
  - orientación, 295
- Curvas:
  - cálculo para curvas definidas en forma paramétrica, 532-534
  - cerrada, 530
  - en el espacio tridimensional, 558-559
  - equipotenciales, 623
  - isosísmicas, 621
  - isotermas, 621
  - parámetro, eliminación, 530-531
  - representación paramétrica de, 530-534
    - cicloide, 531-532
  - simple, 530
  - suave, 295, 558
- Curvas de nivel, 619-620
  - y gradientes, 643-644
  - y gráficas con computadora, 619-621
- Curvas-u, 719-720
- Curvas-v, 719-720
- Curvatura:
  - binormal, 599-600
  - centro de, para una curva plana, 595-596
  - círculo de curvatura, 595
  - círculo osculante, 595
  - componentes de la aceleración, 598-601
    - formas vectoriales para, 599
  - definición, 593
  - ejemplos de, 594-595
  - radio de, para una curva plana, 595-596

D

- Decaimiento radiactivo, 350
- Decimales
  - que no se repiten, 2-3
  - que se repiten, 2-3
- Delta, determinación, 12
- Deltoide, 536
- Demostración:
  - clave para, 186
  - por contradicción, 5
  - primer teorema fundamental del cálculo, 237-239
  - regla de la cadena, demostración parcial, 122-123
  - teorema de Green, 749-750
  - teorema de la divergencia de Gauss, 765
  - teorema principal de límites, 71-72
- Densidad, 3
- Derivación
  - implícita, 130-134
    - regla de la potencia, 133
  - logarítmica, 329, 345
- Derivadas, 93-149. *Véase también* Antiderivadas; Regla de la cadena; Diferenciales; Derivadas de orden superior
  - aplicaciones a la economía, 172
  - aplicaciones de, 151-213
  - aproximaciones, 144-146
  - concavidad, 156-159
  - definición, 100
  - de funciones de dos o más variables, 617-672
  - de funciones trigonométricas, 114-117
  - de orden superior, 125-129
  - determinación, 100-101
    - regla para, 107-110
  - diferenciabilidad y continuidad, 102-103
  - diferenciación, 100
  - diferenciación implícita, 130-134
  - diferenciales, 142-146
  - ecuaciones diferenciales, 203-208
  - formas equivalentes para, 101-102
  - fórmulas, 114-117
  - gráfica de, 104
    - regla para, 107-110
    - resumen del método, 181-182
    - uso para graficar una función, 182-183
  - incrementos, 103-104
  - monotonía, 155-156
  - notación de Leibniz para, 104
  - operador lineal, 109
  - pregunta acerca de la existencia, 151-152
  - problemas prácticos, 167-174
  - Prueba (criterio) de la primera derivada, 163-164
  - Prueba (criterio) de la segunda derivada, 164, 171
  - recta tangente, 93-95
  - Regla de la cadena, 118-123
  - Regla de la diferencia, 109
  - Regla de la función constante, 107-108
  - Regla de la función identidad, 108
  - Regla de la potencia, 108, 110
  - Regla de la suma, 109
  - Regla del cociente, 112, 116
  - Regla del múltiplo constante, 108
  - Regla del producto, 111-112, 116
  - tasa de cambio, 97
  - tasas relacionadas, 135-140
  - Teorema del valor medio, 185-188
  - velocidad instantánea, 93, 95-96
  - velocidad promedio, 95
- Derivadas de orden superior, 125-129
  - aceleración, 126-128
  - notación con apóstrofo, 125
  - notación D, 125
  - notación de Leibniz, 104, 125-126
  - primera derivada, 125
  - problemas de cuerpos que caen, 128-129
  - segunda derivada, 125-126
  - tercera derivada, 125
  - velocidad, 126-128
- Derivadas direccionales y gradientes, 642-645
  - curvas de nivel y gradientes, 643-644
  - dimensiones superiores, 644-645
  - relación con el gradiente, 642-643
  - superficie de nivel, 644
  - tasa máxima de cambio, 643
- Derivadas parciales, 624-627
  - derivada parcial de f con respecto a x, 624, 627
  - interpretaciones geométrica y física, 625-626
  - mixtas, 627
    - igualdad de, 633
  - segunda, 626
  - tercera, 626
- Derivadas simétricas, 104
- *Derive*, 413
- Descartes, René, 537
- Descomposición en fracciones parciales, 404-412
- Desigualdad
  - de Cauchy-Schwarz para integrales, 684
  - de Minkowski, 337
  - de Napier, 331
  - de Young, 337
  - del triángulo, 11, 574
  - media geométrica-media aritmética, 15
- Desigualdades, 8-14
  - que incluyen valores absolutos, 11-12
  - resolución, 9-11
- Desplazamiento, 18-19, 279
- Determinantes, 574
- Diagrama de dispersión, 170
- Diámetro
  - mayor, 515
  - menor, 515
- Diferenciabilidad, 635-640
  - continuidad *versus*, 640
  - para una función de dos o más variables, 638
- Diferenciación, 100
  - fórmulas, 581
- Diferencial
  - de la variable dependiente, 143

  de la variable independiente, 143
  de longitud de arco, 298-299
Diferenciales, 142-146
  aproximaciones, 144-146
  definición, 143
  error absoluto, 145
  error relativo, 145
  estimación de errores, 144-145
  planos tangentes, 654-655
Diferencias, 35-36
Dirección:
  ángulos, 569
  cosenos, 569
  números, 589
  vectores, 560, 589
Directriz, 509
Discos, método de los, 281-288
Discriminante, ecuación cuadrática, 13
Distancia
  dirigida, 1-2
  total, 279
  valores absolutos como, 62
Distribución
  continua de masa a lo largo de una recta, 309-310
  de masa en el plano, 310-311
  de probabilidad, 316
  de Weibull, 441
  exponencial, 436-437
  normal, 438
  normal estándar, 438
  uniforme, 321
Divergencia, 752
  criterio del *n*-ésimo para, 457-458
  de un campo vectorial, 733-734
  uso del término, 434, 450, 456
Dominio:
  funciones, 617
  natural, 30
  restricción del, 365
  y rango, 30

E

e, 337, 352
Ecuación(es)
  algoritmo de punto fijo, 194-195
  de Laplace, 628
  de onda, 628
  de una recta vertical, 20
  diferencial logística, 349, 354, 408-410
  diferenciales parciales, 628
  diferenciales separables de primer orden, 204
  lineal general, 21
  método de bisección, 190-192
  método de Newton, 192-194
  paramétricas, 294, 589
  resolución numéricamente, 190-195
  simétricas, 590
Ecuación canónica:
  circunferencia, 17
  elipse, 515
  esfera, 556
  hipérbola, 516-517
  parábola, 510
Ecuaciones diferenciales, 203-208
  aproximación por, 359-363
    campos de pendientes, 359-360
    Método de Euler, 360-363
  definición, 203-204
  problemas de movimiento, 206-208
  separables de primer orden, 204
  separación de variables, 205-206
Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, 355-357
  aplicaciones, 356-357
  condición inicial, 355
  definición, 355
  factor integrante, 355
  resolución, 355-356
  solución general, 355
  solución particular, 355
Ecuaciones polares:
  gráficas de, 542-544
    cardioides, 543
    lemniscatas, 543
    limaçones, 543
    rosas, 543-544
    espirales, 544
  intersección de curvas en coordenadas polares, 544
Efecto multiplicador, 461
Eje, 282, 510-511
  de coordenadas, 16
  ecuación general de una sección cónica, 525-526
  mayor (principal), 509-510, 515
  menor, 515
  rotaciones, 526-528
    determinación del ángulo q, 527-528
  traslaciones, 523-524
  x, 16
  y, 16
Elevación, 18-19
Elipse, 509, 513-520
  ecuación estándar de, 515
  ecuación polar para, 541
  galería de los murmullos, 520
  horizontal, 516
  propiedad de la cuerda de, 517-519
  propiedad de reflexión de, aplicaciones, 520
  propiedades ópticas, 519-520
Elipsoide, en el espacio tridimensional, 605
Enteros, 1
Epicicloide, 536
Error
  absoluto, 145
  de cálculo, 499, 501-502
  del método, 499-500
  relativo, 145
Escalares, 560
  división de un vector entre, 564
Esferas, 556-557
  definición, 556
  ecuación estándar de, 556
  sólida, 556
Esferoide alargado (elipsoide), 287
Espacio bidimensional, 555
Espacio muestral, 316
Espacio tridimensional:
  cilindros en, 604
  cono elíptico en, 606
  coordenadas cartesianas en, 555-559
    curvas en el espacio tridimensional, 558-559
    esferas, 556-557
    fórmula de la distancia, 556
    fórmula del punto medio, 557
    gráficas en el espacio tridimensional, 557-558
  curvas en, 558-559
  elipsoide en, 605
  paraboloide elíptico en, 606
  rectas en, 589-591
  rectas tangentes en, 589-591
  teorema de Pitágoras en, 578
  vectores en, 560-564
Espirales, 544
  de Arquímedes, 544-546
  logarítmica, 544
  recíproca, 546
Esquema de iteración, 192
Estimación, 3-4
Estrategia rebanar, aproximar e integrar, 276-277, 280-282, 286, 289-290, 302, 309-311, 547, 681, 709, 737
Euler, Leonhard, 337, 361
Eventos disjuntos, 316
Excentricidad, 509
Exponentes, propiedades de, 342
Extremos:
  condiciones suficientes para, 660-664
  en intervalos abiertos, 165

F

Familia de funciones, 233
Fechado con carbono, 353
Fermat, Pierre de, 537
Fibonacci, Leonardo, 454
Figuras de Lissajous, 536
Flujo, 752
  de un campo vectorial a través de una superficie, 758-759
  irrotacional, 753
Foco, 509
Forma
  estándar para la ecuación de un plano, 570
  pendiente intercepción al origen, 20
  punto-pendiente, 19-20
  vectoriales para las componentes de la aceleración, 599
Formas indeterminadas, 423-447
  de los tipos $0 \cdot \infty$ e $\infty - \infty$, 430-431
  del tipo ∞/∞, 429
  del tipo 0/0, 423-427
    regla de L'Hôpital para, 429
  del tipo $0^0, \infty^0, 1^\infty$, 431-432
Fórmula
  cuadrática, 13
  de cambio de variable:
    de Stirling, 341, 468
    para integrales dobles, 721-726
    para integrales triples, 726
  de la distancia, 16-17, 556
  de Maclaurin, 496, 500
  de reducción, 390
  derivadas, 114-117
  del binomio, 452
  del punto medio, 18, 557
  explícita, para series infinitas, 449
  recursiva, 192, 449
Fracción continua, 196
Frontera de un conjunto, 764
Fuerza de un fluido, 304-305
Función (funciones), 29, 233
  algebraicas explícitas, 39

  armónica, 628, 735
  beta, 393
  catálogo parcial de, 38-39
  composición de, 36-37, 632
  comunes, continuidad, 83-84
  con valores reales de dos variables reales, 617
  conjunta de densidad de probabilidad, 710-711
  constante, 38
  continua por la derecha, 86
  continua por la izquierda, 86
  continuas, 83
  continuidad, 82-88
    en un conjunto, 632-633
    en un punto, 632
  coseno, 41
  cuadrática, 39
  curvas de nivel, 619-620
  de acumulación, 233, 319
  de densidad de probabilidad (FDP), 318, 436-439
  de densidad de probabilidad de Pareto, 441
  de densidad gama, 446
  de distribución acumulativa (FDA), 319
  de dos variables:
    diferenciabilidad para, 638
    límite de, 629
    local linealmente para, 637
    o más variables, 617-622
    polinomios de Taylor, 655-656
  de tres o más variables, 622
  discontinua, 83
  dominio, 617
  especial, 32
  estrictamente monótona, 332
  exponencial para la base a, 342
  exponenciales, 344
  gráficas de, 31, 617-618
  gráficas de computadora, 618-619
  hiperbólicas inversas, 376-377
  identidad, 38
  impar, 32
  lineales, 39, 109
  lineales, 39
  localmente lineales, 636
  logarítmica, 325-330
    de base a, 343
  máximo entero, 32
  objetivo, 151
  operaciones sobre, 35-39
  par e impar, 31-32
  periódica, 43-44
  polinomial, 38
  potencia, 344
  potencial, 732
  que incluyen raíces, 180-181
  racional, 39, 630
  raíz n-ésima, continuidad de, 84
  rango, 29, 617
  seno, 41
  traslaciones, 37-38
  trigonométricas, 41-48
  uno a uno, 332
  valor absoluto, 32
  valor promedio, 253

Función exponencial natural, e^x, 337-340
  derivada de e^x, 338-339
  propiedades de, 337-338
Función logaritmo natural, 325-330
  definición, 325
  derivación logarítmica, 329
  derivada de, 326-327
  gráfica de, 329
  propiedades de, 327-329
Funciones con valores vectoriales, 579-587
  fórmulas de derivación, 581
  leyes de Kepler del movimiento planetario, 585-587
  límite de, 579
  movimiento curvilíneo, 581-585
Funciones exponencial y logarítmica generales, 342-345
  función log a, 343-344
Funciones hiperbólicas, 374-378
  aplicaciones, 378
  catenaria, 378
  derivadas de, 374-376
  inversa, 376-377
Funciones inversas, 331-335
  derivadas de, 334-335
  existencia de, 332-333
Funciones polinomiales, 38-39, 178-179, 630
  continuidad de, 83
Funciones racionales, 39, 179-180, 630
  continuidad de, 83
  integración de, 404-410
  propias, 404
Funciones trascendentales, 325-381
  crecimiento y decaimiento exponencial, 347-352
  ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, 355-357
  función exponencial natural, 337-340
  función logaritmo natural, 325-330
  funciones exponencial y logarítmica generales, 342-345
  funciones hiperbólicas, 374-378
  funciones inversas, 331-335
  funciones trigonométricas inversas, 365-371
Funciones trigonométricas, 41-48
  amplitud, 43-45
  ángulos, 46-47
  continuidad de, 84
  cosecante, 45-46
  coseno, 41-42
  cotangente, 45-46
  derivadas de, 114-117, 368
  identidades importantes, lista de, 47-48
  identidades trigonométricas, 47
  inversas, 365-368
  límites que incluyen, 73 -76
  periodo de, 43-45
  secante, 45-46
  seno, 41-42
  tangente, 45-46
Funciones trigonométricas inversas, 368-369
  derivadas de, 365-366
  identidades útiles, 368
  manipulación del integrando, 371
  restricción del dominio, 365
  seno inverso y coseno inverso, 365-366
  tangente inversa y secante inversa, 366-367

G
Gabriel, trompeta, 439-440
Galería de los murmullos, 520
Galileo, Galilei, 93
Geometría en el espacio y vectores, 555-615, 556
Gradiente, 638, 641-645
  recuperación de funciones a partir de su, 745-747
  reglas para, 640
  y curvas de nivel, 643-644
Grado, 19
Grado de una función polinomial, 39
Gráficas:
  computadora, 618-619
    y curvas de nivel, 619-621
  de contornos, 619
    aplicaciones de, 621
  de derivadas, 104
    resumen del método, 181-182
    uso para graficar una función, 182-183
  de ecuaciones, 24-27
    intersecciones de, 26-27
    procedimiento para graficar, 24-25
    simetría de, 25-26
  de ecuaciones polares, 542-544
    cardioides, 543
    espirales, 544
    lemniscatas, 543
    limaçon, 543
    rosas, 543-544
  de funciones, 617-618
  de una función, 31
  en el espacio tridimensional, 557-558
  uso de simetría, 542-543
Green, George, 749
Guilloud, Jean, 488

H
Handbook of Mathematical Functions, 412, 417-418
Hélice, 559, 583
Hipérbola, 509, 513-520
  ecuación canónica de, 516-517
  ecuación polar para, 541
  propiedades cordales de, 517-519
    aplicaciones, 520
  propiedades ópticas, 519-520
Hiperboloide de dos hojas, en el espacio tridimensional, 606
Hiperboloide de una hoja, en el espacio tridimensional, 605
Hipocicloide, 536
  de cuatro cúspides, 536
Hoja de Descartes, 537
Homogénea de grado 1, 652
Huygens, Christian, 532

I
Identidad
  de Lagrange, 578
  de cofunciones, 47
  de suma, 47
  del ángulo doble, 47
  del ángulo medio, 47
  del producto, trigonométricas, 48
  para la suma de ángulos, 47
  pitagóricas, trigonométricas, 47
  trigonométricas par-impar, 47

- Imagen de un conjunto, 719
- Inclinación, 19
- Incrementos, 103-104
  - derivadas, 103-104
- Independencia de trayectoria, 742-747
  - conservación de la energía, 747
  - criterios para, 743-745
  - notación para integrales de línea, 746
  - recuperación de una función a partir de su gradiente, 745-747
  - teorema, 743
- Inducción matemática, 5, A-1/A-3
- Ingreso
  - marginal, 173-174
  - total, 172
- Integración, *Véase* Antiderivadas,
  - ambos límites infinitos, 435-437
  - convergencia, uso del término, 434, 450, 456
  - de funciones racionales, 404-410
    - descomposición en fracciones parciales (factores cuadráticos), 407-408
    - descomposición en fracciones parciales (factores lineales), 405-407
    - ecuación diferencial logística, 408-410
  - divergencia, uso del término, 434, 450, 456
  - estrategias para, 411-418
  - formas estándar, 383-384
  - funciones de densidad de probabilidad (FDP), 436-439
  - funciones definidas mediante tablas, 416-417
  - funciones especiales, 417-418
  - integrales trigonométricas, 393-398
  - interna, 682
  - límites de, 707
  - límites infinitos de, 433-440
  - numérica, 260-268
    - análisis del error, 266-268
    - funciones definidas mediante una tabla, 268
    - integrales definidas, 260-268
    - regla de la parábola (regla de Simpson), 265
    - regla del trapecio, 264
    - sumas de Riemann, 260
  - por partes, 383, 387-391, 411-412
    - fórmula de reducción, 390
    - integrales definidas, 387-389
    - integrales indefinidas, 387
    - repetida, 389-390
  - reglas básicas, 383-385
  - repetida, por partes, 389-390
  - sistemas de álgebra computacional y calculadoras, 413-416
  - sustitución, 383
    - en integrales definidas, 385
    - en integrales indefinidas, 384-385
    - por racionalización, 399-402
  - técnicas, 383-421
  - un límite infinito, 433-435
- Integrales:
  - a lo largo de una curva, 735
  - aplicaciones de, 275-323
    - área de una región plana, 275-279
    - curva plana, longitud de, 294-299
    - momentos y centro de masa, 308-313
    - probabilidad y variables aleatorias, 316-320
    - sólidos de revolución, volúmenes de, 288-292
    - sólidos, volúmenes de, 281-286
    - trabajo y fuerza del fluido, 301-306
  - definida, 224-232
  - de probabilidad, 693
  - estimación, 255
  - impropia, 433-444
  - integrales dobles sobre regiones no rectangulares, 684-689
  - interna, 682
  - iteradas, 680-683
  - múltiples, 675-729
  - tabla de, 412-413
  - teorema del valor medio para, 253-258
- Integrales definidas, 215-273, 413
    - área, 215-221
  - evaluación, 240
  - integración numérica, 260-268
  - linealidad de, 236-237
  - propiedad aditiva de intervalos, 229-230
  - propiedad de acotamiento, 236
  - propiedad de comparación, 235-236
  - Regla de sustitución para, 248
  - sumas de Riemann y, 224-225
  - Teorema de integrabilidad, 227
    - uso de simetría para la evaluación de, 255-256
  - velocidad y posición, 230
- Integrales de línea, 735-740
  - condiciones equivalentes para, 744
  - ejemplos y aplicaciones, 737-738
  - teorema fundamental para, 742
    - trabajo, 738-740
- Integrales de superficie, 755-763
  - área de la superficies para, 760-763
  - evaluación, 756-757
  - flujo de un campo vectorial a través de una superficie, 758-759
  - superficie parametrizada:
    - definición, 760
- Integrales dobles, 676-679
  - aplicaciones de, 696-699
    - centro de masa, 696-698
    - momento de inercia, 698-699
  - ejemplos de, 686-689
  - en coordenadas polares, 691-694
    - integrales iteradas, 691-692
  - evaluación de, 677-679
  - fórmula de cambio de variable para, 721-726
    - bosquejo de la demostración, 721-723
  - propiedad de, 677
  - sobre conjuntos generales, 684-686
  - sobre conjuntos generales, evaluación de, 684-686
  - sobre regiones no rectangulares, 684-689
  - sobre regiones rectangulares, 684-689
- Integrales impropias, límites infinitos, 433-440
  - integrandos infinitos, 442-444
- Integrales indefinidas, 244
  - como operador lineal, 199-200
  - regla de sustitución para, 246
  - uso de término, 199
- Integrales iteradas, 680-683
  - definida, 681
  - evaluación, 681-683
  - integración interna, 682
  - integral interna, 682
- Integrales múltiples, 675-729
  - área de una superficie, 700-704
  - cambio de variables en, 718-726
    - terminología y notación, 718
  - integrales dobles, 676
    - en coordenadas polares, 691-694
    - evaluación de, 677-679
    - propiedades de, 677
    - sobre regiones no rectangulares, 684-689
  - integrales iteradas, 680-683
  - integrales triples:
    - en coordenadas cartesianas, 706-711
    - en coordenadas cilíndricas y esféricas, 713-717
  - la cuestión de existencia, 677
- Integrales trigonométricas, 393-398
  - función logaritmo natural, 329-330
- Integrales triples:
  - definición, 706
  - en coordenadas cartesianas, 706-711
    - masa y centro de masa, 709-710
    - pares de vectores aleatorios, 710-711
    - regiones generales, 707-709
  - en coordenadas cilíndricas y esféricas, 713-717
  - fórmula de cambio de variable para, 726
- Integrandos, 199
  - infinito en un punto extremo, 442-444
  - infinito en un punto interior, 444
  - no acotado, 442
- Intercepciones
  - con el eje x, 26
  - con el eje y, 26
- Intervalo(s), 8-11
  - abierto, 8
  - cerrado, 8-9
  - continuidad en, 86-87
- Inversa, definición, 332
- Isobaras, 623
- Isotermas, 621

J

- Jacobiano de una transformación, 722-725
- Joules, 301

K

- Kepler, Johannes, 93, 517, 585

L

- Lado
  - cóncavo de una curva, 582
  - recto, 512
  - Lagrange, Joseph Louis, 500
- Lámina, 311, 696-698
  - centro de masa, 311, 696-698
  - masa, 311, 696
- Laplace, Pierre-Simon de, 446
- Laplaciano, 735
- Leibniz, Gottfried Wilhelm von, 66, 104, 110, 232
- Lemniscata, 543
- Lentes, 519
- Ley
  - anticonmutativa, 575
  - de Boyle, 142
  - de conservación de la energía, 747
  - de Coulomb, 307
  - de enfriamiento de Newton, 350-351
  - de Hooke, 170, 302, 306, 322
  - de los cosenos, 540
  - de Newton de la gravitación, 652

  - de Newton del inverso de los cuadrados, 435
  - del inverso de los cuadrados de la atracción gravitacional, 731, 748
  - del tercero excluido, 5
  - de Torricelli, 209
- Leyes de Kepler del movimiento planetario, 585-587
  - primera ley, 585
  - segunda ley, 585-586
  - tercera ley, 586-587
- Limaçon, 543
- Límite(s), 55, 61-67, 579
  - análisis preliminar, 63-66
  - asíntotas, 80-81
  - continuidad de funciones, 82-88
  - de integración, 707
  - de sucesiones, 79
  - definición rigurosa de límites cuando $x \to \pm\infty$, 78-79
  - demostraciones de límites, 63-66
  - ejemplos, 57
  - en infinito, 77-78
  - estudio riguroso de, 61-67
  - infinitos, 79-80
  - laterales, 58-59, 66-68
    - por la derecha y por la izquierda, 58
  - por la derecha, 58, 66-67
  - por la izquierda, 58
  - problemas que conducen al concepto de, 55
  - que incluyen funciones trigonométricas, 73-76
  - señales de alerta para, 57-58
  - significado intuitivo de, 57
  - significado preciso de, 61-63
  - Teorema de composición de límites, 85-86
  - Teorema de sustitución, 69-71
  - Teorema del emparedado, 72, 75
  - Teoremas de límites, 68-72
  - Teorema principal de límites:
    - aplicaciones de, 68-69
    - demostración del, 71-72
- Logaritmos comunes, 344
- L'Hôpital, Guillaume François Antoine de, 423
  - Longitud de arco, 295-298, 534, 582
    - diferencial de la, 298-299
- LORAN, 520

M

- Machin, John, 488
- Maclaurin, Colin, 489
- Magnitud, vectores, 560, 563
- Mapa de contornos, 619
- *Maple*, 3, 31, 413
  - gráficas en tres dimensiones, 618
- Masa, e integrales triples en coordenadas cartesianas, 709-710
- *Mathematica*, 3, 413
  - gráficas en tres dimensiones, 618
- Media, 317-318
- Mediana, 321
  - de una variable aleatoria continua, 322
- Memling, Hans, 440
- Memorización, 111
- Método
  - de aproximaciones sucesivas, 190
  - de bisección, 87, 190-192
  - de Euler, 360-363
  - de igualación de coeficientes, 496
  - de iteraciones, 190
  - de las arandelas, 284-285
  - de Newton, 192-194
    - para la resolución numérica de ecuaciones, 192-194
  - de Runge Kutta de cuarto orden, 363
- Mínima cota superior, 8
- Mínimos cuadrados, 170-171
- Modelación matemática, 172
- Modelos, 170
- Momento, 308
- Momento de inercia, e integrales dobles, 698-699
- Moneda, volumen de una, 281
- Monotonía, 155-156
  - y la primera derivada, 155-156
- *Movimiento*
  - circular uniforme, 582-583
  - curvilíneo, 581-582, 581-585
- Multiplicadores de Lagrange:
  - definición, 667
  - método de, 666-671
    - aplicaciones, 668-669
    - definición, 666
    - dos o más restricciones, 669-670
    - interpretación geométrica de, 666-667
    - optimización de una función en un conjunto cerrado y acotado, 670-671

N

- Napier, John, 327
- Negación, 4, 6
- *n*-ésima suma parcial, 455-456, 463
- Newton, Isaac, 66, 93, 232
- Newton-metro, 301
- Notación
  - apóstrofo (prima), 125
  - *D*, 125
  - de intervalos, 638
  - de Leibniz, 104, 125-126
  - funcional, 29
  - para antiderivadas, 638
  - para integrales de línea, 746
  - para raíces cuadradas, 13
  - sigma (Σ), 170-171, 216-217, 455
- Número(s), 159, 233
  - complejos, 2
  - irracionales, 1
  - naturales, 1
  - primo, 8
  - racionales, 1
  - reales, 1-2

O

- Operador, 107
  - con funciones, continuidad bajo, 84
  - gradiente, 638
  - lineal, 109
- Orientación de curvas, 295
- Orientada positivamente, uso del término, 735
- Origen, 2, 16, 555

P

- Pappus, 312
- Par ordenado, 16, 159
- Parábola, 26, 509-511
  - aplicaciones, 511, 520
  - definición, 510
  - ecuación canónica, 510
  - ecuación polar de, 541
  - propiedades ópticas, 511
    - aplicaciones, 520
- Paraboloide elíptico, en el espacio tridimensional, 606
- Paraboloide hiperbólico, en el espacio tridimensional, 606
- Paradoja
  - de la trompeta de Gabriel, 439-440
  - de Zenón, 462
- Paralelepípedo, 556
- Parametrización de una curva, 530
- Parámetro(s), 294, 530
  - eliminación, 530-531
- *Partición*, 224-229
  - regular, 227-229
- Pascal, Blaise 232, 304-305
- Pendiente, 18-19
  - de la recta tangente, 93, 100
- Perihelio, 542
- Periodicidad, 257
- Periodo, 43
  - de funciones trigonométricas, 43-45
- Pie-libras, 301
- Planos, 570-572
  - ecuación lineal, 571
  - euclidiano, 555
  - forma estándar para la ecuación de un plano, 570
  - osculador (osculatriz), 600
  - producto punto, 570-572
- Planos tangentes, 639, 652-656
  - aproximaciones, 654-655
  - definición, 653
  - diferenciales, 654-655
  - polinomios de Taylor para funciones de dos o más variables, 655-656
- Polinomios:
  - de Maclaurin, 497-499
  - de Taylor, 497-499, 655-656
    - de orden 1, 497-499
    - de orden *n*, 497-498
    - para funciones de dos o más variables, 655-656
- Posición, 227
  - como velocidad acumulada, 239
  - integrales definidas, 230
- Potencias, 35-36
- Precálculo, 55
- Precio, 172
- Precio marginal, 173
- Preimagen, 719
- Primera derivada, 125
  - y monotonía, 155-156
- Primer Teorema Fundamental del Cálculo, 232-240, 582, 744
  - bosquejo de la demostración, 235
  - demostración de, 237-239
  - posición como velocidad acumulada, 239
- Principio de Cavalieri, 288, 695
- Probabilidad:
  - distribución de probabilidad, 316
  - espacio muestral, 316
  - *eventos disjuntos*, 316
  - función de distribución acumulativa (FDA), 319
  - media, 317-318

  resultado aleatorio, 316
  valor esperado, 318
  variables aleatorias, 316
    continuas, 318
    discretas, 318
    esperanza de, 317
Problema(s)
  con extremos libres, 666
  con extremos restringidos, 666
  de cuerpos que caen, 128-129
  de la lata de refresco, 712-713
  de movimiento, 206-208
Producto cruz, 574-577
  aplicaciones, 576-577
  interpretación geométrica de **u** × **v**, 575
  leyes anticonmutativas, 575
  propiedades algebraicas, 577
  torca, 575
Producto punto, 566-572
  criterio de perpendicularidad, 567
  definición, 566
  planos, 570-572
  propiedades de, 567
  proyecciones, 569-570
  vectores ortogonales, 568
Productos, 35-36
  escalar. *Véase* Producto punto
  vectorial. *Véase* Producto cruz
Propiedad óptica:
  de la elipse, 519-520
  de la hipérbola, 519-520
  de la parábola, 511
Propiedad(es)
  aditiva de intervalos, 229-230
  cordales, de las cónicas, 517-519
  de acotamiento, 236
  de completez de los números reales, 454
  de comparación, 235-236
Proyecciones, 569-570
  de **u** y **v**, 570
  escalar de **u** sobre **v**, 570
  vectores de **u** sobre **v**, 570
Prueba (criterio)
  del cociente de valores absolutos, 477
  para convergencia absoluta, 476
Punto(s)
  críticos, 152, 658
  de discontinuidad no removible, 83
  de discontinuidad removible, 83
  de inflexión, 159-160
  de separación, 10
  estacionarios, 152, 658
  extremos finales, 530
  extremos iniciales, 530
  fronterizos, 633, 658
  interior, 633
  muestra, 282
  prueba, 10
  silla, 659
  singulares, 152, 658

R

Radio de giro, 699
Radio y centro de curvatura, para una curva plana, 595-596
Raíz
  cuadrada principal, 13
    notación para, 13
  funciones que incluyen, 180-181
Ramanujan, Srinivasa, 487
Rango:
  funciones, 29, 617
  y dominio, 30
Rapidez, 127, 582
Razón dorada (razón áurea), 454
Rebanada horizontal, 278
Recíproco, 4, 457
Rectángulo polar, 691
Recta(s), 18-19
  de mejor ajuste, 171
  de mínimos cuadrados que pasa por el origen, 171
  de sustitución:
    para integrales definidas, 248
    para integrales indefinidas, 246
  ecuación polar para, 540-541
  en el espacio tridimensional, 589-591
  forma pendiente intercepción en el origen, 20
  forma punto-pendiente, 20
  paralelas, 21
  pendiente de, 18-19
  perpendiculares, 21-22
  real, 2
  secante, 93
  tangentes, 93-95
    a una curva, 591
    definición, 93
    en el espacio tridimensional, 589-591
  vertical, ecuación de, 20
Regla
  de la diferencia, para derivadas, 109
  de la función constante, para derivadas, 107-108
  de la función de identidad, para derivadas, 108
  de la parábola (regla de Simpson), 265-268, 363, 413
  de la potencia, para derivadas, 108, 110, 133
  de la suma de Riemann, 363
  de la suma, para derivadas, 109, 411
  de L'Hôpital, 423-424, 451, 476
    interpretación geométrica de, 423
  de Simpson (regla de la parábola), 265-268
  del cociente, para derivadas, 112, 116, 411
  del múltiplo constante, para derivadas, 108
  del producto, para derivadas, 111-112, 116, 345, 411, 598
  del trapecio, 264, 266, 363, 417
  de la función exponencial, 343
Regla de la cadena, 118-123, 130, 132, 238, 245, 338-339, 343, 345, 411, 532, 647-651, 742
  aplicación más de una vez de la, 121-122
  aplicaciones de la, 119-121
  caso de dos variables, 648
  caso de tres variables, 649
  demostración de la, 778
  demostración parcial de la, 122-123
  derivadas, 118-123
  funciones implícitas, 650-651
  primera versión, para funciones con dos variables, 647-649
  segunda versión, para funciones de dos variables, 649-650
Representación paramétrica:
  de curvas en el plano, 530-534
    cicloide, 531-532
    parámetro, eliminación, 530-531
  definición, 49
Resolución de ecuaciones, 8
Restricción del dominio, 365
Resultado aleatorio, 316
Rosa, 543-544
Rotacional, de un campo vectorial, 733-734
Rotación de ejes, para cónica, 526-528
  determinación del ángulo θ, 527-528

S

Secante, 45-46
  inversa, 366-367
Secciones
    cónicas, 509-511
    centrales, 513
    ecuaciones polares para, 540-541
  transversales, 603
Segunda derivada, 125-126
Segunda ley de Newton, 170, 586
Segundo teorema fundamental del cálculo, 243–250, 260, 340, 413-415, 417, 704, 742, 749
  método de sustitución, 245-249
  tasa de cambio acumulada, 249-250
Segundos momentos. *Véase* Momento de inercia
Seno, 41-42
  gráficas de, 42
  propiedades básicas de, 41-42
Separación de variables, 205-206
Serie(s)
  aproximación de la suma de, 466-467
  armónica, 458
  binomial, 493-495
  cola de, 466
  condicionalmente convergente, 477-478
  convergentes
    linealidad de, 459
    propiedades de, 459-460
  de constantes, 479
  de funciones, 479
  definición, 463
  de Maclaurin, 491-492, 494-495
    definición, 489
  de Taylor:
    convergencia de, 489-493
    definición, 489
    fórmula de Taylor con residuo, 490-491
    teorema de Taylor, 491
  e integrales impropias, 464-465
  geométrica, 456-457
  p, 465-466
  telescópicas, 458
Serie alternante, 474-478
  condicionalmente alternante, 477-478
  criterio de convergencia absoluta, 476
  criterio del cociente de valor absoluto, 477
  criterio para, 475-476
  criterios de convergencia, 475-476
  Teorema de reacomodo, 478
Serie de potencias, 455, 479-482
  conjunto de convergencia, 480-481
  en x, 480
  en $x - a$, 481-482
  infinita, 448, 455-460
    agrupación de términos en, 460

  operaciones con, 484-487
    derivación término a término e integración, 484-486
    operaciones algebraicas, 486-487
    serie de potencias en $x - a$, 487
Series positivas, 468-473
  comparación de una serie con ella misma, 471-473
  comparación de una serie con otra, 469-471
  criterio de comparación de límites, 470
  criterio de la razón, 471-473
  criterio ordinario de comparación, 469-470
Signo de la integral, 199
Silla del perro, 635
Símbolo de derivada parcial, 633
Simetría, 253-258
  con respecto al eje x, 25
  con respecto al eje y, 25
  con respecto al origen, 25
  y gráficas, 542-543
Sistema
  de álgebra computacional (SAC), 24
    y calculadoras, 413-416
  de coordenadas cartesianas (rectangulares), 537
  de coordenadas cilíndricas, 609
  de mano derecha, 555
Sistema de coordenadas polares, 537-541
  área en, 547-548
  cálculo en, 547-550
  coordenadas polares, definición, 537
  ecuaciones polares, 538
    para rectas, circunferencias y cónicas, 540-541
  ejes polares, 537
  intersección de curvas en, 544
  polo (origen), 537
  relación con coordenadas cartesianas, 539-540
  tangentes en, 549-550
Sistema rectangular de coordenadas, 16-22
  coordenada x, 16
  coordenada y, 16
  coordenadas cartesianas, 16
  cuadrantes, 16
  ecuación de una circunferencia, 17-18
  ecuación de una recta vertical, 20
  eje x, 16
  eje y, 16
  ejes de coordenadas, 16
  forma $Ax + By + C = 0$, 20-21
  forma pendiente intercepción al origen, 20
  forma punto pendiente, 19-20
  fórmula de la distancia, 16-17
  fórmula del punto medio, 18
  origen, 16
  par ordenado, 16
  rectas paralelas, 21
  rectas perpendiculares, 21-22
  rectas, 18-19
Sólido de revolución, definición, 282
Sólidos con secciones transversales conocidas, 285-286
Solución general, de una ecuación diferencial, 355
Stokes, George Gabriel, 770
Sucesión
  convergente, 79, 449-454
  de Fibonacci, 454
  definición, 463
  de sumas parciales, 463
  no decreciente, 452
  monótonas, 452-453
Suma(s) , 35-36
  de Riemann, 224-225, 234, 260-264, 547, 706, 736
    del punto medio, 266
    por la derecha, 266
    por la izquierda, 266
  de una serie, 463
  parcial, 455
  parciales acotadas, 464
Superficie(s)
  cuádricas, en el espacio tridimensional, 605-607
  de nivel, 622, 644
  en el espacio tridimensional, 603-607
    cilindros, 604
    superficies cuádricas, 605-607
  equipotenciales, 644
  isoterma, 644
  parametrizada:
    área de una superficie para, 760-763
    definición, 760
Sucesiones infinitas, 79, 449
  convergencia, 449-450
  límites de sucesiones, propiedades de, 450
  sucesiones monótonas, 452-453
Sustitución (sustituciones), 411
  para racionalizar, 399-402
  trigonométricas, 412

T
Tangentes, 45-46
  en el sistema de coordenadas polares, 549-550
Tablas de integrales, 412-413
Tablas y fórmulas matemáticas estándar CRC, 412
Tasa fraccional de cambio, 354
Tasas de cambio, 97
  con respecto al tiempo, 135
  derivadas, 97
Tasas relacionadas, 135-140
  derivadas, 135-140
  ejemplos sencillos, 135-137
  problemas gráficos, 140
  procedimiento sistemático, 137-139
Taylor, Brook, 489
Teoremas, 4-5
  de concavidad, 157
  de divergencia de Gauss, 752, 764-768
    demostración de, 765
    extensiones y aplicaciones, 767-768
  de Euler, 652
  de existencia máx-mín, 151, 658
  de Green, 745, 749-753, 764
demostración de, 749-750
ejemplos y aplicaciones, 750-755
forma vectorial de, 751-753
de integrabilidad, 227, 677
de la divergencia, 764
de la función inversa, 335, 369, 532
representaciones decimales de, 3
de la monotonía, 155
de la sucesión monótona, 453, 464
de los ejes paralelos, 700
de Pappus, 312-313, 322
  de Pitágoras, 4, 16, 136, 556
    en el espacio tridimensional, 578
  de reordenamiento, 478
  de simetría, 256
  de Stokes, 745, 753, 770-772
    ejemplos y aplicaciones, 770-772
    interpretación física del rotacional, 772
  de sustitución, para límites, 69-71
  de unicidad, 489
  del emparedado, 72, 75, 451-452, 547
  del límite de una composición, 85-86
  del punto crítico, 152, 659
  del valor intermedio, 87-88
  del valor medio, 185-188
    de Cauchy, 425-426
    para derivadas, 185-188, 254, 425-426, 490-491, 638
    para integrales, 253-258
    para integrales dobles, 690
  Fundamental de la Aritmética, 8
  Fundamental del Cálculo. *Véase* Primer Teorema Fundamental del Cálculo o Segundo Teorema Fundamental del Cálculo
  fundamental para integrales de línea, 742
  fundamentales, 232
  principal de límites, 423
    aplicaciones de, 68-69
    demostración de, 71-72
Teoría de relatividad especial de Einstein, 82, 147
Tercera derivada, 125
Tiempo
  de duplicación, 349
  medición, 127
Torca, 575
Trabajo, 301-304, 738-740
Transformación, 719
Transformada de Laplace, 446
Traslaciones:
  de funciones, 37-38
  ejes, para cónicas, 523-524
Trazas, 557, 603
Triángulo fundamental, 516
Triedro, 600
  vectores en, 563
Tronco de un cono, 299

U
Último Juicio (Memling), 440
Unión, 10
Utilidad
  marginal, 173
  total, 172

V
Valor
  absoluto, 11
    como distancia, 62
    continuidad del, 84
    desigualdades que incluyen, 11-12
    propiedades del, 11
  esperado, 318
  futuro, 354
  máximo, 151
  máximo global, 162, 658
  máximo local, 162, 658
  máximo relativo (local), 162
  mínimo, 151

  - mínimo global, 658
  - mínimo local, 162, 658
  - presente, 354
  - promedio de una función, 253
- Valor extremo, 151, 152-154
  - definición, 153-154
  - global, 658
  - intervalos de ocurrencia, 152
  - local, 162-163, 658
    - donde aparece, 163-165
- Variables
  - aleatorias, 316
    - continuas, 318
    - discretas, 318
    - esperanza de, 317
    - pares de, 710-711
  - dependientes, 30, 617
  - independientes, 30, 617
- Varianza, 322
- Vecindad, 632-633
- Vector(es), 560-564
  - aplicación, 562
  - básicos (o vectores de la base), 563
  - binormal, 599-600
  - cabeza (punta), 561
  - cero (nulo), 563
  - cola, 560-561
  - componentes, 562
  - de posición, 582
  - dirección, 560
  - en dos dimensiones, 580
  - en el espacio bidimensional, 563
  - enfoque algebraico para, 562-563
  - equivalente, 561
  - escalares, 560
  - magnitud, 560, 563
  - normal unitario principal, 598
  - operaciones sobre, 561-562
  - ortogonal, 568
  - unitarios canónicos, 563
  - unitarios, 564
    - canónicos, 563
- Velocidad, 126-128, 227, 582
  - angular, 117
  - de escape, 209
  - instantánea, 93, 95-96, 100, 126
  - integrales definidas, 230
  - promedio, 95
    - derivadas y, 95
- Vértice, 510
- Volumen, 676
  - cálculo, 682-683
  - de una moneda, 281
  - sólido de revolución, 282-292
- Vida media, 350

W

- Weierstrass, Karl, 67
  - aplicación a resortes, 302-303
  - aplicaciones a bombeo de líquidos, 303-304

Créditos de las fotografías

Guardas frontales

Descartes	Frans Hals/Louvre
Newton	Biblioteca del Congreso
Leibniz	The Granger Collection, Nueva York
Euler	Biblioteca del Congreso
Kepler	Biblioteca del Congreso
Pascal	Cortesía de International Business Machines Corporation. El uso no autorizado está prohibido.
L'Höpital	The Granger Collection, Nueva York
Bernoulli	The Granger Collection, Nueva York
Lagrange	Biblioteca Pública de Nueva York
Gauss	The Granger Collection, Nueva York
Cauchy	Corbis
Riemann	The Granger Collection, New York
Lebesgue	The Granger Collection, New York
Agnesi	Biblioteca del Congreso
Weierstrass	Corbis
Kovalevsky	Biblioteca del Congreso
Gibbs	Corbis

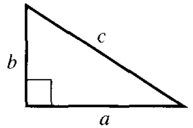
Texto

p. 219	Kennedy Space Center/NASA
p. 224	Susan Van Etten/PhotoEdit
p. 362	David Frazier/Photo Researchers, Inc.
p. 418	Scala/Art Resource, NY
p. 704	S. Rigdon

Doblar aquí

GEOMETRÍA

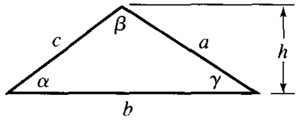
Triángulos



Triángulo rectángulo

Teorema de Pitágoras

$a^2 + b^2 = c^2$

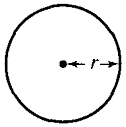


Cualquier triángulo

Ángulos $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Área $A = \frac{1}{2}bh$

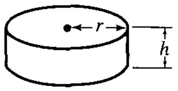
Círculos



Circunferencia $C = 2\pi r$

Área $A = \pi r^2$

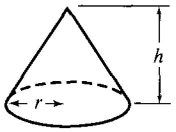
Cilindros



Área de la superficie $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

Volumen $V = \pi r^2 h$

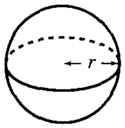
Conos



Área de la superficie $S = \pi r^2 + \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

Volumen $V = \frac{1}{3}\pi r^3$

Esferas



Área de la superficie $S = 4\pi r^2$

Volumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

CONVERSIONES

1 pulgada = 2.54 centímetros

1 kilómetro ≈ 0.62 millas

1 litro = 1000 centímetros cúbicos

1 litro ≈ 1.057 cuartos

1 kilogramo ≈ 2.20 libras

1 libra ≈ 453.6 gramos

π radianes = 180 grados

1 pie cúbico ≈ 7.48 galones

Doblar aquí

INTEGRALES

1. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$
2. $\int u^n\,d = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C, n \neq -1$
3. $\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$
4. $\int e^u\,du = e^u + c$
5. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
6. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$
7. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$
8. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$
9. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$
10. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$
11. $\int \csc \cot u\,du = -\csc u + C$
12. $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$
13. $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$
14. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$
15. $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$
16. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}}\,du = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$
17. $\int \frac{1}{a^2 + u^2}\,du = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$
18. $\int \frac{1}{a^2 - u^2}\,du = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$
19. $\int \frac{1}{u\sqrt{u^2 - a^2}}\,du = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C$

Formulario
que acompaña a

CÁLCULO, 9A EDICIÓN

Varberg, Purcell y Rigdon

DERIVADAS

$D_x x^r = rx^{r-1}$

$D_x|x| = \frac{|x|}{x}$

$D_x \operatorname{sen} x = \cos x$

$D_x \cos x = -\operatorname{sen} x$

$D_x \tan x = \sec^2 x$

$D_x \cot x = -\csc^2 x$

$D_x \sec x = \sec x \tan x$

$D_x \csc x = -\csc x \cot x$

$D_x \operatorname{senh} x = \cosh x$

$D_x \coth x = -\operatorname{csch}^2 x$

$D_x \cosh x = \operatorname{senh}^2 x$

$D_x \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$

$D_x \tanh x = \operatorname{sech}^2 x$

$D_x \operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x$

$D_x \ln x = \frac{1}{x}$

$D_x \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$

$D_x e^x = e^x$

$D_x a^x = a^x \ln a$

$D_x \operatorname{sen}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$D_x \cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$D_x \tan^{-1} x = \frac{1}{1 + x^2}$

$D_x \sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$

Identidades básicas

$\tan t = \dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$ $\cot t = \dfrac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$ $\cot t = \dfrac{1}{\tan t}$

$\sec t = \dfrac{1}{\cos t}$ $\operatorname{cst} = \dfrac{1}{\operatorname{sen} t}$ $\operatorname{sen}^2 t + cos^2 t = 1$

$1 + \tan^2 t = \sec^2 t$ $1 + \cot^2 t = \csc^2 t$

Identidades de cofunción

$\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$ $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{sen} t$ $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \cot t$

Identidades impar-par

$\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$ $\cos(-t) = \cos t$ $\tan(-t) = -\tan t$

Fórmulas para la suma

$\operatorname{sen}(s + t) = \operatorname{sen} s \cos t + \cos s \operatorname{sen} t$ $\operatorname{sen}(s - t) = \operatorname{sen} \cos t - \cos s \operatorname{sen} t$

$\cos(s + t) = \cos s \cos t - \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$ $\cos(s - t) = \cos s \cos t + \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$

$\tan(s + t) = \dfrac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \tan t}$ $\tan(s - t) = \dfrac{\tan s - \tan t}{1 + \tan s \tan t}$

Fórmulas para el doble de un ángulo

$\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t$ $\tan 2t = \dfrac{2 \tan t}{1 - \tan^2 t}$

$\cos 2t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 t = 2 \cos^2 t - 1$

Fórmula para la mitad de un ángulo

$\operatorname{sen} \dfrac{t}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos t}{2}}$ $\cos \dfrac{t}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos t}{2}}$ $\tan \dfrac{t}{2} = \dfrac{1 - \cos t}{\operatorname{sen} t}$

Fórmula para el producto

$2 \operatorname{sen} s \cos t = \operatorname{sen}(s + t) + \operatorname{sen}(s - t)$ $2 \cos s \cos t = \cos(s + t) + \cos(s - t)$

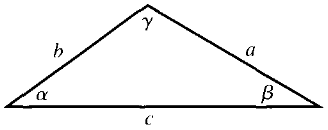
$2 \cos s \operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(s + t) - \operatorname{sen}(s - t)$ $2 \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t = \cos(s - t) - \cos(s + t)$

Fórmulas de factorización

$\operatorname{sen} s + \operatorname{sen} t = 2 \cos \dfrac{s - t}{2} \operatorname{sen} \dfrac{s + t}{2}$ $\cos s + \cos t = 2 \cos \dfrac{s + t}{2} \cos \dfrac{s - t}{2}$

$\operatorname{sen} s - \operatorname{sen} t = 2 \cos \dfrac{s + t}{2} \operatorname{sen} \dfrac{s - t}{2}$ $\cos s - \cos t = -2 \operatorname{sen} \dfrac{s + t}{2} \operatorname{sen} \dfrac{s - t}{2}$

Leyes de los senos y de los cosenos

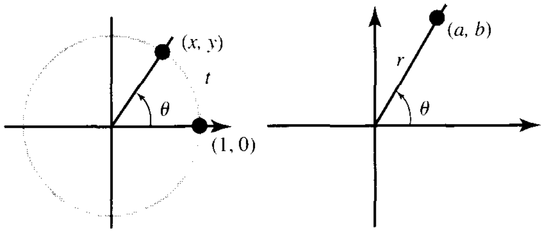


$\dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} \beta}{b} = \dfrac{\operatorname{sen} \gamma}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

Doblar
aquí

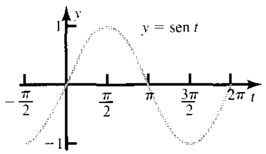
TRIGONOMETRÍA

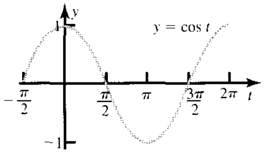


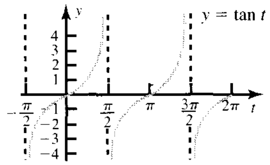
$\operatorname{sen} t = \operatorname{sen} \theta = y = \dfrac{b}{r}$ $\cos t = \cos \theta = x = \dfrac{a}{r}$

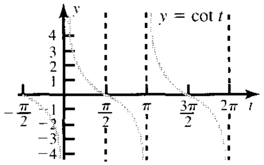
$\tan t = \tan \theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{b}{a}$ $\cot t = \cot \theta = \dfrac{x}{y} = \dfrac{a}{b}$

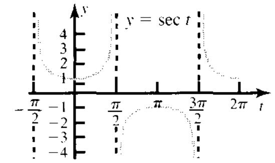
Gráficas

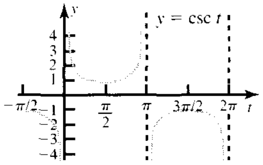












Doblar
aquí

Funciones trigonométricas inversas

$y = \operatorname{sen}^{-1} x \Leftrightarrow x = \operatorname{sen} y, -\pi/2 \leq y \leq \pi/2$

$y = \cos^{-1} x \Leftrightarrow x = \cos y, 0 \leq y \leq \pi$

$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow x = \tan y, -\pi/2 < y < \pi/2$

$y = \sec^{-1} x \Leftrightarrow x = \sec y, 0 \leq y \leq \pi, y \neq \pi/2$

$\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x)$

Funciones hiperbólicas

$\operatorname{senh} x = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ $\cosh x = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

$\tanh x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$ $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{sen} x}$

$\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$ $\operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x}$

Series

$\dfrac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, -1 < x < 1$

$\ln(1 + x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots, -1 < x \leq 1$

$\tan^{-1} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots, -1 \leq x \leq 1$

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$

$\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots$

$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$

$\operatorname{senh} x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + \cdots$

$\cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$

$(1 + x)^p = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 + \cdots, -1 < x < 1$

$\binom{p}{k} = \dfrac{p(p - 1)(p - 2)\cdots(p - k + 1)}{k!}$

Tabla de integrales

FORMAS ELEMENTALES

1 $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

2 $\int u^n\,du = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C$ si $n \neq -1$

3 $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

4 $\int e^u\,du = e^u + C$

5 $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

6 $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

7 $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

8 $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$

9 $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

10 $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$

11 $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$

12 $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$

13 $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

14 $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

15 $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$

16 $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

17 $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$

18 $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u + a}{u - a}\right| + C$

19 $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C$

FORMAS TRIGONOMÉTRICAS

20 $\int \operatorname{sen}^2 u\,du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

21 $\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

22 $\int \tan^2 u\,du = \tan u - u + C$

23 $\int \cot^2 u\,du = -\cot u - u + C$

24 $\int \operatorname{sen}^3 u\,du = -\frac{1}{3}(2 + \operatorname{sen}^2 u)\cos u + C$

25 $\int \cos^3 u\,du = \frac{1}{3}(2 + \cos^2 u)\operatorname{sen} u + C$

26 $\int \tan^3 u\,du = \frac{1}{2}\tan^2 u + \ln|\cos u| + C$

27 $\int \cot^3 u\,du = -\frac{1}{2}\cot^2 u - \ln|\operatorname{sen} u| + C$

28 $\int \sec^3 u\,du = \frac{1}{2}\sec u \tan u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C$

29 $\int \csc^3 u\,du = -\frac{1}{2}\csc u \cot u + \frac{1}{2}\ln|\csc u - \cot u| + C$

30 $\int \operatorname{sen} au \operatorname{sen} bu\,du = \frac{\operatorname{sen}(a - b)u}{2(a - b)} - \frac{\operatorname{sen}(a + b)u}{2(a + b)} + C$ si $a^2 \neq b^2$

31 $\int \cos au \cos bu\,du = \frac{\operatorname{sen}(a - b)u}{2(a - b)} + \frac{\operatorname{sen}(a + b)u}{2(a + b)} + C$ si $a^2 \neq b^2$

32 $\int \operatorname{sen} au \cos bu\,du = -\frac{\cos(a - b)u}{2(a - b)} - \frac{\cos(a + b)u}{2(a + b)} + C$ si $a^2 \neq b^2$

33 $\int \operatorname{sen}^n u\,du = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\,du$

34 $\int \cos^n u\,du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u \operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\,du$

35 $\int \tan^n u\,du = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u\,du$ si $n \neq 1$

36 $\int \cot^n u\,du = \frac{-1}{n-1}\cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u\,du$ si $n \neq 1$

37 $\int \sec^n u\,du = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} u \tan u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\,du$ si $n \neq 1$

38 $\int \csc^n u\,du = \frac{-1}{n-1}\csc^{n-2} u \cot u + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} u\,du$ si $n \neq 1$

39a $\int \operatorname{sen}^n u \cos^m u\,du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u \cos^{m+1} u}{n + m} + \frac{n-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^{n-2} u \cos^m u\,du$ si $n \neq -m$

39b $\int \operatorname{sen}^n u \cos^m u\,du = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} u \cos^{m-1} u}{n + m} + \frac{m-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^n u \cos^{m-2} u\,du$ si $m \neq -n$

40 $\int u \operatorname{sen} u\,du = \operatorname{sen} u - u \cos u + C$

41 $\int u \cos u\,du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$

42 $\int u^n \operatorname{sen} u\,du = -u^n \cos u + n\int u^{n-1} \cos u\,du$

43 $\int u^n \cos u\,du = u^n \operatorname{sen} u - n\int u^{n-1} \operatorname{sen} u\,du$

FORMAS QUE INCLUYEN $\sqrt{u^2 \pm a^2}$

44 $\displaystyle\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$

45 $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$

46 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{u}\,du = \sqrt{u^2 + a^2} - a\ln\left(\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right) + C$

47 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u}\,du = \sqrt{u^2 - a^2} - a\sec^{-1}\frac{u}{a} + C$

48 $\displaystyle\int u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2 \pm a^2)\sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8}\ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$

49 $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \mp \frac{a^2}{2}\ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$

50 $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \mp\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{a^2 u} + C$

51 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} + \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$

52 $\displaystyle\int \frac{du}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{\pm u}{a^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} + C$

53 $\displaystyle\int (u^2 \pm a^2)^{3/2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2 \pm 5a^2)\sqrt{u^2 \pm a^2} + \frac{3a^4}{8}\ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$

FORMAS QUE INCLUYEN $\sqrt{a^2 - u^2}$

54 $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

55 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2 - u^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

56 $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

57 $\displaystyle\int u^2\sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2 - a^2)\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

58 $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a^2 u} + C$

59 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

60 $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

61 $\displaystyle\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2 - u^2}} + C$

62 $\displaystyle\int (a^2 - u^2)^{3/2}\,du = \frac{u}{8}(5a^2 - 2u^2)\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{3a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

FORMAS EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

63 $\displaystyle\int ue^u\,du = (u - 1)e^u + C$

64 $\displaystyle\int u^n e^u\,du = u^n e^u - n\int u^{n-1}e^u du$

65 $\displaystyle\int \ln u\,du = u\ln u - u + C$

66 $\displaystyle\int u^n \ln u\,du = \frac{u^{n+1}}{n + 1}\ln u - \frac{u^{n+1}}{(n + 1)^2} + C$

67 $\displaystyle\int e^{au}\operatorname{sen} bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2}(a\operatorname{sen} bu - b\cos bu) + C$

68 $\displaystyle\int e^{au}\cos bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2}(a\cos bu + b\operatorname{sen} bu) + C$

FORMAS TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

69 $\displaystyle\int \operatorname{sen}^{-1} u\,du = u\operatorname{sen}^{-1} u + \sqrt{1 - u^2} + C$

70 $\displaystyle\int \tan^{-1} u\,du = u\tan^{-1} u - \frac{1}{2}\ln(1 + u^2) + C$

71 $\displaystyle\int \sec^{-1} u\,du = u\sec^{-1} u - \ln|u + \sqrt{u^2 - 1}| + C$

72 $\displaystyle\int u\operatorname{sen}^{-1} u\,du = \frac{1}{4}(2u^2 - 1)\operatorname{sen}^{-1} u + \frac{u}{4}\sqrt{1 - u^2} + C$

73 $\displaystyle\int u\tan^{-1} u\,du = \frac{1}{2}(u^2 + 1)\tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C$

74 $\displaystyle\int u\sec^{-1} u\,du = \frac{u^2}{2}\sec^{-1} u - \frac{1}{2}\sqrt{u^2 - 1} + C$

75 $\displaystyle\int u^n\operatorname{sen}^{-1} u\,du = \frac{u^{n+1}}{n + 1}\operatorname{sen}^{-1} u - \frac{1}{n + 1}\int \frac{u^{n+1}}{\sqrt{1 - u^2}}\,du \quad \text{si } n \neq -1$

76 $\displaystyle\int u^n\tan^{-1} u\,du = \frac{u^{n+1}}{n + 1}\tan^{-1} u - \frac{1}{n + 1}\int \frac{u^{n+1}}{1 + u^2}\,du \quad \text{si } n \neq -1$

77 $\displaystyle\int u^n\sec^{-1} u\,du = \frac{u^{n+1}}{n + 1}\sec^{-1} u - \frac{1}{n + 1}\int \frac{u^n}{\sqrt{u^2 - 1}}\,du \quad \text{si } n \neq -1$

FORMAS HIPERBÓLICAS

78 $\int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C$

79 $\int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C$

80 $\int \tanh u\, du = \ln(\cosh u) + C$

81 $\int \coth u\, du = \ln|\operatorname{senh} u| + C$

82 $\int \operatorname{sech} u\, du = \tan^{-1}|\operatorname{senh} u| + C$

83 $\int \operatorname{csch} u\, du = \ln\left|\tanh \frac{u}{2}\right| + C$

84 $\int \operatorname{senh}^2 u\, du = \frac{1}{4}\operatorname{senh} 2u - \frac{u}{2} + C$

85 $\int \cosh^2 u\, du = \frac{1}{4}\operatorname{senh} 2u + \frac{u}{2} + C$

86 $\int \tanh^2 u\, du = u - \tanh u + C$

87 $\int \coth^2 u\, du = u - \coth u + C$

88 $\int \operatorname{sech}^2 u\, du = \tanh u + C$

89 $\int \operatorname{csch}^2 u\, du = -\coth u + C$

90 $\int \operatorname{sech} u \tanh u\, du = -\operatorname{sech} u + C$

91 $\int csc\, u \coth u\, du = -\operatorname{csch} u + C$

FORMAS ALGEBRAICAS DIVERSAS

92. $\int u(au + b)^{-1}\, du = \frac{u}{a} - \frac{b}{a^2}\ln|au + b| + C$

93 $\int u(au + b)^{-2}\, du = \frac{1}{a^2}\left[\ln\triangle|au + b| + \frac{b}{au + b}\right] + C$

94 $\int u(au + b)^n\, du = \frac{u(au + b)^{n+1}}{a(n + 1)} - \frac{(au + b)^{n+2}}{a^2(n + 1)(n + 2)} + C$ si $n \neq -1, -2$

95 $\int \frac{du}{(a^2 \pm u^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n - 1)}\left(\frac{u}{(a^2 \pm u^2)^{n-1}} + (2n - 3)\int \frac{du}{(a^2 \pm u^2)^{n-1}}\right)$ si $n \neq 1$

96 $\int u\sqrt{au + b}\, du = \frac{2}{15a^2}(3au - 2b)(au + b)^{3/2} + C$

97 $\int u^n\sqrt{au + b}\, du = \frac{2}{a(2n + 3)}\left(u^n(au + b)^{3/2} - nb\int u^{n-1}\sqrt{au + b}\, du\right)$

98 $\int \frac{u\, du}{\sqrt{au + b}} = \frac{2}{3a^2}(au - 2b)\sqrt{au + b} + C$

99 $\int \frac{u^n\, du}{\sqrt{au + b}} = \frac{2}{a(2n + 1)}\left(u^n\sqrt{au + b} - nb\int \frac{u^{n-1}\, du}{\sqrt{au + b}}\right)$

100a $\int \frac{du}{u\sqrt{au + b}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\frac{\sqrt{au + b} - \sqrt{b}}{\sqrt{au + b} + \sqrt{b}}\right| + C$ si $b > 0$

100b $\int \frac{du}{u\sqrt{au + b}} = \frac{2}{\sqrt{-b}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{au + b}{-b}} + C$ si $b < 0$

101 $\int \frac{du}{u^n\sqrt{au + b}} = -\frac{\sqrt{au + b}}{b(n - 1)u^{n-1}} - \frac{(2n - 3)a}{(2n - 2)b}\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{au + b}}$ si $n \neq 1$

102 $\int \sqrt{2au - u^2}\, du = \frac{u - a}{2}\sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u - a}{a} + C$

103 $\int \frac{du}{u\sqrt{2au - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u - a}{a} + C$

104 $\int u^n\sqrt{2au - u^2}\, du = -\frac{u^{n-1}(2au - u^2)^{3/2}}{n + 2} + \frac{(2n + 1)a}{n + 2}\int u^{n-1}\sqrt{2au - u^2}\, du$

105 $\int \frac{u^n\, du}{\sqrt{2au - ug^2}} = -\frac{u^{n-1}}{n}\sqrt{2au - u^2} + \frac{(2n - 1)a}{n}\int \frac{u^{n-1}\, du}{\sqrt{2au - u^2}}$

106 $\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u}\, du = \sqrt{2au - u^2} + a\operatorname{sen}^{-1}\frac{u - a}{a} + C$

107 $\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^n}\, du = \frac{(2au - u^2)^{3/2}}{(3 - 2n)au^n} + \frac{n - 3}{(2n - 3)a}\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^{n-1}}\, du$

108 $\int \frac{du}{u^n\sqrt{2au - u^2}} = \frac{\sqrt{2au - u^2}}{a(1 - 2n)u^n} + \frac{n - 1}{(2n - 1)a}\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{2au - u^2}}$

109 $\int (\sqrt{2au - u^2})^n\, du = \frac{u - a}{n + 1}(2au - u^2)^{n/2} + \frac{na^2}{n + 1}\int (\sqrt{2au - u^2})^{n-2}\, du$

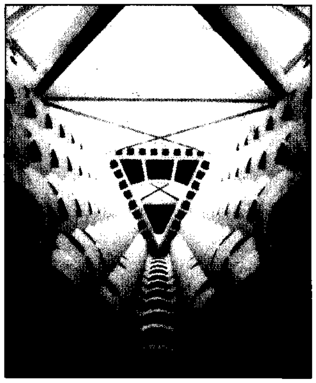
110 $\int \frac{du}{(\sqrt{2au - u^2})^n} = \frac{u - a}{(n - 2)a^2}(\sqrt{2au - u^2})^{2-n} + \frac{n - 3}{(n - 2)a^2}\int \frac{du}{(\sqrt{2au - u^2})^{n-2}}$

INTEGRALES DEFINIDAS

111 $\int_0^{\infty} u^n e^{-u}\, du = \Gamma(n + 1) = n! \quad (n \geq 0)$

112 $\int_0^{\infty} e^{-au^2}\, du = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0)$

113
$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n u\, du = \int_0^{\pi/2} \cos^n u\, du = \begin{cases} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot n}\dfrac{\pi}{2} & \text{si } n \text{ es un entero par y } n \geq 2 \\ \dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (n - 1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot n} & \text{si } n \text{ es un entero impar y } n \geq 3 \end{cases}$$



Esta novena edición de *Cálculo* conserva el espíritu que la ha distinguido como una de las obras más breves y exitosas de los principales textos de esta disciplina.

El objetivo fundamental de la obra es mantener la comprensión de los conceptos de cálculo mediante definiciones expuestas con nitidez. Además, destaca la importancia de la resolución de problemas como un factor crucial para el desarrollo de habilidades matemáticas y aporta una visión complementaria entre la exposición y la demostración de los teoremas.

Aspectos relevantes:

- Se ha incrementado de manera significativa el número de preguntas acerca de los conceptos presentados.
- Incluye secciones clave denominadas *Problemas de revisión de conceptos*, que ayudarán a reforzar los conocimientos recién adquiridos de los estudiantes antes de pasar a temas más avanzados.
- A lo largo de la obra se indica mediante iconos el uso de tecnología para la solución de problemas.
- El sentido numérico desempeña un papel importante en este texto. Se enfatiza el proceso de estimación al sugerir formas de hacer operaciones mentalmente para llegar a las respuestas numéricas aproximadas.
- Contiene una serie de proyectos de tecnología disponibles en la página Web para profesores y alumnos en:

  www.pearsoneducacion.net/purcell

ISBN 970-26-0919-4
90000
9 789702 609193

PEARSON
Educación ®

Visítenos en:
www.pearsoneducacion.net